Подвариант №1.

Методы Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности для численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений) первого порядка.

Постановка задачи:

Рассматривается ОДУ первого порядка, разрешенное относительно производной и имеющее вид:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \;\; x_0 < x \tag{1}$$

с дополнительным начальным условием, заданным в точке:

$$x = x_0 : \;\; y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

Предполагается, что правая часть уравнения (1) функция $f(x, y)$ такова, что гарантирует существование и единственность решения задачи Коши (1)-(2).

В том случае, если рассматривается не одно дифференциальное уравнение вида (1), а система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных неизвестных функций, то соответствующая задача Коши имеет вид (на примере двух дифференциальных уравнений):

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}, \;\; x_0 < x \tag{3}$$

Дополнительные начальные условия задаются в точке $x = x_0$:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)} \tag{4}$$

Также предполагается, что правые части уравнений из (3) заданы так, что это гарантирует существование и единственность решения задачи Коши (3)-(4), но уже для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в форме, разрешенной относительно производных неизвестных функций. Заметим, что к подобным задачам сводятся многие важные задачи, возникающие в механике (уравнения движения материальной точки), небесной механике, химической кинетике, гидродинамике и т.п.

Цели и задачи практической работы:

1) Решить задачу Коши (1)-(2) (или (3)-(4)) наиболее известными и широко используемыми на практике методами Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, аппроксимировав дифференциальную задачу соответствующей разностной схемой (на равномерной сетке); полученное конечно-разностное уравнение (или уравнения в случае системы), представляющее фактически некоторую рекуррентную формулу, просчитать численно;
2) Найти численное решение задачи и построить его график;
3) Найденное численное решение сравнить с точным решением дифференциального уравнения (подобрать специальные тесты, где аналитические решения находятся в классе элементарных функций, при проверке можно использовать ресурсы on-line системы http://www.wolframalpha.com или пакета Mapie и т.п.).

Описание методов решения

1)Метод Рунге-Кутты второго порядка точности

Даны: функция f и (x_0, y_0). Требуется найти аппроксимацию решения задачи Коши (1)(2). Выберем число отрезков разбиения n (чем больше, тем выше точность). Пусть требуется найти решение на отрезке $[a, b], a = x_0$. Тогда длина одного отрезка разбиения $h = (b - a)/n$. Аппроксимация состоит из приближённых значений $y(x_i),\ i = \overline{0, n}$. Они находятся с помощью рекуррентной формулы:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} * k_1\right)$$
$$y_{i+1} = y_i + h * k_2$$

Для системы (3)(4):

$$k_1 = f_1\left(x_i, y_1^{(i)}, z_i\right) \qquad l_1 = f_2\left(x_i, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}\right)$$
$$k_2 = f_1\left(x_{i+1}, y_1^{(i)} + hk_1, z_i + hl_1\right) \qquad l_2 = f_2\left(x_{i+1}, y_1^{(i)} + hk_1, y_2^{(i)} + hl_i\right)$$
$$y_1^{(i+1)} = y_1^{(i)} + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \qquad y_2^{(i+1)} = y_2^{(i)} + \frac{h}{2}(l_1 + l_2)$$

Можно доказать («Вводные лекции по численным методам», стр. 162), что погрешность решения зависит от h как $O(h^2)$ при условии, что f (f_1, f_2) имеет непрерывные вторые частные производные.

2)Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка точности

Производит вычисления с более высокой точностью $O(h^4)$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Для системы (3)(4):

$$k_1 = f_1\left(x_i, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}\right) \qquad l_1 = f_2\left(x_i, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}\right)$$
$$k_2 = f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_1^{(i)} + \frac{h}{2}k_1, y_2^{(i)} + \frac{h}{2}l_1\right) \qquad l_2 = f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_1^{(i)} + \frac{h}{2}k_1, y_2^{(i)} + \frac{h}{2}l_1\right)$$
$$k_3 = f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_1^{(i)} + \frac{h}{2}k_2, y_2^{(i)} + \frac{h}{2}l_2\right) \qquad l_3 = f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_1^{(i)} + \frac{h}{2}k_2, y_2^{(i)} + \frac{h}{2}l_2\right)$$
$$k_4 = f_1\left(x_i + h, y_1^{(i)} + hk_3, y_2^{(i)} + hl_3\right) \qquad l_4 = f_2\left(x_i + h, y_1^{(i)} + hk_3, y_2^{(i)} + hl_3\right)$$
$$y_1^{(i+1)} = y_1^{(i)} + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad y_2^{(i+1)} = y_2^{(i)} + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$