<u>Подвариант №2.</u>

Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка, разрешенного относительно старшей производной.

Постановка задачи:

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$y'' + p(x) * y' + q(x) * y = -r(x),\ 0 < x < 1 \qquad (1)$$

с дополнительными условиями в граничных точках:

$$\begin{cases} \sigma_1 * y(0) + \gamma_1 * y'(0) = \ \delta_1, \\ \sigma_2 * y(0) + \gamma_2 * y'(0) = \ \delta_2, \end{cases} (2)$$

Задачи практической работы

1) Решить краевую задачу (1)-(2) методом конечных разностей, аппроксимировав её разностной схемой второго порядка точности (на равномерной сетке); полученную систему конечно-разностных уравнений решить методом прогонки.
2) Найти разностное решение задачи и построить её график.
3) Найденное решение сравнить с точным решением дифференциального уравнениям (подобрать специальные тесты, где аналитические решения находятся в классе элементарных функций, при проверке можно использовать ресурсы on-line системы http://www.wolfra malpha.com или пакета Mapie и т.п.).

Описание метода:

Перейдем от исходного уравнения к разностному:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = \ -r(x_i)$$

Приведем уравнение к трехдиагональному виду (выразим y):

$$a_i y_{i-1} - b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i$$

где:

$$a_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h}, b_i = \frac{2}{h^2} - \ q(x_i), c_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h}, d_i = r_i$$

Получившуюся СЛАУ удобно решить методом прогонки (т.к. матрица системы - трехдиагональная). Для начала требуется определить прогоночные коэффициенты (это прямой ход метода):

$$\alpha_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i\alpha_i},$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\beta_i a_i - d_i}{b_i - a_i\alpha_i},$$

Начальные значения определяются, исходя из краевых условий:

$$\alpha_1 = \frac{-\gamma_1}{\sigma_1 h - \gamma_1}$$

$$\beta_1 = \frac{\delta_1 h}{\sigma_1 h - \gamma_1}$$

После вычисления всех коэффициентов необходимо произвести обратный ход, т.е. по ним вычислить значения $y_{j-1}, j = \overline{n, 2}$, значение y_nопределяем исходя из начальных условий:

$$y_n = \frac{\gamma_2\beta_n + \delta_2 h}{\gamma_2(1 - \alpha_n) + \sigma_2 h}$$

Формула для вычисления y_{j-1}:

$$y_{j-1} = y_j\alpha_j + \beta_j, j = \overline{n, 2}$$