Практическая работа № 2 (1)

Подвариант № 1

Решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка или системы дифференциальных уравнений первого порядка

# Цель работы

Освоить методы Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, применяемые для численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений) первого порядка.

# Постановка задачи

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной и имеющее вид:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1) |

с дополнительным начальным условием, заданным в точке :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2) |

Предполагается, что правая часть уравнения (1) функция такова, что гарантирует существование и единственность решения задачи Коши (1)-(2).

В том случае, если рассматривается не одно дифференциальное уравнение вида (1), а система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных неизвестных функций, то соответствующая задача Коши имеет вид (на примере двух дифференциальных уравнений):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3) |

Дополнительные начальные условия задаются в точке :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4) |

Также предполагается, что правые части уравнений из (3) заданы так, что это гарантирует существование и единственность решения задачи Коши (3)-(4), но уже для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в форме, разрешенной относительно производных неизвестных функций. Заметим, что к подобным задачам сводятся многие важные задачи, возникающие в механике (уравнения движения материальной точки), небесной механике, химической кинетике, гидродинамике и т.п.

# Цели и задачи

1. Решить задачу Коши (1)-(2) (или (3)-(4)) наиболее известными и широко используемыми на практике методами Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, аппроксимировав дифференциальную задачу соответствующей разностной схемой (на равномерной сетке); полученное конечно-разностное уравнение (или уравнения в случае системы), представляющее фактически некоторую рекуррентную формулу, просчитать численно;
2. Найти численное решение задачи и построить его график;
3. Найденное численное решение сравнить с точным решением дифференциального уравнения (подобрать специальные тесты, где аналитические решения находятся в классе элементарных функций, при проверке можно использовать ресурсы on-Iine системы http://www.wolframalpha.com или пакета Марiе и т.п.).

# Использованные методы

## Метод Рунге-Кутты второго порядка точности

Даны функция . Требуется найти аппроксимацию решения задачи Коши (1)(2). Выберем число отрезков разбиения n (чем больше, тем выше точность). Пусть требуется найти решение на отрезке . Тогда длина одного отрезка . Аппроксимация состоит из приближённых значений . Они находятся с помощью рекуррентной формулы:

Для системы (3)(4):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Можно доказать («Вводные лекции по численным методам», стр. 162), что погрешность решения зависит от как при условии, что () имеет непрерывные вторые частные производные.

## Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка точности

Итерационная формула:

Для системы (3)(4):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

# Тестирование

## Запуск программы

1. Поместите проект на машину под управлением OS Linux. На машине должен быть установлен компилятор GCC.
2. Сделайте ls в папку с проектом.
3. Скомпилируйте проект: make
4. Перейдите в папку ./bin
5. Запустите программы для тестирования методов Рунге-Кутты для ур-й и систем:  
   ./runge\_kutta  
   ./runge\_kutta\_system
6. Программы выведут погрешности для тестов, приведённые в таблицах ниже.
7. В той же папке (./bin) появятся файлы вида с префиксами runge-kutta-2, runge-kutta-4, runge-kutta2-system, runge-kutta4-system. Они описывают решения задач Коши (тестов 1-5) в виде набора точек графика.
8. При желании можно построить визуальные графики с помощью утилиты gnuplot. Команды gnuplot для ур-й и систем приведены ниже.

set style line 1 lc rgb '#0060ad' lt 1 lw 2 pt 7 ps 1.5

plot 'имя файла' with linespoints ls 1

set style line 1 lc rgb '#0060ad' lt 1 lw 2 pt 7 ps 1.5

set style line 2 lc rgb '#dd181f' lt 1 lw 2 pt 5 ps 1.5

plot 'plotting-data3.dat' index 0 with linespoints ls 1, \

'' index 1 with linespoints ls 2

## Одиночные ОДУ первого порядка

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | Точное решение, | Погрешность (1) | Погрешность (2) |
|  |  | 0 | 10 |  | 0.52848224 | 0.02848224 |
|  |  | 0 | 100 |  | 0.00264617 | 0.00000133 |
|  |  | 0 | 1000 |  | 0.00002471 | 0.00000000 |
|  |  | 10 | 100 |  | 0.00686607 | 0.00000346 |
|  |  | 10 | 100 |  | 0.00525304 | 0.00000270 |

## Системы ОДУ первого порядка

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | Погрешность (1) | Погрешность (2) |
|  |  |  | 0 | 0 | 100 | 8.41272709 | 0.00269470 |
|  |  |  | 0 | 0 | 1000 | 0.09108614 | 0.00000030 |
|  |  |  | 0 | 0 | 3000 | 0.01017260 | 0.00000000 |
|  |  |  | 1 | 0.25 | 100 | N/A | N/A |
|  |  |  | 1 | 1 | 100 | N/A | N/A |

В таблицах (1) – метод Рунге-Кутты второго, (2) - четвёртого порядка точности.

Погрешность не подсчитывалась для трёх последних тестов с системами ОДУ, т.к. для них решения в классе элементарных функций не существует.

# Выводы

В ходе практической работы были реализованы метод Рунге-Кутты второго и четвёртого порядков точности, применительно как к «простым» ОДУ первого порядка, разрешённым относительно производной, так и к соответствующим системам.

Тестирование показало, что метод Рунге-Кутты четвёртого порядка точности действительно намного более точный, чем метод второго порядка точности. В то время, как второму хватает 100 итераций для получения приемлемого результата, первому требуется порядка 10000 итераций.

В применении к системам из двух ОДУ первого порядка, метод Рунге-Кутты четвёртого порядка показывает ещё большее преимущество.