UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA/JI-PARANÁ
Disciplina: ANÁLISE REAL

TIPOS DE DEMOSTRAÇÕES E APLICAÇÃO À TEORIA DOS CONJUNTOS

Bibliografia:
• Ávila, G., Ánálise matemática para licenciatura, Ed. Edgard, 2006.
• Poole, David, Álgebra linear, Thomson, 2004.
• Filho, Daniel C., Um convite à matemática, SBM, 2016.
• Lages, Elon, Curso de análise,vol.1 Projeto euclides.

1. ALGUMAS ANOTAÇÕES SOBRE CONJUNTOS.

Conjunto: Um conjunto é uma coleção de objetos, chamados elementos ou membros. Usamos letras maiúsculas A, B, R, ... para denotarmos conjuntos e letras minúsculas para denotarmos os elementos do conjunto. Seja A um conjunto e x um elemento, então se x pertencer a A, denotamos por $x \in A$, caso contrário $x \notin A$.
Podemos descrever um conjunto por meio de uma propriedade P de seus elementos e escrevemos do seguinte modo: $A = \{x|x$ tem a propriedade P$\}$ (lemos A é o conjunto dos elementos x tal que x satisfaz a propriedade P).
Exemplo: $A = \{x \in \mathbb{R}|x$ é divisível por $2\}$. Exemplo: O produto cartesinao dos conjuntos A e B, $A \times B = \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$ é um conjunto. Os elementos desse conjunto são ditos pares ordenados.
Subconjunto: Um conjunto A é subconjunto de B se, e somente se, todo elemento de A for elemento de B e denotamos isso por $A \subset B$. Em símbolo temos $A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$.
Dizemos que A é um subconjunto próprio de B se $A \subset B$ mas $A \neq B$, ou seja, existe algum elemento de B que não está em A.
Conjunto vazio Chamamos de conjunto vazio aquele que não possui elemento algum. Usamos o símbolo $\emptyset$ para representá-lo. Obtemos um conjunto vazio quando descrevemos um conjunto por uma propriedade P logicamente falsa. Exemplo: $1)\{x|x \neq x\} = \emptyset$, $2)\{x|x$ é impar e múltiplo de $2\} = \emptyset$. Podemos definir o conjunto vazio $\emptyset$ assim: qualquer que seja x, tem-se que $x \notin \emptyset$ ou $A = \emptyset \Leftrightarrow x \notin A$ para todo $x \in E$ onde E é o conjunto universo (ou seja o conjunto que contém todos os conjuntos que ocorrem numa certa discussão).
Conjuntos iguais: $A = B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$ ou $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$.
Conjunto das partes: Dado um conjunto A, chama-se conjunto das partes de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, aquele que é formado por todos os subconjuntos de A. Em símbolo: $\mathcal{P}(A) = \{X|X \subset A\}$. Exemplo: Considere $A = \{a,b\}$, então $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
Observação: Dado um conjunto A. Então, $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A$ (lê-se x pertence a A se, e somente se, o conjunto unitário formado por x é subconjunto de A.)
Dados A e B conjuntos. Definimos:
Conjunto união e conjunto interseção: Definimos o conjunto A união B, $A \cup B$, como sendo $A \cup B = \{x|x \in A \ ou \ x \in B\}$. Definimos o conjunto A interseção B, $A \cap B$, como sendo $A \cap B = \{x|x \in A \ e \ x \in B\}$.
Conjunto diferença: Chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B. Em símbolo, $A - B = \{x|x \in A \ e \ x \notin B\}$.
Conjunto complementar de B em A: Chama-se complementar de B em relação a A o conjunto $A - B$, ou seja, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B. Em símbolo, $\complement_A B$ ou $\overline{B}$. Exemplo: Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Quem é $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\complement_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}$?[1pc]
Observação: Seja E o conjunto universo e A um subconjunto. Podemos escrever o complementar de A

em E ou simplesmente o complementar de A na linguagem de conjuntos da seguinte maneira:

$$\complement A = \{x | x \in E \ e \ x \notin A\}.$$

Função: Sejam A e B conjuntos. Definimos uma função $f : A \to B$ como sendo uma regra que associa todo elemento de A a um único elemento de B. Chamamos A de domínio da função f, B é dito contra-domínio de f. O conjunto imagem de f, $Im(f)$, é $Im(f) = \{y \in B | y = f(x)$, para algum x em $A\}$.
Dado um subconjunto X de A, $X \subset A$, definimos o subconjunto $f(x)$ de B como

$$f(X) = \{f(x) | x \in X\} = \{y \in B | y = f(x), x \in X\}.$$

Dado um subconjunto Y de B, $Y \subset B$, definimos a imagem inversa de Y pela função f como sendo

$$f^{-1}(Y) = x \in A | f(x) \in Y.$$

Diagramas

2. TIPOS DE DEMONSTRAÇÕES

Existem, resumidamente falando, dois tipos de demonstrações em matemática: as demonstrações diretas e demonstrações indiretas. Muitos teoremas tem a estrutura "se P, então Q", onde P e Q são afirmações falsas ou verdadeiras. Chamamos P de hipótese ou premissa e Q de tese ou conclusão. Em símbolo, $P \Rightarrow Q$ e lemos P implica Q ou se P, então Q.

2.1. DEMONSTRAÇÕES DIRETA

O procedimento para uma demonstração direta é através de implicações encadeadas

$$P \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_n \Rightarrow Q$$

que levam P diretamente a Q. (usar o exemplo do argumento no livro convite a matematica?)

Exemplo 1. *Mostre que quaisquer dois quadrados perfeitos consecutivos diferem por um número ímpar. Podemos reescrever essa instrução por "mostre que , se a e b são quadrados perfeitos consecutivos, a-b é um número ímpar." Portanto essa instrução é da forma $P \Rightarrow Q$, onde P é e Q é*

Demonstração:*Suponha que a e b sejam quadrados perfeitos consecutivos, ou seja, $a = n^2$ e $b = (n+1)^2$ com $n \in \mathbb{Z}$. Queremos mostrar que eles diferem por um número primo, ou seja, $b - a$ ou $a - b$ é um número ímpar. Observe Como $a = n^2$ e $b = (n+1)^2$ então $b-a = (n+1)^2 - n^2 = n^2+2n+1-n^2 = 2n+1$. Portanto, $b - a$ é um número ímpar.*

Exemplo 2. *Sejam A e B conjuntos. Mostre que $A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$.*

2.2 DEMONSTRAÇÕES INDIRETAS

Existem dois tipos de demonstração indireta que podemos usar para estabelecer uma afirmação condicional da forma $P \Rightarrow Q$: demonstração por absurdo, demonstração por contra-positiva.

2.2.1 Demonstração por absurdo

Na demonstração por absurdo (ou por redução ao absurdo ou por contradição) nós assumimos que a hipótese P é verdadeira, como fazemos na demonstração direta, mas nesses caso supomos que a conclusão Q é falsa. A estratégia então é mostrar que isso não é possível (mostrar que não é possivel a conclusão Q ser falsa), encontrando uma contradição ou um absurdo para a veracidade de P. Dessa forma, segue então que Q tem que ser verdadeira.

Exemplo 3. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que, se n^2 é par, então n também o é.*
Primeiramente, tente fazer essa demonstração a princípio de modo direto.
Demonstração: *Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que n^2 é par (isso diz que a hipótese é verdadeira). Queremos mostrar que n é par (essa é a tese que queremos provar). Como faremos a demonstração por absurdo, vamos supor que n^2 é número par mas n não é. Dessa forma, n é um número ímpar, ou seja, $n = 2k + 1$ com $k \in \mathbb{N}$. Assim, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ o que implica que n^2 é um número ímpar, absurdo! pois por hipótese n^2 é par. Portanto, resumindo vimos que se n^2 é par e n é ímpar teremos que n^2 é ímpar, um absurdo. Logo, se n^2 é par só podemos ter que n é par.*

Exemplo 4. *Mostre que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Observe que isso é o mesmo que dizer: Se $x \in \mathbb{R}, x > 0$ e $x^2 = 2$ então $x \notin \mathbb{Q}$.*
Primeiramente vamos recordar a definição de um número racional: um número $r \in \mathbb{R}$ é dito racional se existem $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$ tais que $r = \frac{p}{q}$. E, como dado $\frac{p}{q}$ onde $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ existirá sempre $\frac{c}{d}, c, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0$ com $mdc(c, d) = 1$ tal que $\frac{p}{q} = \frac{c}{d}$, podemos sempre pensar um número racional r como sendo um número na forma $r = \frac{a}{b}$ onde $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ e $mdc(a, b) = 1$.
Vamos fazer essa demonstração por redução ao absurdo ou por contradição. Suponha que $x \in \mathbb{R}, x > 0$ e $x^2 = 2$ mas que $\sqrt{2} = x \in \mathbb{Q}$. Logo, por definição de número racional, segue que existem $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ e p, q primos entre si (ou seja $mdc(p, q) = 1$) tais que $x = \frac{p}{q}$. Assim, segue que $x^2 q^2 = p^2$ que é o mesmo que

$$2q^2 = p^2. \tag{1}$$

Dessa forma, vemos que 2 é divisor de p^2 (p^2 é um número par) e pelo resultado do exemplo anterior segue que 2 também é divisor de p, ou seja, $p = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Assim, substituindo $p = 2k$ em (1) obtemos $2q^2 = 4k^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$. Assim, segue que 2 divide q^2 e pelo exemplo anterior também concluímos que 2 divide q. Mas isso contradiz o fato de p e q serem primos entre si, ou seja, $mdc(p, q) = 1$. Portanto, $\sqrt{2} = x$ não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$. Dessa forma, a suposição inicial de $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ é falsa, ou seja, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2.2.2 Demonstração por contrapositiva

A contrapositiva da afirmação condicional $P \Rightarrow Q$ é $\sim Q \Rightarrow \sim P$. Vimos que uma afirmação condicional e sua contrapositiva são proposições equivalentes, logo uma é verdadeira se, e somente se, a outra for e uma é falsa se, e somente se, a outra for.

Exemplo 5. *Seja n um número inteiro positivo. Mostre que se n^2 é número par, então n também o é.*
Para demonstrarmos essa afirmação por contrapositiva devemos negar a tese: n é um número ímpar e tentar provar que n^2 também é um número ímpar (a negação da hipótese). Vamos lá
Seja n um número inteiro postivo tal que n é um número ímpar, ou seja, $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que n^2 é ímpar. Observe que se $n = 2k+1$ então $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ que é um número ímpar pois $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Portanto, da negação da tese chegamos na negação da hipótese. Logo, provamos o que queríamos.

Qual é a diferença entre o método de demonstração por absurdo e de demonstração por contrapositiva?

Observação 1. (Teoremas, proposições, lemas)
Chama-se de **Proposição** *qualquer afirmação, verdadeira ou falsa. Por exemplo, A: Todo número primo maior do que 2 é ímpar; B: A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o; C: Todo número ímpar é primo.*
Teorema *é uma proposição verdadeira do tipo $P \Rightarrow Q$, onde P e Q são proposições. No exemplo acima, as proposições A e B são teoremas mas C não.*

Chama-se **Lema** *a um teorema preparatório para a demonstração de um outro teorema (um resultado que auxilia na demonstração de um teorema).*
Corolário *é um teorema que segue como consequência imediata de outro teorema. Alguns autores reservam a palavra teorema para os resultados que devem ser destacados como os de mais importância.*
Condição necessária e suficiente
Num teorema $P \Rightarrow Q$, diz que a hipótese P é uma condição suficiente de Q, ou seja, basta a hipótese P ser verdadeira para que a tese Q também seja. Esta tese Q, por sua vez, é condição necessária de P, ou seja, a hipótese P sendo verdadeira, a tese Q também necessariamente será verdadeira pois caso Q não seja verdadeira, P também não será.
A recíproca de um teorema $P \Rightarrow Q$ é a proposição $Q \Rightarrow P$, que pode ou não ser verdadeira. O teorema de Pitágoras é um exemplo de teorema onde a recíproca é verdadeira, mas a recíproca do teorema "todo número primo maior do que 2 é ímpar" é falsa.

2.3 Demonstração por indução.

"Suponha que vamos a uma cidade e o primeiro táxi visto seja azul. Suponha que o segundo táxi também seja azul e o mesmo ocorra com o terceiro, quarto e quinto táxis vistos. Logo, de imediato, somos tentado a deduzir (precipitadamente) que todos os táxis daquela cidade são azuis." Certo?? Esse é o que chamamos de raciocínio indutivo, segundo o qual se deduz algum fato após constatar um determinado número de vezes a ocorrência deste fato. Mas, sabemos que, na matemática, a comprovação da validade de um fato para centenas, milhares e até bilhões de vezes de casos observados não é suficiente para assegurarmos a validade desse fato para todos os casos, é preciso demonstrá-lo formalmente. Quando esse fato depende explicitamente de um número natural, isso é feito, quando conveniente, usando-se o Princípio da Indução que estudaremos abaixo.

Suponha que o fato observado possa, de alguma forma, ser expresso por uma propriedade que denotaremos por $P(n)$, onde n é um número natural. A fim de ilustrar o que pode vim a ser essa propriedade $P(n)$ veja os exemplos a seguir:

Exemplo 6. *$P(n)$ pode ser a identidade*

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \ \textit{se} \ r \neq 1$$

Exemplo 7. *(Desigualdade de Bernoulli) $P(n)$ pode ser a desigualdade*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \ \textit{se} \ x \geq -1.$$

O Princípio da Indução funciona da seguinte forma: suponha que se deseje provar determinada propriedade envolvendo números naturais, a qual chamaremos de $P(n)$. Para este fim, basta verificar a validade de $P(1)$, e mostrar que, se $P(k)$ é válida para algum número natural $k \geq 1$, então $P(k + 1)$ é também válida.

Observe que o princípio descrito acima garante a validade de $P(n)$ para todo número natural n. De fato, como $P(1)$ é válida, $P(2)$ que é igual a $P(1 + 1)$ também é válida. Como $P(2)$ é válida, $P(3) = P(2 + 1)$ é válida, e assim por diante.

Para alguns problemas a propriedade $P(n)$ só começa a ser válida a partir de um certo $n_0 > 1$, como por exemplo $P(n) : 2^n > n^2$. Observe que esta desigualdade só é válida a partir de $n_0 = 5$.
Princípio da Indução O princípio da indução é o terceiro axioma de Peano. Se $X \subseteq \mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ tem se que $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Dessa forma, quando queremos mostrar que uma determinada propriedade $P(n)$, que depende apenas de um número natural n, seja válida para todos os números $n \geq n_0$ procedemos da seguinte forma:

1) Mostrar que $P(n_0)$é válida.
2)Mostrar que se $P(k)$ for válida para algum $k \geq n_0$, então $P(k+1)$ é válida.
Observação: A suposição de que $P(k)$ é válida é chamada de hipótese de indução.

Exemplo 8. *Provando a Desigualdade de Bernoulli usando o princípio da indução. Observemos que $P(1)$ é verdade pois $(1+x)^1 = (1+x)$, logo $(1+x)^1 \geq (1+x)$. Agora suponha que $P(k)$ é verdade para algum k fixado arbitrariamente (isso é o que chamamos de hipótese de indução). Assim, temos $(1+x)^k \geq (1+kx)$ para $x \geq -1$. Queremos mostrar que $P(k+1)$ é verdade.*

Observe que $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+x+kx+kx^2$, por hipótese de indução. Como kx^2 é positivo, segue que $(1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2 \geq 1+x+kx = 1+(1+k)x$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira e assim, pelo Princípio da indução enunciado acima, $P(n)$ é válida para todo n número natural.

Exercício 1. *Mostre que a)* $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *b)*$1+3+5+...+2n-1 = n^2$ *para todo n número natural.*

Segundo princípio da indução:
1)Mostrar que $P(n_0)$ é verdadeira.
2)Suponha que $P(m)$ é verdade para todo $n_0 \leq m < k$ e mostre que $P(k)$ é verdade.

Exemplo 9. *Todo número natural maior do que ou igual a 2 pode ser decomposto num produto de números primos.*
Demonstraremos usando o 2o. princípio da indução.
Se $n = 2$, a decomposição é trivial pois 2 é número primo.
Suponha que todo número natural $m, 2 \leq m < k$ possa ser decomposto como produto de números primos, queremos mostrar que isso vale para k.
Se k for um número primo, nada mais há a provar. Se k não for um número primo, então k é um número composto e assim $k = a\,b$ com $a < k$ e $b < k$. Assim, por hipótese de indução, $a = a_1...a_l$ e $b = b_1...b_j$ é um produto de números primos. Portanto, $k = a.b = a_1...a_l.b_1...b_j$ é um produto de números primos.