

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

# Análise de Sobrevivência Testes Acelerados

Douglas de Paula Nestlehner  
Raquel Malheiro de Carvalho

São Carlos  
Novembro de 2022

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Metodologia</b>	<b>2</b>
2.1	Análise de Sobrevivência . . . . .	2
2.2	Modelo Weibull . . . . .	4
2.3	Testes de Sobrevivência Acelerados . . . . .	5
2.3.1	Modelo Lei de Potencia Inversa . . . . .	6
2.3.2	Modelo Arrhenius . . . . .	6
2.3.3	Modelo de Eyring . . . . .	7
2.4	Modelo Weibull com Testes Acelerados . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>9</b>
3.1	Análise Exploratória . . . . .	9
3.2	Ajustes . . . . .	10
3.2.1	Modelo de Teste de Sobrevivência Acelerado . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>14</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>15</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Este trabalho tem como objetivo a aplicação das técnicas de análise de sobrevivência revisadas em aula em um banco de dados. Além disso, a análise com a criação de um modelo que seja adequado para os dados em estudo, aplicando metodologias de testes acelerados.

A partir da escolha de um modelo de *stress*-resposta, a princípio o de Potência Inversa, será indicado qual foi o modelo justado, seus parâmetros e suas estimativas, sendo o modelo escrito para cada nível de stress identificado no banco de dados.

Será feito o uso de gráficos das curvas de sobrevivências ajustadas por Kaplan-Meyer e pelo modelo de regressão, e comentado os ajustes.

# Capítulo 2

## Metodologia

### 2.1 Análise de Sobrevivência

Análise de sobrevivência é o estudo da variável tempo de um determinado evento de interesse, ou seja, analisar o tempo de vida do evento, na maioria das vezes caracterizado como falha o sucesso. Ela também pode ser aplicada na duração de componentes até o tempo de falha ou, de maneira geral, em estudos nos quais o tempo de vida é observado até a ocorrência de um evento de interesse, ([Fogo, 2007](#)).

A seguir apresentamos os principais conceitos e definições utilizados em análise de sobrevivência.

#### Censura

Censura é o termo dado para observações que não apresentaram o evento de interesse por algum motivo específico, motivo os quais caracterizam o tipo de censura. Geralmente observamos tres tipos de censura:

- **Censura tipo I:** é o tipo de censura em que o experimento tem um limite final de execução (coleta de dados), e quando esse limite é atingido, todas as observações que vem sendo acompanhadas ao longo do tempo são consideradas como censura do tipo I.
- **Censura tipo II:** é o tipo de censura em que o experimento estabelece um certo numero de eventos de interesse, e quando esse numero é atingido, todas as demais observações são consideradas como censura do tipo II.

- **Censura Aleatória** é o tipo de censura que ocorre ao longo do experimento por algum fator não esperado, ou seja, o evento de interesse não ocorre e a observação sai do estudo.

### Função de Sobrevivência

Uma das principais medidas observadas em análise de sobrevivência é a função de sobrevivência, a qual tem como objetivo apresentar a probabilidade de um indivíduo apresentar o evento de interesse ao longo do tempo.

Definimos a função de sobrevivência  $S(t)$  como :

$$S(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t). \quad (2.1)$$

Com as seguintes propriedades:

1.  $S(t) = 1$ , se  $t = 0$ ;
2.  $S(t) = 0$ , se  $t \rightarrow \infty$ ;
3.  $S(t)$  é decrescente.

Em que  $F(T)$ : função de distribuição acumulada de  $T$ ; e  $T$  é a variável resposta tempo, continua e não negativa.

### Função de Risco

A função de risco é outra medida importante em análise de sobrevivência, ela tem como intuito fornecer o risco do evento de interesse acontecer em um intervalo de tempo, geralmente muito pequeno  $[t, t + dt]$ .

Podemos definir a função de risco  $h(t)$  como sendo:

$$h(t) = -\frac{d}{dt} \log(S(t)) = \frac{f(t)}{S(t)}. \quad (2.2)$$

sendo  $f(t)$  a função de distribuição de probabilidade de  $T$ .

### Função de Verossimilhança

A função de verossimilhança é a responsável pela estimação dos dados pelo método de verossimilhança, portanto é a função responsável pela modelagem.

Definindo  $D$  como os dados em estudo,  $D = (t, c)$ , em que  $t$  indica o tempo da observação, e  $c$  indica se ela apresentou o evento de interesse ou censura (1,0 respectivamente).

Temos que a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\boldsymbol{\theta}|D) = \prod_{i=1}^n [f(t)]^c [S(t)]^{1-c} \quad (2.3)$$

Sendo  $\boldsymbol{\theta}$  o vetor de parâmetros, e  $n$  o números de observações.

## 2.2 Modelo Weibull

Em  $f(t)$  podemos caracterizar uma distribuição de probabilidade para a o tempo até ocorrência do evento de interesse. Dentre as principais distribuições utilizadas, temos a distribuição Weibull.

Nessa seção apresentamos a modelagem dos tempos de vida  $T$ , considerando a distribuição Weibull, ou seja,  $T \sim Weibull(\lambda, k)$ .

Desse modo, teremos que  $f(t)$  é dada por:

$$f(t) = \frac{k}{\lambda^k} t^{k-1} \exp \left\{ -\frac{t^k}{\lambda^k} \right\}, \quad t \geq 0 \quad e \quad \lambda, k > 0,$$

em que  $\lambda$  é referente a média da distribuição, e  $k$  o formato da distribuição.

A função de sobrevivência  $S(t)$ :

$$S(t) = \exp(-\lambda t)^\alpha.$$

A função de risco  $h(t)$ :

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \alpha \lambda (t\lambda)^{(\alpha-1)}.$$

E a função de verossimilhança  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})$ :

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D}) = \prod_{i=1}^n [\alpha \lambda (t\lambda)^{(\alpha-1)} e^{-(t\lambda)^\alpha}]^{c_i} [\exp(-\lambda t)^\alpha]^{1-c_i}$$

## 2.3 Testes de Sobrevivência Acelerados

Muitos estudos em análise de sobrevivência são relacionados a durabilidade de produtos, ou seja, deseja-se investigar o tempo até que o produto apresente o evento de interesse. Existem situações em que o produto em análise tem um tempo de vida (durabilidade) muito grande, como exemplo: lâmpadas, componentes eletrônicos, materiais resistentes, etc. Nesses casos a aplicação dos usuais métodos de análise de sobrevivência se torna algo inviável, pois a coleta de informações/dados para o experimento é impraticável.

Para poder analisar esses tipos de produtos, os estudos aplicam métodos no intuito de acelerar a ocorrência do evento de interesse, ou seja, diminuir o tempo de vida. Denotamos esses métodos como “variável-stress”, variável responsável por gerar um stress no evento e diminuir seu tempo de vida, como exemplo aplicação de voltagem, temperatura, pressão, etc.

Considerando um experimento em que o tempo até a ocorrência do evento de interesse foi acelerado por uma “variável-stress” ( $\mathbf{V}$ ) em uma variável qualquer do evento,  $\mathbf{X}$  (variável que foi exposta ao “stress”). Teremos que o tempo até o evento de interesse vai estar relacionado com a “variável-stress” pelo modelo relação estresse-resposta geral, dado por: (Klein, 1981).

$$\theta_i = e^{-(z_i + \beta_0 + \beta_1 X_i)}$$

Em que:

- $\theta_i$ : parâmetro do modelo de sobrevivência no i-ésimo nível de stress.
- $X_i$ : variável stress;
- $z_i$ : função da variável stress  $g(X_i)$ ;
- $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ : vetor de parâmetros desconhecidos do modelo.

Do modelo modelo relação estresse-resposta geral, surgem diversos casos particulares de relações estresse-resposta que são utilizados em situações distintas. Entre as relações estresse-resposta mais utilizadas na prática, destacam-se o modelo Lei de Potência Inversa, o modelo de Taxa de Reação de Arrhenius e o modelo de Eyring (Mann, 1974).

### 2.3.1 Modelo Lei de Potencia Inversa

No Modelo Lei de Potencia Inversa, seu uso pratico se deve principalmente em estudos relacionados a lampadas, fadiga de metais, isolantes, dielétricos, etc.

Pelo modelo relação estresse-resposta geral, temos que para o caso do Modelo Lei de Potencia Inversa:

$$X_i = -\log(V_i); \quad Z_i = 0; \quad \beta_0 = \log(\delta); \quad e \quad \beta_1 = \gamma$$

Desse modo, teremos que o modelo  $\theta_i$  é dado por:

$$\theta_i = \delta V_i^{-\gamma}$$

para  $V_i$  representando o i-ésimo nível da variável estresse de voltagem,  $V$ , e  $\delta$  e  $\gamma$  são os parâmetros característicos do produto, como por exemplo, unidade, geometria, fabricação, método de teste, etc., desconhecidos, tais que,  $\delta > 0$  e  $-\infty < \gamma < \infty$ , ([Vieira, 2006](#)).

### 2.3.2 Modelo Arrhenius

No caso do Modelo Arrhenius, sua aplicação está relacionada principalmente em estudos de dielétricos, plásticos, filamentos de lampadas incandescentes, etc.; de modo geral, em situações que a "variável-stress" é temperatura.

Pelo modelo relação estresse-resposta geral, temos que para o caso do Modelo Arrhenius:

$$X_i = \frac{1}{V_i}; \quad Z_i = 0; \quad \beta_0 = -\alpha; \quad e \quad \beta_1 = \beta.$$

Desse modo, teremos que o modelo  $\theta_i$  é dado por:

$$\theta_i = \exp \left( \alpha - \frac{\beta}{V_i} \right)$$

em que,  $V_i$  é o i-ésimo nível da "variável-stress" temperatura.



### 2.3.3 Modelo de Eyring

As aplicações do Modelo de Eyring também são relacionadas a estudos em que a "variável-stress" é temperatura. O modelo foi derivado dos princípios da mecânica quântica com uma "variável-stress" que expressa a variação da taxa de falha como uma função da temperatura de operação ([Mann, 1974](#)).

Pelo modelo relação estresse-resposta geral, temos que para o caso do Modelo de Eyring:

$$X_i = \frac{1}{V_i}; \quad Z_i = -\log(V_i); \quad \beta_0 = -\alpha; \quad e \quad \beta_1 = \beta.$$

Desse modo, teremos que o modelo  $\theta_i$  é dado por:

$$\theta_i = V_i \exp \left( \alpha - \frac{\beta}{V_i} \right)$$

## 2.4 Modelo Weibull com Testes Acelerados

Nas seções anteriores apresentamos as definições do modelo Weibull e os modelos de testes acelerados. Nessa seção apresentamos a aplicação de um modelos de testes acelerados considerando a distribuição Weibull para os tempos de vidas.

Por definição, a função de verossimilhança para o modelo considerando o  $i$ -ésimo nível de stress é dada por:

$$L_i(\lambda_i, k|D) = \prod_{j=1}^{n_i} [f(t_{ij}, \lambda_i, k)]^{c_{ij}} [S(t_{ij}, \lambda_i, k)]^{1-c_{ij}},$$

em que  $c_{ij}$  é um indicador de falhas, assumindo valores 1 ou 0 para indicar falha ou censura, respectivamente ([Fogo, 2022](#)).

Logo, considerando a variável *stress*  $V$ , com  $g = 4$  níveis, afetando o parâmetro escala  $\lambda$ , conforme o modelo potência inversa, sendo  $\kappa$  uma constante para todos os 4 níveis de *stress*, temos que a função de verossimilhança para o modelo, considerando os 4 níveis, é dada por:

$$L_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \kappa) = \prod_{i=1}^4 L_i(\lambda_i, k|D)$$

ou seja:

$$L_i(\lambda_1, \dots, \lambda_4, k|D) = \prod_{i=1}^4 \prod_{j=1}^{n_i} [f(t_{ij}, \lambda_i, k)]^{c_{ij}} [S(t_{ij}, \lambda_i, k)]^{1-c_{ij}}$$

Substituindo as funções de densidade e sobrevivência da Weibull, teremos:

$$L_i(\lambda_1, \dots, \lambda_4, k|D) = \prod_{i=1}^4 \prod_{j=1}^{n_i} \left[ \frac{k}{\lambda_i^k} t^{k-1} \exp \left\{ -\frac{t^k}{\lambda_i^k} \right\} \right]^{c_{ij}} [\exp(-\lambda_i t)^\alpha]^{1-c_{ij}}$$

Iremos fazer o uso do modelo de lei potencia inversa, portanto temos por definição que  $\lambda_i = \delta V_i^{-\gamma}$ .

Desse modo, substituindo  $\lambda_i$  na verossimilhança, teremos como modelo da lei de potencia inversa Weibull, considerando  $g = 4$ , como sendo:

$$L(k, \delta, \gamma|D) = \frac{k^c}{\delta^{kc}} \left[ \prod_{i=1}^4 V_i^{\gamma k c_i} \right] \left[ \prod_{i=1}^4 \prod_{j=1}^{n_i} t_{ij}^{k-1} c_{ij} \right] \exp \left\{ -\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{n_i} \left( \frac{t_{ij} V_i^\gamma}{\delta} \right)^k \right\}$$

em que  $c_i$  é o numero de falhas do  $i$ -ésimo nível de stress e  $c$  é o total de falhas.

# Capítulo 3

## Resultados

### 3.1 Análise Exploratória

Para aplicar os estudos de modelos de Testes de Sobrevivência Acelerados apresentado em 2.3, utilizamos os dados representados na Figura 3.1

Stress $V_i$	Em risco $n_i$	Falhas $r_i$	Tempos $t_{ij}$									
50	25	16	0,036	0,048	0,061	0,065+	0,065	0,070+	0,073	0,076	0,080+	
			0,085+	0,094	0,100	0,114	0,124+	0,128	0,134	0,135	0,135	
			0,144+	0,144+	0,145+	0,152	0,157	0,169+	0,264			
25	18	12	0,075	0,130	0,181	0,205	0,235+	0,239	0,247	0,257+	0,262+	
			0,263	0,285	0,307+	0,334	0,358	0,361+	0,400	0,434+	0,450	
10	20	12	0,214	0,317+	0,419	0,422+	0,451	0,542	0,575+	0,602	0,617	
			0,620	0,643+	0,660	0,766+	0,800	0,854+	0,930	0,949	1,073	
			1,099+	1,119+								
5	24	14	0,610	0,874	1,196	1,329+	1,348	1,448+	1,665+	1,671	1,767	
			1,956+	1,966	2,083+	2,085	2,161	2,277	2,391+	2,513	2,676+	
			2,945+	2,963+	3,016	3,278+	3,295	3,348				

Figura 3.1: Dados de tempos de vidas em testes acelerados com censura do tipo I. Sinal “+” indica censura.

Observando os dados brutos podemos notar diferentes níveis de stress com diferentes numero de observações e censuras. Portanto, já esperamos comportamentos distintos para cada nível de stress, considerando  $\kappa$  níveis de uma variável *stress*  $V_i = 1, 2, 3e4$ .

Entretanto, para poder confirmar os comportamentos distintos, plotamos o gráfico de Kaplan-Meier representado na Figura 3.2 para cada nível de stress.

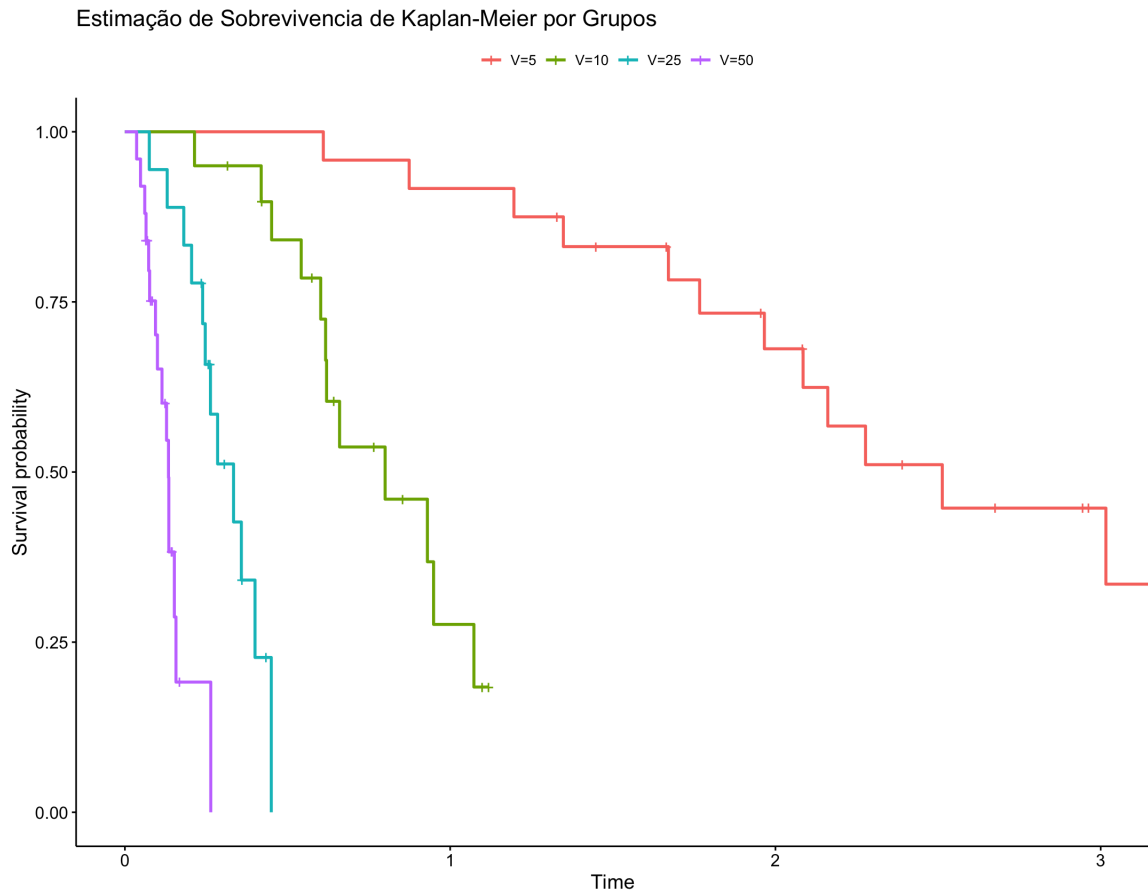


Figura 3.2: Kaplan-Meier para cada nível de stress.

Na Figura 3.2, nota-se que, quanto maior o nível de stress, menor é o tempo de vida do evento. Como exemplo:

- No stress  $V = 5$  observamos uma curva de sobrevivência “longa”, indicando que os eventos tem um tempo de vida maior, ou seja, uma probabilidade maior de não apresentar a falha ao longo de tempo;
- Já no caso do stress  $V = 50$ , notamos uma curva de sobrevivência que decresce rapidamente, indicando que a probabilidade de não apresentar o evento de interesse é menor em relação aos demais níveis de stress.

## 3.2 Ajustes

Afim de verificar qual distribuição apresentava melhores estimativas no ajuste do modelo, ajustamos os modelos Exponencial e Weibull (considerando os níveis de stress) e observamos as estimativas.

Para poder definir qual modelo iríamos utilizar, observamos as medidas AIC e BIC estimadas. Na Tabela 3.1 temos representados as estimativas para cada modelo.

Tabela 3.1: Qualidade do Ajuste via AIC e BIC

Modelos	df	AIC	BIC
Weibull	3	29.44180	36.83952
Exponencial	2	75.02956	79.96138

Observamos que o ajuste que apresenta menores AIC e BIC é o Weibull, sendo assim, este é o modelo escolhido para dar seguimento a análise.

### 3.2.1 Modelo de Teste de Sobrevivência Acelerado

Com o objetivo de interpretar o que acontece em cada nível de stress, utilizamos um dos modelo “stress-resposta” apresentado em 2.4.

Para a escolha de qual modelo utilizar, aplicamos o critério de qual variável stress está sendo usada no experimento. Não temos a informação exata de qual stress o experimento utiliza, porem a variável é denotada como  $V$  o que parece indicar uma variável de voltagem. Portanto, o modelo a ser utilizado é o modelo Lei de Potencia Inversa.

Definindo:

$$X_i = -\log(V_i); \quad Z_i = 0; \quad \beta_0 = \log(\alpha); \quad e \quad \beta_1 = \beta,$$

ajustamos o modelo Weibull considerando o modelo da Lei de Potencia Inversa. A seguir observamos a saída do *software RStudio*:

```
Call :
survreg(formula = Surv(tempo, censura) ~ Xi, dist = "weibull")
Coefficients :
(Intercept)          Xi
    2.991630     1.253665
Scale= 0.4009476
Loglik(model)= -11.7   Loglik(intercept only)= -68.4
    Chisq= 113.41 on 1 degrees of freedom , p= <2e-16
n= 87
```

No geral, temos os seguintes parâmetros e estimativas do modelo:

Tabela 3.2: Parâmetros e Estimativas do Modelo Ajustado

Parâmetros	Fórmulas	Estimativas
$Kappa(\kappa)$	$1/1 - e^{-\frac{z^k}{\gamma}}$	2.494091
$\delta$	$exp(\beta_0)$	19.91812
$\gamma$	$\beta_1$	1.253665
$\theta_1$	$\delta \cdot V_1^{-\gamma}$	2.648339
$\theta_2$	$\delta \cdot V_2^{-\gamma}$	1.110664
$\theta_3$	$\delta \cdot V_3^{-\gamma}$	0.352126
$\theta_4$	$\delta \cdot V_4^{-\gamma}$	0.147675

Então, para cada nível de stress, dado que no banco tem 4 níveis, tem-se

Para  $V_1$ :

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \delta \cdot V_1^{-\gamma} \\ &= 19.91912 \cdot 50^{-1.25}\end{aligned}$$

Para  $V_2$ :

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \delta \cdot V_2^{-\gamma} \\ &= 19.91912 \cdot 25^{-1.25}\end{aligned}$$

Para  $V_3$ :

$$\begin{aligned}\theta_3 &= \delta \cdot V_3^{-\gamma} \\ &= 19.91912 \cdot 10^{-1.25}\end{aligned}$$

Para  $V_4$ :

$$\begin{aligned}\theta_4 &= \delta \cdot V_4^{-\gamma} \\ &= 19.91912 \cdot 15^{-1.25}\end{aligned}$$

Na Figura 3.3, pode-se observar o modelo ajustado para cada um dos níveis de *stress*.

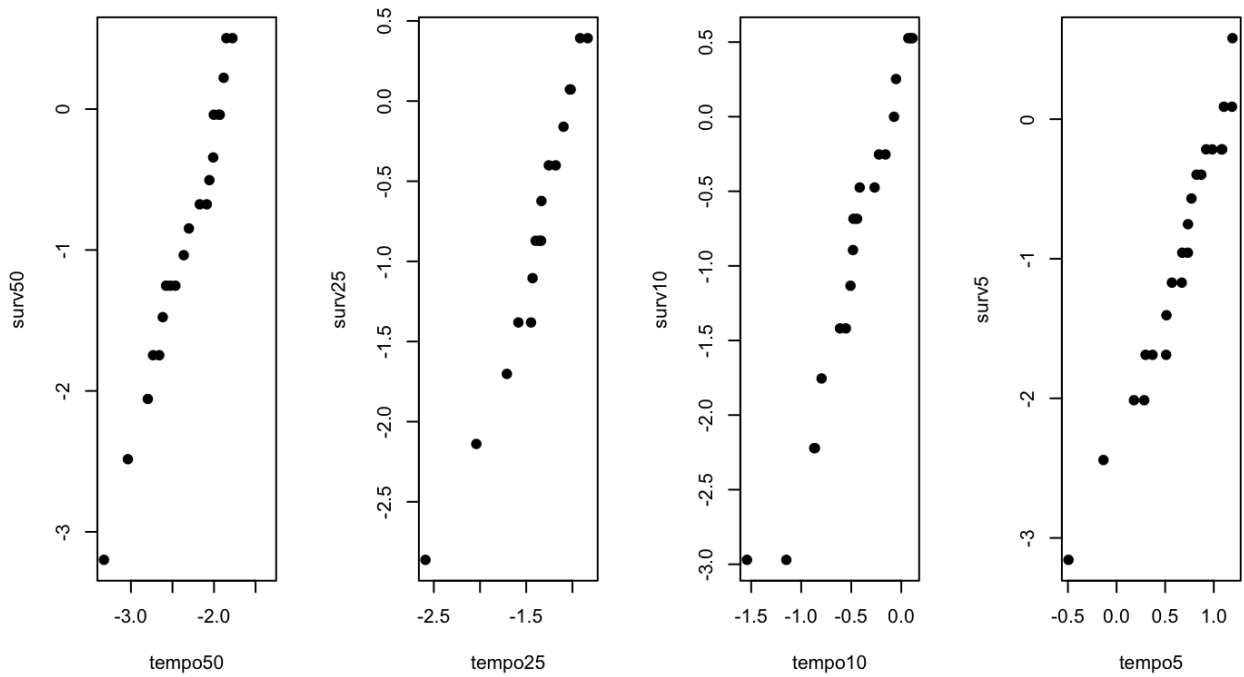


Figura 3.3: Modelo Ajustado para cada um dos níveis de stress.

Nota-se que, para todos os níveis de stress os pontos aparentam ter uma distribuição linear, indicando a adequabilidade do modelo.

Sendo assim, dado que  $X_i$  é a variável stress da definição de potência inversa, temos que o ajuste pelo modelo Weibull que apresentou melhor adequação é dado por:

$$\text{ajuste} = \text{survreg}(\text{Surv}(\text{tempo}, \text{censura}) \sim \text{Xi}, \text{dist} = \text{"weibull"})$$

Com isso, temos como modelo da Lei de Potência Inversa Weibull, sendo  $g = 4$ , o seguinte modelo:

$$L_{(2,494,19,92,1,25|D)} = \frac{2.49^{c_i}}{19.92^{2.49 \cdot c_i}} \left[ \prod_{i=1}^4 V_i^{1,25} \right] \left[ \prod_{i=1}^4 \prod_{j=1}^{n_i} t_{ij}^{k-1} c_{ij} \right] \exp \left\{ - \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{n_i} \left( \frac{t_{ij} V_i^{1,25}}{19,92} \right)^{2,494} \right\}$$

sendo  $c = 54$ , número de falhas totais, e  $c_1 = 16$   $c_2 = 12$   $c_3 = 12$   $c_4 = 14$ , número de falhas dada suas respectivas voltagens.

# Capítulo 4

## Conclusão

Através das análises realizadas, foi possível a aplicação dos conceitos vistos em Análise de Sobrevivência e a extensão da incorporação de uma "variável-*stress*" adicionadas aos "modelos de *stress*-resposta".

Para o desenvolvimento, ajustamos um modelo Weibull para testes acelerados, mais especificamente, ajustamos um modelo Weibull utilizando o modelo da Lei da Potencia Inversa para incorporar os efeitos de cada nível de stress.

Contudo, conseguimos obter um modelo para os tempos de vidas até o evento de interesse, considerando os dados, a distribuição Weibull e o modelo da Lei de Potencia Inversa.



# Referências Bibliográficas

- Fogo, J. C. (2007). *Modelo de regressão para um processo de renovação Weibull com termo de fragilidade*. Tese (Doutorado em agronomia), Escola superior de Agronomia Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, SP.
- Fogo, J. C. (2022). *Notas de aula da disciplina Laboratório de Estatística Aplicada*. Universidade Federal de São Carlos - DEs/UFSCar.
- Klein, J.P e Basu, A. P. (1981). *Weibull Accelerated Life Tests When There are Competing Causes of Failure*. Communications in Statistics; Theory and .Methods, A10 (20), pp. 2073-2100.
- Mann, N.R; Schaffer, R. N. (1974). *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Test Data..* John Wiley Sons - New York.
- Vieira, D. S. (2006). *Uso de Métodos Bayesianos em Testes de Vida Acelerados no Controle de Qualidade de Produtos Industriais*. Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos - DEs/UFSCar.