



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE ENSINO SUPERIOR DO SERIDÓ
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E TECNOLOGIA
BACHARELADO EM SISTEMAS DE INFORMAÇÃO



Inversão de dados magnetotelúricos 1D utilizando o algoritmo de otimização de Levenberg-Marquardt

Douglas Mateus Soares Cândido da Silva

Caicó - RN
Outubro de 2023

Douglas Mateus Soares Cândido da Silva

**Inversão de dados magnetotelúricos 1D utilizando o
algoritmo de otimização de Levenberg-Marquardt**

Trabalho de conclusão de curso apresentado
ao curso de Sistemas de Informação do
Departamento de Computação e Tecnologia da
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
como requisito parcial para a obtenção do grau
de Bacharel em Sistemas de Informação.

Orientador(a): Dr. Francisco Márcio Barboza.

Caicó - RN
Outubro de 2023

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI

Catálogo de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof^a. Maria Lúcia da Costa Bezerra - -CERES- - Caicó

Silva, Douglas Mateus Soares Candido da.

Inversão de dados magnetotelúricos 1D utilizando o algoritmo de otimização de Levenberg-Marquardt / Douglas Mateus Soares Candido da Silva. - Caicó, 2023.

50f.: il.

Monografia (Graduação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ensino Superior do Seridó, Bacharelado em Sistemas de Informação. Caicó, RN, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Francisco Márcio Barboza.

1. Problema inverso - Monografia. 2. Método Magnetotelúrico (MT) - Monografia. 3. Modelagem direta 1D - Monografia. 4. Otimização local - Monografia. 5. Algoritmo de Levenberg-Marquardt - Monografia. I. Barboza, Francisco Márcio. II. Título.

RN/UF/BS-CERES

CDU 004.6

Douglas Mateus Soares Cândido da Silva

Inversão de dados magnetotelúricos 1D utilizando o algoritmo de otimização de Levenberg-Marquardt

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Sistemas de Informação do Departamento de Computação e Tecnologia da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Sistemas de Informação.

Dr. Francisco Márcio Barboza

Orientador
DCT/UFRN

Dr. Renato Ramos da Silva Dantas

Examinador 1
DG/UFRN

MSc. Jerbeson de Melo Santana

Examinador 2
PETROBRAS

Esp. Arthur Anthony da Cunha

Romão e Silva
Examinador 3
FACISA/UFRN

Caicó - RN

11 de Outubro de 2023

*A minha avó, Rita Soares de Lucena, que já descansa em paz, por todo o amor que
dedicou à nossa família.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, dedico este trabalho de conclusão de curso a Deus e agradeço a Ele por ter me guiado e iluminado meu caminho durante toda esta jornada acadêmica, me dando forças e perseverança para superar os desafios e obstáculos que surgiram.

Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre me apoiaram em todas as etapas da minha vida e que foram a minha fonte inesgotável de amor e motivação. Sem o incentivo de vocês, eu nunca realizaria nada em minha vida. Agradeço por me ensinarem os valores da determinação na busca pelos meus objetivos. Dedico também aos meus familiares, que são minha base e exemplos a serem seguidos, pois eles sempre me deram suporte e me encorajaram em todas as provas.

Também gostaria de dedicar este trabalho ao meu orientador, que esteve ao meu lado durante esta etapa final do curso, guiando-me com sabedoria, paciência e dedicação. Agradeço pela sua orientação cuidadosa, pelas suas críticas construtivas e pelo seu comprometimento em me ajudar a alcançar meus objetivos e concluir o curso. Agradeço por compartilhar seus conhecimentos e experiências comigo. Você foi um verdadeiro mentor, professor e amigo para mim, por isso serei eternamente grato. Obrigado por ter sido um exemplo de dedicação e profissionalismo.

Também dedico este trabalho a todos os professores que tive ao longo da minha jornada no curso. Cada um de vocês contribuiu para a minha formação, não apenas como estudante, mas também como pessoa. Agradeço pela paciência, pelo comprometimento e pelo esforço em me transmitir seus conhecimentos e experiências, muitas vezes indo além de suas obrigações.

Sem o apoio de vocês, eu não teria conseguido chegar até aqui. Este trabalho é resultado do esforço conjunto de todos aqueles que acreditaram em mim e me incentivaram a seguir em frente. Muito obrigado!

*“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não é a posse, mas o ato de chegar lá,
que nos dá a maior satisfação.”
(Johann Carl Friedrich Gauss)*

RESUMO

O método magnetotelúrico é amplamente utilizado em geofísica para mapeamento de estruturas geológicas. A inversão de dados magnetotelúricos é um processo complexo que envolve a recuperação das propriedades elétricas do subsolo a partir de dados magnetotelúricos observados na superfície, provenientes das medidas das variações naturais dos campos eletromagnéticos terrestres. Neste trabalho, realiza-se a técnica de inversão em dados magnetotelúricos, buscando estimar os parâmetros do modelo geofísico que é a fonte de tais dados; tal processo é feito com o uso do algoritmo de Levenberg-Marquardt, visando refinar e ajustar o modelo por meio da minimização do desajuste entre os dados MT observados em campo e os dados calculados pela técnica de modelagem direta. A abordagem 1D assume que as propriedades elétricas do solo variam apenas com sua profundidade. Foram realizados experimentos utilizando dados sintéticos com ruído gaussiano e dados reais oriundos da base de dados magnetotelúricos COPROD. Os resultados obtidos indicam que o método de Levenberg-Marquardt pode ser uma opção viável para a inversão de dados magnetotelúricos com modelagem 1D, tendo obtido um melhor desempenho quando aplicado em dados captados por frequências mais baixas; ressaltando-se ainda que, por se tratar de um algoritmo de otimização local, também teve um baixo custo computacional.

Palavras-chave: Problema inverso, Método Magnetotelúrico (MT), Modelagem direta 1D, Otimização local, Algoritmo de Levenberg-Marquardt.

ABSTRACT

The magnetotelluric method is widely used in geophysics for mapping geological structures. Magnetotelluric data inversion is a complex process that involves recovering the electrical properties of the subsurface from surface-observed magnetotelluric data, which are obtained from measurements of natural variations in the Earth's electromagnetic fields. In this study, the magnetotelluric data inversion technique is employed to estimate the parameters of the geophysical model that is the source of such data. This process is carried out using the Levenberg-Marquardt algorithm to refine and adjust the model by minimizing the misfit between the MT data observed in the field and the data calculated by the forward modeling technique. The 1D approach assumes that the electrical properties of the soil vary only with depth. Experiments were conducted using synthetic data with Gaussian noise and real data from the COPROD magnetotelluric database. The results obtained indicate that the Levenberg-Marquardt method can be a viable option for 1D magnetotelluric data inversion, performing better when applied to data captured at lower frequencies. It's worth noting that, being a local optimization algorithm, it also exhibits low computational cost.

Keywords: Inverse problem, Magnetotellurics (MT), 1D Forward modelling, Local optimization, Levenberg-Marquardt Algorithm.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Resistividade elétrica em materiais da Terra.	18
Figura 2 – Ilustração da aplicação e funcionamento do Método Magnetotelúrico (MT).	19
Figura 3 – Representação da aplicação do Método Magnetotelúrico (MT) em um modelo 1D de camadas em planos paralelos.	21
Figura 4 – Ilustração de um exemplo de modelo 1D.	22
Figura 5 – Ilustração do funcionamento da técnica de inversão.	24
Figura 6 – Ilustração do gráfico de comportamento de um algoritmo de otimização.	26
Figura 7 – Gráfico da convergência entre a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado e a resistividade aparente observada. Os pontos vermelhos correspondem a resistividade aparente observada; a linha azul representa a resistividade aparente obtida na inversão.	34
Figura 8 – Gráfico da convergência entre a fase calculada pelo modelo estimado e a fase observada. Os pontos vermelhos correspondem a fase observada; a linha azul representa a fase obtida na inversão.	35
Figura 9 – Gráfico que representa a variação da resistividade conforme a profundidade de cada camada no subsolo em uma modelagem 1D de três camadas; é possível analisar a convergência entre o modelo encontrado pela inversão e o modelo observado.	36
Figura 10 – Gráfico que ilustra a minimização da função objetivo, que representa o desajuste entre os dados observados e os dados calculados, ao longo das iterações do algoritmo.	36
Figura 11 – Gráfico da convergência entre a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado e a resistividade aparente observada. Os pontos vermelhos correspondem a resistividade aparente observada; a linha azul representa a resistividade aparente obtida na inversão.	38
Figura 12 – Gráfico da convergência entre a fase calculada pelo modelo estimado e a fase observada. Os pontos vermelhos correspondem a fase observada; a linha azul representa a fase obtida na inversão.	39
Figura 13 – Gráfico que representa a variação da resistividade conforme a profundidade de cada camada no subsolo em uma modelagem 1D de três camadas; é possível analisar a convergência entre o modelo encontrado pela inversão e o modelo observado.	40
Figura 14 – Gráfico que ilustra a minimização da função objetivo, que representa o desajuste entre os dados observados e os dados calculados, ao longo das iterações do algoritmo.	40

Figura 15 – Gráfico da convergência entre a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado e a resistividade aparente observada. Os pontos vermelhos correspondem a resistividade aparente observada; a linha azul representa a resistividade aparente obtida na inversão.	43
Figura 16 – Gráfico da convergência entre a fase calculada pelo modelo estimado e a fase observada. Os pontos vermelhos correspondem a fase observada; a linha azul representa a fase obtida na inversão.	44
Figura 17 – Gráfico que representa a variação da resistividade conforme a profundidade de cada camada no subsolo em uma modelagem 1D de quatro camadas, conforme o modelo estimado pela inversão dos dados reais. .	44
Figura 18 – Gráfico que ilustra a minimização da função objetivo, que representa o desajuste entre os dados observados reais e os dados calculados, ao longo das iterações do algoritmo.	45

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do modelo inicial homogêneo de três camadas que foi utilizado como "ponto de partida" para o algoritmo na inversão de dados sintéticos.	32
Tabela 2 – Parâmetros do primeiro modelo verdadeiro sintético de três camadas. .	33
Tabela 3 – Parâmetros do primeiro modelo estimado de três camadas obtido pela inversão.	33
Tabela 4 – Parâmetros do segundo modelo verdadeiro sintético de três camadas. .	37
Tabela 5 – Parâmetros do segundo modelo estimado de três camadas obtido pela inversão.	37
Tabela 6 – Dados reais.	41
Tabela 7 – Parâmetros do modelo inicial homogêneo de quatro camadas que foi utilizado como "ponto de partida" para o algoritmo na inversão de dados reais.	42
Tabela 8 – Parâmetros do modelo estimado de quatro camadas obtido pela inversão dos dados reais.	42

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LM Algoritmo de Levenberg-Marquardt

MT Método Magnetotelúrico

GSS Golden-section search

LISTA DE ALGORITMOS

1	Algoritmo de inversão de dados de Levenberg-Marquardt	30
---	---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivos da pesquisa	16
1.1.1	Objetivo geral	16
1.1.2	Objetivos específicos	16
1.2	Organização do trabalho	17
2	METODOLOGIA	18
2.1	Método Magnetotelúrico	18
2.2	Modelagem Direta 1D	19
2.3	A técnica de inversão	22
2.4	Inversão de dados magnetotelúricos 1D	24
2.5	Otimização local	25
2.5.1	Funcionamento de um algoritmo de otimização local	26
2.5.2	Etapas executadas por um algoritmo de otimização local	26
2.6	Algoritmo de Levenberg-Marquardt	27
2.6.1	O termo de amortecimento λ e o algoritmo Golden-section Search	29
2.6.2	Pseudocódigo do algoritmo de Levenberg-Marquardt	30
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	32
3.1	Inversão de dados sintéticos em três camadas	32
3.1.1	Modelo 1	33
3.1.2	Modelo 2	37
3.2	Inversão de dados reais	41
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	46
	REFERÊNCIAS	47

1 INTRODUÇÃO

A exploração de recursos naturais e a investigação de fenômenos naturais geológicos requerem uma compreensão detalhada da estrutura geológica do subsolo (TELFORD *et al.*, 1990). Uma das técnicas utilizadas para essa finalidade é a magnetotelúrica (MT), que se baseia na medição das variações temporais e espaciais dos campos elétrico e magnético na superfície terrestre. Com base nesses dados, é possível inferir a estrutura elétrica e condutiva do subsolo (CHAVE; JONES, 2012).

Em geofísica, modelagem direta e inversão são técnicas utilizadas para analisar a distribuição de propriedades físicas em subsuperfície (LI; OLDENBURG, 1996). Na modelagem direta, os dados ou respostas são calculados a partir dos parâmetros do modelo, enquanto na inversão os parâmetros do modelo são estimados a partir dos dados observados e tais parâmetros são utilizados para gerar o modelo mais adequado possível para explicar uma possível estrutura de subsuperfície. A inversão utiliza as curvas de resistividade aparente (ρ_a) e fase (ϕ) dos dados para estimar os parâmetros, resistividade (ρ) e espessura (h), do modelo.

A inversão dos dados magnetotelúricos é um processo que permite obter um modelo da distribuição de resistividade elétrica do subsolo, a partir da análise de dados magnetotelúricos (MT) observados em campo. Diversos métodos de inversão e abordagens de modelagem têm sido propostos para obter esses modelos, ressaltando que a modelagem 1D é uma das mais utilizadas. A modelagem 1D se baseia em dividir o modelo em camadas horizontais e considerar que a resistividade elétrica é constante dentro de cada camada, variando apenas com a profundidade (Espessura) das camadas (NABIGHIAN, 1984).

No entanto, a inversão de dados magnetotelúricos é um problema inverso não linear e mal-condicionado (Mal-posto). Segundo Velho (2001), matematicamente, problemas inversos pertencem à classe de problemas mal-postos, uma vez que não satisfazem as condições definidas por Hadamard (1902). Tais condições são:

1. Existe solução;
2. A solução é única;
3. A solução tem uma dependência contínua (suave) com os dados de entrada.

Assim, o problema é dito mal-posto se alguma das condições acima não é satisfeita e, geralmente, nenhuma das condições acima propostas pelo matemático francês Jacques

Hadamard é satisfeita em um problema inverso. Portanto, tais aspectos tornam a obtenção de um modelo preciso e confiável um verdadeiro desafio.

O método de Levenberg-Marquardt é uma técnica de otimização amplamente utilizada para resolver problemas inversos não lineares e mal-postos (PUJOL, 2007). Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivo apresentar um estudo sobre a inversão de dados magnetotelúricos com modelagem 1D utilizando o método de Levenberg-Marquardt. Serão apresentados os fundamentos teóricos da técnica, bem como sua aplicação, por meio da implementação e uso de um algoritmo de otimização local baseado nos esquemas de inversão de Levenberg-Marquardt, em um conjunto de dados sintéticos com ruído gaussiano e um conjunto de dados reais. Espera-se, dessa forma, contribuir para o avanço dos estudos sobre a compreensão da estrutura geológica do subsolo por meio da análise de dados magnetotelúricos.

1.1 OBJETIVOS DA PESQUISA

Esta seção contém os objetivos da pesquisa, contemplando o objetivo principal (Objetivo geral) e as atividades para que este objetivo seja atingido (objetivos específicos).

1.1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo principal deste trabalho é estudar o método de Levenberg-Marquardt para a inversão de dados magnetotelúricos 1D e implementá-lo, por meio de um algoritmo de otimização local, a fim de obter um modelo aproximado da distribuição de resistividade elétrica do subsolo.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os objetivos específicos buscados no trabalho são:

- Desenvolver e implementar um algoritmo de otimização local, baseado no método de Levenberg-Marquardt, para solução do problema de inversão de dados magnetotelúricos com modelagem 1D;
- Aplicar o algoritmo de inversão desenvolvido em um conjunto de dados magnetotelúricos sintéticos com ruído acrescentado e analisar os resultados obtidos;
- Aplicar o algoritmo de inversão desenvolvido em um conjunto de dados reais e analisar os resultados obtidos;

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O Capítulo 1 apresenta a introdução, contextualizando o tema e apresentando os objetivos.

O Capítulo 2 apresenta a metodologia, estabelecendo um embasamento teórico para o trabalho. Discute-se o método magnetotelúrico, modelagem direta, problemas inversos, inversão de dados magnetotelúricos 1D, otimização local e o algoritmo de Levenberg-Marquardt. São mostrados os principais conceitos e equações matemáticas envolvidas.

O Capítulo 3 apresenta os resultados obtidos a partir dos testes em dados sintéticos com ruído e dados reais, incluindo a análise e discussão dos resultados.

O Capítulo 4 apresenta as considerações finais a respeito dos resultados obtidos.

Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas no trabalho.

2 METODOLOGIA

2.1 MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

O método magnetotelúrico (MT) é uma técnica de geofísica não invasiva que fornece informações a respeito da estrutura geológica, das propriedades elétricas e magnéticas do subsolo; com essas informações, é possível analisar a distribuição da resistividade elétrica e condutividade da subsuperfície, fruto dos materiais que fazem parte de sua composição (LI; OLDENBURG, 1996). Como afirma Santos (2012), a resistividade elétrica e a condutividade das rochas são propriedades físicas que descrevem a capacidade desses materiais em conduzir corrente elétrica. Essas propriedades estão diretamente relacionadas à composição, estrutura e saturação de fluidos das rochas. A resistividade elétrica caracteriza-se pela resistência oferecida por um material em conduzir fluxos de corrente elétrica. Define-se condutividade como a capacidade relativa de determinados materiais conduzirem eletricidade quando uma tensão a eles é aplicada. É estabelecido que a resistividade elétrica é o inverso da condutividade elétrica.

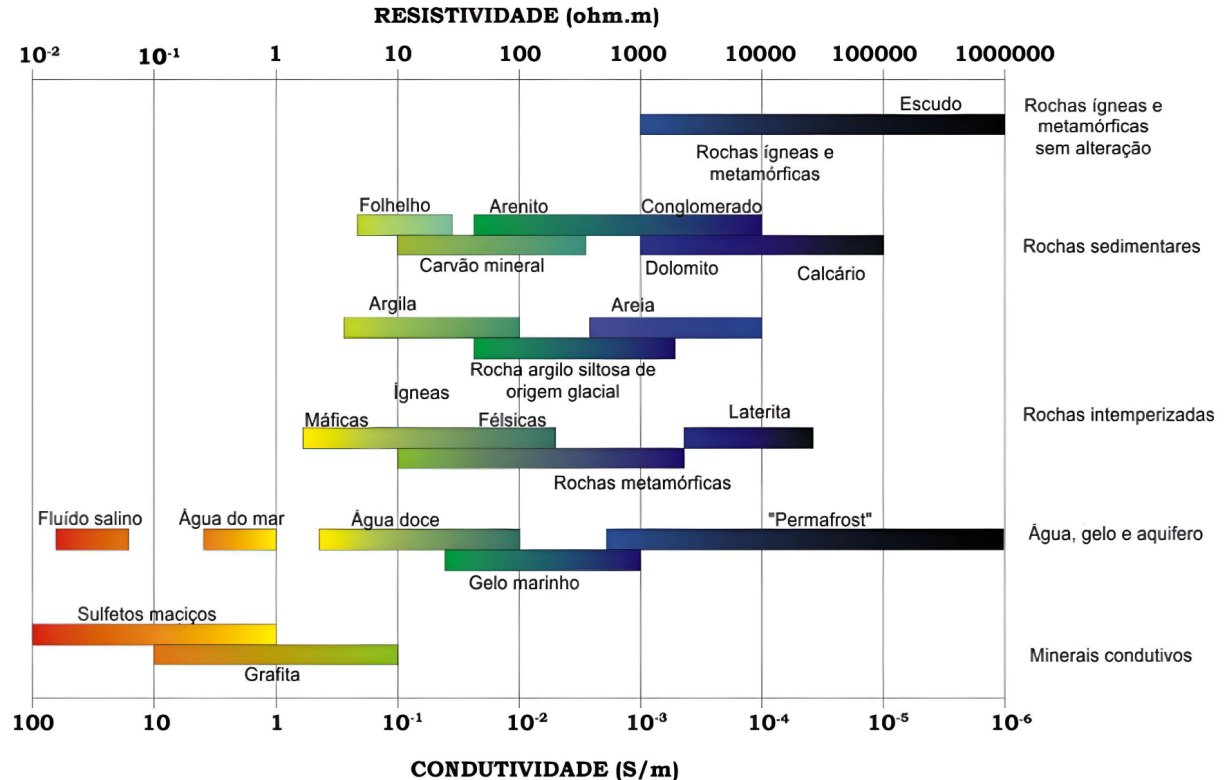


Figura 1 – Resistividade elétrica em materiais da Terra.

Fonte: Santos (2012).

A figura 1 ilustra como a resistividade elétrica e a condutividade elétrica variam

entre os diferentes tipos de rochas que compõem a estrutura geológica da Terra.

Santos (2012) ainda ressalta que o conhecimento das propriedades elétricas dos materiais que compõem o meio é fundamental para a interpretação de dados MT.

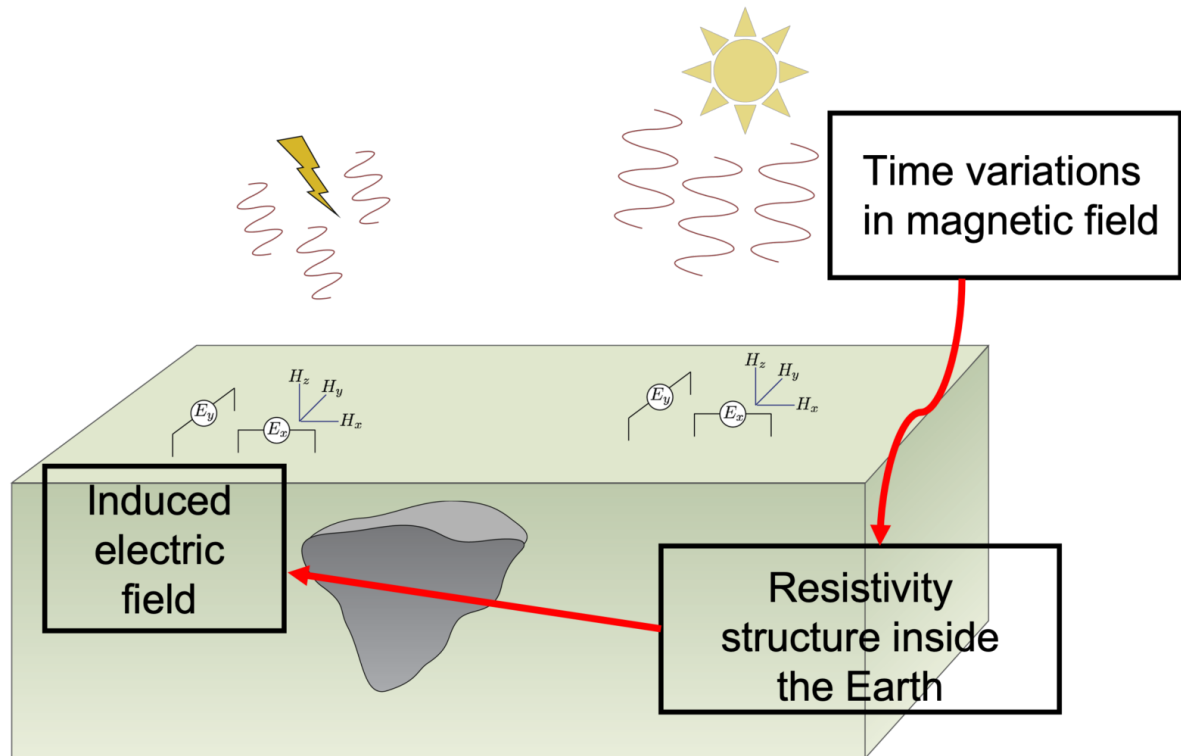


Figura 2 – Ilustração da aplicação e funcionamento do Método Magnetotelúrico (MT).

Fonte: Vozoff (1990)

A figura 2 é uma representação de como o método magnetotelúrico pode ser implementado, praticamente, em campo. Essa aplicação se dá por meio de uma estação de coleta e armazenamento de dados magnetotelúricos em que eletrodos e bobinas são posicionados para capturar dados referentes aos campos eletromagnéticos secundários provindos das correntes telúricas, que são correntes elétricas induzidas na subsuperfície como resultado da indução eletromagnética causada pelas variações temporais e espaciais do campo eletromagnético terrestre natural. Os dados MT coletados possuem uma frequência baixa que varia de $10^4 Hz$ até aproximadamente $1 KHz$, sendo as maiores frequências utilizadas para estudos de profundidades mais rasas e as frequências menores para investigar profundidades maiores (FERNANDES; PIEDADE, 2018). Com base em tais dados, utiliza-se a técnica de inversão de dados em conjunto com a técnica de modelagem direta para estimar as propriedades geológicas e elétricas do subsolo.

2.2 MODELAGEM DIRETA 1D

As equações fundamentais utilizadas no método magnetotelúricos são as seguintes:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1)$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{H} representam, respectivamente, o campos elétrico e a intensidade de campo magnético, \mathbf{J} é a densidade de corrente elétrica, \mathbf{D} é o vetor de deslocamento elétrico, ρ é a densidade de carga elétrica e \mathbf{B} é o campo magnético. Além disso, a relação constitutiva entre \mathbf{D} e \mathbf{E} é dada por

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (2.2)$$

onde ϵ_0 é a permissividade do vácuo e ϵ_r é a permissividade relativa do meio. A relação constitutiva entre \mathbf{H} e \mathbf{B} é dada por

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (2.3)$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo e μ_r é a permeabilidade relativa do meio.

O resultado de uma simulação embasada nas equações do MT é a resposta do campo eletromagnético para uma determinada distribuição das propriedades geoelétricas da subsuperfície investigada.

Segundo [Fernandes e Piedade \(2018\)](#), no MT, a estimativa de resistividade aparente do meio para uma determinada faixa de frequência é dada pela seguinte equação:

$$\rho_a = \frac{1}{\omega \mu_0} |Z_{xy}|^2, \quad (2.4)$$

que é dada em função da frequência do sinal ω , da permeabilidade magnética do vácuo μ_0 e da impedância Z_{xy} do meio em questão.

Por sua vez, a impedância do meio é dada por:

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y}, \quad (2.5)$$

onde E_x e H_y são as componentes dos campos elétrico e magnético, medidos na superfície terrestre.

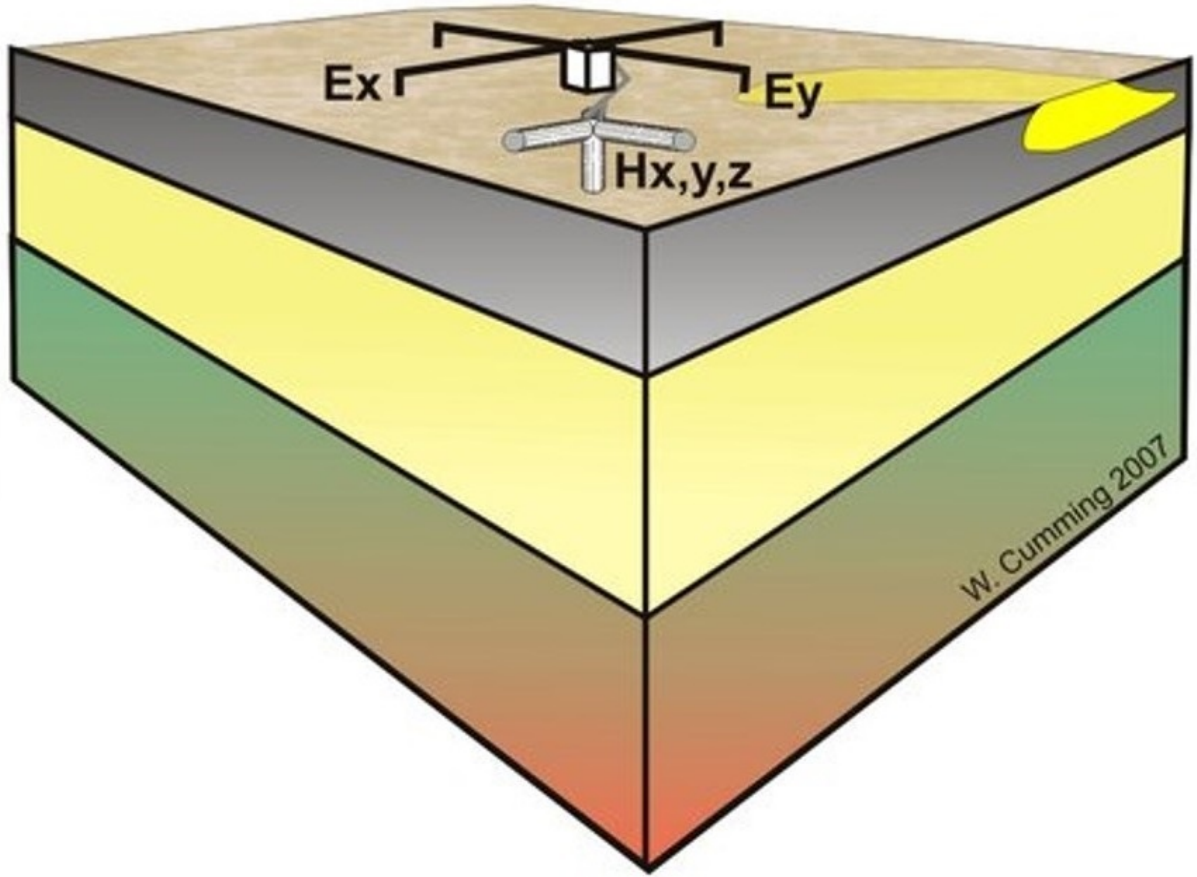


Figura 3 – Representação da aplicação do Método Magnetotelúrico (MT) em um modelo 1D de camadas em planos paralelos.

Fonte: [Cumming e Mackie \(2010\)](#).

A figura 3 é um modelo 1D da subsuperfície no qual as camadas são divididas em planos paralelos, isso implica na anisotropia elétrica das camadas variar apenas com sua profundidade (Espessura), ou seja, as propriedades elétricas do subsolo se conservam horizontalmente em cada camada.

A resistividade aparente ρ_a e a fase aparente ϕ_a dependem dos valores das frequências ω , da resistividade ρ_j de cada camada e sua espessura h_j correspondente. Sendo n o número de camadas do modelo geológico, então a equação:

$$[\rho_{ai}, \phi_{ai}] = g(\omega_i, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}) \quad (2.6)$$

mostra a relação de dependência de todas as i medidas de resistividade aparente e fase aparente obtidas no levantamento, as quais variam de acordo com $i = 1, 2, \dots, N$, ou seja, N observações.

No nosso trabalho adotaremos $\mathbf{m} = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}]$. Seguindo essa linha de raciocínio, um exemplo prático de modelo 1D com $\mathbf{m} = [1, 10, 100, 100, 500]$ pode ser visto na figura abaixo:

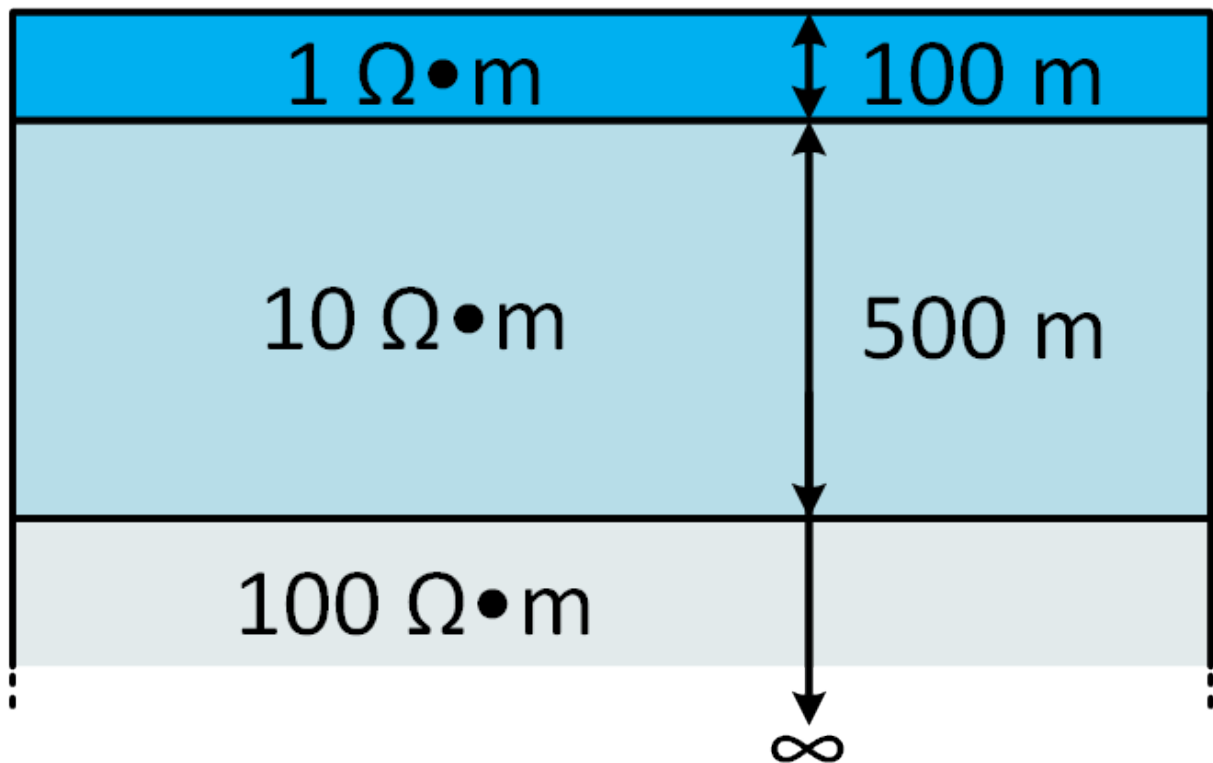


Figura 4 – Ilustração de um exemplo de modelo 1D.
Fonte: Baseado em [Fernandes e Piedade \(2018\)](#).

A imagem 4 é um exemplo prático de modelo 1D das camadas da subsuperfície, nela pode-se observar a divisão de cada camada de acordo com sua espessura (Que varia conforme a profundidade do subsolo), bem como a resistividade referente a cada camada.

2.3 A TÉCNICA DE INVERSÃO

A inversão é uma técnica amplamente utilizada em diversas áreas da ciência e engenharia, que permite estimar as propriedades físicas de um sistema a partir de observações reais (Dados reais) ou dados experimentais (Dados sintéticos). Utilizando-a, é possível estimar os parâmetros de um modelo que reproduzem os dados provindos de observações reais ([PARKER, 1977](#)). Na geofísica, essa técnica é utilizada para estimar modelos geológicos que justifiquem os valores das medidas físicas adquiridas durante levantamentos feitos na superfície.

[Sen e Stoffa \(2013\)](#) afirma que os métodos de inversão são divididos em duas categorias: inversão direta e inversão dos parâmetros do modelo. No primeiro caso, seleciona-se um operador matemático que é aplicado aos dados observados para recuperar o modelo geológico, semelhante ao que é feito na migração sísmica, por exemplo. No

segundo caso, segue-se um procedimento em que dados sintéticos são gerados com base em um modelo presumido e depois comparados com os dados reais observados durante a aquisição. Se a comparação entre os dois conjuntos de dados for aceitável, o modelo é adotado como a solução. Caso contrário, o modelo é ajustado, os cálculos são refeitos e os resultados são novamente comparados com as observações. Essa técnica é repetida automaticamente e de forma iterativa até que um modelo seja encontrado, cujos dados gerados sinteticamente coincidam com os dados observados.

Trigo e Lima (2005) evidencia que a inversão é uma técnica desafiadora, que apresenta diversos obstáculos e dificuldades, como a não linearidade dos problemas (Muitos problemas de inversão são intrinsecamente não lineares, o que torna a estimativa das propriedades do sistema ainda mais difícil), a ambiguidade (Em alguns casos, existem múltiplas soluções possíveis para um problema de inversão, o que torna a escolha da solução correta um desafio adicional) e dados incompletos ou imprecisos (Dados experimentais incompletos ou imprecisos podem dificultar a estimativa das propriedades do sistema, tornando a inversão ainda mais desafiadora).

Segundo Shaw e Srivastava (2007), formula-se o problema geofísico de inversão como um problema de otimização M-dimensional, com o objetivo de encontrar o modelo que melhor explica um conjunto de dados observados. Para isso, considera-se uma função g que relaciona o espaço do modelo \mathbf{m} e o espaço de dados \mathbf{d} como

$$\mathbf{d} = g(\mathbf{m}) \quad (2.7)$$

Com base em Aster, Borchers e Thurber (2018), duas formas comuns do ruído aparecerem nos dados são influências não modeladas nas leituras dos instrumentos de coleta de dados (Podendo serem causadas por interferência eletromagnética, por exemplo) ou arredondamento numérico (Cujo processo se dá por meio da limitação do número de casas decimais ou dígitos significativos em um valor numérico), impactando negativamente especialmente em contextos onde a precisão dos números é importante.

Adotando a suposição e a perspectiva que a verdadeira terra \mathbf{m}_{true} está dentro do espaço do modelo, e os dados observados \mathbf{d}_{obs} consistem de observações livres de ruído, somados a um fator que representa o ruído η , pode-se escrever

$$\mathbf{d}_{obs} = g(\mathbf{m}_{true}) + \eta \quad (2.8)$$

A inversão se constitui por achar um modelo \mathbf{m}_{est} que mais se aproxime do modelo verdadeiro \mathbf{m}_{true} da subsuperfície observado.

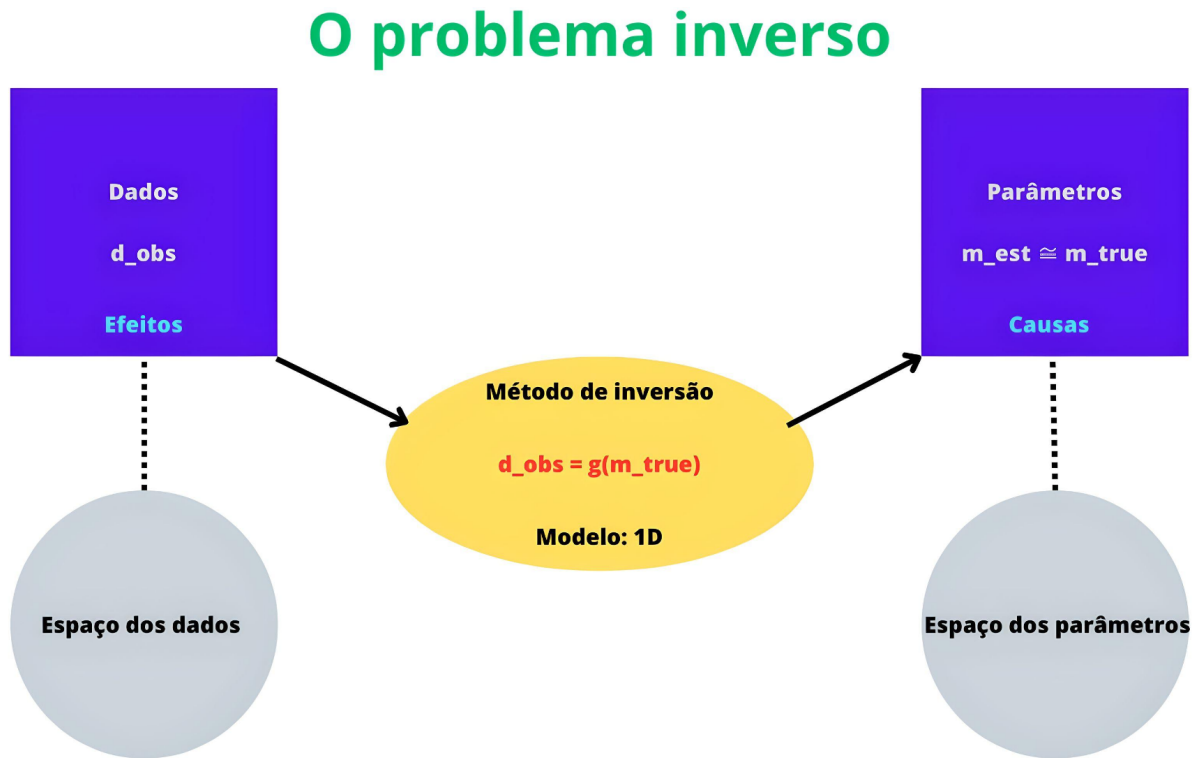


Figura 5 – Ilustração do funcionamento da técnica de inversão.

Fonte: Baseado em [Velho \(2001\)](#).

Do lado esquerdo da figura 5, observa-se o espaço referente aos dados (Observados na superfície), ou efeitos, que precisam ser invertidos para descobrir os parâmetros (Na subsuperfície), do lado direito da figura, ou causas, do modelo que levam até esses resultados observados ([LI; OLDENBURG, 1996](#)).

2.4 INVERSÃO DE DADOS MAGNETOTELÚRICOS 1D

Segundo [Fernandes e Piedade \(2018\)](#), a inversão de dados magnetotelúricos 1D é uma técnica que permite estimar a estrutura geoeletrica do subsolo a partir de dados magnetotelúricos. Em tal técnica, modelos matemáticos e computacionais são utilizados para estimar a distribuição de resistividade elétrica ao longo do subsolo, a partir de medidas dos campos magnético e elétrico na superfície terrestre.

Ao contrário da modelagem direta, a inversão é um processo computacional iterativo, no qual é necessário modificar os parâmetros de inversão para conseguir o melhor resultado. O modelo inverso parte dos dados observados (Resistividade aparente e fase) e estima o modelo de Terra, buscando valores de parâmetros (Resistividade e espessura de cada camada) para um modelo de camadas que melhor se ajusta aos dados de campo ([ROMERO; TERRA, 2011](#)).

Existem diversos métodos de inversão de dados magnetotelúricos 1D, que variam

de acordo com a complexidade do modelo e das equações utilizadas para descrever o sistema; neste trabalho, foi utilizado o método de inversão de Levenberg-Marquardt (LM), implementado por meio de um algoritmo de otimização local.

2.5 OTIMIZAÇÃO LOCAL

Otimização local é um campo de estudo da matemática e, como afirma [Carneiro \(2020\)](#), algoritmos de otimização local são técnicas computacionais utilizadas para encontrar o mínimo ou máximo local de uma função de forma iterativa. Os algoritmos de otimização local são divididos em duas categorias: métodos de busca unidimensional e métodos de busca multidimensional. Os métodos de busca unidimensional são utilizados para otimizar funções com apenas uma variável, enquanto os métodos de busca multidimensional são utilizados para otimizar funções com várias variáveis, como a função objetiva utilizada no problema inverso proposto por esse trabalho.

Como destaca [NILG.AI \(2022\)](#), os algoritmos de otimização local possuem características, como:

- **Eficiência computacional:** Os algoritmos de otimização local podem ser considerados computacionalmente eficientes e rápidos mesmo em problemas de otimização de grande porte, pois concentram-se em explorar uma região local do espaço de busca na procura de uma solução ótima. Eles não tentam avaliar todo o espaço de busca, o que é impraticável em problemas de grande porte. Atualizando os parâmetros do modelo iterativamente, eles se concentram em encontrar uma solução próxima à solução ótima atual.
- **Simplicidade:** Os algoritmos de otimização local simplificam a complexidade do problema, ignorando variáveis irrelevantes ou utilizando técnicas de redução de dimensionalidade. Isso torna a busca mais eficiente, pois o espaço de busca é reduzido.

No entanto, é importante observar que os algoritmos de otimização local têm suas limitações. Eles podem ficar presos em mínimos locais e não encontrar a solução ótima global em problemas com múltiplos mínimos locais. Além disso, sua eficiência depende da escolha adequada do ponto de partida e da natureza do problema.

2.5.1 FUNCIONAMENTO DE UM ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO LOCAL

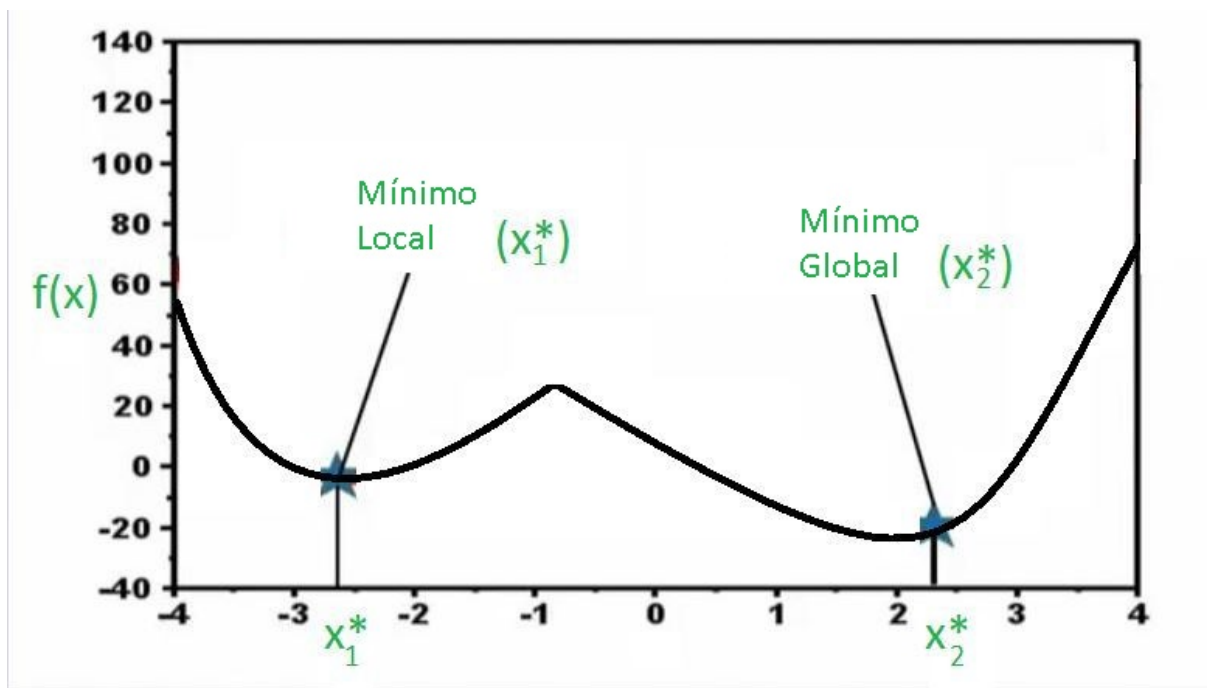


Figura 6 – Ilustração do gráfico de comportamento de um algoritmo de otimização.

Fonte: Adaptado de GeeksforGeeks (2023).

Na figura 6, observa-se, graficamente, o comportamento de um algoritmo de otimização local. Um algoritmo de otimização local busca os mínimos locais de uma função através de um processo iterativo. Como afirma Bastos (2004), por se tratar de um método determinístico, esse tipo de algoritmo explora a vizinhança de uma solução inicial, buscando melhorar iterativamente tal solução por meio de movimentos locais em direção a regiões de menor valor da função objetivo.

2.5.2 ETAPAS EXECUTADAS POR UM ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO LOCAL

Segundo Luenberger, Ye *et al.* (1984), abaixo estão algumas das etapas executadas por um algoritmo de otimização local:

1. Escolha uma solução inicial: O algoritmo começa com uma solução inicial, que pode ser escolhida aleatoriamente ou de forma determinística com base em informações prévias.
2. Avalie a função objetivo: Calcule o valor da função objetivo na solução atual. Esse valor é usado para avaliar a qualidade da solução.

3. Determine a direção de busca: Com base na solução atual, determine a direção em que você deseja explorar a vizinhança. Isso pode ser feito usando técnicas como o método do gradiente descendente, que indica a direção de maior decrescimento da função.
4. Atualize a solução: Dado a solução atual e a direção de busca, atualize a solução para uma nova solução na vizinhança. Isso pode envolver um passo fixo na direção escolhida ou um cálculo mais sofisticado.
5. Verifique a condição de parada: Após cada atualização da solução, verifique se alguma condição de parada é atendida. Isso pode incluir um número máximo de iterações, uma tolerância pré-definida para a melhoria da função objetivo ou a estagnação da otimização.

Durante esse processo iterativo, a solução é refinada gradualmente, movendo-se em direção aos mínimos locais da função.

2.6 ALGORITMO DE LEVENBERG-MARQUARDT

Tal como explana [Benatti \(2017\)](#), o algoritmo de Levenberg-Marquardt é um método de otimização não linear utilizado em diversas áreas da ciência e engenharia, como processamento de sinais, controle de processos, visão computacional e geofísica. Esse algoritmo se baseia fortemente e combina as propriedades do Método de Gauss-Newton e do Método do Gradiente Descendente para encontrar o mínimo de uma função não linear.

Conforme explana [Cloud \(2023\)](#), o método de Levenberg-Marquardt apresenta vantagens em relação a outros métodos de otimização não linear, como o método de Gauss-Newton e o método do gradiente descendente. Entre as principais vantagens do método de Levenberg-Marquardt, destacam-se:

- **Eficiência computacional:** O método de Levenberg-Marquardt é computacionalmente eficiente em problemas de otimização não linear de médio e grande porte, pois utiliza uma combinação do método de Gauss-Newton e do método do gradiente descendente para garantir a boa definição das direções de minimização. O método de Gauss-Newton é usado quando se está próximo do mínimo local, enquanto o gradiente descendente é usado quando se está longe do mínimo local. Essa combinação permite que o método se adapte eficientemente às características locais da função objetivo.
- **Regularização:** O método de Levenberg-Marquardt incorpora um parâmetro de regularização para evitar problemas de instabilidade numérica.

Ainda segundo (CLOUD, 2023), algo que diferencia o método de inversão de Levenberg-Marquardt dos outros métodos está na forma como ele atualiza os parâmetros durante o processo de otimização. O LM utiliza a inversão da Matriz Jacobiana (Que relaciona as derivadas parciais da função de modelagem em relação aos seus parâmetros) e anexa um parâmetro de regularização (λ) para garantir a estabilidade numérica e evitar oscilações indesejadas durante a otimização.

Como aponta (GAVIN, 2019), o funcionamento do LM gira em torno da atualização iterativa dos valores numéricos dos parâmetros do modelo, onde tal atualização é realizada através da minimização do desajuste entre os dados observados em campo e os dados calculados estimados pelos parâmetros do modelo utilizando a modelagem direta. No presente trabalho, o parâmetro base para a atualização é o Erro Quadrático Médio, também conhecido como Erro Padrão (Standard Error), definido e calculado por uma função, que é conhecida como função objetivo ou função erro.

No presente trabalho, a função objetivo é $E(\mathbf{m})$, e temos que

$$E(\mathbf{m}) = \frac{1}{N} [\mathbf{d}_{obs} - g(\mathbf{m})]^T [\mathbf{d}_{obs} - g(\mathbf{m})] \quad (2.9)$$

Aqui, $g(\mathbf{m})$ são os dados calculados, ou seja, \mathbf{d}_{cal} , N é o número de pontos de dados, e o sobrescrito T representa a matriz transposta. A função $E(\mathbf{M})$ é minimizada iterativamente. Na k -ésima iteração, a otimização busca na direção do espaço do modelo dado pela solução de $\Delta\mathbf{m}_k$ da seguinte equação (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2018):

$$[\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k + \lambda_k \mathbf{I}] \Delta\mathbf{m}_k = -\mathbf{J}_k^T \Delta\mathbf{d}_k \quad (2.10)$$

onde $\Delta\mathbf{d} = \mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d}_{cal}$, \mathbf{J} é a Matriz Jacobiana com o elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna dado por

$$J_{ij} = \frac{\delta \mathbf{d}_{cal}^i}{\delta \mathbf{m}_j} \quad (2.11)$$

A Matriz Jacobiana tem a seguinte forma:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{d}_{cal}^1}{\partial \mathbf{m}_1} & \frac{\partial \mathbf{d}_{cal}^1}{\partial \mathbf{m}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{d}_{cal}^1}{\partial \mathbf{m}_n} \\ \frac{\partial \mathbf{d}_{cal}^2}{\partial \mathbf{m}_1} & \frac{\partial \mathbf{d}_{cal}^2}{\partial \mathbf{m}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{d}_{cal}^2}{\partial \mathbf{m}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{d}_{cal}^m}{\partial \mathbf{m}_1} & \frac{\partial \mathbf{d}_{cal}^m}{\partial \mathbf{m}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{d}_{cal}^m}{\partial \mathbf{m}_n} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.6.1 O TERMO DE AMORTECIMENTO λ E O ALGORITMO GOLDEN-SECTION SEARCH

[Levenberg \(1944\)](#) e [Marquardt \(1963\)](#) propõem a introdução de uma variável λ_k , que é utilizada como parâmetro de amortecimento. Tal variável λ_k é um escalar não negativo ($\lambda_k \geq 0$) e \mathbf{I} é a matriz identidade. Uma observação importante é que o parâmetro de amortecimento λ influencia tanto na direção quanto no tamanho do passo do ajuste.

A medida em que o parâmetro de amortecimento λ cresce no sistema, a direção \mathbf{d}_k tende à direção de máxima descida (O que significa que o LM se comporta mais como o método do gradiente descendente), enquanto que se λ se aproximar de zero a direção de minimização tende à direção da convergência quadrática do método de Gauss-Newton, que é mais rápido quando se está próximo da solução ótima. Desta forma, tal parâmetro de amortecimento deve ser grande o suficiente para proporcionar um decréscimo (Descida) na função objetivo, uma vez que busca-se minimizá-la, e deve se aproximar de zero nos estágios finais do algoritmo, de maneira que a convergência quadrática do Método de Gauss-Newton seja resgatada ([GILL; MURRAY; WRIGHT, 2019](#)).

Uma estratégia que pode ser usada no LM é iniciar com um valor relativamente grande de λ e, à medida que a otimização progride e se aproxima da solução ótima, reduzir gradualmente o valor de λ . Isso permite que o algoritmo comece de forma robusta, explorando a vizinhança da solução e, em seguida, migre para uma convergência mais rápida à medida que se aproxima da solução ótima. Uma busca linear, ou outro método de busca como o algoritmo Golden-section search, pode ser viável para descobrir o valor ótimo para o λ .

No caso da implementação do algoritmo de Levenberg-Marquardt do presente trabalho, utilizou-se o algoritmo Golden-section Search (GSS), também conhecido como busca da seção áurea, para encontrar o valor ótimo para o λ , a cada iteração.

Segundo [COLLEGE \(2012\)](#), o algoritmo da busca da seção áurea é utilizado para encontrar o máximo ou mínimo de uma função unimodal (Uma função unimodal contém apenas um mínimo ou máximo no intervalo $[a, b]$). Na implementação do LM do presente trabalho, optou-se por utilizar o GSS pois, uma vez que o valor de λ é atualizado iterativamente e de forma adaptativa buscando o equilíbrio entre o comportamento do método do gradiente descendente e o método de Gauss-Newton, que fazem parte da constituição do algoritmo em si, faz-se necessário escolher entre um valor mais alto ou mais baixo para o λ . O GSS permite justamente atribuir o valor máximo ou mínimo ótimo de um intervalo definido para o λ , garantindo a melhor escolha a depender da situação atual da otimização.

2.6.2 PSEUDOCÓDIGO DO ALGORITMO DE LEVENBERG-MARQUARDT

Algorithm 1: Algoritmo de inversão de dados de Levenberg-Marquardt

Input: Dados observados \mathbf{d}_{obs} , função de modelagem $g(\mathbf{m})$, vetor de parâmetros \mathbf{m}_0 , número máximo de iterações N_{max} , tolerância de convergência ϵ

Output: Vetor de parâmetros m_{est}

```

1 Inicialize o contador de iterações  $k \leftarrow 0$ ;
2 Inicialize os valores dos parâmetros do vetor da solução inicial  $\mathbf{m} \leftarrow \mathbf{m}_0$ ;
3 Inicialize o valor da função objetivo  $E(\mathbf{m})$ ;
4 while  $k < N_{\text{max}}$  e  $E(\mathbf{m}) > \epsilon$  do
5     Faça uma busca linear para o valor do parâmetro de amortecimento  $\lambda$ ;
6     Calcule o vetor de resíduos (Diferença entre dados observados e dados
       calculados)  $\mathbf{r} = \mathbf{d}_{\text{obs}} - g(\mathbf{m})$ ;
7     Calcule a matriz Jacobiana  $J = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{m}}$ ;
8     Calcule o vetor de incremento  $\Delta \mathbf{m} = (J^T J + \lambda I)^{-1} J^T \mathbf{r}$ ;
9     Atualize os valores dos parâmetros do vetor da solução atual  $\mathbf{m} \leftarrow \mathbf{m} + \Delta \mathbf{m}$ ;
10    Calcule o novo valor da função objetivo
        $E(\mathbf{m}) \leftarrow \frac{1}{N}(\mathbf{d}_{\text{obs}} - g(\mathbf{m}))^T (\mathbf{d}_{\text{obs}} - g(\mathbf{m}))$ ;
11    Incremente o contador de iterações  $k \leftarrow k + 1$ ;
12 end
```

O Algoritmo 1 representa a teoria de inversão de dados de Levenberg-Marquardt. Ele recebe os dados observados \mathbf{d}_{obs} , a função de modelagem $g(\mathbf{m})$, uma estimativa inicial do parâmetro \mathbf{m}_0 , que é um vetor de parâmetros para o modelo inicial utilizado na função de modelagem, o número máximo de iterações N_{max} e a tolerância de convergência ϵ . A saída é a estimativa do vetor de parâmetros m_{est} .

O algoritmo itera até atingir o número máximo de iterações ou o critério definido pela tolerância de convergência ϵ . Em cada iteração, são calculados os resíduos \mathbf{r} , a matriz Jacobiana J e o vetor de incremento $\Delta \mathbf{m}$. O valor do parâmetro \mathbf{m} é atualizado e a função objetivo $E(\mathbf{m})$ é recalculada.

Dependendo do valor da função objetivo, o fator de amortecimento λ é ajustado e a estimativa inicial do parâmetro \mathbf{m}_0 é atualizada ou restaurada. O contador de iterações é incrementado após cada iteração.

A tolerância ϵ é um valor pré-definido que determina a precisão desejada na solução. Quanto menor for o valor de ϵ , maior será a precisão exigida e mais iterações o algoritmo realizará antes de atingir a condição de parada.

Portanto, o algoritmo de Levenberg-Marquardt continua iterando até que a norma do vetor da função objetivo seja menor do que a tolerância de convergência ϵ especificada,

indicando uma solução aproximada aceitável. Nesse ponto, o algoritmo considera que encontrou uma solução aproximada para o problema de otimização não linear.

O resultado retornado pelo algoritmo é o vetor de parâmetros m_{k+1} , equivalente a m_{est} , para o modelo estimado, que representa a solução aproximada encontrada. Esses parâmetros são os valores que melhor ajustam a função objetivo e correlacionam o modelo estimado aos dados observados (Modelo verdadeiro ou m_{true}), conforme definido pelo problema específico.

Vale ressaltar que o resultado obtido pelo Algoritmo de Levenberg-Marquardt é uma solução aproximada e depende da qualidade dos dados de entrada, se são dados sintéticos ou dados reais, se possuem ruído ou não, da escolha adequada dos parâmetros iniciais e da definição correta da tolerância de convergência ϵ .

Portanto, ao finalizar o algoritmo de Levenberg-Marquardt, obtemos um conjunto de parâmetros que representa uma solução aproximada para o problema de inversão de dados.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O objetivo do nosso problema de inversão é encontrar um modelo que mostre as resistividades e espessuras das camadas do subsuperfície, se baseando em um modelo de terra 1D e em dados observados, e assim poder ter uma ideia da resistividade do solo. Para encontrar resultados satisfatórios que permitem avaliar a eficácia da implementação do Algoritmo de Levenberg-Marquardt para resolver o problema de inversão proposto nesse trabalho, baseou-se em [Constable, Parker e Constable \(1987\)](#), que afirma que para determinar se uma solução encontrada por uma inversão de dados é suficientemente aceitável é necessário ter em mente que inversão de dados eletromagnéticos, como os dados magnetotelúricos, não produz uma única solução, sendo, portanto, inevitável escolhermos um único modelo mais adequado, dentre os encontrados, para interpretar as observações.

Utilizou-se a ferramenta GNU Octave ([OCTAVE, 2023](#)) nos experimentos e foram executados testes de inversão em dois conjuntos de dados sintéticos com ruído gaussiano e em um conjunto de dados reais. Como resultados das inversões, foram obtidos gráficos de convergência entre a resistividade aparente calculada e a resistividade aparente observada, gráficos de convergência entre a fase calculada e a fase observada, gráficos de convergência entre o modelo estimado e o modelo observado, e gráficos da minimização da função objetivo.

3.1 INVERSÃO DE DADOS SINTÉTICOS EM TRÊS CAMADAS

O desempenho da nossa implementação do algoritmo LM é inicialmente investigado em inversões com dados sintéticos, com ruído gaussiano, gerados a partir de dois modelos verdadeiros de três camadas, cada qual provido a partir de fontes diferentes.

Para ambos os modelos verdadeiros sintéticos, o modelo inicial carregado para o algoritmo foi um modelo homogêneo de três camadas com resistividades iguais (Baseando-se na abordagem simplificada de que a subsuperfície é composta por camadas de materiais com propriedades elétricas uniformes). Tal modelo inicial foi escolhido a partir dos dados observados sendo feito uma média aproximada dos valores de menor e maior resistividade aparente.

Tabela 1 – Parâmetros do modelo inicial homogêneo de três camadas que foi utilizado como "ponto de partida" para o algoritmo na inversão de dados sintéticos.

Número da Camada	$\rho(\Omega * m)$	$h(m)$
1	50	300
2	50	300
3	50	∞

3.1.1 MODELO 1

Os dados sintéticos foram gerados a partir do modelo obtido de [Sen e Stoffa \(2013\)](#), e um ruído gaussiano de 5% foi acrescentado na resistividade aparente observada e fase observada. Definiu-se, nessa primeira situação, que o número máximo de iterações seria 10 e a tolerância de convergência seria 5.

A tabela 2 contém os parâmetros com os valores dos dos parâmetros do modelo verdadeiro utilizado nessa primeira situação de testes. ρ_i e h_i correspondem, respectivamente, aos valores de resistividade e espessura referentes a camada i . A última camada tem espessura infinita.

Tabela 2 – Parâmetros do primeiro modelo verdadeiro sintético de três camadas.

Número da Camada	$\rho(\Omega * m)$	$h(m)$
1	200	200
2	10	400
3	70	∞

Por sua vez, a tabela 3 contém os parâmetros com os valores do modelo estimado que foi encontrado como resultado da inversão.

Tabela 3 – Parâmetros do primeiro modelo estimado de três camadas obtido pela inversão.

Número da Camada	$\rho(\Omega * m)$	$h(m)$
1	160.7882	238.3902
2	8.9222	314.2911
3	66.9592	∞

A seguir, pode-se visualizar, por meio de gráficos com escala logarítmica, os resultados da inversão nessa primeira situação.

A figura 7 mostra, por meio de uma curva de ajuste mínimo, a correlação entre a resistividade aparente observada (Com base nos parâmetros do modelo verdadeiro vistos na tabela 1), e a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado que a inversão encontrou (Com base nos parâmetros do modelo estimado vistos na tabela 2).

Se tratando do parâmetro resistividade aparente, percebe-se que o algoritmo teve uma melhor convergência entre o modelo verdadeiro e o modelo estimado em frequências mais baixas, ou seja, menores que 1 Hz.

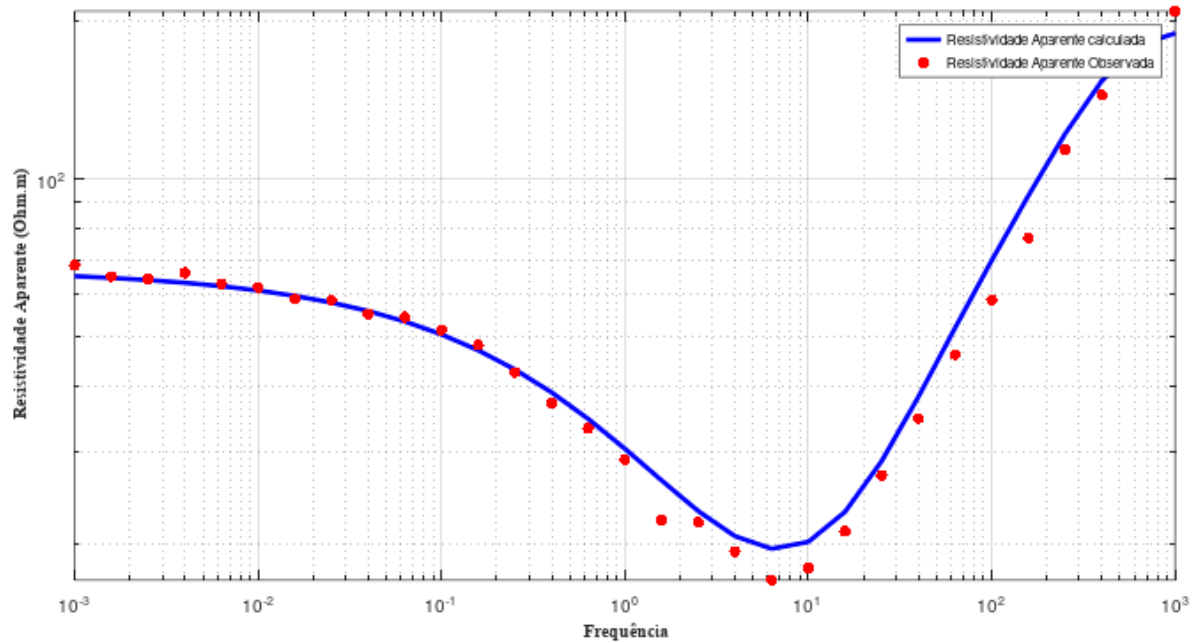


Figura 7 – Gráfico da convergência entre a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado e a resistividade aparente observada. Os pontos vermelhos correspondem a resistividade aparente observada; a linha azul representa a resistividade aparente obtida na inversão.

A figura 8 mostra, por meio de uma curva de ajuste mínimo, a correlação entre a fase observada (Com base nos parâmetros do modelo verdadeiro vistos na tabela 1), e a fase calculada pelo modelo estimado que a inversão encontrou (Com base nos parâmetros do modelo estimado vistos na tabela 2). A determinada fase em um ponto da onda eletromagnética se refere a sua variação local dos valores de amplitude e campo eletromagnético em tal ponto. No que se refere ao parâmetro fase, percebe-se que o algoritmo teve uma ótima convergência entre o modelo verdadeiro e o modelo estimado até 100 Hz.

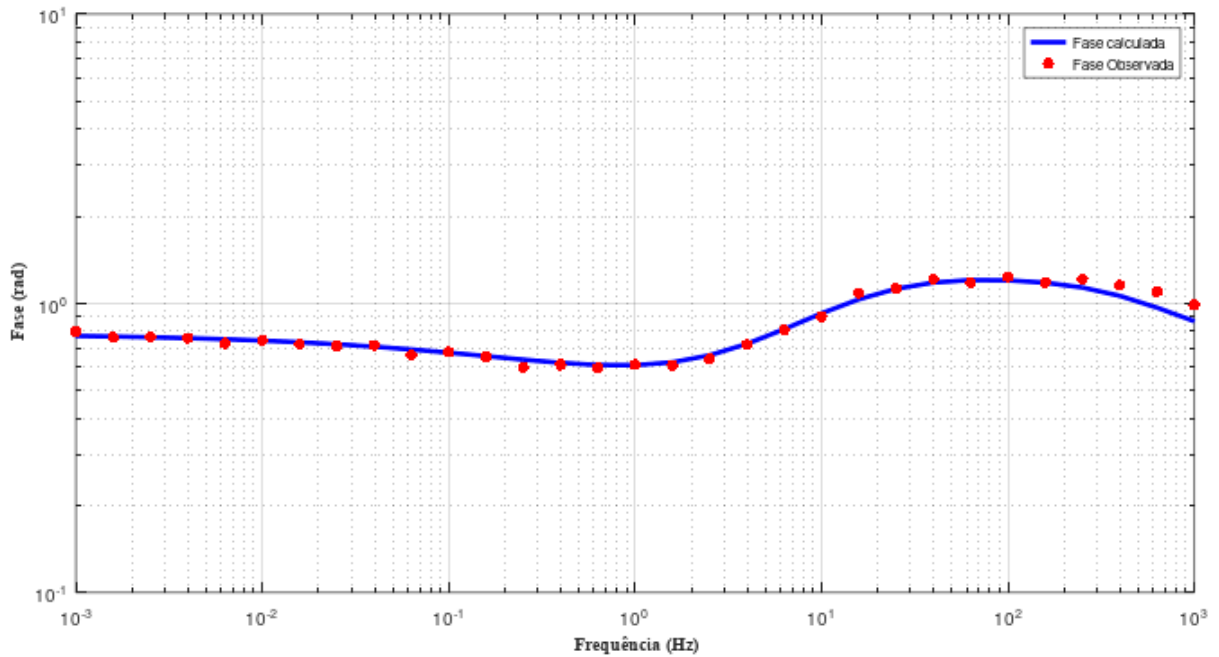


Figura 8 – Gráfico da convergência entre a fase calculada pelo modelo estimado e a fase observada. Os pontos vermelhos correspondem a fase observada; a linha azul representa a fase obtida na inversão.

Na figura 9 é possível investigar e comparar a variação da resistividade em cada camada de profundidade entre os dois modelos. Observa-se que na primeira camada (200 m), de 0 m até 200 m de profundidade, há um desajuste de $39,2 \, \Omega \cdot m$ na resistividade. Já na segunda camada (400 m), de 200 m até 600 m, há um desajuste de $1 \, \Omega \cdot m$ na resistividade. Percebe-se que na terceira camada (a partir de 600 m de profundidade), próximo a 1 Km, há uma ótima convergência entre o modelo verdadeiro e o modelo estimado.

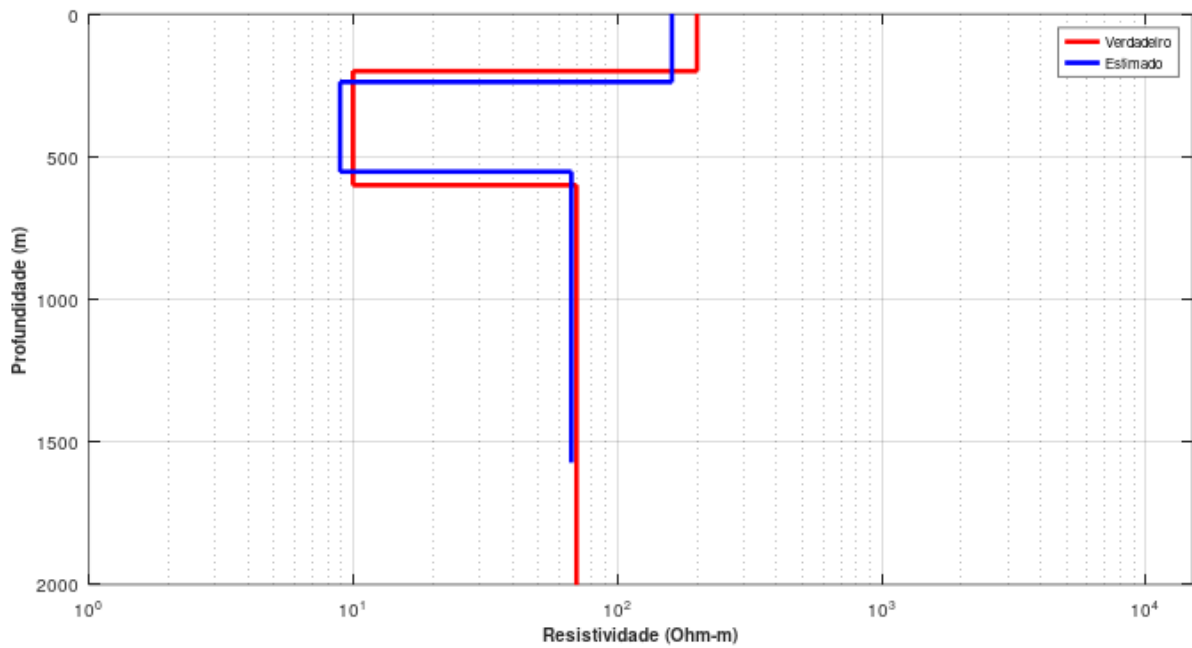


Figura 9 – Gráfico que representa a variação da resistividade conforme a profundidade de cada camada no subsolo em uma modelagem 1D de três camadas; é possível analisar a convergência entre o modelo encontrado pela inversão e o modelo observado.

A figura 10 mostra graficamente como o desajuste entre os dados observados no modelo verdadeiro e os dados calculados pelo modelo estimado foi minimizado ao longo das iterações do algoritmo, obtendo-se uma melhor minimização quando o algoritmo encontra o mínimo local na sétima iteração.

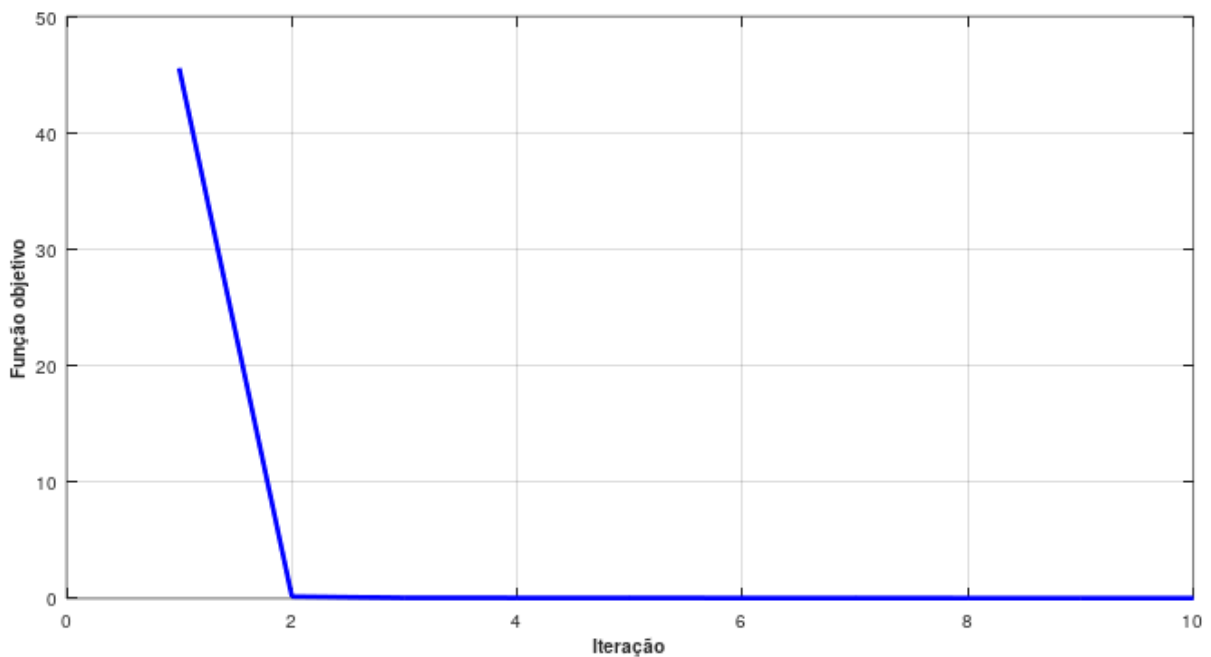


Figura 10 – Gráfico que ilustra a minimização da função objetivo, que representa o desajuste entre os dados observados e os dados calculados, ao longo das iterações do algoritmo.

3.1.2 MODELO 2

Os dados sintéticos foram gerados a partir do modelo obtido de [Mandolesi *et al.* \(2018\)](#), e um ruído gaussiano de 10% foi acrescentado na resistividade aparente observada e fase observada. Definiu-se, nessa segunda situação, que o número máximo de iterações seria 10 e a tolerância de convergência seria 2.

A tabela 4 contém os parâmetros com os valores dos parâmetros do modelo verdadeiro utilizado nessa segunda situação de testes.

Tabela 4 – Parâmetros do segundo modelo verdadeiro sintético de três camadas.

Número da Camada	$\rho(\Omega * m)$	$h(m)$
1	1000	1000
2	100	1000
3	1000	∞

Por sua vez, a tabela 5 contém os parâmetros com os valores do modelo estimado que foi encontrado como resultado da inversão.

Tabela 5 – Parâmetros do segundo modelo estimado de três camadas obtido pela inversão.

Número da Camada	$\rho(\Omega * m)$	$h(m)$
1	1000.840	1066.646
2	74.298	686.065
3	971.515	∞

A seguir, pode-se visualizar, por meio de gráficos com escala logarítmica, os resultados da inversão nessa segunda situação.

A figura 11 mostra, por meio de uma curva de ajuste mínimo, a correlação entre a resistividade aparente observada (Com base nos parâmetros do modelo verdadeiro vistos na tabela 4), e a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado que a inversão encontrou (Com base nos parâmetros do modelo estimado vistos na tabela 5). Se tratando do parâmetro resistividade aparente, percebe-se que o algoritmo teve uma melhor convergência entre o modelo verdadeiro e o modelo estimado em frequências mais baixas, ou seja, menores que 1 Hz.

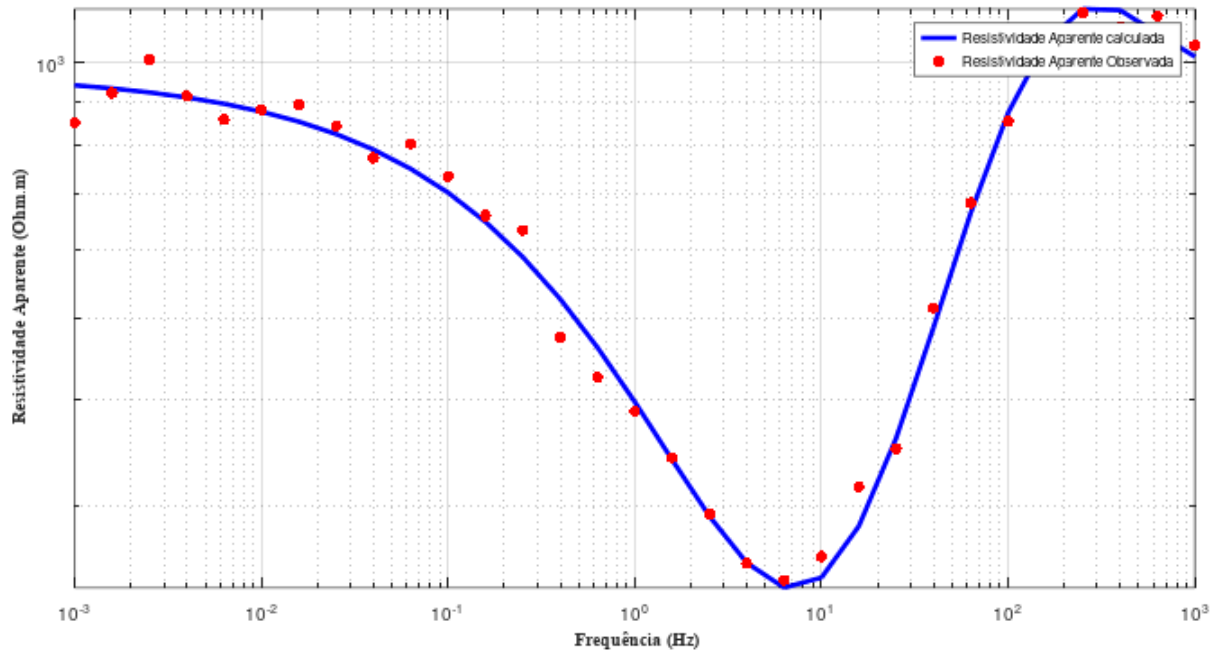


Figura 11 – Gráfico da convergência entre a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado e a resistividade aparente observada. Os pontos vermelhos correspondem a resistividade aparente observada; a linha azul representa a resistividade aparente obtida na inversão.

A figura 12 mostra, por meio de uma curva de ajuste mínimo, a correlação entre a fase observada (Com base nos parâmetros do modelo verdadeiro vistos na tabela 4), e a fase calculada pelo modelo estimado que a inversão encontrou (Com base nos parâmetros do modelo estimado vistos na tabela 5). Percebe-se que o algoritmo teve uma ótima convergência entre o modelo verdadeiro e o modelo estimado para toda a faixa de frequência.

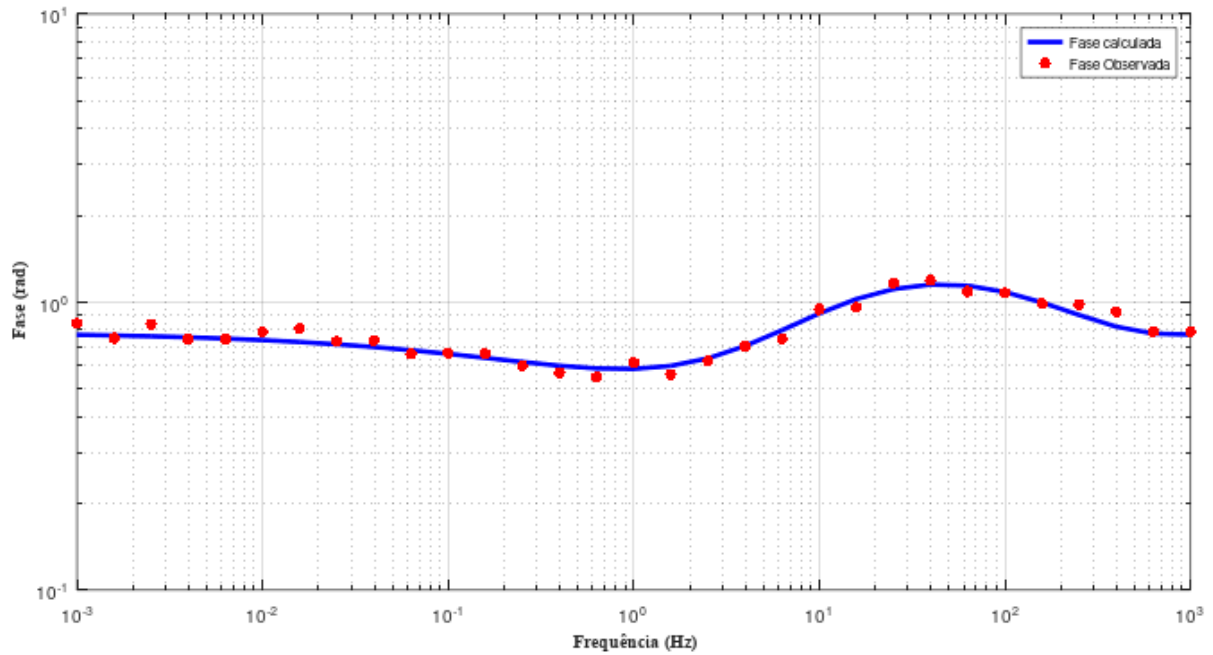


Figura 12 – Gráfico da convergência entre a fase calculada pelo modelo estimado e a fase observada. Os pontos vermelhos correspondem a fase observada; a linha azul representa a fase obtida na inversão.

Na figura 13 é possível investigar e comparar a variação da resistividade em cada camada de profundidade entre os dois modelos. Observa-se que na primeira camada (1000 m), de 0 m até 1000 m de profundidade, há um desajuste de $0,84 \Omega \cdot m$ na resistividade. Já na segunda camada (100 m), de 1000 m até 1100 m, há uma divergência de $25,702 \Omega \cdot m$ na resistividade. Percebe-se que na terceira camada (1000 m), a partir de 1100 m, há um desajuste de $28,485 \Omega \cdot m$. Observa-se que nessa segunda situação o algoritmo teve um ótimo desempenho na primeira camada, mas teve certa dificuldade em minimizar os desajustes na segunda e na terceira camada. Entretanto, ao atingir o mínimo local em maiores profundidades, na sexta iteração e a partir de aproximadamente 2200 m, ele se estabiliza e adquire uma ótima convergência entre o modelo verdadeiro e o modelo estimado.

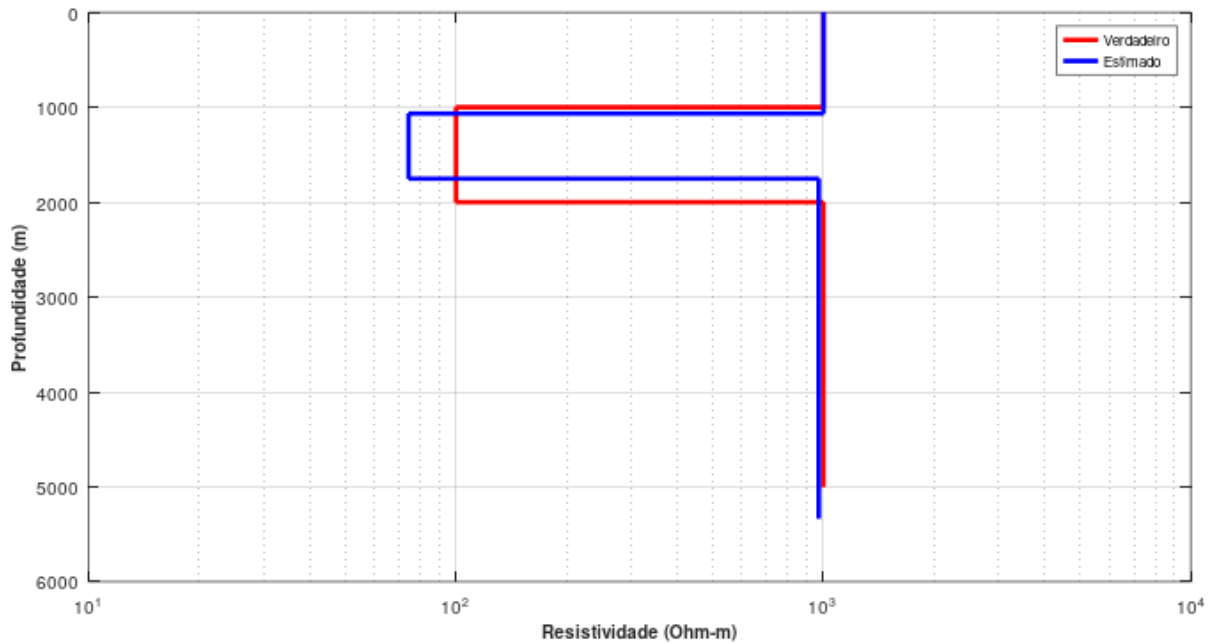


Figura 13 – Gráfico que representa a variação da resistividade conforme a profundidade de cada camada no subsolo em uma modelagem 1D de três camadas; é possível analisar a convergência entre o modelo encontrado pela inversão e o modelo observado.

A figura 14 mostra graficamente como o desajuste entre os dados observados no modelo verdadeiro e os dados calculados pelo modelo estimado foi minimizado ao longo das iterações do algoritmo, obtendo-se uma melhor minimização quando o algoritmo encontra o mínimo local na sexta iteração.

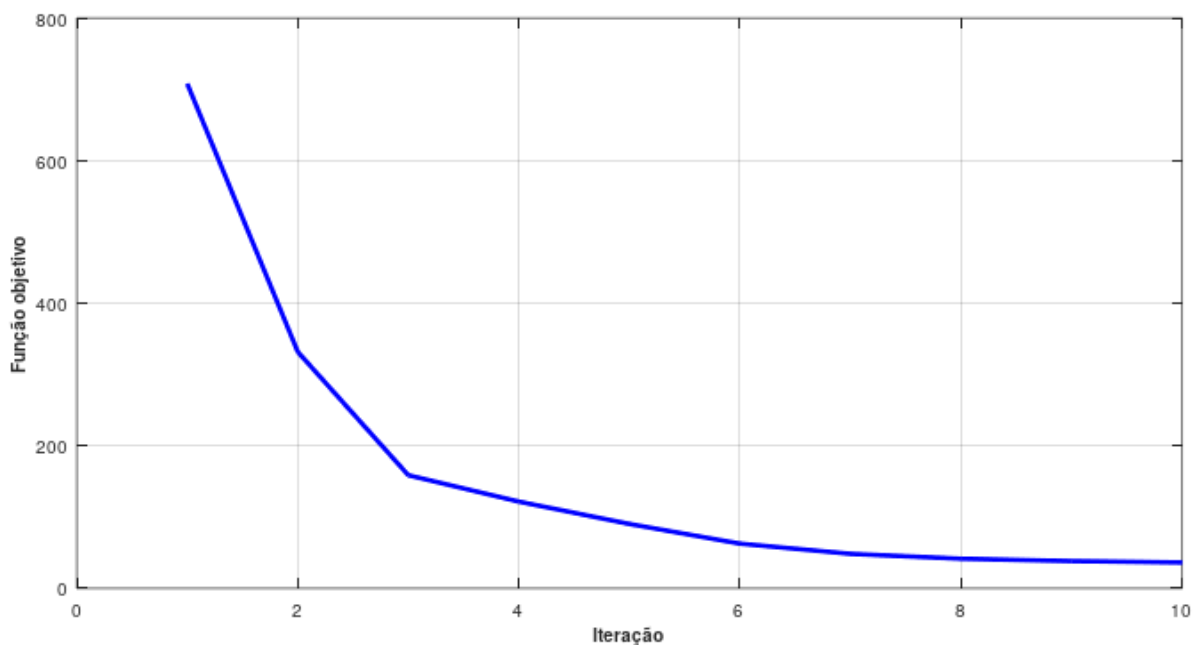


Figura 14 – Gráfico que ilustra a minimização da função objetivo, que representa o desajuste entre os dados observados e os dados calculados, ao longo das iterações do algoritmo.

3.2 INVERSÃO DE DADOS REAIS

Em seguida, testamos o desempenho da nossa implementação do LM utilizando um conjunto de dados reais. A amostra de dados reais utilizados para esses testes foi obtida de [Constable, Parker e Constable \(1987\)](#), baseado no trabalho de [Jones e Hutton \(1979\)](#), no qual foi retirada do conjunto de dados COPROD ([MTNET, 1987](#)). O dataset COPROD é composto por registros magnetotelúricos provenientes de trinta e cinco pontos de coleta, ao longo de um perfil que se estende de leste a oeste, cobrindo uma extensão de 300 quilômetros. Este perfil está localizado imediatamente ao norte da fronteira entre os Estados Unidos e o Canadá, situado no coração do território canadense. O trajeto do perfil atravessa a notável anomalia de condutividade conhecida como Planícies Centrais da América do Norte, juntamente com uma anomalia de menor magnitude que se encontra a leste. Os dados foram suavizados, para reduzir outliers, utilizando uma rotina de suavização polinomial de baixa ordem, tal como também foram corrigidos para mudanças estáticas usando a abordagem paramétrica da camada sedimentar ([JONES, 1988](#)).

A tabela 6 mostra os valores das medições dos períodos, das resistividades aparentes reais, do desvio padrão da resistividade aparente e das fases reais.

Tabela 6 – Dados reais.

Período(s)	$\log_{10} \rho_a (\Omega * m)$	$\sigma \log_{10} \rho_a$	Fase(Graus)
28.5	2.315	0.072	57.19
38.5	2.254	0.042	58.19
52.0	2.229	0.024	61.39
70.5	2.188	0.021	59.09
95.5	2.180	0.016	59.89
129.0	2.162	0.017	51.19
174.6	2.151	0.028	46.89
236.2	2.208	0.032	42.79
319.6	2.194	0.019	36.89
432.5	2.299	0.027	32.00
585.1	2.338	0.059	44.00
791.7	2.420	0.050	32.00
1071.1	2.405	0.082	37.59
1449.2	2.308	0.123	45.29
1960.7	2.397	0.092	50.09

Inicialmente, foi necessário transformar o período em frequência e, em seguida, foi preciso considerar o desvio padrão dos dados reais nas resistividades aparentes. Observando-

se o modelo "3" de Jones e Hutton (1979) empregado para a inversão do conjunto de dados COPROD no trabalho de Constable, Parker e Constable (1987), também optou-se por utilizar um modelo inicial homogêneo de quatro camadas como "ponto de partida" para o algoritmo na inversão de tais dados reais. Foi definido que o número máximo de iterações seria 15 e a tolerância de convergência seria 1.

Tabela 7 – Parâmetros do modelo inicial homogêneo de quatro camadas que foi utilizado como "ponto de partida" para o algoritmo na inversão de dados reais.

Número da Camada	$\rho(\Omega * m)$	$h(m)$
1	500	20000
2	500	20000
3	500	20000
4	500	∞

Por sua vez, a tabela 8 contém os parâmetros com os valores do modelo estimado que foi encontrado como resultado da inversão dos dados reais.

Tabela 8 – Parâmetros do modelo estimado de quatro camadas obtido pela inversão dos dados reais.

Número da Camada	$\rho(\Omega * m)$	$h(m)$
1	259.70	20151
2	84.931	20026
3	298.50	19877
4	346.47	∞

A seguir, pode-se visualizar, por meio de gráficos com escala logarítmica, os resultados da inversão com os dados reais:

A figura 15 mostra, por meio de uma curva de ajuste mínimo, a correlação entre a resistividade aparente observada (Com base nos parâmetros dos dados reais vistos na tabela 6), e a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado que a inversão encontrou. Se tratando do parâmetro resistividade aparente, percebe-se que o algoritmo teve certa dificuldade em encontrar uma boa convergência entre a resistividade aparente observada obtida a partir dos dados reais e a resistividade aparente estimada. Contudo, ressalta-se que a curva de ajuste de resistividade aparente obtida se assemelha consideravelmente à encontrada por Constable, Parker e Constable (1987).

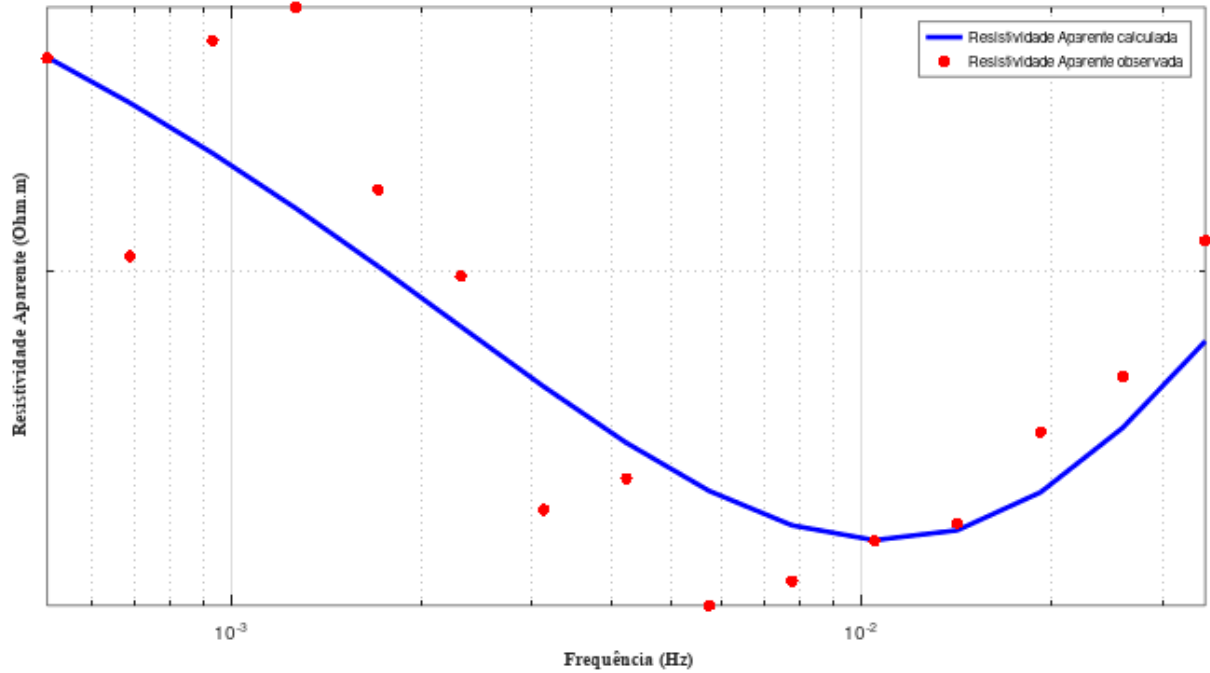


Figura 15 – Gráfico da convergência entre a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado e a resistividade aparente observada. Os pontos vermelhos correspondem a resistividade aparente observada; a linha azul representa a resistividade aparente obtida na inversão.

A figura 16 mostra, por meio de uma curva de ajuste mínimo, a correlação entre a fase observada (Com base nos parâmetros dos dados reais vistos na tabela 6), e a fase calculada pelo modelo estimado que a inversão encontrou. Percebe-se que o algoritmo teve uma boa convergência entre a fase observada obtida a partir dos dados reais e a fase estimada para toda a faixa de frequência.

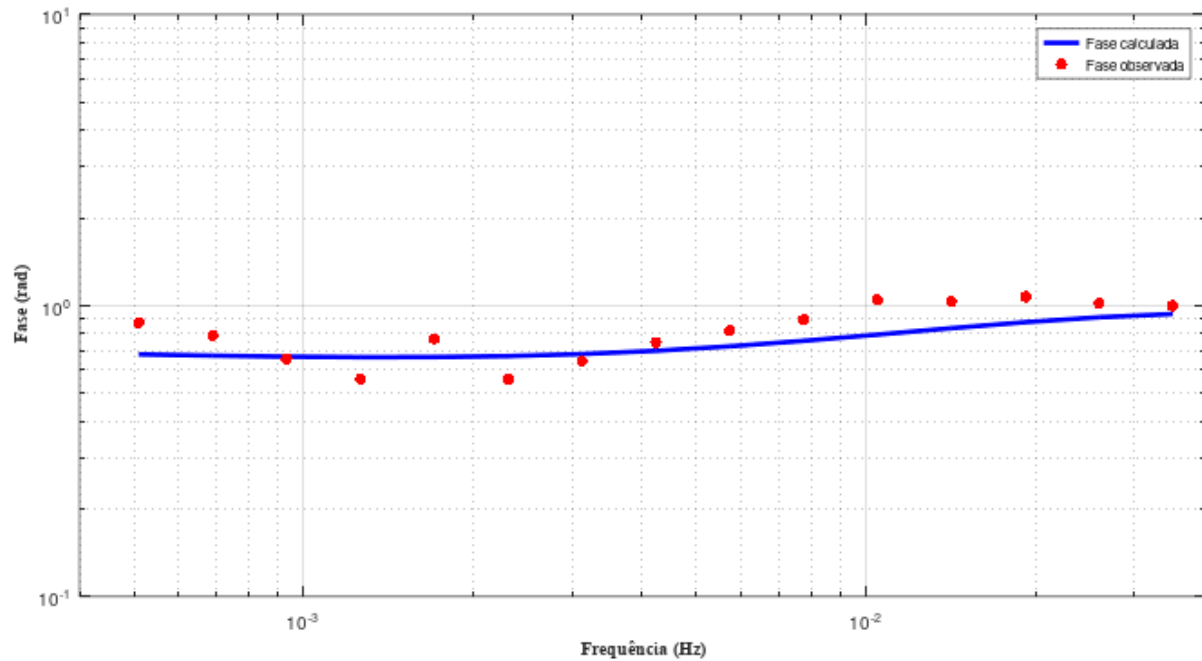


Figura 16 – Gráfico da convergência entre a fase calculada pelo modelo estimado e a fase observada. Os pontos vermelhos correspondem a fase observada; a linha azul representa a fase obtida na inversão.

Na figura 17 é possível investigar e comparar a variação da resistividade em cada camada de profundidade entre o modelo estimado pelo algoritmo após a inversão dos dados reais e o modelo inicial homogêneo. Observa-se que o algoritmo identificou as quatro camadas do modelo de terra, cada qual com sua respectiva resistividade e espessura, tal como no modelo inicial homogêneo que foi utilizado como "ponto de partida".

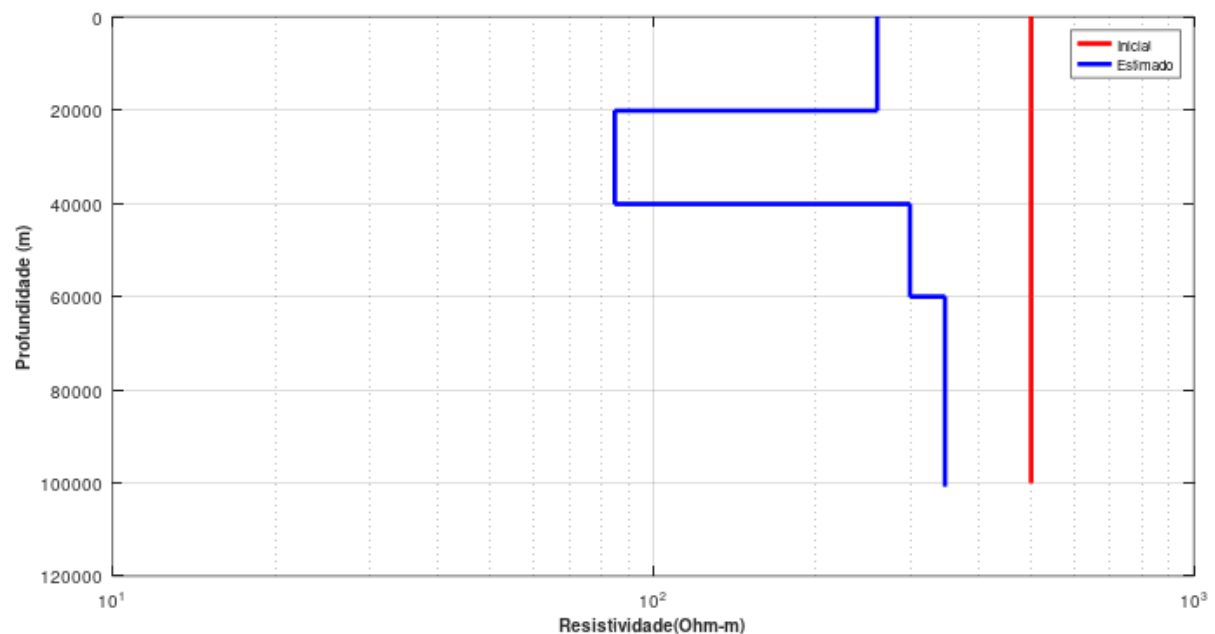


Figura 17 – Gráfico que representa a variação da resistividade conforme a profundidade de cada camada no subsolo em uma modelagem 1D de quatro camadas, conforme o modelo estimado pela inversão dos dados reais.

A figura 18 mostra graficamente como a função objetivo foi minimizada ao longo das iterações do algoritmo, obtendo-se uma melhor minimização quando o algoritmo encontra o mínimo local na quinta iteração.

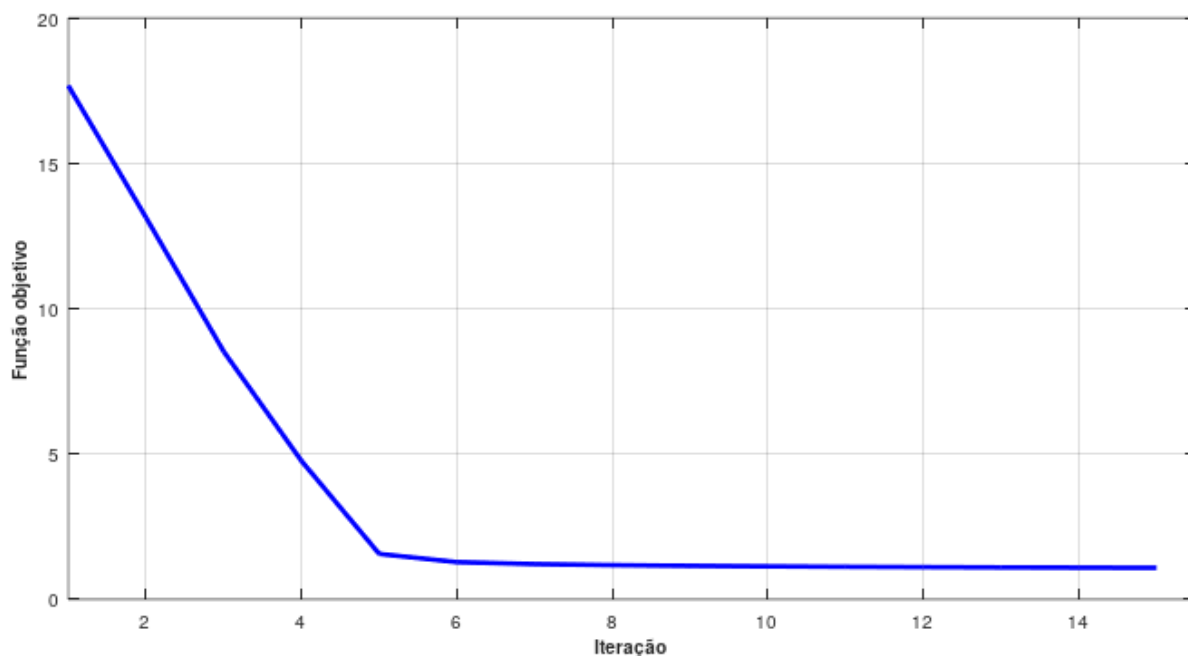


Figura 18 – Gráfico que ilustra a minimização da função objetivo, que representa o desajuste entre os dados observados reais e os dados calculados, ao longo das iterações do algoritmo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No início deste trabalho, estabeleceu-se como objetivos principais a aplicação do algoritmo de otimização local de Levenberg-Marquardt na inversão de dados magnetotelúricos e a avaliação de seu desempenho, particularmente na modelagem 1D.

Os experimentos realizados, que incluíram a utilização de dados sintéticos com ruído e dados reais da base de dados magnetotelúricos COPROD, forneceram resultados satisfatórios que corroboram com a premissa de que o algoritmo LM pode ser uma alternativa viável para a inversão de dados MT em modelagem 1D. Ressalta-se que o desempenho do algoritmo mostrou-se particularmente eficaz quando aplicado a dados de baixas frequências e, além disso, o baixo custo computacional do algoritmo também se destacou.

REFERÊNCIAS

- ASTER, R. C.; BORCHERS, B.; THURBER, C. H. **Parameter estimation and inverse problems**. [S.l.]: Elsevier, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 28.
- BASTOS, E. A. Otimização de seções retangulares de concreto armado submetidas à flexo-compressão oblíqua utilizando algoritmos genéticos. **Rio de Janeiro, RJ**, p. 40, 2004. Citado na página 26.
- BENATTI, K. A. O método de levenberg-marquardt para o problema de quadrados mínimos não linear. In: **II Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia**. [S.l.: s.n.], 2017. Citado na página 27.
- CARNEIRO, A. L. C. **Algoritmos de otimização**. 2020. Url<https://medium.com/data-hackers/algoritmos-de-otimiza%C3%A7%C3%A3o-hill-climbing-e-simulated-annealing-3803061f66f0>. Citado na página 25.
- CHAVE, A. D.; JONES, A. G. **The magnetotelluric method: Theory and practice**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. Citado na página 15.
- CLOUD, S. **How Does the Levenberg-Marquardt Algorithm Work in Detail?** 2023. Disponível em: <https://saturncloud.io/blog/how-does-the-levenbergmarquardt-algorithm-work-in-detail/>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- COLLEGE, M. F. **Golden Section Search Method**. 2012. Disponível em: https://nm.mathforcollege.com/mws/gen/09opt/mws_gen_opt_txt_goldensearch.pdf. Citado na página 29.
- CONSTABLE, S. C.; PARKER, R. L.; CONSTABLE, C. G. Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 52, n. 3, p. 289–300, 1987. Citado 4 vezes nas páginas 32, 41 e 42.
- CUMMING, W.; MACKIE, R. Resistivity imaging of geothermal resources using 1d, 2d and 3d mt inversion and tdem static shift correction illustrated by a glass mountain case history. In: BALI, INDONASIA. **Proceedings world geothermal congress**. [S.l.], 2010. p. 25–29. Citado na página 21.
- FERNANDES, S.; PIEDADE, A. Inversão 1d de dados sintéticos do método magnetotelúrico. 2018. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 22 e 24.
- GAVIN, H. P. The levenberg-marquardt algorithm for nonlinear least squares curve-fitting problems. **Department of civil and environmental engineering, Duke University**, v. 19, 2019. Citado na página 28.
- GILL, P. E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M. H. **Practical optimization**. [S.l.]: SIAM, 2019. Citado na página 29.

- HADAMARD, J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. **Princeton university bulletin**, Princeton University, p. 49–52, 1902. Citado na página 15.
- JONES, A. G. Static shift of magnetotelluric data and its removal in a sedimentary basin environment. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 53, n. 7, p. 967–978, 1988. Citado na página 41.
- JONES, A. G.; HUTTON, R. A multi-station magnetotelluric study in southern scotland–i. fieldwork, data analysis and results. **Geophysical Journal International**, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 56, n. 2, p. 329–349, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- LEVENBERG, K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. **Quarterly of applied mathematics**, v. 2, n. 2, p. 164–168, 1944. Citado na página 29.
- LI, Y.; OLDENBURG, D. W. 3-d inversion of magnetic data. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 61, n. 2, p. 394–408, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 15, 18 e 24.
- LUENBERGER, D. G.; YE, Y. *et al.* **Linear and nonlinear programming**. [S.l.]: Springer, 1984. v. 2. Citado na página 26.
- MANDOLESI, E.; OGAYA, X.; CAMPANYÀ, J.; AGOSTINETTI, N. P. A reversible-jump markov chain monte carlo algorithm for 1d inversion of magnetotelluric data. **Computers & Geosciences**, Elsevier, v. 113, p. 94–105, 2018. Citado na página 37.
- MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. **Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics**, SIAM, v. 11, n. 2, p. 431–441, 1963. Citado na página 29.
- MTNET. **COPROD MT dataset**. 1987. Disponível em: <<https://www.mtnet.info/data/coprod2/coprod2.html>>. Citado na página 41.
- NABIGHIAN, M. N. Toward a three-dimensional automatic interpretation of potential field data via generalized hilbert transforms: Fundamental relations. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 49, n. 6, p. 780–786, 1984. Citado na página 15.
- NILG.AI. **Local vs. global optimization**. 2022. Disponível em: <<https://nilg.ai/202206/local-vs-global-optimization/>>. Citado na página 25.
- OCTAVE, G. Gnu octave. **línea**]. Available: <http://www.gnu.org/software/octave>, 2023. Citado na página 32.
- PARKER, R. L. Understanding inverse theory. **Annual Review of Earth and Planetary Sciences**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 5, n. 1, p. 35–64, 1977. Citado na página 22.
- PUJOL, J. The solution of nonlinear inverse problems and the levenberg-marquardt method. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 72, n. 4, p. W1–W16, 2007. Citado na página 16.

- ROMERO, P.; TERRA, E. F. L. Modelagem de dados magnetotelúricos na parte emersa da bacia potiguar, brasil. In: SOCIETY OF EXPLORATION GEOPHYSICISTS AND BRAZILIAN GEOPHYSICAL SOCIETY. **12th International Congress of the Brazilian Geophysical Society & EXPOGEF, Rio de Janeiro, Brazil, 15–18 August 2011**. [S.l.], 2011. p. 240–245. Citado na página [24](#).
- SANTOS, A. C. L. d. Imageamento magnetotelúrico de estruturas da litosfera na porção se da província borborema. 2012. Citado 3 vezes nas páginas [18](#) e [19](#).
- SEN, M. K.; STOFFA, P. L. **Global optimization methods in geophysical inversion**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. Citado 2 vezes nas páginas [22](#) e [33](#).
- SHAW, R.; SRIVASTAVA, S. Particle swarm optimization: A new tool to invert geophysical data. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 72, n. 2, p. F75–F83, 2007. Citado na página [23](#).
- TELFORD, W. M.; TELFORD, W.; GELDART, L.; SHERIFF, R. E. **Applied geophysics**. [S.l.]: Cambridge university press, 1990. Citado na página [15](#).
- TRIGO, F. C.; LIMA, R. G. Estimação não linear de parâmetros através dos filtros de kalman na tomografia por impedância elétrica. 2005. Citado na página [23](#).
- VELHO, H. F. de C. Problemas inversos: conceitos básicos e aplicações. **Anais do Encontro de Modelagem Computacional. Mini-curso**, p. 63–79, 2001. Citado 2 vezes nas páginas [15](#) e [24](#).
- VOZOFF, K. Magnetotellurics: Principles and practice. **Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Earth and Planetary Sciences**, Springer, v. 99, p. 441–471, 1990. Citado na página [19](#).