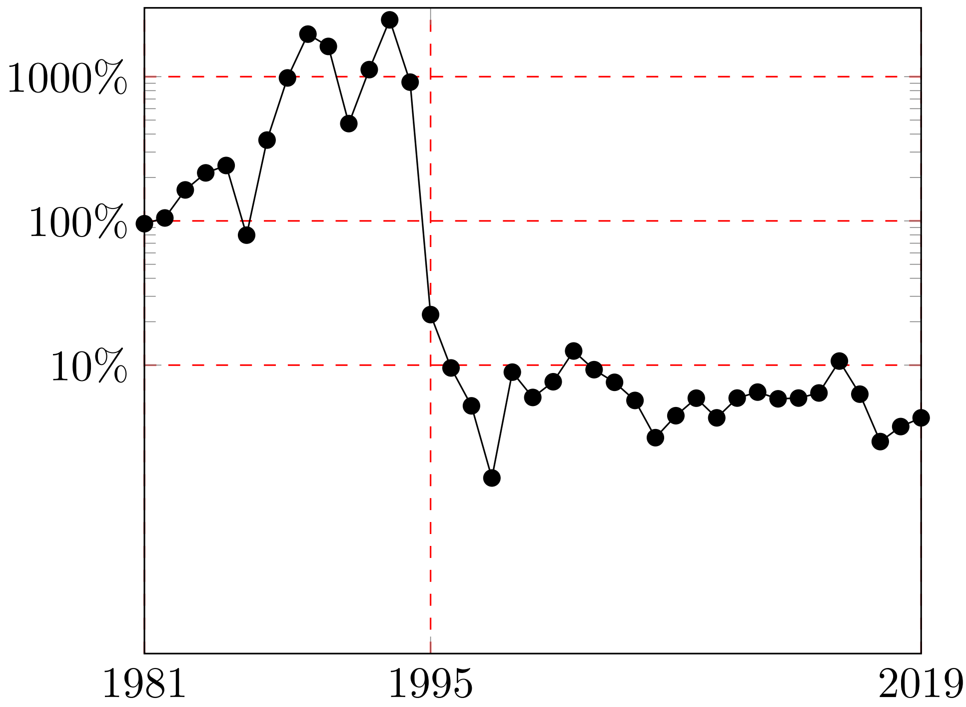
Finanças Matemática

Teoria e Prática



Marco A. P. Cabral

Primeira Edição Modificada.
Versão de 07 de Agosto de 2020
Para Imprimir.

AUTOR: Marco Aurélio Palumbo Cabral é PhD em Matemática pela Indiana University (EUA). Fez o Bacharelado em Informática na UFRJ e o Mestrado em Matemática Aplicada na UFRJ. É professor no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro desde 1996.

CAPA: Inflação no Brasil desde 1981 até os dias de hoje em escala logarítmica em y para que possamos entender o que ocorreu ao longo do tempo. Mais detalhes na página189.

Disponível em `https://gitlab.com/mapcabral/livro-financas/`

Instituto de Matemática
Departamento de Matemática Aplicada

Prefácio

O público alvo deste livro são alunos de 3o período em diante de curso de ciências exatas, incluindo Engenharia, Física, Computação, Matemática, Estatística, Atuaria.

Os pré-requisitos são apenas maturidade matemática, pois o material é autocontido. Buscamos juntar teoria com prática, com foco em aplicações no mercado brasileiro.

Além da teoria matemática completa, com apresentação de modelos, teoremas e provas, apresentamos métodos numéricos para implementar estes modelos.

Com relação aos livros de Finanças Matemática existentes, quais são os diferenciais que justificam mais um livro?

- Criar base sólida teórica sobre os modelos. Neste sentido é um curso mais teórico e que será útil no futuro pois o alunos estará aprendendo modelos específicos como forma de aprender o que vai ficar para sempre: Probabilidade, Processos Estocásticos, Estatística, Métodos Numéricos, Modelagem Matemática.

- Focar no aluno de graduação de segundo ano. Os livros tendem a ser para aluno de Mestrado/Doutorado ou para aluno que não tem base em Matemática.

- A implementação no computador dos modelos é fundamental, e aparece no texto e nos projetos no final de cada capítulo.

- Foi concebido como livro texto, com muitos exercícios em todos os capítulos. Estes exercícios foram testados em sala de aula, e foram aprimorados e criados para endereçar dificuldades dos alunos.

- Não utilizamos nenhum software em particular. O aluno poderá implementar em Python; R; Libre Office, Julia, etc. os algoritmos apresentados.

Para encerrar seguem agradecimentos.

Agradeço ao meu colega Cassio Neri pelas conversas sobre finanças que ajudaram muito a calibrar o que seria um material apropriado para uma primeira disciplina em finanças matemática.

Agradeço também às dezenas de alunos que cursaram a disciplina Modelagem Matemática em Finanças I da UFRJ, que vem sendo ministrada todo 1o semestre desde

2009. Recebemos alunos da Matemática Aplicada, Estatística, Atuaria, Bacharelado em Matemática, Engenharia e Economia. Agradeço em especial aos alunos e alunas: Karolayne Dessabato (2020), Luis Miguel Carmona (2020), Edson Araujo de Barros Junior (2020), Felipe Francesco Patitucci (2021).

Sumário

1
Introdução

1.1 História das Finanças

Pode-se traçar a origem histórica das finanças às grandes civilizações que floresceram à margem do Nilo (Egito antigo) e dos rios Tigres e Eufrates (Babilônia antiga) cerca de 5.000 AC. Eles encontraram problemas que persistem até hoje em diversos lugares:

- Eles plantavam em terrenos próximos aos rios e, de vez em quando, enchentes arrasavam as plantações. Para a família dona da propriedade era uma tragédia perder toda a produção ou ter prejuízo grande.
- O preço por ocasião do plantio poderia ser bem mais alto do que na colheita, frustando uma expectativa de renda ou gerando prejuízo pois o tempo investido na plantação não seria bem recompensado depois.
- Dependendo das condições climáticos daquele ano a safra sai maior ou menor, retirando a previsibilidade do que seria o resultado do ano.

Seria interessante poder fazer algum tipo de seguro sobre a produção ou garantir um mínimo de renda. Destas necessidades surgiram os primeiros produtos do mercado financeiro tais como venda antecipada de produção por certo preço fixo, garantindo renda mínima. De fato os produtos do mercado financeiro podem ser vistos como **seguros** contra situações adversas, ou, de forma geral, mecanismos para se reduzir ou controlar o risco, delimitando prejuízo máximo.

Ao longo do tempo estes produtos foram ficando cada vez mais sofisticados, exigindo para seu entendimento o uso de ferramentas matemáticas complexas.

O início do uso de Matemática em Finanças – o **marco zero** da Finanças Matemática – foi a tese de doutorado de Louis Bachelier defendida em março de 1900 na Universidade de Paris e orientada pelo grande matemático francês Henri Poincaré. Em sua tese com o título *Théorie de la spéculation* ele propôs um modelo para o preço das ações da bolsa de Paris que, embora seja incorreto, foi fundamental pelo pioneirismo pois foi o primeiro modelo matemático para o valor de uma ação usando uma ferramenta matemática hoje conhecida como **processo de Wiener**, que também modela o chamado **movimento Browniano** (mais sobre isso mais adiante). O erro dele foi supor que o valor das ações S poderia ser modelado diretamente pelo movimento browniano, que foi corrigido nos modelos posteriores pela hipótese que os **retornos** dS/S, variação do valor da ação dividido pelo preço da ação, é que podem ser modelados com o movimento browniano.

O movimento Browniano foi observado pelo botânico Robert Brown em 1827 em seu microscópio. Ele observou que o pólen em água fazia um movimento irregular, aparentemente aleatório, mas não soube explicar o que causava este movimento. Em 1905[1] Einstein publicou um artigo onde explicava a natureza do movimento browniano. Somente em torno de 1923 o matemático Norbert Wiener estabeleceu bases matemáticas sólidas para modelar o movimento browniano. Este modelo matemático é conhecido como processo de Wiener. Por esta razão se usam até hoje como sinônimos o movimento browniano e o processo de Wiener e se representa por B ou W este processo.

Mais tarde, na década de 1960, Paul Samuelson corrigiu o modelo original de Bachelier para o preço da ação e observou que pode-se modelar utilizando o processo de Wiener os retornos – o percentual de ganho e perda – de cada ação e não o valor em si.

Em 1954 chegamos ao segundo marco fundamental das Finanças Matemática: a Tese de Doutorado de H. Markowitz defendida na Universidade de Chicago sobre a **teoria das carteiras** (*portfolio theory*). Baseado neste trabalho, Sharpe introduziu o chamado modelo CAPM, Capital Asset Pricing Model, para determinar como alocar de forma ótima recursos financeiros entre diversos ativos. Dedicamos um capítulo inteiro ao assunto. Em 1990 Markowitz, Sharpe e Miller ganharam o premio Nobel por este trabalho.

Em 1973 chegamos ao terceiro marco fundamental das Finanças Matemática: as equações e a **fórmula de Black-Scholes**[2], usada para calcular o valor de contratos importantes do mercado financeiros, como por exemplo os chamados calls e puts (mais adiante no livro falaremos deles). Hoje são tão comuns que são uma função interna em todos programas de planilha eletrônica. Estas equações e a fórmula são tão importantes que fizeram com que Merton and Scholes (Black morreu em 1995) recebessem o prêmio Nobel de Economia em 1997.

Na mesma década de 1970 começa a abertura de empregos no mercado financeiro para Físicos e Matemáticos, além dos Engenheiros. Nos EUA é comum ainda se referir aos "rocket scientists from Wall Street", em referência à rua de Nova Iorque (Wall Street) que concentra o mercado financeiro e aos Físicos (e Matemáticos), que em linguagem popular são chamados de cientistas de foguete, associando principalmente a Werner Von Braun, cientista alemão que depois da guerra foi para NASA, a agência espacial americana, projetar os foguetes que levaram o homem a lua em 1969. Este movimento continua até hoje, com Doutores e Mestres em Física, Matemática ou Estatística, ou graduados em Matemática, Estatística, Economia e Engenharia e similares recebendo ofertas de trabalho no mercado financeiro.

Quais são as habilidades esperadas pelo mercado destes profissionais?

---

[1] Conhecido como o *annus mirabilis* (em latim, ano miraculoso) da sua vida científica pois produziu 5 artigos importantes, um deles onde apresenta sua tese que $E = mc^2$.

[2] Alguns dizem Black-Scholes-Merton

1. Conhecimento de teoria, modelos e métodos numéricos da **Matemática e Estatística**.
2. Ter boa base em **Computação** para saber implementar estes modelos.
3. Ter conhecimentos de **Finanças**, sabendo aplicar 1 e 2 nos problemas de Finanças.

Estas habilidades são o esqueleto invisível por trás deste texto.

1.2 Mercado Financeiro

Mercados, originalmente, eram locais públicos – praças ou prédios usualmente no centro das cidades – onde produtores e consumidores se encontravam com regularidade, em dias pré-determinados para fazer negócios. A vantagem de um mercado em relação a negócios diretos são óbvias: ao invés de percorrer a cidade de forma aleatória para encontrar um comprador, o vendedor sabe que lá os compradores poderão se encontrar com os vendedores. Todos ganham ao final com a maior concorrência, pois nem o vendedor nem o comprador ficam a mercê de um único operador.

Esse esquema original evoluiu para mercados virtuais, acessados através de aplicativos e plataformas digitais onde se compra e vende não somente ações e mercadorias como também se oferece serviços (conserto, transporte de pessoas e mercadorias, aluguel). A bolsa de valores, que era um local físico onde os operadores de compra e venda se encontravam, são hoje totalmente eletrônicas.

Definição 1.1: Mercado Financeiro

O **mercado financeiro** é o conjunto dos locais, físicos e virtuais, onde são negociados produtos do mercado financeiro: ações, moedas, ouro, mercadorias – os chamados **ativos financeiros** e contratos cujo valor é baseado no preço destes ativos em certas datas futuras, os chamados **derivativos**.

Em mercados financeiros são negociados produtos financeiros. Ele existe pela mesma razão que os mercados onde se negociam mercadorias: para facilitar o encontro de comprador com vendedor.

Pela natureza do produto oferecido em um mercado financeiro – capital (recursos financeiros) – ele promove o encontro entre:

- Os que **precisam de capital**: Empresas que querem expandir seus negócios, inventores e empreendedores, com ideias novas para produtos e serviços mas sem capital para montar seus negócios. Pessoas que precisam adquirir bens de maior valor e não podem pagar à vista, tipicamente imóveis e veículos.
- Os que **possuem capital**: Pequenos e grandes investidores, buscando maior rentabilidade para seu capital disponível; fundos de pensão e seguradoras, investindo para preservar e/ou crescer os valores acumulados pelos futuros pensionistas ou querendo provisionar para possíveis despesas futuras.

Tradicionalmente esta atividade era mediada por bancos. Assim quem quisesse montar um novo negócio pegava empréstimo no banco para compra de estoque, equipamento etc. Mais tarde surgiram alternativas como as sociedades nas empresas, que possuem um ou mais sócios que entram com o capital na sociedade, ou as ações, onde ao invés buscar alguns poucos sócios para o negócio você pulveriza o capital entre milhares de sócios, pois quem possui ações é proprietário de parte da empresa.

A importância de possuir um mercado financeiro desenvolvido é a possibilidade de gerar ainda mais riquezas e prosperidade para um país. O mercado financeiro conecta: (a) o recurso poupado por uns com (b) o espírito empreendedor de outros. Nem sempre quem poupa tem disposição, saúde ou tempo para utilizar os recursos extras para montar um negócio.

Cada nova empresa contribui para o prosperidade da nação pois:

- gera empregos de forma direta, que vão melhorar a vida dos seus funcionários bem como dos seus acionistas ou proprietários;
- paga impostos que vão financiar as atividades de um governo – entre outras segurança, educação, saúde – que vão melhorar vida da população como um todo;
- cria demanda de novos produtos e serviços oferecidos por outras empresas, gerando um ciclo virtuoso de crescimento econômico.

Assim, quando um empresário monta um novo negócio embora sua motivação principal seja, de forma geral, aumentar sua riqueza (e de seus investidores), ele de forma direta e indireta está aumentando a riqueza da nação. Aqui vale citar a frase famosa daquele que é considerado o pai da Economia, Adam Smith:

> Give me that which I want, and you shall have this which you want, is the meaning of every such offer; and it is in this manner that we obtain from one another the far greater part of those good offices which we stand in need of. It is not from the benevolence of the butcher, the brewer, or the baker that we expect our dinner, but from their regard to their own interest. We address ourselves, not to their humanity, but to their self-love, and never talk to them of our own necessities, but of their advantages. [3] Adam Smith, “A Riqueza das Nações Vol. 1” (1776).

Adam Smith investigou quais as causas da riqueza de uma nação (o título completo do seu livro é “An Inquiry Into the Nature and Causes of the Wealth of Nations”), revelando os diversos mecanismos que ajudam e os que impedem esta geração de riquezas. Na época a teoria corrente era o acúmulo de ouro (o chamado Mercantilismo). Smith focou na **geração** de novas riquezas e não no seu entesouramento (guardar ouro).

[3] Me dê o que eu quero, e você terá o que quer, é o significado de todo oferta [de negócio]; e é dessa maneira que obtemos um do outro a maior parte daqueles bens que precisamos. Não é da benevolência do açougueiro, do cervejeiro ou do padeiro que esperamos o nosso jantar, mas da consideração deles por seu próprio interesse. Não nos dirigimos à sua humanidade, mas a seu amor próprio, e nunca conversamos com eles sobre nossas próprias necessidades, mas sim sobre como podem se beneficiar [de fazer negócio conosco].

Juntando os elementos apresentados, quando um empreendedor tem a ideia de um novo negócio ele tem como motivação principal ganhar dinheiro através da oferta de um novo produto/serviço e o mercado financeiro possibilitará a criação deste novo negócio, que no final vai gerar mais prosperidade para toda nação. Numa economia **sem** o mercado financeiro cada indivíduo dependeria de sua própria economia de recursos para poder investir. Assim os investimentos seriam bem menores ao longo do tempo. Na prática isto significa um crescimento econômico bem mais baixo ou no limite quase todos viverem em nível de subsistência, sem possibilidade de melhorar de vida.

1.3 Ações

Uma empresa pode se capitalizar (buscar recursos para viabilizar seus negócios – adquirir equipamentos, pagamento inicial do aluguel, salários, reforma do local onde vai funcionar) de várias formas:

(a) O dono possui recursos próprios poupados para iniciar o negócio.

(b) Um ou mais sócios se unem e juntam recursos poupados para iniciar o negócio, formando uma **empresa (ou sociedade) de capital fechado**.

(c) Pegando empréstimo em um banco com certa taxa de juros.

(d) Oferecendo sociedade na empresa em pequenas cotas (ações) que são oferecidas a qualquer um que esteja interessado: dizemos que é uma **empresa (ou sociedade) de capital aberto** (a todos interessados)

Definição 1.2: Empresa de Capital Aberto, Ações, IPO

Empresas cujo capital total é fracionado em cotas e cada cota, chamada de **ação**, é oferecida de forma aberta para todos no mercado financeiro, com suas ações negociadas posteriormente em uma bolsa de valores, são conhecidas como **empresas de capital aberto** ou SA'a (Sociedades Anônimas). A **abertura de capital** de uma empresa, ocasião em que são oferecidas ações ao público, é feita numa oferta pública inicial de ações, chamada de **IPO – Initial Public Offering**.

Por contraste, uma **empresa de capital fechado** possui um certo número de sócios que se escolheram mutualmente. Quem possui ações de uma empresa é sócio de certo percentual da empresa correspondente à proporção que possui com relação ao total de ações emitidas.

Daremos um exemplo. Uma empresa será formada com capital inicial de R$ 100 mil que será dividido em 10 mil cotas de R$10 cada. Cada cota é chamada de **ação**, que no caso seria oferecida inicialmente a R$10 cada uma das 10 mil ações. Assim um indivíduo que possua 500 ações será dono de 5% da empresa (500/10000). No dia seguinte ao IPO as ações passam a ser negociadas em bolsa, podendo ocorrer queda ou alta dependendo das expectativas do mercado quanto ao futuro da empresa.

Empresas de capital aberto possuem ainda vários diferenciais em relação às de capital fechado. Uma delas é que separa os bens do dono da empresa da situação da empresa.

Basicamente dívidas geradas pelo empresa não serão cobrada dos seus sócios na pessoa física, ao contrário de empresas de capital fechado cujas dívidas podem ser cobradas da pessoa física, os donos da empresa. As regras para abertura e fiscalização do funcionamento de empresas de capital aberto e de todo mercado de ações e financeiro são feitas no Brasil pela CVM (Comissão de Valores Mobiliários). Mais sobre a CVM na próxima seção. Estas regras são importantes, entre outras coisas, para garantir os sócios minoritários, os pequenos investidores que possuem poucas ações e poderiam ser prejudicados pelos controladores da empresa, que possuem mais da metade das ações.

Algumas vantagens de levantar o capital por meio de ações: não pagar juros ao banco (forma barata de ter capital disponível), não depender de uma única pessoa ou poucas (2 ou 3 sócios) que tenham o capital inicial necessário para se abrir a empresa e deixá-la funcionando até que comece a dar retorno, e finalmente, pulverizar o capital, de modo que cada um que compra algumas ações não fica totalmente dependente do desempenho desta empresa em particular, podendo diluir o risco entre várias empresas distintas.

Existem empresas cujas ações proporcionam a distribuição de parte do lucro, semestral ou anual, para seus acionistas, em relação proporcional direta com o número de ações que se possui. Os donos das **ações ordinárias** possuem o direito à voto em decisões estratégicas sobre o futuro da empresa, enquanto as **ações preferenciais** não proporcionam este direito.

Quando construímos modelos matemáticos em finanças é importante utilizar números negativos. Assim se temos na carteira um certo valor A e gastamos B, ficaremos com $A - B$ na carteira. Ora, caso $B > A$ "possuiremos" um valor negativo na carteira. Qual o significado no mundo real disso? É que temos agora uma dívida. Na prática teríamos que pegar emprestado este valor. O mesmo ocorrerá em nossa modelagem envolvendo ações. Podemos comprar ações ou tomar emprestado ações. Matematicamente podemos possuir 3 ações ou -4 ações, com o "possuir ou comprar -4 ações" significando que pegamos emprestado 4 ações, e teremos que devolver, em alguma data futura, as 4 ações. É uma operação que existe no mercado real, como se fosse alugar uma ação para se devolver depois.

Definição 1.3: Ficar Vendido ou Venda a Descoberto ou Sell Short

Pode-se comprar (ou possuir) uma quantidade **negativa** de ações, que em termos de mercado é dito **ficar vendido** ou **vender a descoberto** ou **sell short** uma ação, que significa na prática ficar devendo certa quantidade de ações.

Esta estratégia de *short selling* é uma aposta que o preço da ação vai cair no futuro e assim quando se for devolver a ação se pagará menos do que o que foi gasto no início. Por outro lado quem está na outra ponta ganhará em caso de subida da ação e, além disso, continuará dono da mesma.

Existem limitações para o máximo que você pode estar vendido em ações, de forma similar ao máximo possível de dívida que alguém pode ter. Pode-se ter que pagar juros enquanto estiver nesta situação e manter uma conta com certo valor que sirva de garantia para o empréstimo. Os detalhes variam de mercado a mercado, sendo que em alguns deles é proibida a venda a descoberto.

Finalizamos com uma frase clássica do mercado acionário: **"o valor das ações sobe de escada e desce de elevador"**. O significado é que as altas no valor das ações são tipicamente pequenas, mas quando existe movimento grande no preço é de baixa: ocorre pelo efeito manada ou, na analogia marítima (ver Seção 1.5) do mercado financeiro, efeito cardume: após algumas vendas todos começam a seguir o movimento de venda, fazendo com que o preço de queda se acelere por certo pânico. Note que por esta razão pode-se ganhar muito em uma estratégia de **short selling** uma ação.

1.4 Bolsa de Valores

Começamos com uma brevíssima história das bolsas no Brasil.[4] O Brasil possui hoje uma única bolsa de valores, a B3, cujo logotipo é $[\text{B}]^3$ = Brasil, Bolsa, Balcão. Ela surgiu em 2017 após a fusão da Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&FBOVESPA) com a Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos (CETIP). Veja [B3].

A origem destas instituições é do tempo do império e do início da república. A Bolsa de Valores do Rio de Janeiro (BVRJ) foi fundada 1845, e foi a primeira bolsa de valores a entrar em operação no Brasil. A BOVESPA foi fundada em 1890, a BM&F em 1917. A BVRJ teve sua operação do mercado de ações assumida pela BOVESPA em 2000 e a parte de títulos do governo pela BM&F em 2002. A BM&FBOVESPA surgiu em 2008 após a fusão da BOVESPA com a BM&F. A CETIP começou a operar em 1986 com títulos públicos (dívidas de governo federal, estadual, municipal) e privados até ser fundida em 2017 com a BM&FBOVESPA.

O órgão que supervisiona o funcionamento de todo mercado financeiro no Brasil é a Comissão de Valores Mobiliários (CVM), autarquia vinculada ao Ministério da Economia do Brasil mas independente, sem subordinação hierárquica e com mandato fixo e estabilidade de seus dirigentes, nomeados pelo Presidente da República e aprovados pelo Senado Federal. A CVM tem competência para apurar, julgar e punir irregularidades eventualmente cometidas no mercado. Sua fonte de recursos vêm de taxas pagas por companhias abertas (com ação em bolsa), bancos, corretoras e fundos. É a versão brasileira da Securities and Exchange Commission (SEC) dos EUA.

Começamos por um conceito importante.

Definição 1.4: Volume de Negócios

Suponha que num dia foram feitos N negócios, em cada um foram comprados q_i ações ao valor s_i cada uma. Então o **volume de negócios** do dia é igual a $\sum_{i=1}^{N} q_i\, s_i$.

[4] Mais detalhes na Wikipedia por exemplo.

Quando se fala de uma única ação, o volume se refere às vezes simplesmente ao número de ações comprada. Mas naturalmente não faz sentido somar número de ações distintas, cujo valor unitário varia. Assim chegamos ao conceito acima de volume de negócios, medido em reais, dólares, etc. Este volume indica a liquidez geral do mercado ou de uma ação em particular.

As 4 maiores bolsas do mundo em volume de negócios hoje (2020) são: (valores em dólares americanos)

1. New York Stock Exchange (Nova York, EUA), com volume total de 30 trilhões e negociação mensal de 1,5 trilhão.

2. NASDAQ (Nova York, EUA), com volume total de 10 trilhões e negociação mensal de 1,3 trilhão. Esta bolsa é focada em empresas de tecnologia como a Microsoft, Apple, Amazon e Facebook.

3. Tokyo Stock Exchange (Tóquio, Japão), com volume total de 5,6 trilhões e negociação mensal de 481 bilhões.

4. Shanghai Stock Exchange (Xangai, China) com volume total de 4 trilhões e negociação mensal de 536 bilhões.

Para compararmos, a B3 fica na 18ª posição entre as bolsas mundiais com volume total de 938 bilhões de dólares e negociação mensal de de 62 bilhões de dólares.

Cada uma destas bolsas define um ou mais **índices de desempenho** das ações negociadas em sua bolsa, uma média ponderada do valor das ações. O peso de cada ação depende do índice, mas pode ser que inclua apenas um setor da economia, ou apenas as ações mais negociadas, isto é, as com maior volume financeiro. Os detalhes das regras são complicados pois os índices tem que ter certa inércia em sua composição, não podendo mudar bruscamente em função de alguma variação pontual excepcional (tipo uma ação que foi muito negociada em certo mês somente).

Destacamos os dois mais importantes do mercado brasileiro, o IBOVESPA e o IBRX100. Detalhes em `www.b3.com.br`.

Definição 1.5: Índice IBOVESPA

O objetivo do Ibovespa é ser o indicador do desempenho médio das cotações dos ativos de maior negociabilidade e representatividade do mercado de ações brasileiro. É composto por ações que correspondem a cerca de 80% do número de negócios e do volume financeiro do mercado.

Definição 1.6: Índice IBRX100

O objetivo do IBrX 100 é ser o indicador do desempenho médio das cotações dos 100 ativos de maior negociabilidade e representatividade do mercado de ações brasileiro.

Hoje em dias todas as bolsas do mundo são eletrônicas. Existem corretoras credenciadas que ficam ligadas diretamente ao banco de dados da bolsa e tem acesso ao chamado **BOOK de ofertas**, o livro eletrônico que registra todas as transações ocorridas na bolsa. Abaixo destas corretoras credenciadas vão existir outras corretoras e abaixo destas (ou ainda mais abaixo) os investidores individuais. Durante o horário de funcionamento da bolsa pode-se colocar no BOOK ofertas de compra e venda de ações por certo valor e em certa quantidade. Também são registrados os negócios fechados, incluindo o valor e a quantidade.

Todas as informações, este log completo de ofertas (**negócios potenciais**) de compra e venda e dos **negócios fechados**, são disponíveis para todos. O BOOK pode ser acessado pelos investidores. A imprensa divulga o preço ao final do dia, dizendo que a bolsa fechou em alta ou baixa. Em consultas mais detalhadas é fornecido o preço de abertura, fechamento, o mais alto e o mais baixo e finalmente o médio. Outra informação que costuma ser noticiada é o volume de negócios do dia. O BOOK traz esta riqueza de informações que não são publicadas: negócios fechados e potenciais. Digamos que observamos uma grande volume de ofertas de compra com poucas ofertas de venda. Isto poderia indicar que em breve a ação vai subir. Este tipo de informação é fundamental em estratégias de **Day Trade**, pois são muito mais sutis que simplesmente o valor negociado.

O leilão de pré-abertura (ou pré-market) é assim chamado por corresponder ao período de 15 minutos que antecede a abertura do pregão. Esse é um período no qual o sistema da bolsa apenas aceita o registro de ofertas de compra e ofertas de venda, mas não registra o negócio, de fato. O leilão de pré-abertura serve para que as pessoas que queiram negociar ao preço de abertura, que é um preço importante em um dia de negociação, tenham condições de fazê-lo de forma equilibrada, transparente e equânime.

Quando se investe é comum colocar oferta de compra ou venda para limitar perda, chamado de estratégia de **stop loss**. Um exemplo é colocar (e deixar no book) uma ordem de venda de ações caso seu valor fique abaixo de certa barreira. Com ela no BOOK o investidor pode ficar tranquilo sem ter que ficar acompanhando direto o mercado. O problema, no entanto, é que numa queda brusca ("preço da ação desce de elevador") do preço da ação o mercado pode passar desta barreira sem que ela tenha tempo de ser executada pois o preço que era baixo como oferta de venda, depois da queda brusca ficou, relativamente, alto. Uma outra estratégia padrão de stop loss é a de escada: colocar oferta de venda em preços cada vez mais baixo com certos intervalos fixos entre estes valores, evitando que o preço pule uma barreira. De tão comum, softwares de corretoras costumam ter esta opção para ser feita de forma mais prática.

1.5 Animais e o Mercado

Existem algumas **analogias marítimas** relacionadas a diferentes tipos de investidores da bolsa:

- **Tubarão:** os grandes investidores, poucos, com muito dinheiro e experiência.

- **Sardinhas:** os pequenos investidores, muitos, alguns bem inexperientes, que serão engolidos pelos tubarões.

- **Baleia:** mega investidores, com tanto dinheiro que um movimento deles pode afetar o valor do próprio ativo. Analogia é que por seu tamanho o movimento de uma baleia afetaria as correntes marítimas. É comum no mundo das moedas virtuais (bitcoins e similares).

- **Efeito cardume ou manada:** Movimento igual de todas sardinhas na mesma direção, como por exemplo a venda de uma ação por alguns que gera um movimento ainda maior de queda por este efeito.

Ainda outros animais da bolsa de valores:

- **Bear Market:** (Mercado Urso) Quando existe tendência de queda generalizada no valor das ações. A lógica é que o urso ataca ficando em pé e dando patadas de cima para baixo.

- **Bull Market:** (Mercado Touro) Quando existe tendência de subida generalizada no valor das ações. A lógica é que o touro ataca lançando os chifres para cima.

1.6 Ativos e Derivativos

Já falamos sobre ações e sua importância para o desenvolvimento da economia de um país. Falaremos agora de outros ativos financeiros básicos (*basic equities*) de uma economia.

Definição 1.7: Título do Governo ou Bonds

Títulos do governo (ou bonds) são ativos financeiros que, no caso brasileiro, prometem pagar R$1.000,00 (mil reais) em uma certa data do futuro, algo entre 2 e 15 anos tipicamente). São as LTNs (letras do tesouro nacional), LFT (letras financeiras do tesouro). Alguns pagam além disso algum valor extra – o chamado **cupom** – em datas pré-determinadas antes do vencimento do contrato.

Bonds (títulos do governo) estão na categoria de **renda fixa** pois é assegurado o que será pago no vencimento, em contraste por exemplo com ações, cujo valor em data futura não é pré-determinado. Outro exemplo de título de renda fixa são os CDBs – certificados de depósito bancário – que são empréstimos que os bancos fazem para operar. São considerados ativos de renda fixa também pois o valor pago é pré-determinado. Pode ser a inflação do período mais um certo juros.

Definição 1.8: Bolsa de Mercadorias

São negociados nas **bolsas de mercadorias** títulos que dão ao seu portador o direito a trocar por certa quantidade de mercadorias. Exemplos de mercadorias são: ouro, petróleo, milho, soja, café, arroba do boi gordo (para abate), laranja, etc. Tem detalhes (tipo de petróleo, qualidade de café, etc.) em cada um destes títulos. São títulos de **renda variável** pois não sabemos ao certo valor futuro.

Definição 1.9: Ativo Financeiro Básico

Um **ativo financeiro básico** é um título que é negociado em algum mercado financeiro e que corresponde diretamente a algum produto. Exemplos: ouro, dólar, ação, milho, petróleo, títulos do governo, etc.

As necessidades de uma economia moderna determinam a existência de produtos financeiro mais sofisticados. Uma empresa pode depender do valor do dólar diretamente para sua lucratividade: digamos exporta produtos e se a cotação do dólar frente ao real cair terá prejuízo. Uma outra importa produtos, e se o dólar subir terá prejuízo. Ou uma mistura das duas posições. Dizemos que a empresa tem uma **exposição à risco** cambial. Outro exemplo é se o insumo da indústria é o aço (indústria automobilística) e o seu preço subir muito. As empresas querem se proteger (fazer um **hedge**) contra estas exposições à risco na movimentação de preços de ativos financeiros básicos. Uma forma de fazer isso é adquirindo no mercado financeiro produtos que vão reduzir estes riscos. Isto pode ser feito por meio dos chamados **derivativos**.

Definição 1.10: Derivativos

Um **derivativo** é um contrato cujo valor deriva (depende) da performance durante certo período de algum ativo básico (ação, dólar, petróleo, taxa de juros) – em inglês depende do **underlying** – de forma direta ou indireta, através de algum outro derivativo. Estes contratos possuem um tempo T de vigência, expirando após este tempo. Dividem-se em dois tipos:

(a) **Opções** (em inglês Options ou Contingent Claims[a]), que permitem ao proprietário executar ou não o contrato durante a vigência do mesmo. Uma opção pode **expirar** (chegar no tempo final de vigência de contrato) sem valer nada. Exemplos: Call e Put.

(b) **Obrigações Futuras** (em inglês Forward Commitments), por contraste, obrigam o pagamento de valores, em datas pré-determinadas, que dependem da performance de ativos. Alguns exemplos: forwards, futures, swaps.

[a] Claim é um contrato que pode ser cobrado judicialmente afirmando que alguém te deve dinheiro; o contingent significa condicional, caso uma condição seja alcançada.

Exemplo importante de derivativo (tipo opção) são as **opções de compra** de algum ativo – você não é obrigado a comprar, tem a opção de fazê-lo caso valha a pena – por um determinado valor em uma certa data. Para explicar qual seu uso supomos que você queira se proteger do aumento na cotação do dólar numa data futura T quando você vai precisar comprar dólares. Você pode fazer isso comprando dólar antecipadamente, onde você se protege da subida mas vai perder na queda. Utilizando **opções** podemos nos proteger contra um **movimento unilateral**: a subida ou queda excessiva no preço de um ativo. São os chamados calls e puts, que apresentamos agora.

Definição 1.11: Call

Um **call** com **strike** K e **tempo de expiração** (ou vencimento) T baseado no ativo XPTO é um contrato que dá a **opção** (mas não a **obrigação!**) de quem possui este contrato de, no momento T, comprar o ativo XPTO pelo valor K.

Assim se S_T é o valor de XPTO no momento T:

- se $S_T > K$ o proprietário do call vai querer **exercer a opção** de compra pelo valor K e receber $S_T - K$, dizemos que a opção terminou **in the money**;
- se $S_T \leq K$ o proprietário do call não vai querer **exercer a opção** de compra que o contrato possibilita, mas não obriga, e deixará o contrato **expirar sem valor** ou **out of money**.

Assim o valor do call na data em que o contrato expira – o **payoff** do call no tempo T – é dado por $(S_T - K)^+$, onde

$$x^+ = \begin{cases} x; & \text{se } x \geq 0, \\ 0; & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja, $(x)^+$ é a parte positiva, valendo zero caso $x < 0$.

Note que quem adquire um call ganha quando o valor do ativo sobe. De forma análoga temos o put, um contrato onde se ganha na queda do valor do ativo.

Definição 1.12: Put

Um **put** com **strike** K e **tempo de expiração** T baseado no ativo XPTO é um contrato que dá a **opção** de quem possui este contrato de, no momento T, vender o ativo XPTO pelo valor K. Assim se o ativo vale S_T no momento T, o **payoff** do put é $(K - S_T)^+$.

Exemplo 1.1 (Call e Put) *Considere o valor de 3 ações distintas e strike K exibidas na Figura 1.1. Determine quais calls e puts serão exercidas no tempo final T.*

Solução: Analisando os calls: Somente o call da ação S_1 terminou valendo algo pois $S_1(T) > K$; já os calls de S_2 e S_3 expiraram sem valor, pois seu valor final ficou abaixo do strike K. Note que o call de S_2 chegou a ficar in the money em alguns momentos ao longo do tempo, mas terminou out of money.

Analisando puts: Somente o put da ação S_1 expirou sem valor, embora tenha ficado em alguns momentos curtos no início in the money. O put de S_2 ficou out of money em alguns momentos mas terminou in the money. ■

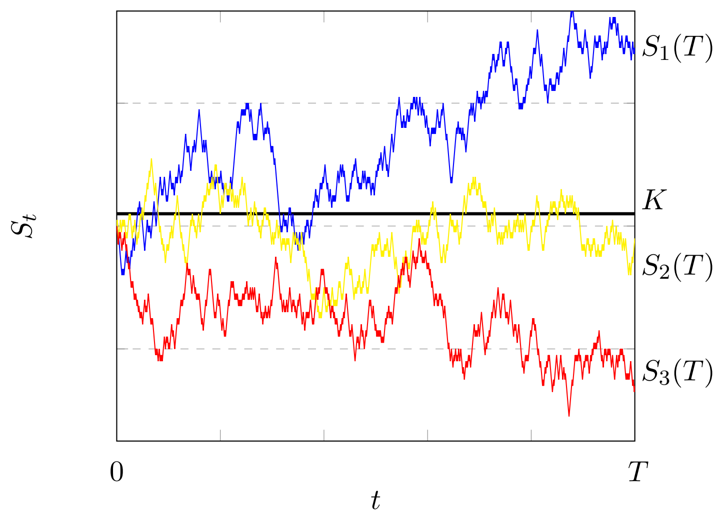


Figura 1.1: Call e Put

Definimos agora alguns derivativos que são do tipo **obrigações futuras (não são opções)**.

Definição 1.13: Futuros

Futuros são derivativos que obrigam ao pagamento de um valor pré-determinado por um ativo em certa data. O payoff é $S_T - K$, com uma parte obrigada a pagar a outra dependendo do valor relativo.

Definição 1.14: Swaps

Swaps são derivativos em que durante a vigência do contrato, diariamente (ou semanalmente, etc.) troca-se um valor fixo por um variável baseado no valor de um ativo, gerando a obrigação de uma parte pagar para outra a diferença entre os valores. A ideia é trocar a incerteza do valor do câmbio ou juros ao longo do tempo de vigência do contrato por um valor fixo K e ser recompensado pela perda ou compensar a outra parte. Os mais comuns são o **swap cambial** e o **swap de juros**, que permitem a uma parte ter assegurada uma taxa de câmbio ou juros fixa. É oferecido pelo Banco Central do Brasil frequentemente para conter movimentos grandes no valor do dólar frente ao real.

Por serem comuns, **calls e puts** são conhecidos como **vanilla options** pois baunilha é o sabor mais comum de sorvete em lanchonetes. São amplamente negociados nos mercados, incluindo o brasileiro, sendo fácil encontrar a cotação para diversos strikes e datas de vencimento para ações de grandes empresas como a Petrobras. Focamos agora em **Tipos de Opções**:

- **call**: payoff do tipo $(\widetilde{S} - K)^+$, onde $\widetilde{S} = S_T$ ou alguma função (média) de S_t.
- **put**: payoff do tipo $(K - \widetilde{S})^+$, onde $\widetilde{S}$ como definida acima.
- **americanos**: podem ser exercidos **a qualquer momento** antes do tempo final.
- **europeus**: somente podem ser exercidos no tempo final.
- **vanilla** (baunilha): calls e puts europeus.
- **bermudianos**: podem ser exercidos **em datas pré-determinadas** antes do tempo final. Um exemplo é uma opção que pode ser exercida a cada 15 dias até o fim do contrato. Está entre o europeu, que permite execução somente ao final, e a americana, que permite execução a qualquer momento. De fato as (ilhas) Bermudas estão, geograficamente, entre EUA e Europa.
- **barreira**: caso o valor do ativo passe de um certo valor que chamamos de barreira **durante** o tempo de validade do contrato a opção perde o valor (evitando que fique muito caro o call).
- **lookback**: o payoff depende do maior e menor valor do ativo ao longo do tempo (olha-se para trás no histórico para se saber o valor da opção).
- **asiáticos**: o payoff depende não somente de S_T, mas da **média** de todos os valores ao longo do tempo. Exemplos: se $S_{\text{média}}$ é o valor médio do ativo ao longo do tempo do contrato, payoff $(S_{\text{média}} - K)^+$, call asiático, ou $(K - S_{\text{média}})^+$, put asiático. Outra opção é substituir o strike: $(S_{\text{média}} - S_T)^+$. De forma geral, por utilizar a média, reduz risco de manipulação de mercado e torna a opção mais barata por reduzir o risco inerente no contrato pela variação excessiva no valor.

- **exóticos**: nenhum dos acima: opções com payoff dependendo de dois ativos S e R, com expressões do tipo $(S_T - R(T))^+$, pagando o quanto S ficou acima de R.

Pode-se misturar alguns dos tipos de opção acima entre si e se falar em:

- **call europeu do tipo asiático**: payoff é $(S_{\text{média}} - K)^+$, onde $S_{\text{média}}$ é a média do valor ao longo do tempo, mas somente pode ser exercida na data final.
- **put com barreira europeu**: payoff $(K - S)^+$ mas se ao longo do tempo do contrato $S_t \leq B$, B a barreira, a opção perde o valor.
- **lookback americano**: payoff $(S_{\max} - S_{\min})^+$ que pode ser exercido em qualquer momento antes do tempo final, comparando os valores máximo e mínimo da ação ao longo do contrato.
- **swaption**: Uma opção que dá o direito, mas não a obrigação, de entrar em um swap (tipicamente swap cambial ou de juros). Utilizado por grandes instituições financeiras para se proteger de variações bruscas de câmbio ou juros. Swaption pode ser europeia, americana, bermudiana, dependendo de quando pode-se decidir entrar no swap.

No final das contas, esta classificação é somente para ajudar na comunicação, pois o que vale mesmo são os detalhes no contrato. Mas é claro que estabelecer um vocabulário comum facilita a comunicação rápida e precisa.

1.7 Precificando Contratos

Existe diferença no método para se **precificar** (determinar o valor) um contrato cujo valor depende do resultado de um lançamento de dado e de um contrato cujo valor depende do preço de uma ação (ou ativo financeiro de forma mais geral)? Analisamos isso através de um exemplo, considerando os contratos abaixo, representados na Figura 1.2:

1. Dados: Joga-se um dado. Caso o resultado seja PAR, você recebe R$10, caso seja IMPAR você não recebe nada.
2. Ações: A ação da empresa XPTO hoje vale R$30, e amanhã poderá valer R$ 35 ou R$15. Caso o valor da ação suba você receberá R$10, caso desça você não recebe nada. Na linguagem de opções, temos um call com payoff $(S_T - 25)^+$.

Qual é o valor justo que deve ser pago para se entrar no contrato 1? E no contrato 2? Precisamos de hipóteses adicionais para determinar o valor destes contratos?

Numa análise preliminar, sem nenhuma hipótese, é bastante evidente que o valor de ambos os contratos deve ser **necessariamente** entre R$10 e R$0. Veremos (bom para o contrato 2 somente em outro capítulo) que será sempre uma média ponderada entre estes dois valores.

No caso do contrato 1 precisamos saber se o dado é viciado ou não. Se for um dado honesto, onde a probabilidade do resultado ser par ou impar é igual, é claro que o valor

Contrato 1: DADOS	Payoff	**Contrato 2**: AÇÃO		Payoff Call Strike 25
PAR	10	$S_0 = 30$	$S_T = 35$	$10 = (35 - 25)^+$
IMPAR	0		$S_T = 15$	$0 = (15 - 25)^+$

Figura 1.2: Como precificar os Contratos 1 e 2?

justo será R\$5 pois[5] se jogarmos este dado diversas vezes esperamos em metade deles ganhar R\$10 e em outra metade não ganhar nada, de modo que em média ganharemos R\$5. Caso o dado seja não honesto, com digamos 20% de probabilidade de dar PAR, o valor justo é a média ponderada $10 \times 20/100 + 0 \times 90/10 = 2$.

No caso da contrato 2 poderíamos querer saber qual a probabilidade do valor da ação subiu ou desceu. O fato surpreendente é que neste caso, ao contrário da contrato 1, a probabilidade real da ação subir ou descer **não importa** para precificação da contrato 2. Basta saber que ela tanto **pode** subir como descer, pois se sempre subisse ou descesse seria fácil precificá-lo (exercício).

Apresentamos o **argumento mais importante** deste capítulo que é como determinar o preço X_0 do contrato 2. Para isto nos colocamos na posição do **vendedor do contrato 2** e veremos como é que ele poderia **replicar o contrato 2**, isto é, tendo inicialmente em sua carteira o valor X_0, como deverá aplicar parte deste valor comprando ações de tal forma que no momento de honrar o contrato 2 ele possua em sua carteira exatamente os valores exigidos para que ele pague a outra parte conforme o contrato que foi vendido.

1. Do valor inicial X_0, separe uma parte para aplicar em ações, comprando Δ_0 ações XPTO por R\$30 cada uma e guarde o que sobrou, $X_0 - 30\Delta_0$, até o dia seguinte.
2. Entenda que determinamos os valores de X_0 e Δ_0 ao final, pois são incógnitas, sendo que o **valor do contrato** será dado por X_0.
3. No dia seguinte são dois cenários:
   a) você terá Δ_0 ações com valor R\$35, e $X_0 - 30\Delta_0$ em dinheiro. Total $35\Delta_0 + X_0 - 30\Delta_0$.
   b) você terá Δ_0 ações com valor R\$15, e $X_0 - 30\Delta_0$ em dinheiro. Total $35\Delta_0 + X_0 - 30\Delta_0$.
4. Para poder pagar o valor do contrato você deve ter em cada um dos cenários:
   a) R\$10.
   b) zero reais.
5. Igualando os cenários obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 35\Delta_0 + X_0 - 30\Delta_0 = 10 \\ 15\Delta_0 + X_0 - 30\Delta_0 = 0. \end{cases}$$

[5] Pela lei dos grandes números da probabilidade.

6. Resolvendo o sistema obtemos que $\Delta_0 = 0,5$ e $X_0 = 7,5$.

7. Portanto o contrato 2 deve valer X_0 =R$7,50.

Porque este é o valor justo? Digamos que quem vende o contrato 2 receba mais do que isso, por exemplo R$8. Ora, neste caso ele pode reservar (seria um lucro certo, sem possibilidade de prejuízo, que chamamos de **arbitragem** – veja Definição 2.3 da p.25) R$0,50 e com o restante montar a seguinte carteira: Comprar meia ação, gastando R$15 e ficar devendo $7,50 - 15 = 7,50$. Supondo juros zero (depois incluiremos os juros) no dia seguinte ele teria na carteira uma dívida de $7,50$ e meia ação. Dependendo do cenário, se o valor da ação:

1. subiu, valendo agora R$35, sua carteira valerá $-7,50 + 0,5 \times 35 = 10$, exatamente o valor do contrato neste cenário.

2. desceu, valendo agora R$15, sua carteira valerá $-7,50 + 0,5 \times 15 = 0$, exatamente o valor do contrato neste cenário.

O fato da carteira montada **replicar** o valor do contrato 2 em todos os cenários possíveis é o que o diferencia do contrato 1 pois neste caso não temos como replicá-lo (pense bastante sobre isso). Note que os R$0,50 separados no início não foram utilizados, e portanto o contrato não pode valer mais do que R$7,50 sob pena de existir arbitragem. De forma análoga, se o contrato fosse vendido por menos, pelo fato do sistema linear acima possuir solução única, o vendedor somente seria protegido por uma carteira que custa $X_0 = 7,50$, tendo prejuízo certo do quanto cobrou a menos.

1.8 Matemática nas Finanças

Apresentamos um panorama geral do uso de Matemática em Finanças baseado em [Jo2].

1. **Precificação de contratos financeiros (derivativos).**
   Este será o foco nos primeiros capítulos deste livro. A seção anterior foi uma breve introdução a este assunto. Vamos sofisticar o modelo, introduzir outros tipos de contrato, colocar a linguagem de probabilidade e processos estocásticos, implementar métodos numéricos para se calcular o valor de contratos, aprender a extrair informações de dados do mercado financeiro para poder utilizar os modelos que apresentaremos.

2. **Otimização de carteiras.** Cada investidor sabe o nível máximo de risco que aceita e, dentro deste risco máximo, quer montar uma carteira, isto é, distribuir certo valor entre diversos investimentos, de forma a obter o maior retorno médio possível. Algumas palavras chave são **bala de Markowitz** e **CAPM (capital asset pricing model)**. Dedicaremos um capítulo ao assunto que incluirá métodos numéricos e uso de dados do mercado financeiro.

3. **Gestão de Risco.** Trata-se da análise dos riscos financeiros a que estão expostos uma empresa e de como fazer a gestão deste risco, acompanhando sua evolução e comprando ativos ou derivativos que reduzam o risco. Um exemplo: verificar os efeitos que um aumento na cotação do dólar terá sobre o balanço de uma empresa e planejar a comprar de calls ou puts que protejam (façam um hedge) esta exposição à risco da empresa. A técnica chave é a **VaR (Value-at-Risk)**, que coloca um limite de quanto um empresa pode perder com certa probabilidade durante um certo período de tempo. Dedicaremos um capítulo ao assunto que incluirá métodos numéricos e uso de dados do mercado financeiro.

4. **Day Trade:** O paradigma do day trade é pensar que o investidor começa com certo valor no bolso e, após abertura da bolsa o investidor compra e vende ações ao longo de um dia, sendo que antes do encerramento da bolsa neste mesmo dia ele vende todas suas ações e termina com (mais) dinheiro no bolso. As técnicas buscam descobrir se a ação vai subir ou descer ao longo do dia (ou nas próximas horas). Um termo utilizado é a **análise técnica** do preço da ação. Para se determinar a direção do movimento do preço da ação é fundamental usar todas as informações do BOOK – incluindo volume de ofertas de compra e venda. Entre as ferramentas utilizadas estão as redes neurais, usadas originalmente em inteligência artificial e reconhecimento de imagens, e a estatística, mais especificamente, as séries temporais. Pelo fato de técnicas eficientes gerarem muito dinheiro, é assunto cercado de segredos: quem tiver boas ideias não tem interesse em tornar público. De fato existem corretoras que oferecem fundos de investimento que são geridos por **robôs de investimento**, computadores rodando algoritmos sofisticados de daytrade. Note que estas técnicas efetivamente buscam a descoberta de oportunidades de lucro com baixo risco (não são arbitragens). Por envolver técnicas bem mais sofisticada (de estatística até redes neurais), **não é um assunto abordado neste texto**.

Uma divisão importante, que somente ficará clara mais tarde no texto é entre modelagem baseada na probabilidade **real** do preço da ação subir ou descer e na chamada probabilidade **neutra a risco**, que será apresentada no próximo capítulo.

- Probabilidade neutra a risco é a base da modelagem da precificação de contratos financeiros.
- Probabilidade real é a base da otimização de carteiras, gestão de risco e do day trade.

1.9 Finanças e Filosofia

O sucesso da modelagem matemática em Física é filosoficamente, e na prática também, **impossível** de ser alcançado em Finanças. No final do dia, estamos modelando o comportamento de seres humanos, de seus sentimentos e percepções, da psicologia comportamental. Como a alternativa não é aceitável – abdicar de tentar entender o comportamento – utilizamos, com muito cuidado, modelos matemáticos para **dar suporte** à tomada de decisões. Não se deixem enganar pela Matemática sofisticada (processos estocásticos, séries temporais, equações diferenciais etc): somente temos modelos **muito aproximados** da realidade. Eles são válidos sob diversas hipóteses simplificadoras. Tentamos chamar a atenção no modelo para estas simplificações, e o leitor deve estar alerta da existência destas hipóteses simplificadoras em toda a área de Finanças Matemática. Caso não se mostre explicitamente quais são as hipóteses, deve-se buscá-las.

Ao contrário da Física, onde podemos repetir um experimento diversas vezes para verificar o modelo, em Finanças o que temos é um histórico do que ocorreu no passado. Nosso modelo pode tentar prever o futuro (em média) mas, o que a realidade vai retornar é somente **uma** das infinitas possibilidades. E não temos como repetir o experimento... É usual, para se testar modelos em finanças, pegar um histórico e quebrar em uma parte que será usada para **calibrar** o modelo, isto é, determinar os parâmetros do modelo (faremos isso no livro) e em outra parte que será utilizada para **validar** o modelo, isto é, verificar se ele fez boas previsões.

Mas pelo fato de seres humanos possuírem vontade própria, tornando-os filosoficamente imprevisíveis, deixa logo de saída fracassado qualquer ideia que algum modelo em Finanças poderá captar **com precisão** toda realidade. Mais ainda, o uso de certo modelo pela maior parte do mercado gera efeito cascata, com um pequeno grupo reagindo ao este conhecimento. Mas, pelo fato de existir certa racionalidade nas decisões, é possível, ainda assim, criar modelos com razoável grau de utilidade.

Terminamos com uma citação que parafraseia o juramento hipocrático dos médicos, cujo alvo eram os modelos em Finanças mesmo:

- I will remember that I didn't make the world, and it doesn't satisfy my equations.
- Though I will use models boldly to estimate value, I will not be overly impressed by mathematics.
- I will never sacrifice reality for elegance without explaining why I have done so.
- Nor will I give the people who use my model false comfort about its accuracy. Instead, I will make explicit its assumptions and oversights.
- I understand that my work may have enormous effects on society and the economy, many of them beyond my comprehension.

Emanuel Derman e Paul Wilmott; Juramento dos Modeladores (2009, [DW]). [6]

[6] Lembrarei que não criei o mundo e que ele não satisfaz minhas equações. Embora eu use modelos sofisticados para estimar valor, não ficarei muito impressionado com a matemática empregada. Nunca sacrificarei a realidade por elegância sem explicar por que o fiz. Nem darei às pessoas que usam meu modelo falso conforto quanto à sua precisão. Em vez disso, explicarei as hipóteses empregadas bem como as omissões. Entendo que meu trabalho pode ter enormes efeitos na sociedade e na economia, muitos deles além da minha compreensão.

1.10 Exercícios

1. Quais são os principais marcos da história da Finanças Matemática?
2. Qual erro foi cometido por Bachelier em seu modelo do preço de uma ação na bolsa de Paris?
3. Qual a diferença na proteção que se têm comprando dólar versus comprando uma opção de dólar?
4. De que forma o mercado financeiro pode promover a prosperidade de um país?
5. Explique a razão da frase: “ação sobe de escada e desce de elevador”.
6. O que é uma ação?
7. Qual a diferença entre ações ordinárias e preferencias? Vá além do texto e pesquise na internet.
8. O que significa no mundo real se no modelo matemático possuímos uma quantidade negativa de ações?
9. O que é a estratégia de *short selling*?
10. O que é um derivativo? Quais são os usos primários de um derivativo?
11. Defina os termos:
    a) Strike.
    b) Payoff.
    c) Tempo de expiração.
    d) Hedge.
    e) arbitragem.
    f) Vanilla option
12. Dê exemplos de tipos de derivativos.
13. Qual a diferença entre opções e Obrigações Futuras.
14. O que é e para o que serve um derivativo de swap cambial?
15. Explique como funciona uma bolsa de valores eletrônica hoje.
16. Quais informações além do valor da ação são utilizadas em estratégias de day-trade?
17. O que é a estratégia de *stop loss*? Qual seu objetivo?
18. Explique o significado e dê exemplos de títulos de renda fixa.

19. Explique o que é e para que servem os contratos de call e put.

20. Qual a razão pela qual o contrato 2 pode ser replicado e o contrato 1 não pode?

21. Pesquise o significado de CDS (Credit Default Swaps), um tipo de derivativo.

22. Suponha que uma ação X vale hoje 10 e amanhã pode valer 12 ou 7 com mesma probabilidade.

    (a) Precifique um put com strike 9 baseado na ação X

    (b) Quantas ações X devem ser compradas no tempo 0 para se montar uma carteira que reproduza este put?

    (c) Como deve ser montada no tempo 0 a carteira que reproduz este put?

23. Com relação aos contratos 1 e 2 da Seção 1.7 da p.15:

    a) Porque sem nenhuma hipótese o valor destes contratos devem ser **necessariamente** entre R\$0 e R\$10?

    b) Na contrato 2, supondo que a ação **sempre** sobe, qual o valor justo? Como conciliar sua resposta com a obtida no texto? Qual seria a falha no argumento do texto?

    c) Modifique o modelo do preço de ação no Contrato 2 e suponha que a ação possa assumir 3 valores: 35 , 25 e 15. Aplique o mesmo argumento dado no texto. O que você pode concluir?

2

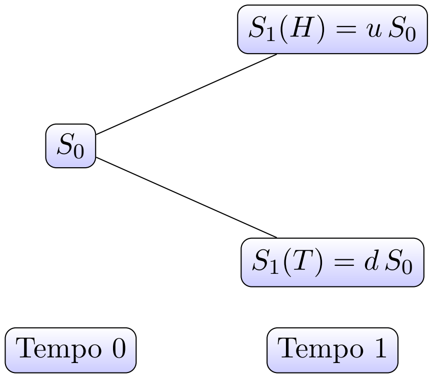
Opções Europeias

Neste capítulo apresentamos o modelo binomial para o preço de ações, não somente o modelo básico como também algumas variações. Apresentaremos como precificar opções **europeias**, isto é contratos que somente podem ser executados na data de vencimento. Reveja este e outros termos na p. 14. As opções **americanas**, que podem ser executados em qualquer data até a data de vencimento serão precificados em outro capítulo mais adiante. O problema de como implementar este modelo no computador e como **calibrar** o modelo, isto é, como ajustar seus parâmetros partindo da série histórica de preços de uma ação, será deixado outro capítulo.

2.1 Modelo de Um Período

Neste livro focamos no modelo binomial para o valor de uma ação proposto por Cox, Ross & Rubinstein em 1979 ([CRR]), que por esta razão é conhecido como **Modelo CRR**. Ele apresenta como característica principal a **simplicidade** do ponto de vista matemático e de implementação computacional, sendo apropriado para um primeiro contato com modelagem matemática em finanças, como na proposta deste livro, mas ao mesmo tempo permite incorporar ao modelo muitas necessidades práticas. Ele é bem mais sofisticado do que possa parecer a princípio. Além disso, por estas características, ainda é bastante utilizado na prática.

Neste modelo o valor da ação no tempo 0 é um valor conhecido $S_0 > 0$ e no tempo 1 (podemos pensar em um dia e no tempo como contado em dias – mais sobre isso no capítulo sobre simulações numéricas, onde será fundamental fixar a escala de tempo utilizada) é S_1, um valor desconhecido porém com **apenas** duas possibilidades (por isso **modelo binomial**), determinado através de algum experimento aleatório; no texto falamos sempre em lançar uma moeda, cujos resultados possíveis são H (head, cara) ou T (tail, coroa), com probabilidade $p \neq 0, 1$ (em ambos casos modelo deixa de ser aleatório) de sair H e $1-p$ de sair T. Denotando os valores possíveis para S_1 por $S_1(H)$ e $S_1(T)$, valores assumidos conforme o resultado do lançamento da moeda foi H ou T, temos que:



onde up $= u$ e down $= d$. Assumimos que $0 < d < u$ para fazer sentido falar em up e down. Assim S_0 é conhecido e S_1 depende de um lançamento de moeda. Por outro lado, tanto $S_1(H)$ como $S_1(T)$ são conhecidos pois sabemos o resultado do lançamento da moeda.

Este é um modelo que serve para qualquer ativo de renda variável, mas neste texto será sempre o modelo para o preço de uma ação. Agora veremos o modelo para um ativo de renda fixa, digamos um título do governo ou uma aplicação em poupança. Neste caso estes títulos vão pagar uma certa taxa de juros r pelo período 1 (podemos pensar em um dia). Assim se temos X_0 hoje, amanhã teremos $X_0(1 + r)$ no modelo de juros discretos. Veja Observação 2.2 abaixo.

Observação 2.1 (Valor do Dinheiro Muda ao Longo do Tempo) *Uma diferença notável das finanças para a física é que as unidades de medida (metro, kilo, Newton, etc) da física* ***não*** *mudam quando o tempo passa. No caso do dinheiro esse é um erro fatal: sempre que se fala de comparações de valores monetários ao longo do tempo é necessário fixar a escala e dizer algo como "em reais do dia 01/01/2020" e se descontar pela taxa de juros. Ignorar isso pode levar ao erro fatal (não mais cometido) de se afirmar que "esse ano a receita federal teve uma arrecadação recorde". Em valores nominais, sem desconto pela inflação do período, se tudo correr bem isto sempre vai ocorrer.*

Observação 2.2 (Juros Discretos × Contínuo) *Em finanças se utilizam dois modelos para evolução de um capital inicial X_0 após um tempo t aplicado em renda fixa com juros r. Utilizamos os modelos:*

- *discreto:* $X_0(1 + r)^t$.
- *contínuo:* $X_0 e^{rt}$.

Neste livro, por coerência com o uso de modelo discreto para ações usaremos o ***modelo discreto para juros****. No entanto eles estão relacionados da seguinte forma: Por série de Taylor, para r pequeno, $e^r \approx 1 + r$. Logo, $e^{rt} = (e^r)^t \approx (1 + r)^t$.*

2.2 Conceitos de Finanças Matemática

Definição 2.1: Carteira ou Portfolio

Uma **carteira** é uma combinação de ativos que um investidor possui. Matematicamente, considerando n ativos (digamos ações) mais uma aplicação de renda fixa, uma **carteira** é um vetor $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ onde $c = (c_0,\ c_1, \ldots, c_n)$ representa a composição da carteira, com c_0 aplicado em renda fixa e c_n, $n \geq 1$, representando a quantidade de cada uma das n ações que o investidor possui.

Observação 2.3 (Quantidade Negativa de Ativos) *Num mercado com somente uma ação e uma aplicação em renda fixa, a carteira* $(2, 10)$ *significa ter 2 aplicado em renda fixa e possuir 10 ações. Uma carteira* $(-2,\ 3)$ *significa estar devendo 2 (com juros de renda fixa) e possuir 3 ações. Finalmente uma carteira* $(-3,\ -5)$ *significa estar devendo 3 (com juros de renda fixa) e estar vendido em 5 ações (sell short: ver 1.3 da p.6). Possuir uma quantidade negativa significa estar devendo aquela quantidade ou, o que dá na mesma, ter tomado emprestado uma certa quantidade de ações.*

Apresentamos uma definição simplificada de carteira autofinanciada. Mais adiante, na Definição 2.12 da p.38, apresentamos a definição rigorosa.

Definição 2.2: Carteiras Autofinanciadas

Uma sequência de **Carteiras Autofinanciadas** é aquela que não depende da entrada ou saída de recursos durante sua existência. As operações todas são feitas utilizando recursos da carteira ou tomando emprestado, com a devida contabilização como dívida a ser paga depois.

Para dar um exemplo, se uma ação custa neste momento R\$2, podemos passar da carteira $(10,\ 0)$ para $(4, 3)$ ou para $(-2, 6)$ de forma autofinanciada.

Definição 2.3: Arbitragem

Arbitragem em um mercado é uma estratégia de compra e venda que começa com nenhum dinheiro e, utilizando uma sequência de carteiras autofinanciadas, existe a possibilidade de se ter lucro sem possibilidade de prejuízo.

Observação 2.4 *A definição poderia ser feita em termos de possibilidade de se ter prejuízo sem possibilidade de lucro. Pois se existe um carteira que gera lucro certo, basta inverter todas operações (compra vira venda, aplicação de recursos vira empréstimo) para se ter prejuízo certo e vice-versa. É comum definirmos da forma acima.*

Para deixar mais claro **arbitragem** é uma estratégia que começa com $x = 0$ na carteira e, sem entrada nem saída de dinheiro ao longo da estratégia (carteiras autofinanciadas) tem probabilidade positiva de terminar com $x > 0$ (lucro) e probabilidade zero de terminar com $x < 0$ (prejuízo). Pode-se ter, ou não, probabilidade positiva de terminar com $x = 0$ (nem lucro nem prejuízo).

Toda precificação de opções e, de forma mais geral, de derivativos, é baseada no princípio abaixo:

Princípio 2.4: Ausência de Arbitragem

Não existe arbitragem no mercado.

Não obstante o princípio acima que fundamenta os modelos matemáticos de finanças, em um mercado real existe arbitragem **durante um certo tempo** mas o que ocorre é que supomos que este tempo passou e cessou a arbitragem. No mundo real, supondo que um preço esteja muito baixo, aumentarão os negócios com o ativo que, pela oferta e procura, terá seu preço aumentado devido a maior procura. Assim a arbitragem cessará. Nos mercado financeiro de hoje, totalmente eletrônico e monitorado constantemente, este hipótese é bastante razoável.

Na economia como um todo, o princípio da arbitragem pode ser violado por tempo bem maior. Na verdade, o papel de um empreendedor é exatamente a busca de arbitragem. Seguem exemplos:

- Abrir uma loja em local com demanda alta de consumidores sem a existência de lojas para suprir esta demanda. Depois de um tempo outros comerciantes se instalarão na mesma região retirando esta arbitragem.

- Criar um novo produto único que somente você tem para vender. Um exemplo é o Ipod quando foi lançado. Depois de um tempo surgem novas empresas e esta arbitragem inicial diminui. O bom empreendedor fará modificações no produto que deixou de ser único e lançará um produto ainda mais novo sem que exista concorrente, etc.

- Existe a produção de queijo em cidades no interior sem distribuição nos grandes centros urbanos. Algum empreendedor percebe a diferença de preço do queijo na cidade do interior e passa a trazer para vender na cidade: todo ganham: o produtor no interior com a demanda aumentada; consumidores da capital que pagarão mais barato. No entanto, com aumento da demanda, o produtor no interior vai querer aumentar o preço e assim parte da arbitragem deixa de existir.

Em suma, a arbitragem pode ser vista como um motor da economia, com os empreendedores como **buscadores de arbitragem** (*arbitrage seekers*). Joseph Schumpeter (1883-1950), um economista famoso do século passado, que dedicou parte de sua obra sobre o papel dos empreendedores, escreveu que (livro publicado durante a 2a guerra mundial):

> The function of the entrepreneur is to reform or revolutionize the pattern of production by exploiting a new invention or, more generally, an untried

technological possibility for producing a new commodity or producing an old one in a new way, by opening up a new source of supply of materials or a new outlet for products, by reorganizing an industry and so on. [1] Joseph Schumpeter, "Capitalism, Socialism, and Democracy" (1942).

Esse processo de inovação, que leva o empreendedor a criar novos produtos e formas de produção, relegando ao passado métodos antigos, Schumpeter chama de **processo de destruição criativa**. Podemos observar isto em diversos setores mas com maior intensidade em produtos de tecnologia.

2.3 Opções no Modelo de Um Período

Nosso objetivo nesta seção é **precificar opções de ações** utilizando o modelo binomial de um período. Precisamos saber (as entradas do problema):

- O valor da taxa de juros r durante um período,
- os valores de u e d do modelo binomial,
- o *payoff* da opção no vencimento no tempo 1, isto é, a função f tal que o valor no tempo 1 do contrato é $V_1 = f(S_1)$.

Assim o valor do contrato no tempo 1, denotado por V_1, pode assumir dois valores distintos, dependendo do resultado do lançamento da moeda: $V_1(H) = f(S_1(H))$ ou $V_1(T) = f(S_1(T))$. A questão nesta subseção é determinar o valor V_0 da opção no tempo 0, o seu preço. No capítulo anterior apresentamos diversos exemplos de payoffs, em particular de um call e de um put.

Algumas hipóteses necessárias no modelo que desenvolvemos são:

- Ações podem ser subdivididas quantas vezes se quiser; podemos comprar meia ação ou até mesmo digamos 1/10000 ações.
- Juros recebidos em aplicação de renda fixa e devidos em empréstimos são iguais. Para grandes investidores isto é praticamente verdade.
- Preço de compra e venda da ação é igual.
- Ação assume somente dois valores (modelo binomial de 1 período).
- $r > -1$, senão após aplicarmos em renda fixa sairíamos devendo dinheiro.
- Valor da ação é sempre positivo e portanto $u, d > 0$.

[1] A função do empreendedor é modificar ou revolucionar o padrão de produção, explorando uma nova invenção ou, de um modo mais geral, uma possibilidade tecnológica não experimentada para produzir uma nova mercadoria ou produzir uma antiga de uma nova maneira, abrindo uma nova fonte de suprimento de materiais ou uma novos destinos para produtos, reorganizando uma indústria e assim por diante.

Podemos, e vamos, mudar um pouco algumas destas hipóteses na sequência.

Observação 2.5 (Juros Negativos?) *De forma geral* $r > 0$ *(juros positivos) mas a economia japonesa já teve juros negativos para estimular o consumo fortemente pois se digamos* $r = -0.5$ *e você aplica 100, no dia seguinte você teria* $100 \cdot (1 - 0.5) = 50$*, a metade do valor.*

Começamos com o lema abaixo, que é uma versão bastante simplificada do teorema fundamental de finanças matemática.

Lema 2.5: Ausência de Arbitragem ou Não-Arbitragem

No modelo binomial de 1 tempo, não teremos arbitragem se, e somente se $0 < d < 1 + r < u$.

Prova: Note que o $d > 0$ é necessário pela modelagem, para garantir que $d, u, 1+r > 0$.

Primeiro provaremos que a condição $d < 1 + r < u$ é necessária para ausência de arbitragem. Começaremo sempre com $X_0 = 0$, sem nada na carteira.

(a) Caso $1 + r < d < u$ podemos montar a carteira em que pegamos dinheiro emprestado e compramos tudo em ações. No tempo 1 após vendermos as ações teremos um valor maior que o que precisamos para pagar de volta o empréstimo e portanto teremos arbitragem.

(b) Caso $d < u < 1 + r$ podemos montar a carteira em que compramos a descoberto (sell short: ver Definição 1.3 da p.6) ações (pegamos emprestado ações) e vendemos imediatamente, aplicando o valor em renda fixa. No tempo 1 o valor resultante da aplicação em renda fixa é maior que o preço da ação que temos que comprar para devolver o que pegamos emprestado no tempo anterior: novamente arbitragem.

Para provar que a condição é suficiente começamos com $X_0 = 0$ (nenhum dinheiro) e montar uma carteira em que compramos s ações ($s \in \mathbb{R}$, podemos comprar propriamente ou a descoberto) no tempo 0 ao valor de S_0 cada. Portanto precisamos contrair uma dívida de sS_0 no tempo 0. Assim no tempo 1 nossa carteira valerá $X_1 = sS_1 + (1 + r)(-sS_0)$. A justificativa para isso é que no tempo 1 temos s ações, cada uma valendo S_1, e nossa dívida (razão do $-$ na frente) sS_0 cresceu com juros $(1 + r)$ Como $S_1(H) = uS_0$ e $S_1(T) = dS_0$, temos que $X_1(H) = sS_0(u - (1 + r))$ e $X_1(T) = sS_0(d - (1 + r))$. Assim, sob esta hipótese, se $s \neq 0$ (caso contrário $X_1 \equiv 0$ e não teremos arbitragem de forma trivial), $X_1(H) > 0 > X_1(T)$ para todo $s \in \mathbb{R} - \{0\}$ (qualquer carteira não-trivial que se monte autofinanciada, começando com valor 0). Assim se $X_1(H) > 0$ com probabilidade positiva $p > 0$ então $X_1(T) < 0$ com probabilidade positiva $1 - p$. Dai segue a ausência de arbitragem. Aqui usamos o fato que $p \neq 0$ e $p \neq 1$. ■

Em função deste lema, assumimos em todo o resto do livro o:

Princípio 2.6: Ausência de Arbitragem no Modelo Binomial

$$0 < d < 1 + r < u$$

Utilizamos o argumento da carteira que replica o contrato da Seção 1.7, com a diferença que levaremos em conta a taxa de juros, o que faz com que o **valor do dinheiro mude ao longo do tempo** (vide Observação 2.1 da p.24). Já tínhamos visto que a probabilidade real da ação subir ou descer não interessa para precificação: por esta razão note que não precisamos saber de p, a probabilidade da ação subir. O que de fato interessa é a chamada **probabilidade neutra a risco**, que definimos agora. A origem desta definição está dentro da prova do Teorema 2.9 que vem na sequência. Utilizamos o til na definição das probabilidades neutras a risco – seguindo toda a literatura de Finanças Matemática – para deixar clara a diferença para as probabilidades reais p e q do valor da ação subir ou descer. Preste atenção neste ponto da prova do teorema.

Definição 2.7: Probabilidade Neutra a Risco

No modelo binomial chamamos de probabilidade neutra a risco as probabilidades definidas por

$$\widetilde{p} = \frac{(1+r)-d}{u-d} \quad \text{e} \quad \widetilde{q} = \frac{u-(1+r)}{u-d}.$$

A razão pela qual a definição acima gera probabilidades é dada pelo próximo lema.

Lema 2.8: probabilidades Neutras a Risco

Os valores $\widetilde{p}$ e $\widetilde{q}$ satisfazem:

$$\widetilde{p}, \widetilde{q} \geq 0, \qquad \widetilde{p} + \widetilde{q} = 1 \qquad \text{e} \qquad \widetilde{p}u + \widetilde{q}d = 1 + r.$$

Prova: Exercício. ∎

Usando a Definição 2.7 podemos fazer a **interpretação baricêntrica** das probabilidades neutras a risco: Como $d < 1 + r < u$, a posição relativa de $1 + r$ com relação a u é dada por $\widetilde{p}$ no sentido de quanto mais próximo de 1, mais próximo $1 + r$ está de u.

Observação 2.6 *Definiremos no próximo capítulo a* ***volatilidade*** *de ativos de renda variável, que mede o quanto varia o valor do ativo. No modelo acima, a volatilidade da ação pode ser medida por $u - d$. Pela Definição 2.7 a probabilidade neutra a risco depende somente da volatilidade do valor da ação e da taxa de juros da renda fixa.*

Teorema 2.9: Carteira Autofinanciada que Replica

Dentro do modelo binomial de 1 tempo, considere:
(a) Um ativo que no tempo 0 vale S_0 e no tempo 1 vale $S_1(H) = uS_0$ ou $S_1(T) = dS_0$, dependendo do lançamento de uma moeda.
(b) Uma opção que vale V_1 no tempo 1, valor que depende de S_1.
(c) Juros fixos r do tempo 0 para o 1, para renda fixa ou dívida.
(d) $\widetilde{p}$ e $\widetilde{q}$ da Definição 2.7.

$$\text{Defina} \quad V_0 = \frac{1}{1+r}\left(\widetilde{p}V_1(H) + \widetilde{q}V_1(T)\right).$$

Então existe somente uma **carteira autofinanciada** que começará valendo V_0 no tempo 0 e terminará valendo V_1 no tempo 1, isto é, existe uma única carteira que **replica** os valores da opção no tempo 1.

Prova: Partindo de uma carteira com valor $X_0 = V_0$ no tempo $t = 0$, queremos aplicar parte em ações e parte em renda fixa, sem entrada nem saída de recursos, de tal modo que no tempo $t = 1$ a carteira possua valor $X_1 = V_1$ (note que é uma equação vetorial, pois possui dois valores possíveis), ou seja, queremos uma **carteira autofinanciada que replica o valor da opção**. Para isso:

- No tempo 0 compro Δ_0 ações para ter uma carteira com:
$\begin{cases} \Delta_0 \text{ ações que valem } \Delta_0 S_0, \\ X_0 - \Delta_0 S_0 \text{ em renda fixa ou, caso negativo, dívida.} \end{cases}$
- No tempo 1 temos:
$\begin{cases} \Delta_0 \text{ ações que valem } \Delta_0 S_1, \\ (X_0 - \Delta_0 S_0)(1+r) \text{ em dinheiro ou dívida.} \end{cases}$

No tempo 1 nossa carteira valerá X_1 dada por:

$$\textbf{Wealth Equation:} \qquad X_1 = (X_0 - \Delta_0 S_0)(1+r) + \Delta_0 S_1. \tag{2.1}$$

Esta é a primeira aparição da chamada **wealth equation**, cuja versão geral é dada pela equação (2.1) da p.30. Note que é uma **equação vetorial** (no caso duas equações) pois embute equação para $X_1(H)$ e $X_1(T)$ em notação compacta. Como $X_1 = V_1 = f(S_1)$, precisamos determinar X_0 e Δ_0 resolvendo o sistema linear

$$\begin{cases} (X_0 - \Delta_0 S_0)(1+r) + \Delta_0 S_1(H) & = V_1(H) = X_1(H), \\ (X_0 - \Delta_0 S_0)(1+r) + \Delta_0 S_1(T) & = V_1(T) = X_1(T). \end{cases}$$

Como $S_1(H) = uS_0$ e $S_1(T) = dS_0$, obtemos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} S_0\big(u - (1+r)\big) & 1+r \\ S_0\big(d - (1+r)\big) & 1+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_0 \\ X_0 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \Delta_0 \\ X_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(H) \\ V_1(T) \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

com determinante da matriz M do lado esquerdo dada por

$$\begin{aligned}\det M &= S_0(1+r)(u-(1+r)) - S_0(1+r)(d-(1+r)) \\ &= S_0(1+r)(u-d).\end{aligned}$$

O sistema (2.2) tem solução única se, e somente se, $\det M \neq 0$.

Analisando cada um dos termos:

- Taxa de juros $r > -1$ por hipótese. Logo $1+r > 0$.
- Pelo princípio de ausência de arbitragem, $d < 1+r < u$. Logo $d \neq u$.

Concluímos que $\det M \neq 0$ e portanto existe solução única.

Subtraindo uma equação de outra em (2.2) obtemos que

$$V_1(H) - V_1(T) = \Delta V_1 = \Delta_0 S_0(u-d) = \Delta_0 \Delta S_1.$$

Chamamos de **Delta Hedge** a estratégia de proteção da opção em que compramos Δ_0 ações, com Δ_0 definido por

$$\Delta_0 = \frac{\Delta V_1}{\Delta S_1} = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)}. \tag{2.3}$$

O número Δ_0 de ações compradas deve ser igual à taxa de variação do valor do contrato com relação ao valor da ação. Caso $\Delta_0 < 0$ temos que ficar vendidos na ação (tomar emprestado, sell short).

Resolvendo o sistema obtemos (verifique!)

$$\begin{aligned}V_1(H) &= (V_0 - \Delta_0 S_0)(1+r) + \Delta_0 S_1(H) \\ &= V_0(1+r) + \Delta_0(S_1(H) - S_0(1+r)) \\ &= V_0(1+r) + \frac{\Delta V_1}{\Delta S_1}(S_1(H) - S_0(1+r)).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}V_0 &= \frac{V_1(H)}{1+r} - \frac{\Delta V_1}{\Delta S_1}\left(\frac{S_1(H)}{1+r} - S_0\right) \\ &= \frac{1}{1+r}\left(V_1(H) - \frac{\Delta V_1}{\Delta S_1}(S_1(H) - S_0(1+r))\right) \\ &= \frac{1}{1+r}(\widetilde{p}V(H) + \widetilde{q}V_1(T))\end{aligned}$$

Onde $\widetilde{p} = 1 - \frac{1}{\Delta S_1}(S_1(H) - S_0(1+r))$ e $\widetilde{q} = \frac{1}{\Delta S_1}(S_1(H) - S_0(1+r))$

Logo

$$\widetilde{p} + \widetilde{q} = 1$$

e

$$\widetilde{q} = \frac{uS_0 - S_0(1+r)}{uS_0 - dS_0} = \frac{u-(1+r)}{u-d} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{p} = \frac{(1+r)-d}{u-d}.$$

Esta parte justifica a introdução da Definição 2.7. ■

Observação 2.7 (Carteira Autofinanciada que Replica Opção) *Em resumo, começando com uma carteira que vale X_0 no tempo 0 dado pelo Teorema 2.9, podemos comprar Δ_0 (Definição 2.3) ações no tempo 0, aplicar o resto em renda fixa e obter no tempo 1, após vender as ações compradas no tempo 0, exatamente uma carteira com valor X_1 tal que $X_1 = V_1$, isto é, $X_1(H) = V_1(H)$ e $X_1(T) = V_1(T)$. Ou seja, temos uma* ***carteira autofinanciada que replica*** *os valores da opção.*

Lema 2.10

O valor da ação no tempo 0 é igual a média ponderada do valor da ação no tempo 1, sob a probabilidade neutra a risco, trazido a tempo presente, isto é,

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\left(\widetilde{p}S_1(H) + \widetilde{q}S_1(T)\right).$$

Prova: Exercício. ■

O lema acima prova que o crescimento médio do preço a ação sob a probabilidade neutra a risco é igual ao retorno de uma aplicação em renda fixa. Pode-se querer comparar com o crescimento médio do preço da ação sob as probabilidades reais de crescimento e decrescimento,

$$pS_1(H) + qS_1(T).$$

É natural esperar que isto seja maior que o retorno esperado por um investimento em renda fixa pois senão não valeria a pena comprar a ação pelo valor S_0, e o mercado ajustaria de acordo seu preço.

Teorema 2.11: Precificando Opção no Modelo de 1 tempo

Considere no modelo binomial de 1 tempo a opção que vale V_1 no tempo 1, valor que depende de S_1. Então seu valor V_0 no tempo 0 deve ser

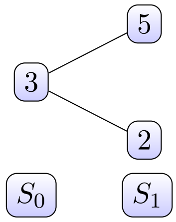
$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left(\widetilde{p}V_1(H) + \widetilde{q}V_1(T)\right)$$

para que não exista arbitragem. Ou seja, V_0 é a média ponderada de V_1, sob a probabilidade neutra a risco, trazido a tempo presente.

Prova: Caso o contrato seja vendido por $Z_0 > V_0$ basta que o vendedor do contrato utilize o valor V_0 para replicar o contrato conforme o Teorema 2.9, sendo que $V_0 = x_0$, e ficar com lucro $(Z_0 - V_0)(1 + r) > 0$ sempre, sem nenhum risco de perda. Caso seja vendido por $Z_0 < V_0$, pelo fato do sistema ter solução única, a única forma do vendedor se proteger (fazer um **hedge**) é montar a carteira acima, mas neste caso ele terá um prejuízo de $(Z_0 - V_0)(1 + r) > 0$ sempre, sem nenhuma chance de ganho. ■

Apresentamos uma série de exemplos, todos baseado no modelo da Figura 2.3 para o preço da ação:

Figura 2.1: Modelo de Ação de 1 Período



Exemplo 2.1 *(call sem juros) Considere um* ***call*** *com strike $K = 3$. Assuma que no Modelo da Figura 2.3 a taxa de juros é $r = 0$. Qual o valor desta opção? Como o vendedor do call pode fazer um hedge deste contrato?*

Solução: Neste caso o payoff é $f(S) = (S - 3)^+$. Logo $V_1(H) = 2$ e $V_1(T) = 0$. Além disso do modelo obtemos que $u = S_1(H)/S_0 = 5/3$ e $d = S_1(T)/S_0 = 2/3$. Assim, pela equação (2.7) obtemos que $\widetilde{p} = (1 - 2/3)/(5/3 - 2/3) = 1/3$ e portanto $\widetilde{q} = 2/3$. Logo, pelo Teorema 2.11 o valor V_0 da opção é:

$$V_0 = (1/3(2) + 2/3(0)) = 2/3.$$

Como $\Delta_0 = (2 - 0)/(5 - 2) = 2/3$, para se fazer um hedge deste contrato devemos, após receber 2/3 comprar 2/3 de ação gastando $(2/3)3 = 2$ no tempo 0. Assim ficaremos devendo $2/3 - 2 = -4/3$ que deverá ser pago no tempo 1. Se o lançamento de moeda for H, teremos no tempo 1 $-4/3 + 2/3(5) = (10 - 4)/3 = 2$, exatamente o valor de $V_1(H)$. Se o lançamento de moeda for T, teremos no tempo 1 $-4/3 + 2/3(2) = (4 - 4)/3 = 0$, exatamente o valor de $V_1(T)$. Ou sejam teremos feito o hedge perfeito do contrato. ∎

Exemplo 2.2 (Call com Juros) *Considere um* ***call*** *com strike $K = 3$. Assuma que no Modelo da Figura 2.3 a taxa de juros é $r = 1/3$. Qual o valor desta opção? Como o vendedor do call pode fazer um hedge deste contrato?*

Solução: Como é o mesmo payoff e valores da ação, $V_1(H) = 2$, $V_1(T) = 0$, $u = 5/3$ e $d = 2/3$. Assim, pela equação (2.7) obtemos que $\widetilde{p} = (1 + 1/3 - 2/3)/(5/3 - 2/3) = 2/3$ e portanto $\widetilde{q} = 1/3$. Logo, pelo Teorema 2.11 o valor V_0 da opção é:

$$V_0 = \frac{1}{1 + 1/3}(2/3(2) + 1/3(0)) = 1.$$

Como $\Delta_0 = (2 - 0)/(5 - 2) = 2/3$, para se fazer um hedge deste contrato devemos, após receber 1 comprar 2/3 de ação gastando $(2/3)3 = 2$ no tempo 0. Assim ficaremos devendo 1 que deverá ser pago, com juros, no tempo 1. Se o lançamento de moeda for H, teremos no tempo 1 $-1(1 + 1/3) + 2/3(5) = (10 - 4)/3 = 2$, exatamente o valor de $V_1(H)$. Se o lançamento de moeda for T, teremos no tempo 1 $-1(1 + 1/3) + 2/3(2) = (4 - 4)/3 = 0$, exatamente o valor de $V_1(T)$. Ou sejam teremos feito o hedge perfeito do contrato. ∎

Exemplo 2.3 (Put com Juros) *Considere um* **put** *(europeu) com strike $K = 3$. Assuma que a taxa de juros é $r = 1/3$. Qual o valor desta opção? Como o vendedor do put pode fazer um hedge deste contrato?*

Solução: Neste caso o payoff é $f(S) = (3 - S)^+$. Logo $V_1(H) = 0$ e $V_1(T) = 1$. Já calculamos que $u = 5/3$ e $d = 2/3$. Como é a mesma taxa de juros do exemplo anterior, $\widetilde{p} = 2/3$ e $\widetilde{q} = 1/3$. Logo, pelo Teorema 2.11 o valor V_0 da opção é:

$$V_0 = \frac{1}{1 + 1/3}(2/3(0) + 1/3(1)) = 1/4.$$

Como $\Delta_0 = (0-1)/(5-2) = -1/3$, para se fazer um hedge deste contrato devemos, após receber 1/4 comprar a descoberto (sell short) 1/3 de ação no tempo 0 (ou se preferir pegar 1/3 de ação emprestado). Assim ficaremos devendo 1/3 de ação para ser pago no tempo 1 e aplicaremos em renda fixa além do 1/4 recebido mais $1/3(3) = 1$ da ação que foi emprestada, resultando em 5/4 que serão aplicados. Se o lançamento de moeda for H, no tempo 1 teremos $5/4(1+1/3) - 1/3(5) = (5-5)/3 = 0$, exatamente o valor de $V_1(H)$. Se o lançamento de moeda for T, teremos no tempo 1 $5/4(1+1/3) - 1/3(2) = (5-2)/3 = 1$, exatamente o valor de $V_1(H)$. Ou sejam teremos feito o hedge perfeito do contrato. ■

Exemplo 2.4 (Opção Exótica) *Considere uma opção cujo payoff é dado por $f(S) = S^2$. Assuma que no Modelo da Figura 2.3 a taxa de juros é $r = 1/3$. Qual o valor desta opção? Como o vendedor desta opção pode fazer um hedge deste contrato?*

Solução: Temos que $V_1(H) = 25$ e $V_1(T) = 4$. Já calculamos que $u = 5/3$ e $d = 2/3$. Como é a mesma taxa de juros do exemplo anterior, $\widetilde{p} = 2/3$ e $\widetilde{q} = 1/3$. Logo, pelo Teorema 2.11 o valor V_0 da opção é:

$$V_0 = \frac{1}{1 + 1/3}(2/3(25) + 1/3(4)) = 13.5.$$

Como $\Delta_0 = (25 - 4)/(5 - 2) = 21/3$, para se fazer um hedge deste contrato devemos, após receber 13.5 comprar 21/3 de ação gastando $(21/3)3 = 21$ no tempo 0. Assim ficaremos devendo $13.5 - 21 = -7.5$ que deverá ser pago, com juros, no tempo 1. Se o lançamento de moeda for H, no tempo 1 teremos $-7.5(1 + 1/3) + 21/3(5) = 25$, exatamente o valor de $V_1(H)$. Se o lançamento de moeda for T, teremos no tempo 1 $-7.5(1 + 1/3) + 21/3(2) = 4$, exatamente o valor de $V_1(H)$. Ou sejam teremos feito o hedge perfeito do contrato. ■

2.4 Modelo de Vários Períodos

Desenvolvemos agora um modelo para o preço da ação em vários períodos: um modelo para S_n, o valor da ação no tempo $n = 0, 1, \dots, N$, com N o tempo final. Neste modelo determinamos o valor de S_n após experimentos aleatórios, que no livro será sempre dado por uma sequência de lançamentos de uma moeda cujos resultados possíveis são H (head, cara) ou T (tail, coroa), com probabilidade $p \neq 0, 1$ (em ambos casos modelo deixa de ser aleatório) de sair H e $1-p$ de sair T.

Note que S_1 dependerá de apenas um lançamento, já S_2 de 2 lançamentos e assim sucessivamente. Assim podemos denotar os valores possíveis por $S_1(H), S_1(T)$, $S_2(HH)$, $S_2(HT)$, $S_2(TH)$, $S_2(TT)$. De forma geral S_n dependerá de n lançamentos de moeda e denotaremos a sequência de lançamentos de moeda por $w_1 \cdots w_n$, com $w_i = H$ ou $w_i = T$ e $S_n(w_1 \cdots w_n)$. De forma mais compacta escrevemos $S_n(\omega)$, com $\omega = w_1 \cdots w_n$ representando todos os n lançamentos (de moeda). Também utilizaremos ω para representar parte dos lançamentos. Por exemplo, $S_n(HT\omega)$, com $\omega = w_3 \cdots w_n$ representando os $n-2$ lançamentos finais de moeda. Também podemos usar o "*" para representar um coringa, que pode ser tanto H quanto T. Assim, $S_3(H * H)$ são os dois valores de S_3 que começam e terminam com H, mas com 2º lançamento podendo ser H ou T ou $S_5(HT * **)$ os 8 valores de S_5 que começam com HT.

Em quase todos modelos que utilizamos assumimos que u e d são constantes e definimos de forma indutiva S_n, $n > 0$, por

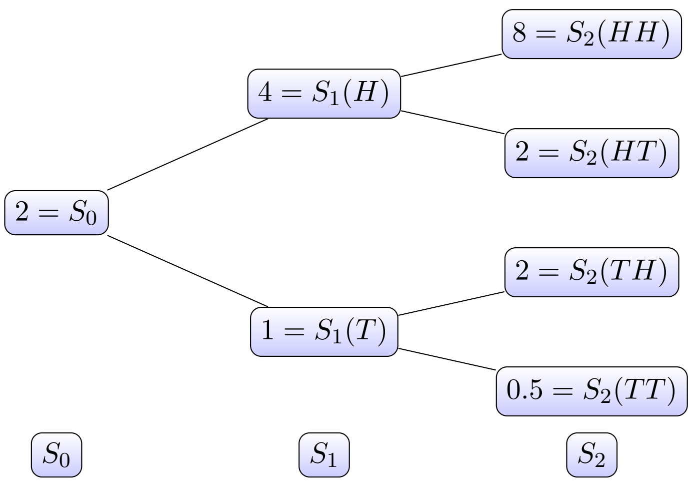
$$S_{n+1}(\omega H) = uS_n(\omega) \quad \text{e} \quad S_{n+1}(\omega T) = dS_n(\omega), \quad \text{com } \omega = w_1 \cdots w_n. \tag{2.4}$$

Assim (Exercício 20 da p.47),

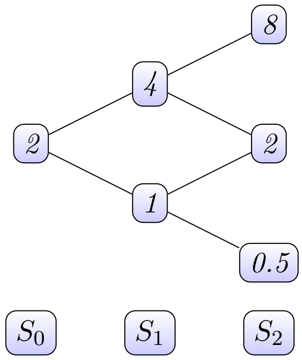
$$S_n(\omega) = u^{\#H(\omega)} d^{\#T(\omega)} S_0, \quad \text{com } \omega = w_1 \cdots w_n, \tag{2.5}$$

onde $\#H(\omega)$ = número de caras em ω e $\#T(\omega)$ = número de coroas.

Exemplo 2.5 *Suponha que $S_0 = 2, u = 2, d = 1/2$. Então os valores de S_n podem ser representados na árvore abaixo de valores.*



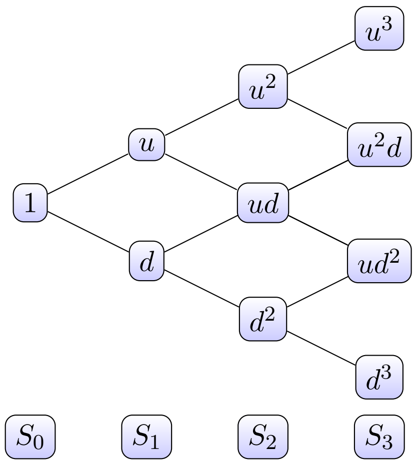
Como $S_2(TH) = S_2(HT)$ podemos representá-la por:



Observação 2.8 (Explosão Combinatória) *Pela equação 2.5, temos que $S_n(\omega_1) = S_n(\omega_2)$ se, e somente se $\#T(\omega_1) = \#T(\omega_2)$. Assim, caso u e d sejam constantes, a árvore de valores será* ***recombinante****, isto é, os nós se recombinam ao longo do caminho e teremos $N+1$ valores distintos para S_N, um crescimento linear em N.*

Caso u e d não sejam constantes teremos 2^N valores distintos para S_N, um crescimento exponencial em N, que chamamos de ***explosão combinatória****. A importância disso é que para simulações no computador, caso a árvore não se recombine e se queira mantê-la toda em memória, devido a explosão combinatória toda memória do computador seria ocupada em poucos passos da simulação: é necessário tomar cautelas nos algoritmos. Veja o Exercício 21 da p.47.*

Para ilustrar como a árvore se recombina colocamos na figura abaixo uma árvore com valores de S_n, $n = 0, 1, 2, 3$, u e d constantes, e supondo $S_0 = 1$ para simplificar. Pode-se ver que $S_3(THT) = S_3(TTH) = S_3(HTT) = ud^2$, $S_3(HHT) = S_3(THH) = S_3(HTH) = u^2d$, etc (verifique).



Assumiremos no momento que r também é constante ao longo do tempo (de existência do contrato). Esta hipótese aqui no momento não é muito problemática pois focamos em **opções** de ações, com tempo de contrato abaixo de um ano (curto) onde a taxa de juros pouco varia. Teremos um capítulo somente para tratar de quando os juros variam ao longo do tempo.

A questão agora é **como precificar opções neste modelo**? Ora, podemos aplicar as ideias desenvolvidas na Seção 2.3 da p.27, onde precificamos opções no modelo de um período, para cada ramo da árvore, partindo dos payoffs na execução do contrato (quando ele expira) e ir resolvendo para trás no tempo. Assim, suponha que a opção expira no tempo N com valor V_N conhecido (um call ou put com um certo strike por exemplo). Quanto precisamos ter no tempo $N-1$ para fazer um hedge perfeito de V_N? A dificuldade aqui é que precisamos saber em qual ramo da árvore estamos. Ilustramos isto no próximo parágrafo antes de retomar o caso geral.

Suponha que temos um contrato que expira em $N = 2$. Temos que determinar separadamente $V_1(T)$ e $V_1(H)$, com estratégia de hedge distintas.

O valor de $V_1(T)$ será calculado usando o mesmo raciocínio utilizado anteriormente, montando uma carteira que reproduza no instante seguinte os valores $V_2(TH)$ e $V_2(TT)$. Adaptando o Teorema 2.11 da p.32, observamos que

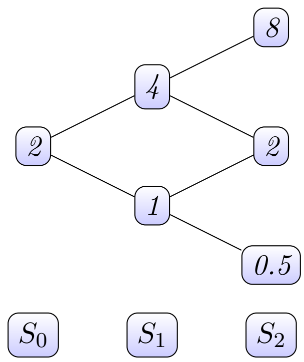
$$V_1(T) = \frac{1}{1+r}\left(\widetilde{p}V_2(TH) + \widetilde{q}V_2(TT)\right)$$

pois partindo de uma carteira com $X_1(T) = V_1(T)$ compramos $\Delta_1(T)$ ações ao preço $S_1(T)$ cada uma, onde (adaptando equação 2.3 da p.31)

$$\Delta_1(T) = \frac{V_2(TH) - V_2(TT)}{S_2(TH) - S_2(TT)},$$

e no tempo 2 teremos $X_2(TH) = V_2(TH)$ e $X_2(TT) = V_2(TT)$. Caso não tenha entendido isso é hora de retornar à seção anterior. Define-se, de forma análoga, $V_1(H)$. Agora, para determinar V_0 aplicamos, desta vez de forma direta, o Teorema 2.11. Veja isso no exemplo abaixo.

Exemplo 2.6 *Considere S_n representado na árvore abaixo e $r = 1/4$. Determine o valor V_0 de um call (europeu) com strike 3 vencendo no tempo* 2. *Explique detalhadamente* ***como fazer o hedge*** *deste contrato.*



Solução: Como $u = 2$, $d = 1/2$, obtemos que $\widetilde{p} = \widetilde{q} = 1/2$. Note como calculamos os valores sucessivos V_2, V_1, V_0 **nesta ordem, da frente para trás no tempo**. Pelo enunciado, $V_2 = (S_2 - 3)^+$. Assim, $V_2(HH) = 5$, e $V_2(HT) = V_2(TH) = V_2(TT) = 0$.

Usando as fórmulas desenvolvidas, obtemos que $V_1(T) = 0$ e $V_1(H) = 1/(1+1/4)(1/2(5)+1/2(0)) = 2$. Além disso $\Delta_1(T) = (0-0)/(2-0.5) = 0$ e $\Delta_1(H) = (5-0)/(8-2) = 5/6$.

Finalmente $V_0 = 1/(1+1/4)(1/2(2)+1/2(0)) = 4/5$ com $\Delta_0 = (2-0)/(4-1) = 2/3$.

Para **fazer o hedge** devemos começar com $V_0 = 4/5$ e comprar $\Delta_0 = 2/3$ ações no tempo 0. Agora depende se o 1o lançamento foi H ou T:

(a) Se foi T, vendemos todas ações e ficaremos com $0 = V_1(T)$. No tempo seguinte não precisamos modificar a posição ($\Delta_1(T) = 0$) pois se o 2o lançamento for H ou T, o valor da opção no tempo 2 continua igual a 0.

(b) Se foi H, vendemos todas as ações e compramos $\Delta_1(H) = 5/6$ de ações. No tempo seguinte vendemos as ações e, caso o 2o lançamento seja H teremos $V_2(HH) = 5$, caso seja T teremos $V_2(HT) = 0$. ■

Isto é generalizado para opções que expiram no tempo N no Teorema 2.13 que segue, onde o valor da opção pode depender de **todo o caminho** percorrido pela ação, ou seja, pode depender de toda a história. Pode ser, por exemplo, uma opção cujo valor depende do máximo assumido pela ação no caminho.

Para a demonstração, e para muito que faremos depois, precisamos utilizar a notação ωT ou ωH para representar a sequência de lançamentos $w_1 w_2 \cdots w_n T$, com $\omega = w_1 w_2 \cdots w_n$ e $w_i = H$ ou T. Desta forma as sequências de lançamentos de moeda ωT e ωH diferem somente em seu último lançamento, os n primeiros lançamentos idênticos.

Definimos de forma rigorosa carteira autofinanciada, o conceito apresentado na Definição 2.2 da p.25.

Definição 2.12: Sequência de Carteiras Autofinanciadas

Uma sequência de carteiras indexada pelo tempo $c^t \in \mathbb{R}^{n+1}$, $t = 0, 1, \dots N$ (veja Definição 2.1 da p.25) associado aos ativos R^t (valor da renda fixa ao longo do tempo) e S_i^t (valor das ações ao longo do tempo) é **autofinanciável** se para todo t,

$$c_0^t R^t + \sum_{i=1}^{n} c_i^t S_i^t = c_0^{t+1} R^t + \sum_{i=1}^{n} c_i^{t+1} S_i^t.$$

Definindo o valor da carteira no tempo t por $V^t = c_0^t R^t + \sum_{i=1}^{n} c_i^t S_i^t$, a soma da quantidade de cada ativo vezes seu valor, a carteira será autofinanciável se (exercício)

$$\Delta V^t = c_0^t \Delta R^t + \sum_{i=1}^{n} c_i^t \Delta S_i^t,$$

onde $\Delta V^t = V^t - V^{t-1}$, $\Delta R^t = R^t - R^{t-1}$, $\Delta S_i^t = S_i^t - S_i^{t-1}$.

Assim o lado esquerdo da 1ª equação na definição acima é V^t e o lado direito é um reposicionamento autofinanciado da carteira (não é V^{t+1}!). No próximo instante pode ser que V^{t+1} seja igual, menor ou maior que V^t. Na 2ª equação fica claro que o ganho (ou perda) no valor da carteira se deve somente aos ganhos (e perdas) no valor dos ativos.

Exemplo 2.7 *No contexto de 2 ativos, renda fixa R^t e ação S^t, a carteira (c^0, d^0) vai passar de forma autofinanciável para a carteira (c^1, d^1) se*

$$c^0R^0 + d^0S^0 = c^1R^0 + d^1S^0.$$

Assim o valor total foi preservado nesta montagem de carteira. Comparando o valor da carteira no tempo 0 dado por $V^0 = c^0R^0 + d^0S^0$ e o valor no tempo 1 dado por $V^1 = c^1R^1 + d^1S^1$, observamos que

$$\Delta V^1 = V^1 - V^0 = c^1\Delta R^1 + d^1\Delta S^1.$$

Teorema 2.13: Opção no Modelo de Vários Períodos

Sob as hipóteses e definições introduzidas anteriormente, seja V_N o valor de uma opção no seu tempo de expiração N, que depende somente dos lançamentos de moeda $w_1 \cdots w_N$. Defina de forma recursiva para trás (partimos do valor final do contrato V_N), para $0 \leq n \leq N-1$, que

$$V_n(w_1 \cdots w_n) = \frac{1}{1+r}(\tilde{p}V_{n+1}(w_1 \cdots w_n H) + \tilde{q}V_{n+1}(w_1 \cdots w_n T)). \tag{2.6}$$

Então existe somente uma sequência de **carteiras autofinanciadas** que começará valendo V_0 no tempo 0 e terminará valendo V_N no tempo N, isto é, existe uma única carteira que **replica** os valores da opção no tempo N. Logo, pelo princípio da não-arbitragem, o valor desta opção no tempo 0 é V_0.

Prova: Construímos uma sequência de carteiras autofinanciadas começando com valor $X_0 = V_0$. Deste valor inicial retiramos parte para comprar Δ_0 ações e aplicar o resto em renda fixa até o tempo 1. No tempo 1 vendemos as ações compradas no tempo 0 e compramos ações novamente. Só que agora compraremos $\Delta_1(H)$ ou $\Delta_1(T)$ ações, dependendo do resultado w_1 do lançamento de moeda, isto é, dependendo do valor S_1 da ação neste momento. Assim, de forma geral, $\Delta_n(\omega)$, a quantidade de ações adquiridas no instante n dependerá dos n primeiro lançamentos $\omega = w_1 \cdots w_n$. Desta forma, dada sequência de lançamentos ω, definimos

$$\Delta_n(\omega) = \frac{V_{n+1}(\omega H) - V_{n+1}(\omega T)}{S_{n+1}(\omega H) - S_{n+1}(\omega T)} = \frac{\Delta V_{n+1}}{\Delta S_{n+1}}. \tag{2.7}$$

Definimos de forma indutiva a sequência de carteiras autofinanciadas.

- Começando com X_n no tempo n compramos Δ_n ações e aplicar o resto em renda fixa, ou tomar emprestado com juros se o resto for negativo.
- No tempo $n+1$ vendemos as ações compradas no tempo n, juntamos com o resultado da renda fixa ou pagamos a dívida com juros, resultando em novo valor X_{n+1}

Por serem autofinanciadas, relacionamos X_n com X_{n+1} através da equação da riqueza ou (*wealth equation*):

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n). \tag{2.8}$$

Por construção obtemos $X_0, X_1, \ldots, X_N$ por meio de carteiras autofinanciadas. Provamos por indução que $X_n = V_n$ para todo $n = 0, \ldots, N$. O primeiro passo é hipótese: $X_0 = V_0$. Assim suponha que $X_n(\omega) = V_n(\omega)$ para todo ω. Queremos provar que: $X_{n+1}(\omega H) = V_{n+1}(\omega H)$ e $X_{n+1}(\omega T) = V_{n+1}(\omega T)$ para todo ω. Provamos que $X_{n+1}(\omega H) = V_{n+1}(\omega H)$ para todo ω e deixamos para o leitor provar (*mutatis mutandis*[2]) que $X_{n+1}(\omega T) = V_{n+1}(\omega T)$.

Por (2.8),

$$\begin{aligned}
X_{n+1}(\omega H) &= \Delta_n(\omega) S_{n+1}(\omega H) + (1+r)(X_n(\omega) - \Delta_n(\omega) S_n(\omega)),\\
&= \Delta_n(\omega) u S_n(\omega) + (1+r)(X_n(\omega) - \Delta_n(\omega) S_n(\omega)),\\
&= \Delta_n(\omega) S_n(\omega)(u - (1+r)) + (1+r) X_n(\omega).
\end{aligned}$$

Agora tratamos de cada um dos dois termos do lado direito. Para o primeiro termo, usando (2.7), a definição de Δ_n,

$$\begin{aligned}
\Delta_n(\omega) &= \frac{V_{n+1}(\omega H) - V_{n+1}(\omega T)}{S_{n+1}(\omega H) - S_{n+1}(\omega T)},\\
&= \frac{V_{n+1}(\omega H) - V_{n+1}(\omega T)}{S_n(\omega)(u-d)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta_n(\omega) S_n(\omega)(u - (1+r)) &= \frac{V_{n+1}(\omega H) - V_{n+1}(\omega T)}{(u-d)}(u - (1+r)),\\
&= \widetilde{q}(V_{n+1}(\omega H) - V_{n+1}(\omega T)).
\end{aligned}$$

Quanto ao segundo termo, usando a hipótese de indução $X_n = V_n$, e (2.6),

$$(1+r) X_n(\omega) = (1+r) V_n(\omega) = \widetilde{p} V_{n+1}(\omega H) + \widetilde{q} V_{n+1}(\omega T)$$

Juntando os dois termos, obtemos que

$$\begin{aligned}
X_{n+1}(\omega H) &= \widetilde{q}(V_{n+1}(\omega H) - V_{n+1}(\omega T)) + \widetilde{p} V_{n+1}(\omega H) + \widetilde{q} V_{n+1}(\omega T),\\
&= (\widetilde{q} + \widetilde{p}) V_{n+1}(\omega H),\\
&= V_{n+1}(\omega H).
\end{aligned}$$

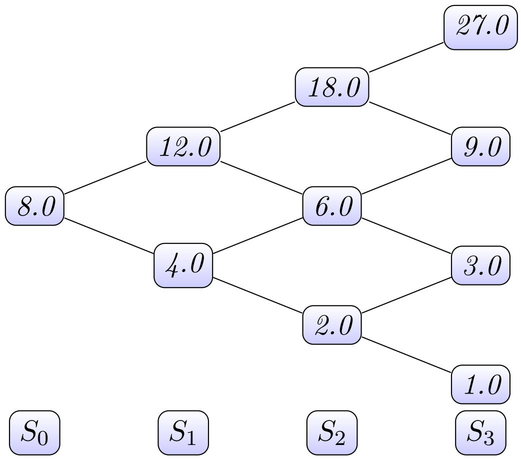
Assim para todo ω, $X_{n+1}(\omega H) = V_{n+1}(\omega H)$.

Concluímos que $X_{n+1} = V_{n+1}$. A unicidade da carteira segue da unicidade da solução do sistema linear (2.2). ■

Veremos mais adiante no Corolário 3.26 da p.72 uma fórmula direta (não-recursiva) para V_n mas precisamos de mais teoria.

[2] Em latim: "mude o que tem que ser modificado", algo usual em Matemática, quando provamos um caso e o outro é simples adaptação

Exemplo 2.8 (Put no Modelo de Vários Períodos) *Considere o modelo de preço de ação da árvore abaixo e um put (europeu) com strike* 10 *expirando no tempo 3.*



(a) Assuma que $r = 0$. Determine V_0 e a estratégia de hedge no tempo 2 sabendo que os dois primeiros lançamentos foram HH.

(b) Assuma que $r = 10\%$. Determine a estratégia de hedge no tempo 2 sabendo que os dois primeiros lançamentos foram HT.

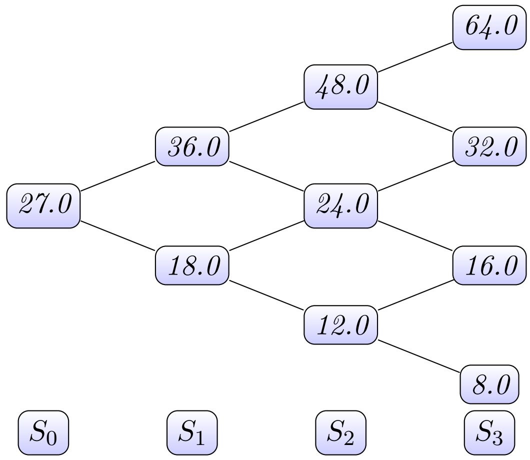
Solução: Observe que $u = 1.5$ e $d = 0.5$. Note também que como $V_3 = (10 - S_3)^+$, $V_3(HHH) = 0$, $V_3(HHT) = V_3(HTH) = V_3(THH) = 1$, $V_3(HTT) = V_3(THT) = V_3(TTH) = 7$, $V_3(TTT) = 9$.

(a) Neste caso $\widetilde{p} = 0.5$. Usando fórmula (2.6), $V_2(HH) = (1/2(0) + 1/2(1)) = 1/2$, $V_2(HT) = V_2(TH) = (1/2(1)+1/2(7)) = 4$, $V_2(TT) = (1/2(7)+1/2(9)) = 8$. Aplicando (2.6) de novo, $V_1(H) = (1/2(1/2) + 1/2(4)) = 9/4$, $V_1(T) = (1/2(4) + 1/2(8)) = 6$. Aplicando (2.6) de novo, $V_0 = (1/2(9/4) + 1/2(6)) = 33/8$. Por (2.7), $\Delta_2(HH) = (0-1)/(27-9) = -1/18$. Assim no tempo 2, com $V_2(HH) = 1/2$ na mão, compramos a descoberto 1/18 ações (compramos uma quantidade negativa de ações), cada uma a 18, de forma que nossa carteira será de 1.5 na renda fixa e uma dívida de 1/18 ações. No tempo 3, depende do cenário: Se HHH, teremos que devolver $27/18 = 1.5$, exatamente o que temos na mão, ficando com zero, o valor de $V_3(HHH)$. Se HHT, teremos que devolver $9/18 = 0.5$ e ficaremos com $1.5 - 0.5 = 1.0$, o valor de $V_3(HHT)$.

(b) Neste caso $\widetilde{p} = 0.6$. Usando fórmula (2.6), $V_2(HT) = (1)/(1 + 0.1)(0.6(1) + 0.4(7)) = 34/11$. Por (2.7), $\Delta_2(HT) = (1 - 7)/(9 - 3) = -1$. Assim no tempo 2 temos $V_2(HT) = 34/11$ na mão e pegamos emprestado 1 ação ao valor 6. Logo aplicamos $6+34/11$ em renda fixa, a juros 10% e ficar devendo uma ação. No tempo 3 se o cenário for HTH, teremos $(6+34/11)*1.1-9 = 1$, exatamente $V_3(HTH)$. Se for HTT, teremos $(6 + 34/11) * 1.1 - 3 = 7$, exatamente $V_3(HTT)$. ■

Exemplo 2.9 (Opção Dependente do Caminho) *Considere o modelo de preço de ação da árvore abaixo. Assuma que $r = 0$ e considere a opção dependente de caminho: $V_3 = (MAX(S_1, S_2, S_3)-23)^+$. De forma mais precisa, $V_3(w_1w_2w_3) = (MAX(S_1(w_1), S_2(w_1w_2), S_3(w_3))-$*

$23)^+$. *Em suma é um call (europeu) com strike $K = 23$ mas onde se observa o maior valor que S_n assume ao longo do caminho, excluindo o valor inicial S_0.*



Determine:
(a) $V_2(HH)$. (b) $V_2(HT)$. (c) $V_1(H)$. (d) $V_1(T)$. (e) V_0.

Solução: Como $u = 4/3$, $d = 2/3$ e $r = 0$, $\widetilde{p} = 1/2$.

(a) $V_3(HHH) = (64 - 23)^+ = 41$ e $V_3(HHT) = (48 - 23) = 25$. Assim $V_2(HH) = (1/2(41) + 1/2(25)) = 33$.

(b) Note que no caminho HTw_3 o maior valor da ação é sempre 24. Logo $V_3(HTw_3) = (24 - 23)^+ = 1$. Assim, $V_2(HT) = 1$.

(c) Usando (a) e (b), $V_1(H) = (1/2(22) + 1/2(1)) = 23/2$.

(d) Pode-se verificar que $V_3(Tw_2w_3) = 0$ pois começando por T a ação assume no máximo o valor 18, abaixo do strike. Assim $V_1(T) = 0$.

(e) $V_0 = (1/2(23/2) + 1/2(0)) = 23/4$. ■

2.5 Generalizando o Modelo

Exploramos modificações no modelo para o preço das ações e dos juros. Ao invés de assumir que p, q, r são constantes, permitimos que variem com o tempo e que sejam aleatórios (dependam da sequência de lançamentos de moeda). Assim supomos que:

1. Os valores de u, d e r podem depender do tempo e dos lançamentos: $u_n(\omega)$, $d_n(\omega)$ e $r_n(\omega)$.

2. Hipótese de não-arbitragem: $0 < d_n(\omega) < 1 + r_n(\omega) < u_n(\omega)$ para todo n e ω.

Podemos adaptar o Teorema 2.13 da p.39 para poder calcular preço de opções com estas novas hipóteses. Para isto redefinimos as probabilidades neutras a risco como dependentes do tempo e de ω:

$$\widetilde{q}_n(\omega) = \frac{u_n(\omega) - (1 + r_n(\omega))}{u_n(\omega) - d_n(\omega)} \quad \text{e} \quad \widetilde{p}_n(\omega) = 1 - \widetilde{q}_n(\omega).$$

Modificando o Teorema 2.13 (exercício) obtemos a fórmula recursiva para o valor V_0 da opção baseado neste modelo:

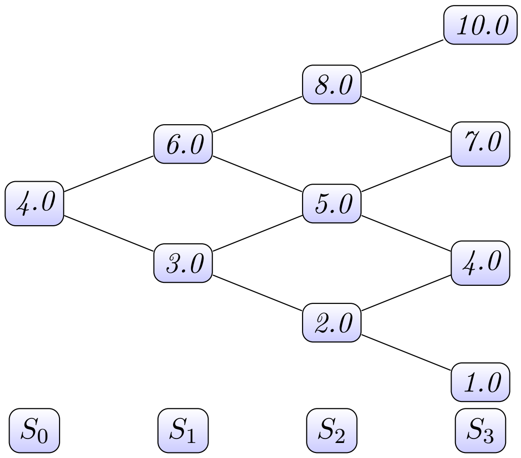
$$V_n(\omega) = \frac{1}{1 + r_n(\omega)} \left(\widetilde{p}_n(\omega)V_{n+1}(\omega H) + \widetilde{q}_n(\omega)V_{n+1}(\omega T)\right).$$

A fórmula (2.7) para Δ_n permanece a mesma. Mostramos através de exemplos.

Exemplo 2.10 *Considere a árvore com valores de S_n abaixo e um call (europeu) com strike 6 expirando no tempo 3. Supondo $r = 20\%$, determine:*

(a) Se as condições de não-arbitragem são satisfeitas.

(b) As probabilidades neutras a risco. *(c) $V_2(TH)$.*



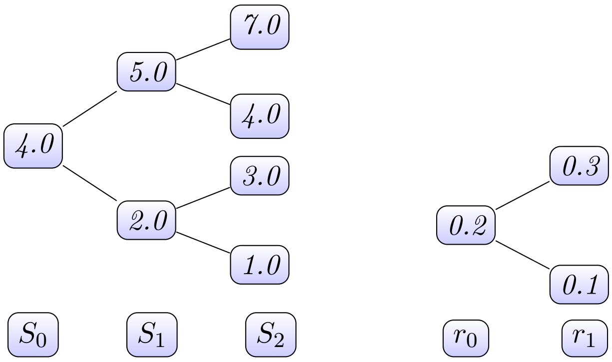
Solução: (a) Observamos que $u_0 = 6/4$, $d_0 = 3/4$, $u_1(H) = 8/6, u_1(T) = 5/3$, $d_1(H) = 5/6, d_1(T) = 2/3$, $u_2(HH) = 10/8, u_2(HT) = u_2(TH) = 7/5, u_2(TT) = 4/2 = 2$, $d_2(HH) = 7/8, d_2(HT) = d_2(TH) = 4/5, d_2(TT) = 1/2$, Como $r = 2/10$, $1 + r = 1.2$. Note que $d_n < 1.2 < u_n$ para $n = 0, 1, 2$.

(b) $\widetilde{p}_0 = (1.2 - 3/4)/(6/4 - 3/4) = 0.6$, $\widetilde{p}_1(H) = (1.2 - 5/6)/(8/6 - 5/6) = 11/15$, $\widetilde{p}_1(T) = (1.2 - 2/3)/(5/3 - 2/3) = 8/15, \widetilde{p}_2(TT) = (1.2 - 1/2)/(2 - 1/2) = 7/15, \widetilde{p}_2(TH) = (1.2 - 4/5)/(7/5 - 4/5) = 2/3 = \widetilde{p}_2(HT)$, $\widetilde{p}_2(HH) = (1.2 - 7/8)/(10/8 - 7/8) = 13/15$.

(c) Como $V_3 = (S_3 - 6)^+$, $V_3(THT) = (4 - 6)^+ = 0$ e $V_3(THH) = (7 - 6)^+ = 1$. Assim, $V_2(TH) = 1/(1.2)(2/3(1) + 1/3(0)) = 5/9$. ∎

Exemplo 2.11 *Considere as árvores com valores de S_n e r_n abaixo e um put (europeu) com strike 5 expirando no tempo 2. Note que precisamos saber S_2 pois a opção é baseada nisto mas não precisamos saber r_2. Determine:*

(a) As probabilidades neutras a risco. (b) V_0.



Solução: (a) Primeiro calculamos $u_0 = 5/4, d_0 = 1/2$, $u_1(H) = 7/5, d_1(H) = 4/5$, $u_1(T) = 3/2, d_1(T) = 1/2$. Assim $\widetilde{p}_0 = (1.2 - 1/2)/(5/4 - 1/2) = 14/15$, $\widetilde{p}_1(H) = (1.3 - 4/5)/(7/5 - 4/5) = 5/6$, $\widetilde{p}_1(T) = (1.1 - 1/2)/(3/2 - 1/2) = 0.6$,

(b) Como $V_2(HH) = (7-5)^+ = 2$ e $V_2(HT) = (4-5)^+ = 0$, $V_1(H) = 1/(1 + 0.3)(5/6(2) + 1/6(0)) = 50/39$. Como $V_2(TH) = (3-5)^+ = V_2(TT) = (1-5)^+ = 0$, $V_1(T) = 0$.

Assim, $V_0 = 1/(1 + 0.2)(14/15(50/39) + 1/15(0)) = 350/261$. ∎

2.6 Greeks

Apresentamos neste capítulo o significado de Δ, que é a variação do preço da opção com relação à variação no preço da ação. Este é o primeiro dos chamados **Greeks**, letras gregas que expressam variações do preço da opção em relação à diversos outros fatores. Outros termos utilizados são sensibilidade de risco, medida de risco e parâmetros de hedge.

Na gestão de risco de uma carteira, estas sensibilidades são muito importantes para determinar o tamanho da exposição a risco e em que direção deve-se ajustar o portfolio para se fazer o hedge. Fazem mais sentido no contexto dos modelos contínuos no tempo (modelo de Black&Scholes). O Δ_n que definimos se torna uma derivada parcial: $\delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$. Por esta razão não falaremos novamente sobre o assunto neste texto, que foca em modelos discretos. De todo modo segue breve descrição de alguns deles:

- Theta mede a variação do valor da opção com relação ao tempo: $\theta = \dfrac{\partial V}{\partial t}$.
- Rho mede a variação do valor da opção com relação à taxa de juros: $\rho = \dfrac{\partial V}{\partial r}$.
- Gamma mede a variação do Delta com relação ao preço da ação; é a derivada segunda do valor da opção com relação ao preço da ação: $\gamma = \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$.

2.7 Exercícios

1. (juro composto contínuo) Suponha um capital C investido em uma aplicação que remunera k por cento ao ano. Definindo $r_a = k/100$, após t anos, o valor total neste fundo será $C(1 + r_a)^t$ (juros compostos após t períodos). Agora se os juros forem computados mensalmente com taxa $r_a/12$, o total após t anos será $C(1+r_a/12)^{12t}$. De forma similar, por dia: $C(1 + r_a/365)^{365t}$. Finalmente podemos computar por hora, minuto, segundo, etc.

   Denotando por n o número de vezes que o juros anual foi subdividido chegaremos ao limite
$$\lim_{n\to\infty} C\left(1 + \frac{r_a}{n}\right)^{nt}.$$

   Prove que o valor deste limite é $\boxed{Ce^{r_a t}}$, a fórmula dos **juros compostos contínuos**.

   Dica: Troque de variável e use o limite do cálculo (que define e):
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

2. (comparando juros compostos contínuos e discretos) Existem dois modelos para capitalização de juros compostos. Se aplicarmos um capital C em uma conta com juros anuais r_a, após t anos (pode ser fração de ano) obtemos:
   - $C(1 + r_a)^t$ no modelo discreto;
   - $C\,e^{r_a t}$ no modelo contínuo.

   a) Prove que $(1 + r)^t \approx e^{rt}$ para r pequeno. Conclua que juros compostos contínuos e discretos são aproximadamente iguais.

      Dica: Série de Taylor diretamente ou pode-se tomar log dos dois lados e provar que $\log(1+r) \approx r$. Multiplicando por t e exponenciando obtemos o resultado.

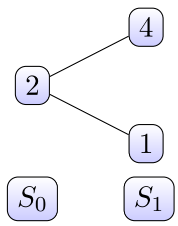
   b) Se no modelo discreto r_a é a taxa de juros anuais, prove que $r_{\Delta t}$, a taxa de juros no período Δt, com Δt medido em anos, é dada por $r_{\Delta t} = (1+r_a)^{\Delta t} - 1$. Prove que a taxa de juros mensais $r_m = \sqrt[12]{1 + r_a} - 1$.

   c) Se no modelo contínuo r_a é a taxa de juros anuais, prove que $r_{\Delta t}$ a taxa de juros no período Δt, com Δt medido em anos, é dada por $r_{\Delta t} = r_a \Delta t$. Prove que a taxa de juros mensais $r_m = r_a/12$.

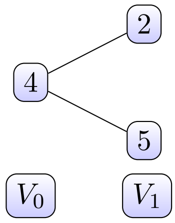
   d) Explique utilizando série de Taylor porque $r_a/12 \approx \sqrt[12]{1 + r_a} - 1$ para r_a pequeno. Veja os dois itens anteriores e entenda porque o modelo de juro contínuo e de juros discreto fornecem resultados similares. A simplicidade da conta dos juros contínuos justifica seu amplo uso.

3. Considere a carteira $(3, 5)$ (5 ações e 3 unidades monetárias). Sabendo que 1 ação custa 4 hoje e que são carteiras autofinanciadas geradas a partir desta, $(2, x)$, $(5, y)$ e $(z, 10)$, determine o valor de $x, y, z \in \mathbb{R}$.

4. Defina sequência de carteiras autofinanciadas.
5. Prove o Lema 2.8 da p.29.
6. Prove o Lema 2.10 da p.32.
7. Explique o que é arbitragem. Porque a arbitragem não persiste no mundo real?
8. Explique em que sentido empreendedores são buscadores de arbitragem. Porque isto não é contraditório com o princípio da arbitragem utilizado em finanças matemática?
9. Porque no modelo que utilizamos o retorno médio obtido investindo em ações, sob a probabilidade neutra a risco, é igual ao retorno da aplicação em renda fixa?
10. Qual valor deve ser maior? O Crescimento médio real do valor da ação ou o crescimento médio sob a probabilidade neutra a risco?
11. Considere uma ação no modelo de 1 tempo. Qual será o crescimento médio (real) no valor da ação?
12. Qual a relação entre a precificação de uma opção e a replicação do contrato aplicando em renda fixa e ações?
13. O que é uma opção dependente de caminho? Dê dois exemplos. Qual a diferença em termos de algoritmo para se calcular seu valor?
14. Quais são as hipóteses do modelo desenvolvido para o preço de uma ação? E quais hipóteses para precificação de opções de ações que usam este modelo?
15. O que é um mercado completo?
16. Qual a diferença entre opções americanas e europeias?
17. Considere o modelo para o preço de ação dado no diagrama abaixo. Supondo juro $r = 1/4$, determine o valor de um call (europeu) e um put (europeu), ambos com strike $K = 3$. Como fazer o hedge de cada um destas opções?



18. Sabemos que um contrato possui os valores abaixo, no tempo zero e no tempo 1, e que a taxa de juros é de 2%. Determine:
    (a) o valor das probabilidade neutras a risco.
    (b) o valor de S_0 sabendo que $S_1(H) = 10$ e $S_1(T) = 5$.



19. Um forward é um contrato cujo payoff no tempo 1 é $S_1 - K$. Prove que $V_0 = S_0 - K/(1+r)$.

20. Prove (por indução) que
$$S_n(\omega) = u^{\#H(\omega)} d^{\#T(\omega)} S_0, \quad \text{com } \omega = w_1 \cdots w_n,$$
onde $\#H(\omega) =$ número de caras em ω e $\#T(\omega) =$ número de coroas.

21. (a) Prove que se u e d são constantes, então o número de valores distintos de S_n é igual a $n+1$.

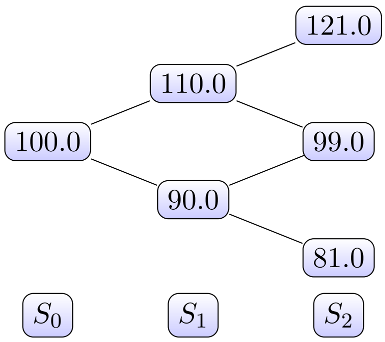
    (b) Prove que se u e d não são constantes, o número de valores distintos é de até 2^n, que chamamos de **explosão** combinatória.

    Faça uns exemplos de árvores para entender o que está ocorrendo.

22. Suponha que o preço de uma ação segue os valores abaixo. Suponha que a taxa de juros é 1%. Considere uma opção que é um put (europeu) com strike 100 no tempo 2. Determine:

    (a) as probabilidade neutras a risco.

    (b) V_2 (para cada ω). (c) V_1 (para cada ω). (d) V_0.



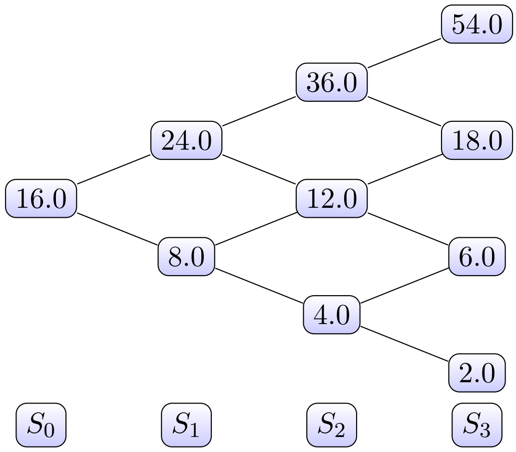
23. Suponha que o preço de uma ação está sendo negociada por 100 e que você saiba que nos próximos dois meses ele vai subir 20% or cair 10% a cada mês. Suponha que a taxa de juros é 1%. Considere uma opção que paga no tempo 2:
$$V_2 = (\max_{0 \le n \le 2} S_n) - (\min_{0 \le n \le 2} S_n).$$

    (a) Determine as probabilidade neutras a risco.

    (b) Determine V_2 (para cada ω). (c) Determine V_1 (para cada ω).

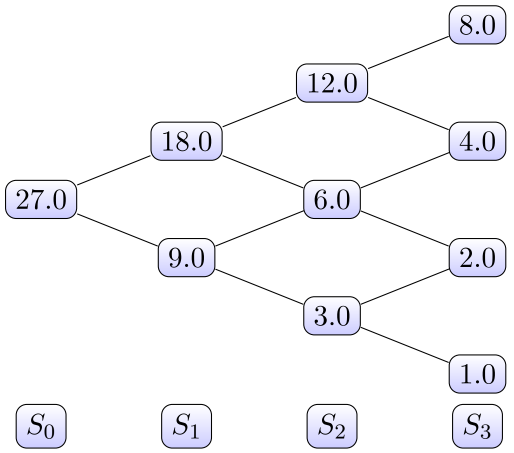
24. Considere os valores de uma ação dadas na figura abaixo. Assuma que $r = 0$ e considere um call (europeu) com strike 15 que expira no tempo 3. Determine:

 (a) V_2, V_1, V_0. (b) Toda estratégia de hedge.



25. Considere os valores de uma ação dadas na figura abaixo. Assuma que $r = 0$ e considere um put (europeu) strike 5 que expira no tempo 3. Determine:

 (a) V_2, V_1, V_0. (b) Toda estratégia de hedge.



26. Suponha que uma ação começa com valor $S_0 = 80$, e que a cada lançamento de moeda sobe seu valor em 10 unidades com H e diminui em 20 unidades com T. Suponha que a taxa de juros é de 10%.

 (a) Considere um opção que expira no tempo 3 com valor $V_3 = (S_3 - 60)^+$. Determine: $V_2(TH)$ e $\Delta_2(TH)$.

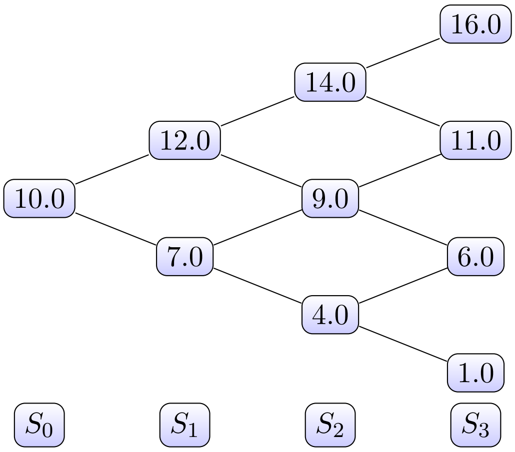
 (b) Considere outra opção que depende do valor máximo da ação ao longo do caminho $Y_n = \max(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, expirando no tempo 4 com valor $A_4 = (Y_4 - 60)^+$. Determine $A_4(THTT)$ e $A_4(HTTT)$.

27. Suponha que uma ação começa com valor $S_0 = 50$, e que a cada lançamento de moeda sobe seu valor em 30 unidades com H e diminui em 10 unidades com T. Suponha que a taxa de juros é de 5%. Considere uma opção **europeia** expirando no tempo 3 com $V_3 = 1$ se $S_3 > 70$, $V_3 = 0$ se $S_3 \leq 70$ (chamada de opção digital[3]). Determine $V_1(T)$.

28. Considere a árvore com os valores de uma ação da figura abaixo e um call (europeu) que expira no tempo 2 com strike 5, $r = 10\%$. Determine:

    (a) todas probabilidades neutras a risco.

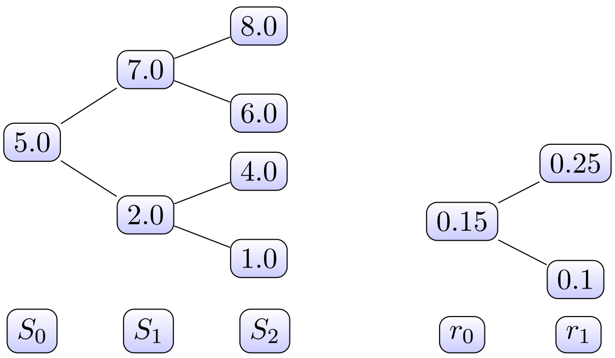
    (b) $V_2(TT)$ e $V_1(H)$.



29. Considere as árvores com valores de S_n e r_n abaixo e um call (europeu) com strike 3 expirando no tempo 2. Determine:

    (a) As probabilidades neutras a risco (onde fizer sentido) ou indique onde condição de não-arbitragem não é satisfeita.

    (b) V_0. (c) O hedge do contrato.



[3] Pesquise sobre opções digitais: são um instrumento teórico em finanças – um "delta de Dirac" – mas cuja negociação em diversos mercados são proibidas pois a descontinuidade de seu payoff (0 ou 1) faz com que possam ter fraudes de manipulação no preço do ativo na véspera do vencimento opções digitais.

3

Probabilidade e Finanças

Neste capítulo introduzimos a linguagem de probabilidade e processos estocásticos com aplicações em finanças. Revisitaremos a modelagem do capítulo anterior, colocando esta linguagem em ação. O contexto todo é em espaço amostral finito, que facilita muito tecnicamente.

3.1 Definições Básicas

Definição 3.1: Espaço de Probabilidade Finito

Dado um conjunto Ω finito, chamado de **espaço amostral** e uma função $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, chamada de **probabilidade**, que associa a cada subconjunto $A \subset \Omega$, chamado de **evento**, um número real $P(A)$ entre 0 e 1, chamada de probabilidade, dizemos que (Ω, P) é um **espaço de probabilidade** se:

(a) $P(\Omega) = 1$.

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para todo $A, B \subset \Omega$ disjuntos.

Observação 3.1 *Em espaços amostrais Ω finitos – contexto deste livro – podemos definir a probabilidade de todos subconjuntos de Ω, isto é, o domínio da função probabilidade é $\mathcal{P}(\Omega)$. Em espaços amostrais infinitos nem sempre isso é possível: o conjunto dos eventos (subconjuntos que podemos atribuir probabilidade) pode ser menor que $\mathcal{P}(\Omega)$. Tecnicamente dizemos que existem* ***conjunto não-mensuráveis****. Isto é assunto da área da matemática chamada de Medida e Integração ou na Probabilidade.*

Corolário 3.2

Se $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ são conjuntos disjuntos entre si, isto é, A_i e A_j são disjuntos se $i \neq j$, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Prova: Indução e um pouco de teoria dos conjuntos. Deixamos como exercício. ■

No contexto deste livro Ω será quase sempre (exceto em alguns exercícios) o espaço de sequencias finitas de lançamentos de moeda que definimos abaixo.

Definição 3.3: Conjunto de Lançamentos de Moeda.

Fixado $M \in \mathbb{N}$ e $p \in [0,1]$, definimos Ω_M como o conjunto das sequências de M lançamentos de moeda. Assim $\Omega_1 = \{H, T\}$, $\Omega_2 = \{HH, HT, TH, TT\}$, $\Omega_3 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$.

Exemplo 3.1 (Probabilidade em Ω_M) *Uma probabilidade em Ω_M pode ser definida de forma indireta fixando $p \in [0,1]$ e definindo a probabilidade* ***de cada*** *sequência $\omega = w_1 \cdots w_n \in \Omega_N$, com $w_i \in \{H,\ T\}$ por (consulte a notação utilizada na página p.35):*

$$P(\{\omega\}) = p^{\#H(\omega)}(1-p)^{\#T(\omega)}.$$

Abusamos notação e escrever $P(\omega)$ quando deveríamos escrever $P(\{\omega\})$. Pelo Corolário 3.2 a probabilidade de um conjunto com mais de uma sequência de lançamentos é obtida somando a probabilidade de cada elemento do conjunto. Pode-se mostrar que (Ω_M, P) é um espaço de probabilidade (exercício), o espaço que será utilizado em quase todo livro.

Exemplo 3.2 *Usaremos "*" para representar uma sequência de qualquer tamanho de H's e T's. Determine a probabilidade de cada um dos conjuntos abaixo:*

(a) $\{*H\} \subset \Omega_3$, as sequências terminadas em H.

(b) $\{*HT\} \subset \Omega_5$, as sequências terminadas em HT.

(c) $\{HT*\} \subset \Omega_7$, as sequências começando em HT.

Solução: (a) A probabilidade de $w_3 = H$ é p independente dos outros resultados. Assim a resposta é p.

(b) A probabilidade de $w_5 = T$ é $1-p$ e de $w_4 = H$ é p, e ambas independem de outros resultados. Assim a resposta é $(1-p)p$.

(c) Note que começando ou terminando com mesma sequência é a mesma probabilidade, e a resposta é igual a (b). ■

Exemplo 3.3 (Outra Probabilidade em Ω_M) *Na Seção 2.5 da p.42 introduzimos probabilidades que variam a cada lançamento, ao invés de ter valor constante p como no exemplo anterior. Assim seja p_k a probabilidade do k-ésimo lançamento ser H, e consequentemente $1-p_k$ de ser T. Assim para cada $\omega = w_1 \cdots w_M \in \Omega_M$ definimos:*

$$Q(\omega) = \prod_{k=1}^{M} p_k^{\#H(w_k)}(1-p_k)^{\#T(w_k)}.$$

Neste produtório, ou aparece p_k ou $1-p_k$, dependendo se $w_k = H$ ou T. Por exemplo $Q(TTHTH) = (1-p_1)(1-p_2)p_3(1-p_4)p_5$ e $Q_3(THTHH) = (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4p_5$. Observe como isso generaliza o exemplo anterior. Pode-se mostrar que (Ω_M, Q) é um espaço de probabilidade (exercício).

Exemplo 3.4 *Considere no contexto do exemplo anterior, em Ω_3, que $p_1 = 0.2, p_2 = 0.4, p_3 = 0.7$. Calcule a probabilidade dos conjuntos abaixo:*
(a) $A = \{*T*\}$. (b) $B = \{TH*\}$. (c) $C = \{*TT\}$.

Solução: (a) $A = \{HTH, HTT, TTH, TTT\}$. Calculando a probabilidade de cada uma (abusamos a notação) $P(HTH) = 0.2 \times 0.6 \times 0.7$, $P(HTT) = 0.2 \times 0.6 \times 0.3$, $P(TTH) = 0.8 \times 0.6 \times 0.7$, $P(TTT) = 0.8 \times 0.6 \times 0.3$. Como são conjuntos disjuntos, basta somar. Colocando o 0.6 do meio em evidência, depois o 0.2 e 0.8, ficamos com:

$$P(A) = 0.6[0.2(0.7+0.3) + 0.8(0.7+0.3)] = 0.6[0.2(1) + 0.8(1)] = 0.6[1] = 0.6.$$

Isto era esperado pois a probabilidade de sair H no 2º lançamento é 0.6.

(b) $B = \{THT, THH\}$. Como $P(THT) = 0.8 \times 0.4 \times 0.3$ e $P(THH) = 0.8 \times 0.4 \times 0.7$, somando os dois obtemos $P(B) = [0.8 \times 0.4](0.3 + 0.7) = 0.32$.

(c) $C = \{HTT, TTT\}$. Como $P(HTT) = 0.2 \times 0.6 \times 0.3$ e $P(THH) = 0.8 \times 0.6 \times 0.3$, somando os dois obtemos $P(C) = [0.6 \times 0.3](0.2 + 0.8) = 0.18$. ■

Da Definição 3.1 decorrem todas as propriedades. Deixamos para o leitor provar o lema abaixo.

Lema 3.4: Propriedades Básicas

Seja (Ω, P) um espaço de probabilidade. Então para todos $A, B \subset \Omega$,
(a) $P(A^c) = 1 - P(A)$. (b) $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$.

Observação 3.2 *Em espaços de probabilidade infinitos contínuos a situação é bem mais complicada. Por exemplo se Ω for um alvo, qual a probabilidade de se atirar um dardo e acertar:*

(a) uma certa região, por exemplo um círculo com certo raio?

(b) um ponto no alvo?

Claro que acertar uma região tipo um círculo terá probabilidade positiva. Mas de acertar um ponto qualquer é zero. Como uma região é a união disjunta de seus pontos, assim a soma das probabilidades de acertar cada ponto não é igual a probabilidade do conjunto.

Definição 3.5: Variável Aleatória ou v.a.

Se (Ω, P) é um espaço de probabilidade, dizemos que uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória (v.a.).

Explicaremos o significado da expressão – que soa meio mal – "variável aleatória". Afinal variável é x, y que assumem valores definidos. Note que para v.a. usamos letras maiúsculas para diferenciar de variáveis usuais. A ideia é que em modelos determinísticos temos que determinar o **valor** de uma variável (determinística) e em modelos probabilísticos temos que determinar a **probabilidade** do valor de uma v.a. assumir uma certa faixa de valores. Ou seja para variável x perguntamos o valor, para variável aleatória X perguntamos "qual a probabilidade de X assumir valores no intervalo $[2, 3]$". No contexto de finanças: "qual a probabilidade do valor da ação S estar abaixo de 10, ou no intervalo $[2, 5]$, etc.

Exemplo 3.5 *Retornando ao modelo apresentado na Seção 2.4 da p.34 com a linguagem que apresentamos neste capítulo, fixado $M \in \mathbb{N}$ o número de lançamentos de moeda, Definimos no espaço amostral Ω_M as variáveis aleatórias $S_n : \Omega_N \to \mathbb{R}$ para cada n, fixados S_0, u, d.*

Começamos com exemplos em Ω_3, onde definimos as v.a. S_1 e S_2. Dado $\omega = w_1w_2w_3 \in \Omega_3$ temos que: $S_1(\omega) = uS_0$ se $w_1 = H$ e $S_1(\omega) = dS_0$ se $w_1 = T$. Assim $S_1 : \Omega_3 \to \mathbb{R}$ satisfaz (Ω_3 possui $2^3 = 8$ elementos):

$$\begin{aligned} S_1(HTT) = S_1(HHH) = S_1(HTH) = S_1(HHT) =& uS_0 \quad e \\ S_1(TTT) = S_1(THH) = S_1(TTH) = S_1(THT) =& dS_0. \end{aligned}$$

*Ou seja, S_1 **depende somente** do 1º lançamento de moeda, não importando a sequência depois. Podemos escrever que*

$$S_1(\omega) = u^{\#H(w_1)} d^{\#T(w_1)} S_0.$$

*Já $S_2 : \Omega_3 \to \mathbb{R}$, que **depende somente** dos dois primeiro lançamentos,*

$$\begin{aligned} S_2(HHH) = S_2(HHT) =& u^2 S_0, \\ S_2(HTH) = S_2(HTT) = S_2(THH) = S_2(THT) =& udS_0 \quad e \\ S_2(TTT) = S_2(TTH) =& d^2 S_0. \end{aligned}$$

Assim escrevemos, de forma sucinta, que:

$$S_2(\omega) = u^{\#H(w_1w_2)} d^{\#T(w_1w_2)} S_0.$$

De forma geral, o valor de S_n depende somente de quantas caras e coroas aparecem nos n primeiros lançamentos. Assim, dado $\omega = w_1 \cdots w_M \in \Omega_M$ com $0 \le n \le M$, definimos $S_n : \Omega_M \to \mathbb{R}$ por:

$$S_n(\omega) = u^{\#H(w_1 \cdots w_n)} d^{\#T(w_1 \cdots w_n)} S_0. \tag{3.1}$$

Definição 3.6

Se X é uma v.a. em (Ω, P), definimos:
$P(X < a) = P(\{w \in \Omega;\ X(w) < a\}$ e
$P(a < X < b) = P(\{w \in \Omega;\ a < X(w) < b\}$. Para outros intervalos (fechados, semi-fechados, etc.) defini-se de forma análoga.

Exemplo 3.6 *Considere $X : \Omega_4 \to \mathbb{R}$ (ver Definição 3.3) definido por*

$$X(w_1 w_2 w_3 w_4) = \#H(w_2 w_3)\#T(w_4).$$

Determine $P(X < 2)$.

Solução: Como $X \geq 0$, queremos determinar para quais ω, $X(\omega) = 0$ ou 1. Como $X(\omega) = 0$ se, e somente se, $w_2 w_3 = TT$ ou $w_4 = H$. Assim $X(\Omega) = 0$ se, e somente se, $\omega = {*}TTT$ ou $\omega = {*}{*}{*}H$ ($*$ significa H ou T).

Como $X(\omega) = 1$ se, e somente se, $w_2 w_3 = HT$ ou TH e $w_4 = T$ (ambos iguais a 1). Assim $X(\omega) = 1$ se, e somente se, $\omega = {*}HTT$ ou $\omega = {*}THT$.

Juntando os 2 casos ($X = 0$ ou 1): $\omega = {*}TTT$, ou ${*}{*}{*}H$, ou ${*}HTT$ ou ${*}THT$. Então (somando as probabilidades):

$$P(X < 2) = (1-p)^3 + p + 2p(1-p)^2.$$

■

Definição 3.7: Processo Estocástico

Uma sequência de v.a. X_n indexada por $n \in \mathbb{N}$ em (Ω, P) é um **processo estocástico** (discreto, se fosse X_t com $t \in \mathbb{R}$ seria contínuo).

Na mecânica clássica sabemos a posição inicial $x(0)$ de uma certa massa e queremos saber sua posição $x(t)$ em função do tempo (usualmente determinamos resolvendo uma equação diferencial), uma família de posições indexadas pelo tempo t. Isto nos leva a ideia de **processos estocásticos** X_t (notação mais utilizada ao invés de $X(t)$), uma família de v.a. indexada pelo tempo t. Assim dado X_0, uma v.a. indicando a probabilidade da posição inicial da massa estar em alguma região, a solução X_t, indicará a probabilidade de se encontrar a massa em alguma região em um certo tempo t. Como já dissemos, para uma v.a. a pergunta é do tipo "qual a probabilidade de $X_t \in [a, b]$.

Definição 3.8: Processo Estocástico Adaptado

Uma sequência de v.a. indexada por $n \in \mathbb{N}$ em (Ω_M, P) (espaço de lançamentos de moeda) é um **processo estocástico adaptado** se X_n depende somente dos n primeiros lançamentos de moeda, $n \leq M$.

Na prática significa que para um processo estocástico adaptado X_n, no tempo n o valor de X_n é totalmente conhecido. Também significa, como indicado no exemplo abaixo, que à medida que o tempo passa, e **mais informações** vão chegando, o valor de X_n vai ficando cada vez menos incerto, até que no tempo n fica totalmente determinado.

Exemplo 3.7 *Considere X_n um processo estocástico adaptado em Ω_8. Como X_6 depende de 6 lançamentos de moeda, pode assumir no máximo $2^6 = 64$ valores. No entanto se soubermos parte dos lançamentos de moeda já reduzimos a incerteza com relação ao valor assumido por X_6. Usando "*" para indicar H ou T, temos que:*

(a) $X_6(TTHHTTw_7w_8)$ é constante independente de w_7w_8, que podemos escrever como $X_6(TTHHTT{*}{*})$. Também são constantes $X_6(HTHHTT{*}{*})$, $X_6(HTTHTT{*}{*})$, etc.

(b) $X_6(HHTTHw_6{*}{*})$ pode assumir até dois valores distintos dependendo se $w_6 = H$ ou T.

(c) $X_6(HHw_3Tw_5T{*}{*})$ pode assumir até quatro valores distintos dependendo de $w_3w_5 = HH, HT, TH, TT$.

Note que o **processo ser adaptado** em finanças significa que à medida que o tempo passa, e recebemos mais informações (mercado está subindo, caindo, etc. ao longo do tempo), vamos **reduzindo a incerteza** sobre o valor do ativo S_n. Exemplificaremos com S_7, o valor do ativo no tempo 7:

- No tempo 0 são 2^7 possíveis valores.
- No tempo 1, quando soubermos o resultado do 1º lançamento, reduzimos para o máximo de 2^6 valores possíveis.
- E assim por diante...
- No tempo 5, conhecendo os 5 primeiros lançamentos, serão no máximo $2^2 = 4$ valores possíveis.
- No tempo 6, reduzimos ao máximo de 2 valores.
- Finalmente, do tempo 7 em diante, saberemos o valor de S_7.

Este é o **significado prático** do processo ser adaptado.

Seguem exemplos de processos estocásticos adaptados dentro de finanças que definimos no capítulo anterior.

Exemplo 3.8 *Deixamos como exercício (Exercício 17 da p.79) para o leitor verificar que são processos estocásticos adaptados (definidos no modelo da Seção 2.4 da p.34):*

- *o valor da ação S_n;*
- *o valor da opção V_n;*
- *a quantidade de ações Δ_n que devem ser compradas para se fazer o hedge de uma opção.*

3.2 Momentos de uma v.a.

A informação mais básica sobre uma v.a. é saber seu valor médio, isto é, a média dos valores ponderada pela probabilidade de ocorrência de cada evento. Chamamos isto de **média** ou **esperança** ou **valor esperado** de uma v.a.

Definição 3.9: Média ou Esperança

Dada X v.a. definida em (Ω, P) finito, definimos sua **média** ou **esperança** ou **valor esperado** por

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega).$$

Lema 3.10: Propriedades da Esperança

(a) Linearidade: Dadas v.a. X e Y, $k \in \mathbb{R}$, $E[X + kY] = E[X] + kE[Y]$.

(b) Sejam X, Y v.a. definidas em (Ω_M, Q) (ver Definição 3.3). Se X depende somente de lançamentos de moeda distintos de Y (dizemos que X e Y são **independentes**) então $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Prova: (a) segue das propriedades da soma (distributividade) após usar definição de esperança. Deixamos (b) como exercício. ∎

Exemplo 3.9 *Pela independência, se* X *depende somente dos lançamentos* $2, 3$ *e* Y *depende somente dos lançamentos* 1 *e* 5*, então* $E[XY] = E[X]E[Y]$.

A segunda informação sobre uma v.a. é saber quão longe, em média, ela fica de seu valor médio $E[X]$. Esta informação é dada pela **variância** e pelo **desvio-padrão**.

Definição 3.11: Variância

Dada X v.a. definida em (Ω, P), definimos sua **variância** $\mathrm{Var}[X] = E[(X - m)^2]$, com $m = E[X]$.

Deixamos para o leitor provar o lema a seguir.

Lema 3.12

Dada uma v.a. X com $E[X] < \infty$ e $E[X^2] < \infty$, então

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Definição 3.13: Desvio Padrão

Dada X v.a. definida em (Ω, P), definimos seu **desvio padrão** (*standard deviation; stdev*) $\text{StDev}[X] = \sqrt{\text{Var}[X]}$.

Em função disso escrevemos usualmente que $\sigma^2 (\sigma > 0)$ é a variância de X e σ seu desvio padrão.

Existe uma ideia simples da Física que explica porque o desvio-padrão será muito utilizado: ele está com a **mesma escala** que a média. Por exemplo, se uma v.a. X mede o valor em metros de algo, a variância ($E[X^2]$) está em m^2, enquanto que o desvio-padrão está em metros também. O uso em finanças é dado na definição abaixo.

Definição 3.14: Retorno e Volatilidade

Seja S_n o valor de um ativo ao longo do tempo. Definimos o **retorno** deste ativo por

$$H_n = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n} = \frac{\Delta S_n}{S_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} - 1.$$

Se n é em dias, este é o retorno diário do ativo. Definimos seu **retorno médio** no tempo n por $E[H_n]$ e sua **volatilidade** por $\text{StDev}[H_n]$. Note que ambos podem variar ao longo do tempo.

Assim a **volatilidade** de um ativo é uma medida de variação do seu retorno médio. Pode-se provar (Exercício 10 da p.78) que a volatilidade é igual a $\text{StDev}[S_{n+1}/S_n]$. Falaremos como **estimar** o retorno médio e a volatilidade de ações no próximo capítulo.

Observação 3.3 *Considere uma v.a. "normal" (com duplo sentido aqui: um técnico e o usual) X com média μ e desvio-padrão σ. Num sentido que pode se tornar mais preciso com mais teoria, espera-se com cerca de 95% de probabilidade que $X \in [\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma]$ e com cerca de 99.7% de probabilidade que $X \in [\mu - 3\sigma,\ \mu + 3\sigma]$. Neste sentido quando menor o valor do desvio-padrão σ, mais perto X estará da média. Pesquise na internet* `https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution`.

Exemplo 3.10 *Considere $X, Y : \Omega_3 \to \mathbb{R}$ definidas abaixo com $p = 1/2$. Determine a média e variância de cada uma.*

(a) $X(\omega) = \#H(\omega) - \#T(\omega)$. *(a) $Y(\omega) = \#H(\omega) + 2\#T(\omega)$.*

Solução: (a) Valores de $X = 3, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -3$. Assim $E[X] = 0$. $X^2 = 9, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 9$. Logo $E[X^2] = 24/8 = 3$ e $\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 3 - 0 = 3$.

(b) Valores de $Y = 3, 4, 4, 5, 4, 5, 5, 6$. Assim $E[Y] = 4.5 = 36/8$. Valores de $Y^2 = 9, 16, 16, 25, 16, 25, 25, 36$. Assim $E[Y^2] = 21$. Logo $\text{Var}[X] = 21 - (4.5)^2 = 0.75$. ■

Exemplo 3.11 *Considere $X : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ definida na tabela abaixo com $p = 1/4$. Determine a média e variância de X.*

ω	$X(\omega)$
HH	1
HT	2
TH	3
TT	4

Solução: $E[X] = 1(1/4)^2 + 2(1/4)(3/4) + 3(3/4)(1/4) + 4(3/4)^2 = 3.25$ e $E[X^2] = 1(1/4)^2 + 4(1/4)(3/4) + 9(3/4)(1/4) + 16(3/4)^2 = 11.5$. Assim, $\mathrm{Var}[X] = 11.5 - (3.25)^2 = 0.9375$. ■

Definição 3.15: Momentos de uma v.a.

Dado $k \in \mathbb{N}$, define-se o k**-ésimo momento** de um v.a. X por

$$m_k = E[X^k]$$

e seu k**-ésimo momento central** por

$$\widetilde{m}_k = E[(X - E[X])^k].$$

Assim a média é o 1º momento e a variância o 2º momento central. A relação entre a variância e os dois primeiros momentos é dado pelo Lema 3.12.

Exemplo 3.12 (Média e Variância no Modelo de Vários Períodos) *No espaço de lançamentos de moeda com probabilidade fixa p de sair H (Exemplo 3.1 da p.52), no modelo para valor da ação dada pela Seção 2.4 da p.34, com u e d fixos, determine:*
(a) $E[S_1]$. *(b)* $\mathrm{Var}[S_1]$. *(c)* $E[S_n]$. *(d)* $E[S_n^2]$.
Estes valores serão importantes quando formos determinar u e d partindo dos dados de mercado.

Solução: (a) Pela definição, $E[S_1] = (pu + (1-p)d)S_0$.

(b) Como

$$\mathrm{Var}[S_1] = E[S_1^2] - (E[S_1])^2 = [pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2]S_0^2,$$

simplificando obtemos $\mathrm{Var}[S_1] = p(1-p)(u-d)^2 S_0^2$.

(c) Usamos um truque para gerar uma relação de recorrência. Defina $Z = S_{n+1}/S_n$. Note que Z depende somente do lançamento $n+1$ pois se $\omega = w_1 \cdots w_{n-1}$ e $\theta = w_{n+1} \cdots w_M$ então

$$Z(\omega H \theta) = u \quad \text{e} \quad Z(\omega T \theta) = d.$$

Logo $E[Z] = up + (1-p)d$ e além disso Z e S_n são **independentes** (exercício) e segue do Lema 3.10 que $E[ZS_n] = E[Z]E[S_n]$. Portanto,

$$E[S_{n+1}] = E\left[\frac{S_{n+1}}{S_n} S_n\right] = E[ZS_n] = E[Z]E[S_n] = [up + (1-p)d]E[S_n].$$

Segue por indução que $E[S_n] = [up + (1-p)d]^n S_0$.

(d) Seguindo as ideias acima (exercício), $E[S_n^2] = [pu^2 + (1-p)d^2]^n S_0^2$. ∎

3.3 Esperança Condicional

O conceito de esperança condicional é crucial em finanças e significa calcular o valor esperado (esperança) de uma certa v.a. condicionado a estarmos em certo instante de tempo, em que temos uma certa quantidade de informação acumulada. Com a passagem do tempo temos um aumento na quantidade de informação disponível, que aumenta a precisão de nosso valor esperado. No contexto do nosso modelo, a informação disponível é saber quais foram os resultados dos lançamentos de moeda até o momento. A expectativa do valor em um tempo futuro T fixo de uma ação vai se modificar ao longo do tempo, tornando-se mais precisa à medida que ele passa pois teremos mais informação. Assim se $t_1 < t_2 < T$, no tempo $t = t_1$ teremos um esperança de valor do ativo no tempo T menos precisa que no tempo $t = t_2$. Até que no tempo $t = T$ saberemos **exatamente** o valor do ativo pois deixou de ser um valor futuro desconhecido. Além disso no tempo $t = 0$, quando ainda não temos informação alguma, a esperança de valor futuro será dada pela média.

Para se entender a definição de esperança condicional deve-se começar entendendo como se calcula a probabilidade que uma sequência de lançamentos de moeda termine com certos valores. Veja antes o Exemplo 3.2 da p.52. Apresentamos como um lema que deixamos para o leitor provar.

Lema 3.16

Fixe uma sequência de lançamentos de moeda $\theta = w_{m+1} \cdots w_M$, com $m < M$. Seja $\{*\theta\} \subset \Omega_M$ o subconjunto de sequências terminadas em θ, ou seja,

$$\{*\theta\} = \{w_1 \cdots w_m \theta \in \Omega_M; \quad w_1, \ldots, w_m \in \{H, T\}\}.$$

Se probabilidade de sair cara é constante p em todo lançamento, então

$$P(\{*\theta\}) = p^{\#H(\theta)}(1-p)^{\#T(\theta)}.$$

Definição 3.17: Esperança Condicional

Dada uma v.a. X em (Ω_M, P) e $m \in \mathbb{N}$ com $m \leq M$, seja $\theta = (w_{m+1} \cdots w_M)$ o resto da sequência de lançamentos. Definimos a esperança condicional $E_m[X]$ por

$$E_m[X](w_1 \cdots w_m) = \sum_{\theta} X(w_1 \cdots w_m \theta) P(\{*\theta\}).$$

Se a probabilidade de sair cara é constante igual a p em todo lançamento,

$$E_m[X](w_1 \cdots w_m) = \sum_{\theta} X(w_1 \cdots w_m \theta) p^{\#H(\theta)} (1-p)^{\#T(\theta)},$$

Observe que estamos calculando a média ponderada dos valores de X fixado o caminho inicial $w_1 \cdots w_m$. Assim temos que somar os valores de X na parte final do caminho θ vezes a probabilidade de cada final de caminho.

Observação 3.4 *Nos casos extremos em que $m = 0$ ou $m = M$:*

- $E_0[X] = E[X]$ *pois teremos um somatório sobre todas as sequências.*
- $E_M[X] = X$ *pois será uma soma com um único elemento $\theta = \emptyset$ (vazio) e $\#H(\theta) = \#T(\theta) = 0$.*

Note que $Y = E_m[X]$ não é um número, é uma v.a. que depende somente dos m primeiros lançamentos. Trata-se de uma média ponderada dos valores futuros de X uma vez fixados os m primeiros lançamentos. Por exemplo se S_9 é o preço de uma ação no tempo 9 e $Y = E_6[S_9]$, $Y(HHTTHH)$ é a média de S_9 dado que os primeiros 6 lançamentos foram $HHTTHH$. Já $Y(TTTTTT)$ é a média (que pode ser outra) de S_9 dado que os primeiros 6 lançamentos foram $TTTTTT$. Num caso seria a média de S_9 dado que até o tempo 6 tivemos 2 subidas, 2 quedas e 2 subidas; no outro caso a média de S_9 após 6 quedas.

Exemplo 3.13 *Seja X uma v.a. em Ω_3 com os valores:*

ω	$X(\omega)$
HHH	1
HHT	2
HTH	3
HTT	4
THH	5
THT	6
TTH	7
TTT	8

Suponha que $p = 3/4$. Determine:
(a) $E_3[X]$. (b) $E_2[X]$. (c) $E_1[X]$. (d) $E_0[X]$.

Solução: Note que $1 - p = 1/4$.
(a) Como $m = 3 = M$, $E_3[X] = X$, a própria v.a.
(b) $E_2[X](HH) = 3/4(1) + 1/4(2) = 1.25$. $E_2[X](HT) = 3/4(3) + 1/4(4) = 3.25$. $E_2[X](TH) = 3/4(5) + 1/4(6) = 5.25$. $E_2[X](TT) = 3/4(7) + 1/4(8) = 7.25$.
(c) $E_1[X](H) = (3/4)^2(1)+(3/4)(1/4)(2)+(1/4)(3/4)(3)+(1/4)^2(4) = 1.75$. $E_1[X](T) = (3/4)^2(5) + (3/4)(1/4)(6) + (1/4)(3/4)(7) + (1/4)^2(8) = 5.75$.
(d) $E_0[X] = E[X]$, a esperança de X. Logo $E_0[X] = (3/4)^3(1) + (3/4)^2(1/4)(2 + 3 + 5) + (1/4)^2(3/4)(4 + 6 + 7) + (1/4)^3(8) = 2.75$. ■

Exemplo 3.14 *Seja X uma v.a. em Ω_4 e $X(\omega) = \#H(\omega)$. Por exemplo, $X(THTT) = 1 = X(HTTT)$, $X(TTTT) = 0$, $X(THTH) = 2 = X(HHTT)$. Assume $p = 1/5$. Determine:*
(a) $E_3[X](THT)$. (b) $E_2[X](TT)$. (c) $E_1[X](H)$.

Solução: (a) $(1/5)(2) + (4/5)(1) = 1.2$. (b) $(1/5)^2(2) + (1/5)(4/5)(1 + 1) + (4/5)^2(0) = 0.4$. (c) $(1/5)^3(4) + (1/5)^2(4/5)(3 + 3 + 3)(4/5)^2(1/5)(2 + 2 + 2) + (4/5)^3(1) = 0.765184$. ■

Exemplo 3.15 *Seja Y uma v.a. em Ω_3 que assume os valores:*

ω	$Y(\omega)$
$H * H$	2
$H * T$	3
$T * H$	4
$T * T$	5

Por exemplo, $Y(HTH) = Y(HHH) = 2$. Se $p = 1/5$, determine:
(a) $E_1[Y]$. (b) $E_2[Y]$. (c) $E_3[Y]$.

Solução: (a) $E_1[Y](H) = (1/5)^2(2) + (1/5)(4/5)(3) + (4/5)(1/5)(2) + (4/5)^2(3) = 2.8$. $E_1[Y](T) = (1/5)^2(4) + (1/5)(4/5)(5) + (4/5)(1/5)(4) + (4/5)^2(5) = 4.8$.
(b) $E_2[Y](HH) = 1/5(2) + 4/5(3) = 2.8 = E_2[Y](HT)$. $E_2[Y](TH) = 1/5(4) + 4/5(5) = 4.8 = E_2[Y](TT)$.
(c) $E_3[Y] = Y$ pois depende de 3 lançamentos. ■

Teorema 3.18: Propriedades da Esperança Condicional

Sejam X e Y v.a. em Ω_M, o modelo binomial de M lançamentos.
(a) (**linearidade**) Para todo $c \in \mathbb{R}$, $E_m[X + cY] = E_m[X] + cE_m[Y]$.
(b) (**TIFOCO – tira fora o conhecido**) Se X depende somente dos k primeiros lançamentos, com $k \leq m$, então $E_m[XY] = XE_m[Y]$.
(c) (**independência**) Se X depende somente dos lançamentos k em diante, com $k > m$, então $E_m[X] = E[X]$.
(d) (**torre**) Se $k \leq m$, então $E_k[E_m[X]] = E_m[E_k[X]] = E_k[X]$.

Prova: Deixamos (a) para o leitor por ser trivial.

(b) Aplicando a definição da esperança condicional, com $\alpha = w_1 \cdots w_m$, a sequência inicial, e $\theta = w_{m+1} \cdots w_M$, a sequência final, e como, por hipótese, X não depende de θ (lançamentos $m+1$ em diante) pode ser colocado em evidência no somatório em θ abaixo. Segue que:

$$\begin{aligned} E_m[XY](\alpha) &= \sum_\theta X(\alpha\theta)Y(\alpha\theta)P(\{*\theta\}) \\ &= X(\alpha\theta)\sum_\theta Y(\alpha\theta)P(\{*\theta\}) \\ &= X(\alpha\theta)E_m[Y](\alpha). \end{aligned}$$

(c) e (d) Deixamos para próxima seção na p.68. ∎

Exemplo 3.16 *Seja X uma v.a. que depende somente do 5º e 8º lançamentos de moeda e Y uma v.a. que depende somente do 3º lançamento de moeda. Simplifique as expressões abaixo citando a propriedade utilizada.*

(a) $E_3[E_6[XY]]$. *(b)* $E_7[XY]$. *(c)* $E_4[E_2[XY]]$.

Solução: (a) Pela propriedade da torre, $E_4[E_3[XY]] = E_3[XY]$. Como Y depende somente do 3º, pela TIFOCO, obtemos $YE_3[X]$. Aplicando independência (pois X depende somente de 5º e 8º) obtemos $YE[X]$.

(b) Pela TIFOCO $E_7[XY] = YE_7[X]$. Note que não podemos usar TIFOCO novamente pois X depende do 8º (senão poderia ser aplicada) nem podemos usar independência pois depende do 5º lançamento.

(c) Pela propriedade da torre, $E_4[E_2[XY]] = E_2[XY]$. Agora XY depende do 3º, 5º e 8º, e aplicando independência obtemos $E[XY]$. ∎

Exemplo 3.17 *Seja Z_n uma v.a. que depende do n-ésimo lançamento da moeda. e X uma v.a. que depende somente do 4º e do 6º lançamentos. Simplifique as expressões abaixo citando a propriedade utilizada.*

(a) $E_5[X]$ *(b)* $E_1[XZ_3]$ *(c)* $E_7[XZ_5]$ *(d)* $E_3(E_5[XZ_2])$.

Solução: (a) Como X depende de lançamento antes e depois de 5, não podemos aplicar a TIFOCO nem a indeéndência. Logo a resposta é $E_5[X]$ (não é possível simplificar.

(b) Como XZ_3 dependem de lançamentos posteriores a 1, usamos a independência e $E_1[XZ_3] = E[XZ_3]$.

(c) Como XZ_5 depende de lançamentos anteriores a 7, podemos usar a TIFOCO: $E_7[XZ_5] = XZ_5$.

(d) Pela prop. da torre, $E_3(E_5[XZ_2]) = E_3[XZ_2]$. Como Z_2 depende de lançamento a 3 podemos usar a TIFOCO: $E_3[XZ_2] = Z_2E_3[X]$. Como X depende de lançamentos depois, usamos a independência e $= Z_2E_3[X] = Z_2E[X]$. ∎

Exemplo 3.18 *Seja S_n o valor da ação no modelo apresentado na Seção 2.4 da p.34. Determine*

$$E_n\left[\frac{S_{n+1}}{S_n}\right].$$

.

Solução: Como $S_{n+1} = uS_n$ se $w_{n+1} = H$ e $S_{n+1} = dS_n$ se $w_{n+1} = T$, pode-se ver que a v.a. $Y = S_{n+1}/S_n$ depende somente do lançamento $n+1$. Assim podemos aplicar a independência e obter que $E_n[Y] = E[Y]$. Como Y assume somente dois valores (u e d) com probabilidade p e $1-p$, $E_n[S_{n+1}/S_n] = pu + (1-p)d$.

Outra opção (convidamos o leitor) é usar a equação (3.1) para obter que

$$Y = u^{\#H(w_{n+1})} d^{\#T(w_{n+1})}.$$

Concluímos que Y depende somente do lançamento $n+1$ e pode ser u ou d com probabilidades p e $1-p$. ∎

Exemplo 3.19 *Seja S_n o valor da ação no modelo apresentado na Seção 2.4 da p.34. Determine*

$$E_n\left[\frac{S_{n+2}}{S_n}\right].$$

Solução: Apresentamos três soluções. A mais direta é que $Z = S_{n+2}/S_n$ pode assumir quatro valores: u^2, ud, du, d^2, com probabilidades p^2, $p(1-p)$, $(1-p)p$, $(1-p)^2$. Note que Z depende somente dos lançamentos $n+1$ e $n+2$. Assim por independência a esperança condicional vale $E[Z] = p^2u^2 + 2p(1-p)ud + (1-p)^2d^2 = [pu + (1-p)d]^2$.

Outra opção é escrever

$$\frac{S_{n+2}}{S_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n}\frac{S_{n+2}}{S_{n+1}} = Z_{n+1}Z_{n+2}.$$

Cada Z_k depende somente do k-ésimo lançamento pois é análogo ao exemplo anterior. Pela independência temos que a esperança condicional vira uma esperança:

$$E_n[Z_{n+1}Z_{n+2}] = E[Z_{n+1}Z_{n+2}].$$

Agora como estas v.a. são independentes (dependem de lançamentos distintos entre si – vide Lema 3.10 da p.57) obtemos que a esperança do produto é o produto das esperanças: $E_n[S_{n+2}/S_n] = E[Z_{n+2}]E[X_{n+1}]$. Calculamos estas esperanças no exemplo anterior, e independiam do índice. Logo obtemos $[pu + (1-p)d]^2$.

Terceira opção (convidamos o leitor) é usar a equação (3.1). ∎

Lema 3.19

Seja S_n o valor da ação no modelo apresentado na Seção 2.4 da p.34 e $\widetilde{E}_n$ a esperança condicional com relação às probabilidades neutras a risco $\widetilde{p}$ e $\widetilde{q}$. Então:

$$S_n = \widetilde{E}_n\left[\frac{S_{n+1}}{1+r}\right].$$

Prova: Apresentamos mais de uma prova.

Prova 1 (usa mais propriedades e menos força bruta: mais elegante): Usando o fato que $S_{n+1} = uS_n$ ou dS_n, o TIFOCO, e a independência do quociente S_{n+1}/S_n (depende somente do lançamento $n+1$),

$$\widetilde{E}_n[S_{n+1}] = \widetilde{E}_n\left[\frac{S_{n+1}}{S_n}S_n\right] = S_n\widetilde{E}_n\left[\frac{S_{n+1}}{S_n}\right] = S_n\widetilde{E}\left[\frac{S_{n+1}}{S_n}\right] = S_n(\widetilde{p}u + \widetilde{q}d).$$

Pelo Lema 2.8 da p.29, $\widetilde{p}u + \widetilde{q}d = 1 + r$. Pela linearidade da esperança condicional obtemos o resultado.

Prova 2: Pela definição de esperança condicional, a esperança condicional a tempo n de S_{n+1} é a média de somente dois caminhos: os que $\widetilde{\omega} = H$ ou $\widetilde{\omega} = T$. Assim,

$$\widetilde{E}_n[S_{n+1}](w_1 \cdots w_n) = \widetilde{p}S_{n+1}(w_1 \cdots w_n H) + \widetilde{q}\widetilde{p}S_{n+1}(w_1 \cdots w_n T).$$

Da equação (2.4) da p.35 obtemos que $\widetilde{E}_n[S_{n+1}] = (u\widetilde{p} + d\widetilde{q})S_n$. Agora pelo Lema 2.8 da p.29, $u\widetilde{p} + d\widetilde{q} = 1 + r$. Pela linearidade da esperança condicional obtemos o resultado.

Prova 3: Pela equação (2.5) da p.35 obtemos que

$$\frac{S_{n+1}(w_1 \cdots w_{n+1})}{S_n(w_1 \cdots w_{n+1})} = u^{\#H(w_{n+1})} d^{\#T(w_{n+1})} = Y.$$

Como Y depende somente do lançamento $n+1$, $\widetilde{E}_n[Y] = \widetilde{E}[Y]$ pela independência. Como Y assume somente dois valores, u e d, com probabilidades $\widetilde{p}$ e $\widetilde{q}$, temos que $E[Y] = u\widetilde{p} + d\widetilde{q} = 1 + r$ pelo Lema 2.8 da p.29. Por independência, $\widetilde{E}_n[S_{n+1}/S_n] = E_n[S_{n+1}]/S_n$. Retornando a equação acima, obtemos que

$$\widetilde{E}_n\left[\frac{S_{n+1}}{S_n}\right] = \frac{\widetilde{E}_n[S_{n+1}]}{S_n} = \widetilde{E}_n[Y] = \widetilde{E}[Y] = 1 + r.$$

Pela linearidade da esperança condicional obtemos o resultado. ∎

O lema anterior conecta a esperança condicional com o modelo de preço de ações apresentado no capítulo anterior. Deixamos explícito com o teorema que encerra esta seção as conexões.

Teorema 3.20: Esperança Condicional e Finanças

As probabilidades neutras a risco são as únicas que fazem com que a esperança do valor futuro descontado da ação seja igual ao seu valor presente, isto é,

$$S_n = \widetilde{E}_n \left[\frac{S_{n+1}}{1+r} \right].$$

Além disso uma opção que só pode ser executado no tempo N com valor V_N pode ter seu valor calculado através da recursão para trás

$$V_n = \widetilde{E}_n \left[\frac{V_{n+1}}{1+r} \right].$$

Assim, partindo de $n+1 = N$ podemos calcular a recorrência até obter seu valor no tempo 0 que é igual a V_0.

Prova: A prova da primeira equação foi feita no Lema 3.19. A segunda segue do Teorema 2.13 da p.39 e da definição de esperança condicional. ∎

Para explicar a importância do teorema acima detalhamos os passos:

1. Sabemos os valores assumidos pela ação (sem precisar saber com que probabilidade assumem estes valores: no próximo capítulo veremos como obter estas informações).
2. Sabemos a taxa de juros (fixos ou por algum modelo).
3. Calibramos o modelo, isto é, determinamos as probabilidades neutras a risco (penso aqui no modelo com p constante ou variável, com p_n dependendo do tempo), que fazem com que $\widetilde{E}[S_{n+1}] = S_n(1+r)$.
4. Dada uma opção, podemos precificá-lo através da fórmula apresentada no teorema. A **mesma calibragem** serve para diversas opções sobre o mesmo ativo (calls, puts, asiáticos, etc.).
5. São **duas fases**: calibrar modelo e precificar opções.

3.4 Esperança Condicional: Caso Geral

Em modelos aplicados às vezes precisamos levar em conta que p varia com o tempo ao invés de ser constante, e a probabilidade de sair H no i-ésimo lançamento de moeda é p_i. Assim a probabilidade de sair uma sequência $\omega = w_1 w_2 w_3 \in \Omega_3$ é

$$P(\omega) = \prod_{i=1}^{3} p_i^{\#H(w_i)} (1-p_i)^{\#T(w_i)}.$$

A esperança condicional neste contexto é dada pela Definição 3.17 da p.61, sendo que a probabilidade de uma sequência **terminar** com a sequência $\theta = w_{m+1} \cdots w_M$ é (exercício)

$$\begin{aligned} P(\{*\theta\}) &= P(\{w_1 \cdots w_m \theta \in \Omega_M;\ w_1, \ldots, w_m \in \{H, T\}\}) \\ &= \prod_{i=m+1}^{M} p_i^{\#H(w_i)} (1 - p_i)^{\#T(w_i)}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.20 *Dada sequência* $\theta = (\omega_{m+1}, \ldots, \omega_N)$*, defina:*

$$A_\theta = \{w_1 \cdots w_n \theta \in \Omega_m; \quad w_1, \ldots, w_n \in \{H, T\}\},$$

o conjunto das sequências que terminam em θ*. Assim* $P(\{*\theta\}) = P(A_\theta)$*. Determine:*

(a) A_H *em* Ω_2*. (b)* A_{TH}*,* A_H *em* Ω_3*, (c)* A_{HTT}*,* A_{TH}*,* A_H *em* Ω_4*.*

(d) as probabiliadades dos conjuntos do item (c) supondo que p_i *é a probabilidade de sair* H *no i-ésimo lançamento.*

Solução: (a) A_H são a sequências terminadas em H: $\{HT, TH\}$.

(b) $A_{TH} = \{HTH, TTH\}$, $A_H = \{HHH, HTH, THH, TTH\}$.

(c) $A_{HTT} = \{HHTT, THTT\}$, $A_{TH} = \{HHTH, HTTH, THTH, TTTH\}$, $A_H = \{HHHH, HHTH, HTHH, HTTH, THHH, THTH, TTHH, TTTH\}$.

(d) Basta somar cada uma das probabilidades. A probabilidade dos últimos lançamentos é sempre a mesma e pode ser posta em evidência, com a soma dos primeros dando um. Portanto,

$$\begin{aligned} P(A_{HTT}) &= P(\{*HTT\}) \\ &= p_1 p_2 (1 - p_3)(1 - p_4) + (1 - p_1) p_2 (1 - p_3)(1 - p4) \\ &= p_2 (1 - p_3)(1 - p4)[p_1 + (1 - p_1)] \\ &= p_2 (1 - p_3)(1 - p4) \end{aligned}$$

Já colocando em evidência os dois termos finais obtemos

$$\begin{aligned} P(A_{TH}) &= P(\{*TH\}) \\ &= (1 - p_3) p_4 [p_1 p_2 + p_1 (1 - p_2) + (1 - p_1) p_2 + (1 - p_1)(1 - p_2)] \\ &= (1 - p_3) p_4 [p_1 (p_2 + 1 - p_2) + (1 - p_1)(p_2 + (1 - p_2)] \\ &= (1 - p_3) p_4 [1] = (1 - p_3) p_4. \end{aligned}$$

Ou seja, basta multiplicar a probabilidade de sair cada membro da sequência final. No último caso obtemos que $P(A_H) = P(\{*H\}) = p_4$. ■

Antes de provar o Teorema 3.18 da p.62 precisamos do seguinte lema cuja prova deixamos para o leitor.

Lema 3.21

Considere $\alpha = w_1 \cdots w_k$, $\beta = w_{k+1} \cdots w_m$, $\theta = w_{m+1} \cdots w_M$, com $k < m < M$. Definimos os seguintes subconjuntos de Ω_M:

(a) $\{\alpha *\} \subset \Omega_M$ as sequências iniciadas por α.
(b) $\{*\theta\} \subset \Omega_M$ as sequências terminadas em θ.
(c) $\{*\beta *\} \subset \Omega_M$ as sequências com elementos de $k+1$ até m iguais a β.
(d) $\{*\beta\theta\} \subset \Omega_M$ as sequências terminadas em $\beta\theta$.

Então,

$$\sum_{\alpha} P(\{\alpha *\}) = \sum_{\theta} P(\{*\theta\}) = 1,$$

$$P(\{\alpha\beta\theta\}) = P(\{\alpha *\})P(\{*\beta\theta\}) \quad \text{e} \quad P(\{*\beta\theta\}) = P(\{*\beta *\})P(\{*\theta\})$$

Prova: A primeira equação decorre do fato que os conjuntos são disjuntos e podemos usar o Corolário 3.2 da p.52. As outras decorrem de escrevermos a probabilidade de cada conjunto. Deixamos para o leitor os detalhes. ■

Prova:(do Teorema 3.18 da p.62) Deixamos (a) para o leitor e o (b) foi provado na p.63.

(c) Seja $\{\beta *\}$ o conjunto de sequencias que começam com $\beta = w_1 \cdots w_m$. Pelo Lema 3.21 $\sum_\beta P(\{\beta *\}) = 1$. Fixando $\theta = w_{m+1} \cdots w_M$, a sequência final, temos que $P(\{\beta *\})$ não depende de θ e pode ser colocado dentro do somatório em θ. Assim

$$\begin{aligned}
E_m[X](\alpha) &= \sum_{\theta} X(\alpha\theta)P(\{*\theta\}) \\
&= (1) \sum_{\theta} X(\alpha\theta)P(\{*\theta\}) \\
&= \left(\sum_{\beta} P(\{\beta *\}) \right) \sum_{\theta} X(\alpha\theta)P(\{*\theta\}) \\
&= \sum_{\beta,\theta} X(\alpha\theta)P(\{*\theta\})P(\{\beta *\})
\end{aligned}$$

Como X não depende dos primeiros lançamentos, $X(\alpha\theta) = X(\beta\theta)$ para qualquer β. Pelo Lema 3.21, $P(\{*\theta\})P(\{\beta *\}) = P(\{\beta\theta\})$. Assim,

$$E_m[X](\alpha) = \sum_{\beta,\theta} X(\beta\theta)P(\{\beta\theta\}) = E[X].$$

(d) O caso $E_m[E_k[X]]$ segue de (b) pois $E_k[X]$ depende somente de k lançamentos e pode ser tirado para fora. Assim $E_m[E_k[X]] = E_k[X]E_m[1] = E_k[X]$ (a esperança da v.a. constante 1 é 1).

Provamos o caso $E_k[Y] = E_k[X]$ onde $Y = E_m[X]$ e $k < m$ (caso $k = m$ podemos usar (b)). Considere $\alpha = w_1 \cdots w_k$, $\beta = w_{k+1} \cdots w_m$, $\theta = w_{m+1} \cdots w_M$, com $k < m < M$. Usando a definição de probabilidade condicional, o Lema 3.21, dividindo o somatório em dois e sabendo que $Y = E_m[X]$ é função de $\alpha\beta$ somente pois não depende dos lançamentos após $m+1$, obtemos que:

$$\begin{aligned} E_k[Y](\alpha) &= \sum_{\beta\theta} Y(\alpha\beta)P(\{*\beta\theta\}) \\ &= \sum_{\beta\theta} Y(\alpha\beta)P(\{*\beta*\})P(\{*\theta\}) \\ &= \sum_{\beta}\sum_{\theta} [Y(\alpha\beta)P(\{*\beta*\})P(\{*\theta\})] \\ &= \left(\sum_{\theta} P(\{*\theta\})\right)\sum_{\beta} Y(\alpha\beta)P(\{*\beta*\}). \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.21, $\sum_\theta P(\{*\theta\} = 1$ e o primeiro termo some. Do lema temos também que $P(\{*\beta*\})P(\{*\theta\}) = P(\{*\beta\theta\})$. Usando definição de $Y = E_m[X]$ e esta equação obtemos que:

$$\begin{aligned} E_k[Y](\alpha) &= \sum_{\beta}\left(\sum_{\theta} X(\alpha\beta\theta)P(\{*\theta\})\right)P(\{*\beta*\}) \\ &= \sum_{\beta\theta} X(\alpha\beta\theta)P(\{*\beta\theta\}) \\ &= E_k[X](\alpha). \end{aligned}$$

■

3.5 Martingal

Um martingal é um tipo especial de processo estocástico adaptado. São processos importantes em todas aplicações. No caso de finanças, o significado é que são processos que não possuem tendência para subir ou descer que possa ser antecipada. Ou seja, com a informação disponível num certo momento t_1 não podemos prever se nos tempos $t > t_1$ o processo vai subir ou descer. Isto significa que para martingais não existe a possibilidade de arbitragem pois não podemos nos beneficiar disso. Tecnicamente o valor esperado para o futuro é igual ao valor presente: tudo que podemos esperar do futuro já está no valor presente. Em linguagem de mercado, o futuro está **precificado** em seu valor presente.

Definição 3.22

Dizemos que um processo estocástico adaptado M_n em Ω_M, $0 \le n \le M$, é um :
(a) **martingal** se $M_n = E_n[M_{n+1}]$.
(b) **supermartingal** se $M_n \ge E_n[M_{n+1}]$.
(c) **submartingal** se $M_n \le E_n[M_{n+1}]$.

Observação 3.5 (Sub e Super) *Definição de sub e supermartingal está correta embora não pareça. Infelizmente se fixou assim a nomenclatura e um* ***supermartingal*** *tem valor esperado futuro menor que o presente e um* ***submartingal*** *tem valor esperado futuro maior.*

Note que a definição de martingal fala sobre ver um passo na frente (one-step ahead). Mas de fato todo martingal tem a propriedade de que qualquer esperança condicional do futuro está contida no valor presente, conforme a propriedade (a) do lema que segue.

Lema 3.23: Propriedades do Martingal

Seja M_n um martingal em Ω_M. Então:
(a) $M_k = E_k[M_n]$ para todo $0 \leq k \leq n \leq M$ (*multistep-ahead*).
(b) $M_0 = E[M_n]$ para todo $0 \leq n \leq M$ (mesma média).
Caso seja um supermartingal ou submartingal basta substituir a igualdade por desigualdade em cada propriedade.

Prova: (a) Basta utilizar a definição de esperança condicional e a propriedade da torre. Assim $E_{n-1}[M_n] = M_{n-1}$ Aplicando E_k nos dois lados, $E_k[E_{n-1}[M_n]] = E_k[M_{n-1}]$. Pela prop. da torre, $E_k[M_n] = E_k[M_{n-1}]$. Como $E_{n-2}[M_{n-1}] = M_{n-2}$, aplicando E_k dos dois lados e prop. da torre obtemos, $E_k[M_{n-1}] = E_k[M_{n-2}]$. Ou seja, $E_k[M_n] = E_k[M_{n-2}]$. Por indução chegamos a $E_k[M_n] = E_k[M_{k+1}] = M_k$.

(b) Por (a), $M_0 = E_0[M_n] = E[M_n]$. Aplicando E dos dois lados e como M_0 é constante (é um processo adaptado no tempo zero: não depende de nenhum lançamento de moeda), $E[M_0] = M_0 = E[E[M_n]] = E[M_n]$.

Deixamos para o leitor o caso de supermartingal e submartingal. ■

Veremos agora os 3 exemplos fundamentais de martingais, todos com relação à probabilidade neutra a risco e descontado com relação a taxa de juros para que possamos ver seu valor na data presente:

1. $S_n/(1+r)^n$, o valor descontado do preço da ação.

2. $X_n/(1+r)^n$, o valor descontado da carteira.

3. $V_n/(1+r)^n$, o valor descontado da opção.

Na Capítulo de opções americanas, aqueles que podem ser executados em qualquer data anterior a de vencimento, teremos supermartingais, pois caso não se exerça a opção antecipadamente em certas datas a opção perde valor no futuro.

Lema 3.24: Ação Descontada é um Martingal

Seja M_n o valor descontado (pela taxa de juros) do preço da ação no modelo apresentado na Seção 2.4 da p.34, isto é,

$$M_n = \frac{S_n}{(1+r)^n}.$$

Então M_n é um martingal sob a probabilidade neutra a risco.

Prova: Pelo Exercício 17 da p.79 S_n é adaptado, e consequentemente M_n. O resultado segue pelo Lema 3.19 da p.64 após dividir ambos os lados por $(1+r)^n$. ■

Observação 3.6 *O valor descontado de S_n é um martingal sob a probabilidade neutra a risco. E com relação a probabilidade real? Esperamos ao comprar uma ação que seu valor no futuro aumente mais que os juros, isto é, esperamos que a seu valor futuro descontado (que é incerto), em média, seja **maior** que seu valor atual. Ou seja, se $M_n = S_n/(1+r)^n$, a precificação do mercado é feita de forma que M_n seja um **submartingal** com relação a probabilidade real e portanto aumente de valor no futuro (em média).*

Lema 3.25: Opção Descontada é um Martingal

Seja M_n o valor descontado (pela taxa de juros) do preço da opção no modelo apresentado na Seção 2.4 da p.34, isto é,

$$M_n = \frac{V_n}{(1+r)^n}.$$

Então M_n é um martingal sob a probabilidade neutra a risco.

Prova: Pelo Exercício 17 da p.79 V_n é adaptado, e consequentemente M_n. O resultado segue do Teorema 3.20 da p.66 após dividir ambos os lados por $(1+r)^n$. ■

Uma consequência importante é que obtemos uma nova fórmula para o cálculo do valor da opção em qualquer momento. Em contraste com a equação (2.6) da p.39, esta fórmula não é recursiva, é direta. Ela será importante, em uma nova versão, para se escrever uma fórmula para **opções americanas**, que podem ser executados a qualquer momento.

Corolário 3.26: Fórmula Explícita para o Valor da Opção

Seja $f \geq 0$ o payoff de uma opção europeia e $V_N = f(S0, \ldots, S_N)$ o valor de uma opção no seu tempo de expiração N, que depende somente dos lançamentos de moeda $w_1 \cdots w_N$. Se V_n é o valor desta opção no tempo n, $0 \leq N$, então

$$V_n = \widetilde{E}_n \left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}} \right].$$

Em particular, o valor no tempo zero V_0 é dado por

$$V_0 = \widetilde{E} \left[\frac{V_N}{(1+r)^N} \right].$$

Prova: Como $V_n/(1+r)^n$ é martingal, pelo Lema 3.23 (a),

$$\frac{V_n}{(1+r)^n} = \widetilde{E}_n \left[\frac{V_N}{(1+r)^N} \right].$$

O resultado segue pela linearidade passando o termo $(1+r)^n$ para o outro lado. ■

Observação 3.7 *Esta fórmula fica bem mais bonita se definirmos $V_n^* = V_n/(1+r)^n$, o valor descontado da opção, pois ficamos com*

$$V_n^* = \widetilde{E}_n[V_N^*] \quad e \quad V_0 = V_0^* = \widetilde{E}[V_N^*].$$

Assim é conveniente passar para o processo descontado. Se faz o mesmo com o valor da ação definindo $S_n^* = S_n/(1+r)^n$.

Observação 3.8 *Estudaremos no Capítulo 8 da p.187 (modelos de taxas de juros) o processo de desconto*

$$D_n = \frac{1}{(1+r)^n}.$$

Assim,

$$V_0 = \widetilde{E}\left[D_N V_N\right].$$

Note que na fórmula do corolário, como r é constante, pode-se retirar da esperança. Mas quando r depende do tempo e dos lançamentos de moedas, a fórmula correta é essa.

Agora definiremos uma carteira autofinanciada Y_n conforme Definição 2.2 da p.25. Começamos com um valor constante Y_0. Dai, de forma indutiva, partindo do valor Y_n no tempo n:

- utilizamos parte deste valor para comprar γ_n ações no tempo n;
- aplicamos o resto em renda fixa no tempo n;

- aguardamos o tempo $n+1$ (o próximo tempo), quendo vendemos as ações e ficamos com Y_{n+1}.

Note que não utilizaremos Δ_n para deixar claro que aqui não estamos assumindo que Δ_n é dado pela equação (2.7) da p.39. Aqui γ_n é uma quantidade qualquer de ações. De todo modo, deduzimos de forma análoga ao visto na equação (2.8) da p.40, conhecida como **wealth equation**, que:

$$Y_{n+1} = \gamma_n S_{n+1} + (1+r)(Y_n - \gamma_n S_n). \tag{3.2}$$

Como no nosso modelo temos apenas uma ação e renda fixa, **toda** carteira autofinanciada pode ser descrita através da equação acima.

Lema 3.27: Carteira Autofinanciada Descontada é um Martingal

Seja M_n o valor descontado (pela taxa de juros) de uma carteira autofinanciada. isto é,

$$M_n = \frac{Y_n}{(1+r)^n}.$$

Então M_n é um martingal sob a probabilidade neutra a risco.

Prova: Seguindo lemas anteriores, basta provar que $Y_n = \widetilde{E}_n[Y_{n+1}/(1+r)]$ e depois dividir ambos os lados por $(1+r)^n$. Assim, usando (3.2), a linearidade, a propriedade TIFOCO e o Lema 3.19 da p.64:

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}_n\left[\frac{Y_{n+1}}{1+r}\right] &= \widetilde{E}_n\left[\gamma_n \frac{S_{n+1}}{1+r} + Y_n - \gamma_n S_n\right] \\
&= \widetilde{E}_n\left[\gamma_n \frac{S_{n+1}}{1+r}\right] + \widetilde{E}_n[Y_n - \gamma_n S_n] \\
&= \gamma_n \widetilde{E}_n\left[\frac{S_{n+1}}{1+r}\right] + Y_n - \gamma_n S_n \\
&= \gamma_n S_n + Y_n - \gamma_n S_n = Y_n.
\end{aligned}$$

■

Como a carteira autofinanciada descontada é um martingal, sua média (Lema 3.23) é sempre a mesma. Assim começando com uma carteira que vale zero, **todas** as carteiras terão média zero também. Portanto se para certa sequência de lançamentos a carteira tiver valor estritamente positiva, vai ter que existir pelo menos uma outra sequência com valor negativo. Ou seja, não existe arbitragem.

Faremos uma comparação do crescimento do valor médio de uma carteira autofinanciada qualquer com relação a probabilidade real versus a probabiliade neutra a risco.

- Probabilidade neutra a risco: Seja $Y_n^* = Y_n/(1+r)^n$ o valor descontado de uma carteira autofinanciada. Como Y_n^* é um martingal com relação a probabilidade neutra a risco, segue do Lema 3.23 que $Y_0^* = Y_0 = \widetilde{E}[Y_n^*] = \widetilde{E}[Y_n/(1+r)^n]$. Logo

$\widetilde{E}[Y_n] = Y_0(1+r)^n$, ou seja, o crescimento médio do valor da carteira com relação a proabilidade neutra a risco é igual ao de um investimento em renda fixa. Note que isto **independe** de como foi montada a carteira; decorre somente do fato dela ser autofinanciada.

- Probabilidade real: Dependerá de quanto foi investido em ação. Note que como podemos tomar emprestado, pode-se colocar um valor muito alto em ações numa carteira autofinanciada, uma posição **alavancada** que pode ser bastante arriscada. Como esperamos ao comprar uma ação que seu valor no futuro aumente mais que os juros (veja detalhes na Observação 3.6 da p.71), este retorno médio será maior, $E[Y_n] \geq \widetilde{E}[Y_n]$, mas dependendo da composição, de quantas ações foram colocadas na carteira, pode ser arbitrariamente maior.

Definiremos agora o martingal mais importante de todos, o **passeio aleatório** ou *symmetric random walk*. É popularmente conhecido como o **caminhar do bêbado** pois é um modelo, por exemplo, de uma pessoa caminhando ao longo de uma rua que decide se o próximo passo será para direita ou esquerda de acordo com o resultado do lançamento de uma moeda. É a versão discreta do **movimento browniano** ou **processo de Wiener**, um processo muito importante em toda a teoria de processos estocásticos.

Em palavras, começando em $W_0 = 0$, joga-se uma moeda a cada instante de tempo: se dar H, soma-se 1, se der T, subtrai 1. Formalizamos na definição abaixo.

Definição 3.28: Passeio Aleatório ou Random Walk

Considere as v.a. X_j em (Ω_M, P), $j \leq M$, definidas por: $X_j = 1$ se $w_j = H$ e $X_j = -1$ caso contrário onde $p = 1/2$. O **passeio aleatório** ou **random walk** é o processo estocástico W_n, $n \leq M$, definido por

$$W_n = \sum_{j=1}^{n} X_j,\ \ 0 < n \leq M, \quad W_0 = 0.$$

Podemos ver o gráfico de W_n, com n no eixo x e o valor de $W_n(\omega_i)$ para 3 sequências de lançamento de moeda distintas ω_i, $i = 1, 2, 3$ na Figura 3.1. Mostramos outros três passeios bem mais longos na Figura 3.2, onde pode-se perceber como parece com índices do mercado financeiro. Exploraremos mais isso no próximo capítulo.

Lema 3.29: Propriedades do Passeio Aleatório

Considere o passeio aleatório W_n da Definição 3.28.

(a) W_n é um martingal.
(b) $E[W_n] = 0$ para todo n.
(c) $\mathrm{Var}[W_n] = n$.

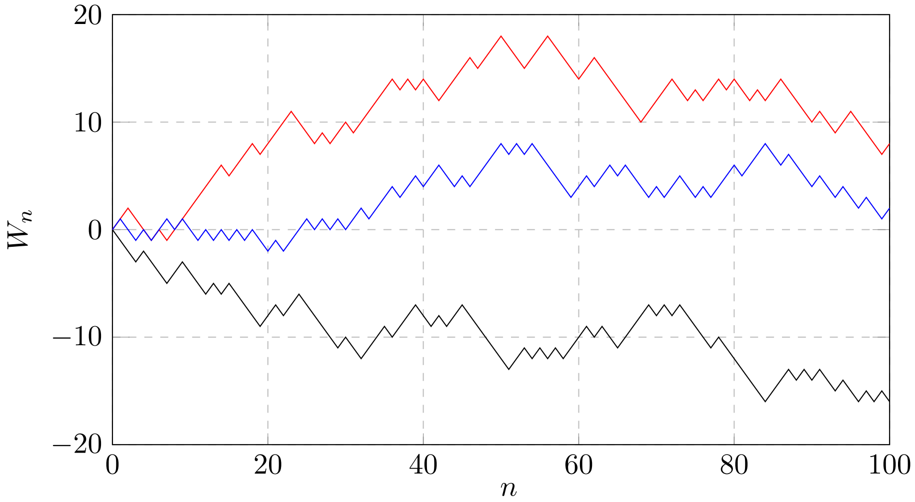


Figura 3.1: Passeios Aleatórios com $n \leq 100$.

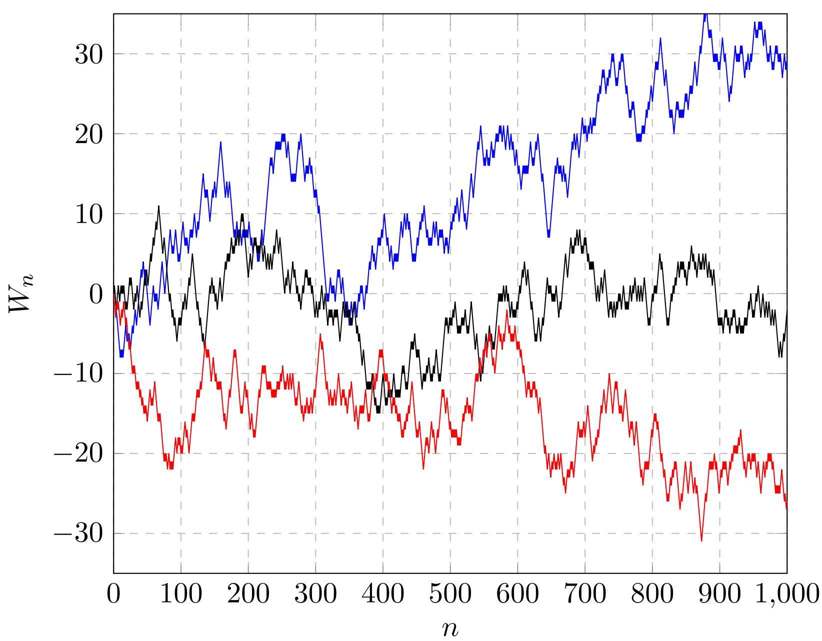


Figura 3.2: Passeios Aleatórios com $n \leq 1000$.

Prova: Deixamos para o leitor fazer no Exercício 48 da p.84. ■

Até o momento assumimos que r é constante. O caso geral, onde temos um processo estocástico adaptado para a taxa de juros, será estudado no no Capítulo 8 da p.187 (modelos de taxas de juros).

3.6 Teoremas Fundamentais

Nesta seção vamos apresentar os teoremas fundamentais das finanças. Precisamos para isto retomar a Seção 2.2 da p.24, onde apresentamos o conceito de carteira autofinanciada e de arbitragem, e começar definindo mercado completo.

Definição 3.30: Mercado Completo

Um modelo de mercado é dito **completo** se todo derivativo deste modelo pode ser replicado por meio de uma carteira autofinanciada.

Isto significa que em modelos completos podemos precificar todo derivativo pois será o valor X_0 da carteira autofinanciada que o replica. O modelo de vários períodos para o valor de uma ação apresentado na Seção 2.4 da p.34 é **completo** pelo Teorema 2.13 da p.39 pois todo derivativo pode ser replicado por carteira autofinanciada.

Definição 3.31: Probabilidades Equivalentes

Considere os espaços de probabilidade discreto (Ω, P) e $(\Omega, \widetilde{P})$. Dizemos que a probabilidade $\widetilde{P}$ é **equivalente** a P se elas concordam com quais eventos possuem probabilidade zero, isto é:

$$P(\omega) = 0 \quad \text{se, e somente se} \quad \widetilde{P}(\omega) = 0.$$

Teorema 3.32: 1º Teo. Fundamental das Finanças

Um modelo de mercado discreto no tempo baseado num espaço de probabilidade finito não possui arbitragem se, e somente se, existe pelo menos uma probabilidade neutra a risco equivalente à original.

Prova: Se existe pelo menos uma probabilidade neutra a risco, temos que se Y_n é o valor de uma carteira autofinanciada, pelo Lema 3.27, $Y_n/(1+r)^n$ é um martingal e portanto tem média igual a Y_0. Logo seu valor em média neutra a risco $\widetilde{E}[Y_n] = Y_0(1+r)^n$. Assim se $Y_0 = 0$, $\widetilde{E}[Y_n] = 0$. Isto implica que se para algum ω, $Y_n(\omega) > 0$, necessariamente existe um θ tal que $Y_n(\theta) < 0$. Logo não existe arbitragem.

Provar que a ausência de arbitragem implica na existência de probabilidade neutra a risco é difícil. Parte crucial é devida ao Teorema da separação de hiperplanos (ver `https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperplane_separation_theorem`), cuja generalização para dimensão infinita é conhecida como Teorema de Hahn-Banach. ∎

O próximo teorema é apresentado sem prova.

Teorema 3.33: 2º Teo. Fundamental das Finanças

Um modelo de mercado sem arbitragem é completo se, e somente se, existe uma única probabilidade neutra a risco equivalente à original.

Reunindo os dois teoremas fundamentais das finanças, concluímos que um **modelo de mercado** é:

- **Completo e sem arbitragem** se, e somente se, **existe uma única** probabilidade neutra a risco: todo derivativo possui um preço único.
- **Incompleto e sem arbitragem** se, e somente se, **existe mais de uma** probabilidade neutra a risco: alguns derivativos não podem ser precificados (incompleto), os que podem ser precificados podem ter mais de um preço (não se garante preço único do derivativo).
- **Com arbitragem** se, e somente se, **não existe** probabilidade neutra a risco: os derivativos não podem ser precificados.

Um exemplo de modelo incompleto e sem arbitragem, e que portanto possui mais de uma probabilidade neutra a risco, é o **Modelo trinomial**, que convidamos o leitor a explorar no Exercício 60 da p.86.

3.7 Exercícios

1. Usando somente a Definição 3.1 da p.51, prove que (Lema 3.4 da p.53):

   (a) Para todo $A \subset \Omega$, $P(A^c) = 1 - P(A)$.

   (b) Para todo $A, B \subset \Omega$, $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

   (c) Para todo $A_1, \ldots, A_N \subset \Omega$, $P\left(\bigcup_{i=1}^{N} P(A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{N} P(A_i)$. Antes de fazer, reflita: o item (c) segue do (b) por indução?

2. Definimos $P_k(\omega) = p_k$ se $w_k = H$, $1 - p_k$ caso contrário. No espaço amostral Ω de n lançamentos, definimos
$$P(\omega) = \prod_{k=1}^{n} P_k(\omega).$$
   Prove que P é uma probabilidade.

3. Prove o Corolário 3.2 da p.52.

4. Prove utilizando somente as propriedades da Definição 3.1 da p.51 que $P(\emptyset) = 0$.

5. Prove que (Ω_M, P) definido no Exemplo 3.1 da p.52 é um espaço de probabilidade.

6. Prove que (Ω_M, P) definido no Exemplo 3.3 da p.53 é um espaço de probabilidade.

7. Suponha que (Ω, P) é um espaço de probabilidade. Prove que se Ω é finito então existe uma função $f : \Omega \to [0,1]$ tal que para todo $A \subset \Omega$ com n elementos, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $P(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$.

8. Considere $S_n : \Omega_9 \to \mathbb{R}$, no contexto do Exemplo 3.5 da p.54. Determine os valores abaixo sabendo que $S_0 = 10, d = 2, u = 1/2$:

   (a) $S_2(THTHTTHTH)$. (b) $S_3(HHTHTHTTT)$. (c) $S_4(THHTTTTTT)$.
   (d) $S_5(TTHTHTHTH)$. (e) $S_6(TTHTHTHTH)$.

9. Considere $X : \Omega_4 \to \mathbb{R}$ (ver Definição 3.3 da p.52) definido por

$$X(w_1w_2w_3w_4) = \#H(w_2w_3)\#T(w_1w_4).$$

   Determine $P(X < 2)$.

10. Considere o retorno do ativo S_n definido por

$$H_n = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n}$$

   e o salto em seu valor definido por

$$J_n = \frac{S_{n+1}}{S_n}.$$

   Prove que a volatilidade do ativo $\mathrm{StDev}[H_n] = \mathrm{StDev}[J_n]$

11. Considere $X : \Omega_4 \to \mathbb{R}$ definida por $X(\omega) = \#H(\omega)\#T(\omega)$ com $p = 1/3$. Determine sua média e variância.

12. Considere $X : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ definida na tabela abaixo com $p = 2/3$. Determine a média e variância de X.

ω	$X(\omega)$
HH	2
HT	3
TH	1
TT	4

13. (a) O que é um processo estocástico?

    (b) O que é um processo estocástico adaptado?

14. Considere $X_0, X_1, X_2 : \Omega_3 \to \mathbb{R}$ definidos pela tabela abaixo. Verifique se X_n é adaptado. Caso não seja, qual a menor modificação na tabela que o torna adaptado?

ω	$X_0(\omega)$	$X_1(\omega)$	$X_2(\omega)$
HHH	2	-1	3
HHT	2	-1	2
HTH	2	-1	3
HTT	2	2	3
THH	3	2	2
THT	2	2	2
TTH	3	2	3
TTT	3	2	2

15. Considere $X_0, X_1, X_2, X_3 : \Omega_3 \to \mathbb{R}$ definidos pela tabela abaixo. Verifique se X_n é adaptado. Caso não seja, qual a menor modificação na tabela que o torna adaptado?

ω	$X_0(\omega)$	$X_1(\omega)$	$X_2(\omega)$	$X_3(\omega)$
HHH	1	3	1	3
HHT	4	2	2	3
HTH	2	3	2	2
HTT	4	2	2	3
THH	1	3	5	1
THT	4	3	5	4
TTH	1	2	1	4
TTT	4	3	5	4

16. Verifique se são processos adaptados ou não cada um dos $X_n, Y_n, Z_n : \Omega_M \to \mathbb{R}$ abaixo, sendo que $X_0 = Y_0 = Z_0 = 1$ e:

    (a) para $n \geq 1$, $Y_n(w_1 \cdots w_M) = \#H(w_n)$.

    (b) $X_1 = 1$, para $M > n \geq 2$, $X_n(w_1 \cdots w_M) = \#H(w_{n-1}) + \#T(w_{n+1})$.

    (c) para $n \geq 1$, $Z_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_{n-1}$.

17. Prove que é um processo adaptado (Definição 3.8 da p.55):

    a) S_n, o preço da ação, definido pela equação (2.5) da p. 35.

    b) V_n, o valor da opção, definido pela equação (2.6) da p. 39.

    c) Δ_n, a quantidade de ações compradas para se fazer o hedge de uma opção, definido pela equação (2.7) da p.39.

    d) X_n, o valor da carteira, definido pela equação (2.8) da p. 40, a *wealth equation*.

18. Prove que dada v.a. X com 1º e 2º momentos finitos,

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

19. Prove o caso particular do Lema 3.10 da p.57 (b): Suponha que em Ω_2 temos X que depende apenas do 1º lançamento e Y que depende apenas do 2º. Prove, utilizando a definição de esperança, que $E[XY] = E[X][Y]$.

20. Prove o Lema 3.10 da p.57 (b). Caso não tenha feito, faça antes exercício anterior (caso particular do Lema).

21. Defina $Z = S_{n+1}/S_n$. Prove que Z e S_n são independentes.

22. Prove que $E[S_n^2] = [pu^2 + (1-p)d^2]^n S_0^2$. Veja Exemplo 3.12 da p.59.

23. Seja X um v.a. em Ω_{10}. Explique em suas próprias palavras o significado de $E_6[X]$.

24. Seja X uma v.a. em Ω_2 e $X(HT) = 15$, $X(TH) = 14$, $X(HH) = 8$, $X(TT) = 1$ com $p = 1/4$. Então $E_1[X](T) =$ (escolha a opção)
    a) $\frac{57}{4}$.
    b) $\frac{59}{4}$.
    c) $\frac{17}{4}$.
    d) $\frac{43}{4}$.

25. Seja X uma v.a. em Ω_3 e $X(THH) = 14$, $X(HHT) = 13$, $X(THT) = 5$, $X(TTT) = 11$, $X(HHH) = 10$, $X(TTH) = 8$, $X(HTT) = 7$, $X(HTH) = 16$. com $p = 2/3$. Então $E_1[X](T) =$ (escolha a opção)
    a) $\frac{28}{3}$.
    b) $\frac{37}{3}$.
    c) $\frac{34}{3}$.
    d) $\frac{31}{3}$.

26. Considera a v.a. X definida em Ω_3 pela tabela abaixo:

ω	$X(\omega)$
HHH	4
HHT	3
HTH	2
HTT	1
THH	-1
THT	-2
TTH	-3
TTT	-4

Se $p = 1/3$, determine (escreva as expressões apenas, não precisa calcular):

(a) $E_2[X]$. (b) $E_1[X]$.

27. Considere a v.a. X definida em Ω_3 por $X(w_1w_2w_3) = \#H(w_2w_3)$ (número de caras nos dois últimos lançamentos de moeda). Determine $E_1[X], E_2[X]$ e $E_3[X]$, supondo que a probabilidade de sair H no lançamento n é p_n (não necessariamente iguais).

28. Seja Y uma v.a. em Ω_4 com valores dados pela tabela:

ω	$Y(\omega)$
$H*H*$	5
$H*T*$	6
$T*H*$	7
$T*T*$	8

Por exemplo, $Y(HTHH) = 5$ e $Y(THTT) = 8$. Se $p = 1/4$, determine:

(a) $E_1[Y]$. (b) $E_2[Y]$. (c) $E_3[Y]$.

29. Seja X uma v.a. definida em Ω_{30}. Complete as lacunas.

(a) $E_4[X]$ é uma v.a. que depende de ____ lançamentos de moeda ;

(b) $E_0[X] =$ ____; (c) $E_{30}[X] =$ ____; (d) $E_{10}[E_{12}[X]] =$ ____;

(e) $E_{15}[E_{11}[X]] =$ ____; (f) $E[E_{20}[X]] =$ ____

Resposta: (a) os 4 primeiros; (b) $E[X]$; (c) X; (d) $E_{10}[X]$; (e) $E_{11}[X]$; (f) $E[X]$.

30. Seja Z_n uma v.a. que depende somente do n-ésimo lançamento de moeda e X uma v.a. que depende somente dos lançamentos 4 e 6. Simplifique as expressões abaixo (elimine a esperança condicional ou a substitua pela esperança se possível), indicando a propriedade utilizada:

(a) $E_5[X]$. (b) $E_2[XZ_3]$. (c) $E_8[XZ_3]$. (d) $E_3[E_5[XZ_1]]$.

31. Seja Z_n uma v.a. que depende somente do n-ésimo lançamento de moeda e X uma v.a. que depende somente dos lançamentos 10, 11, 12. Simplifique as expressões abaixo, indicando a propriedade utilizada:

(a) $E_4[Z_3]$. (b) $E_5[Z_7]$. (c) $E_3[Z_3]$.

(d) $E_6[XZ_3]$. (e) $E_6[XZ_6]$. (f) $E_6[XZ_7]$.

Resposta: (a) Z_3 por TIFOCO. (b) $E[Z_7]$ por independência. (c) Z_3 por TIFOCO. (d) $Z_3E[X]$; (e) $Z_6E[X]$; (f) $E[XZ_7]$.

32. Suponha que X é uma v.a. que depende somente do 4º e 7º lançamentos e Y uma v.a. que depende somente do 5º lançamento. Simplifique as expressões abaixo:

(a) $E_3[XY]$. (b) $E_8[XY]$. (c) $E_4[XY]$. (d) $E_6[XY]$.

33. Seja X uma v.a. que depende somente do 8º lançamento e Z e uma v.a. que depende somento do 13º lançamento. Simplificando a expressão $E_{10}[XZ]$ obtemos (marque a opção):

a) $E[XZ]$.
b) $XE[Z]$.
c) XZ.
d) Expressão não pode ser simplificada.
e) X$E_{10}[Z]$.

34. Seja W uma v.a. que depende somente do 12º lançamento Simplificando a expressão $E_7[E_{16}[W]]$ obtemos (marque a opção):
   a) W.
   b) Expressão não pode ser simplificada.
   c) $E_{16}[W]$.
   d) $E[W]$.
   e) $E_7[W]$.

35. Seja X uma v.a. que depende somente do 12º e 13º lançamentos. Simplificando a expressão $E_8[X]$ obtemos (marque a opção):
   a) $E[X]$.
   b) $E_{12}[X]$.
   c) X.
   d) Expressão não pode ser simplificada.

36. Seja X um v.a. que depende somente no 5º e 6º lançamentos de moeda, Y no 2º e 3º e Z no 3º e 4º. Eles são definidos pelas tabelas abaixo:

ω	$X(\omega)$
$****HH$	4
$****HT$	3
$****TH$	2
$****TT$	1

ω	$Y(\omega)$
$*HH***$	1
$*HT***$	2
$*TH***$	3
$*TT***$	4

ω	$Z(\omega)$
$**HH**$	4
$**HT**$	3
$**TH**$	2
$**TT**$	1

Se $p = 1/4$, calcule as v.a. abaixo (escreva uma tabela com todos os valores; use propriedades para facilitar os cálculos: não faça somente força bruta).

(a) $E_3[XY]$. (b) $E_1[XY]$. (c) $E_3[YZ]$. (d) $E_2[YZ]$.

37. Seja S_n o valor da ação no modelo usual e $Y = S_{n+1}/S_{n-1}$. Simplifique, se puder, as expressões abaixo:

(a) $E_{n-2}[Y]$. (b) $E_{n-1}[Y]$. (c) $E_n[Y]$. (d) $E_{n+1}[Y]$. (e) $E_{n+2}[Y]$.

38. (Lema 3.16 da p.60.) Fixe uma sequência de lançamentos de moeda $\theta = w_{m+1} \cdots w_M$, com $m < M$. Seja $\{*\theta\} \subset \Omega_M$ o subconjunto de sequências terminadas em θ. Assim,

$$\{*\theta\} = \{w_1 \cdots w_m \theta \in \Omega_M; \quad w_1, \ldots, w_m \in \{H, T\}\}.$$

Prove que

$$P(\{*\theta\}) = p^{\#H(\theta)}(1-p)^{\#T(\theta)}.$$

39. Assuma que p é constante. Prove as propriedades da esperança condicional:
    a) Linearidade: Para todo $c \in \mathbb{R}$, $E_m[X + cY] = E_m[X] + cE_m[Y]$.
    b) TIFOCO: Se X depende somente dos k primeiros lançamentos, com $k \leq m$, então $E_m[XY] = XE_m[Y]$.

40. (put-call parity) Considere um P_0 e C_0 os valores no tempo zero de um put e um call, respectivamente, com mesmo tempo de execução (N), mesmo ativo (S_n) e mesmo strike $(K > 0)$. Considere juros fixos $r > -1$. Prove que (conhecida como put-call parity):

$$C_0 + K(1+r)^{-N} = P_0 + S_0.$$

Dica: Considere um contrato V com payoff no tempo N igual a $C_N - P_N$. Use as propriedades da esperança condicional.

41. (chooser option) Seja m tal que $1 \leq m < N$. Considere a opção V (chooser option) negociada no tempo zero que dá o direito a escolha no tempo m se o seu portador quer um call ou put no tempo N com strike K. Sejam P_0 e Z_0 os valores no tempo zero de opções europeias que vencem no tempo N, sendo P_0 um put com strike K e Z_0 um call com strike $K/(1+r)^{N-m}$. Prove que o valor V_0 desta opção no tempo zero satisfaz:

$$V_0 = P_0 + Z_0$$

Dica: Use put-call parity (exercício anterior).

42. (Cash Flow) É um problema clássico de matemática financeira calcular o valor presente de um fluxo de caixa (*cash flow*) futuro. Por exemplo: quanto vale hoje o recebimento de K todo mês, por 1 ano, começando daqui a 12 meses o recebimento, supondo juros mensais r. Ora basta trazer cada um dos K para tempo presente. A primeira parcela vale hoje $K/(1+r)^{12}$, a segundo $K/(1+r)^{23}$, etc. Assim este fluxo vale

$$K \sum_{i=12}^{24} 1(1+r)^i.$$

Podemos pensar agora num *cash flow* estocástico: Queremos saber o valor presente de opções C_k com data de vencimento futura $k \leq M$ no modelo em Ω_M. Determine uma expressão do valor atual desse fluxo futuro de pagamentos estocásticos. Existe um tipo de derivativo (não é opção) que será apresentado no Capítulo 8 da p.187 (modelos de taxas de juros) chamado de **swaps** que são exatamente fluxos estocásticos de pagamentos deste tipo.

43. (Lema 3.21 da p.68) Considere $\alpha = w_1 \cdots w_k$, $\beta = w_{k+1} \cdots w_m$, $\theta = w_{m+1} \cdots w_M$, com $k < m < M$. Prove que:

(a) $\sum_\alpha P(\{\alpha *\}) = 1$. (b) $\sum_\theta P(\{*\theta\}) = 1$.

(c) $P(\{\alpha\beta\theta\}) = P(\{\alpha *\})P(\{*\beta\theta\})$. (d) $P(\{*\beta\theta\}) = P(\{*\beta *\})P(\{*\theta\})$.

44. Porque martingais são importantes em finanças? Qual seu significado intuitivo?

45. Compare o retorno médio de uma carteira autofinanciada com relação a probabilidade real e com relação a probabilidade neutra a risco. Justifique.

46. O mesmo processo estocástico pode ser ou deixar de ser um martingal dependendo de qual probabilidade é utilizada. Determine quais dos processos abaixo é um martingal, submartingal, supermartingal ou nenhuma das opções. Justifique sua resposta.

    (a) S_n sob P. (b) S_n sob $\widetilde{P}$.

    (c) $S_n/(1+r)^n$ sob P. (d) $S_n/(1+r)^n$ sob $\widetilde{P}$. (e) Δ_n sob $\widetilde{P}$.

47. Seja X uma v.a. em Ω_M. Defina $M_n = E_n[X]$. Prove que M_n é um martingale.

48. Considere o passeio aleatório W_n da Definição 3.28 da p.74.

    (a) Calcule $E[W_n]$ e $\text{Var}[W_n]$.

    (b) Prove que W_n é um martingal.

    (c) Calcule $E[W_n^4]$. Dica: teorema multinomial.

    (d) Calcule $E_n[W_{n+1}^2]$.

    (e) Calcule $E[W_n^4]$ para n impar.

49. Suponha que Z_n é um martingal e seja $K \in \mathbb{R}$. Verifique se $Y_n = Z_n + K$ é um martingal.

50. Defina a v.a. X_j em Ω_M, $j \le M$, por: $X_j = 2$ se $w_j = H$ e $X_j = 0$ caso contrário. Suponha $p = 1/2$. Defina o processo estocástico M_n, $n \le M$, por

$$M_n = \prod_{j=1}^{n} X_j.$$

    Assim $M_1 = X_1$, $M_2 = X_1X_2$ (produto de X_1 e X_2), $M_3 = X_1X_2X_3, \ldots$ Este processo formaliza a estratégia de aposta conhecida como *double bet* ou *double or nothing*: comece com R\$1. Se der H voce dobra o que tinha, caso contrário voce perde tudo.

    Calcule ($j, n < M = 20$):

    (a) $E[X_j]$. (b) $E_{10}[X_{12}]$. (c) $E_{10}[X_8]$. (d) $E_n[e^{X_{n+1}}]$.

    (e) $E_n[(X_j)^3]$ para todo j e n.

    Prove que

(f) M_n é um martingal.

Observação: Esta estratégia é origem do nome **martingal**. Pesquise na internet. Pode começar aqui: `https://en.wikipedia.org/wiki/Martingale_(betting_system)`

51. Suponha que M_n é um martingal e seja γ_n um processo adaptado. Definimos o processo estocástico I_n, que será a integral estocástica discreta de γ_n com relação a $\Delta\, M_n$, através de

$$I_n = \int_0^n \gamma_j \Delta\, M_j = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j (M_{j+1} - M_j) \quad \text{para} \quad n > 0,$$

e $I_0 = 0$. Prove que I_n:

(a) é um processo estocástico adaptado. (b) é um martingal.

52. Defina a v.a. X_j em Ω_M, $j \leq M$, por: $X_j = 6$ se $w_j = H$ e $X_j = 3$ caso contrário. Suponha $p = 1/4$. Defina o processo estocástico M_n, $n \leq M$, por

$$M_n = \prod_{j=1}^{n} X_j.$$

(a) Calcule $E_n[M_{n+1}]$.

(b) Determine $c \in \mathbb{R}$ tal que $K_n = \dfrac{M_n}{c^n}$ seja um martingal.

53. (unicidade de martingais: se são iguais no tempo final são iguais até o tempo inicial) Suponha que O_n e L_n são martingais em (Ω_M, P). Suponha que $O_M(\omega) = L_M(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega_M$. Prove que para todo $n = 0, \ldots, M-1$, $O_n(\omega) = L_n(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega_M$.

54. Suponha que X_n é um martingal. Defina $Y_n = \max\{X_n, 0\}$. Prove que Y_n é um submartingal.

55. Suponha que X_n e Y_n são submartingais. Prove que $Z_n = \max\{X_n, Y_n\}$ é um submartingal.

56. Suponha que Z_n é um supermartingal e seja $K \in \mathbb{R}$. Verifique se $Y_n = Z_n + K$ é um supermartingal.

57. Seja G_n um processo estocástico. Considere o problema de determinar um processo estocástico X_n tal que $X_n \geq G_n$ para todo n e X_n é um supermartingal. Este problema tem solução única?

58. O que é um mercado completo?

59. Determine se é verdadeiro ou falso:

    (a) Se um mercado é completo, então todo derivativo possui um único preço.

    (b) Se um mercado possui arbitragem, então os derivativos não podem ser precificados.

    (c) Se um derivativo possui mais de um preço, então o mercado tem arbitragem.

    (d) Se um mercado é incompleto, o derivativo não possui preço único.

    (e) Se existe uma única probabilidade neutra a risco, então o mercado é completo.

60. Neste exercício exploramos o **modelo trinomial de um tempo**, onde a ação vale S_0 no tempo 0 e $S_1(w_1) = uS_0$, $S_1(w_2) = S_0$, $S_1(w_3) = dS_0$, com $d < 1 + r < u$ como condição de ausência de arbitragem. O objetivo é mostrar que este modelo é **incompleto** e possui **mais de uma** probabilidade neutra a risco. Reveja as idéias da Seção 2.3 da p.27 e faça a adaptação. A probabilidade neutra a risco vai satisfazer (porque?) $\widetilde{E}[S_1] = S_0(1 + r)$.

    (a) Prove que este modelo possui mais de uma probabilidade neutra a risco.

    (b) Dada uma opção com valor V_1 no tempo 1, veja em quais condições ela pode ser replicada por uma carteira autofinanciada.

    Para os dois itens abaixo fixe $S_0 = 1$, $r = 0$, $u = 2$, $d = 1/2$.

    (c) Dê um exemplo de opção que não possa ser replicado por carteira autofinanciada.

    (d) Dê um exemplo de opção que possa ser replicado por carteira autofinancida. Determine todos os valores possíveis para esta opção.

61. Neste exercício exploramos o modelo de um tempo com duas ações. Considere um modelo com duas ações com valor S_0 e T_0 no tempo 0 e

$$S_1(w_1) = S_1(w_2) = u_s S_0, \quad S_1(w_3) = S_1(w_4) = d_s S_0,$$

$$T_1(w_1) = T_1(w_3) = u_t T_0, \quad T_1(w_2) = T_1(w_4) = d_t T_0,$$

    onde $d_s, d_t < 1 + r < u_s, u_t$ como condição de ausência de arbitragem. Neste modelo, dependendo do resultado do lançamento de um dado de 4 faces ambas sobem, ambas descem, ou uma sobe e outra desce. Reveja as idéias da Seção 2.3 da p.27 e faça a adaptação. A probabilidade neutra a risco vai satisfazer (porque?) $\widetilde{E}[S_1] = S_0(1 + r)$.

    (a) Determine se existe probabilidade neutra a risco neste modelo, e se é única caso exista.

    (b) Dado uma opção com valor V_1 no tempo 1, determine se ele pode ser replicado por uma carteira autofinanciada.

4

Esquemas Numéricos em Finanças

Começamos o capítulo com um conceito básico em modelos matemáticos.

Definição 4.1: Calibragem

Um modelo matemático pode ser visto como uma caixa preta onde entra certo número de parâmetros e saem previsões do modelo. Por exemplo, no caso do modelo binomial para precificação de opções, entram u, d, r, S_0 e payoff e sai o valor da opção. Agora dados valores obtidos do mundo real, chamamos de **calibragem do modelo** o procedimento de escolha do valor dos parâmetros que fará com que o modelo melhor (o melhor pode variar bastante) simule os dados do mundo real.

Neste capítulo abordamos diversos aspectos ligados a implementação dos modelos dos capítulos anteriores:

- Como calibrar o modelo binomial do valor de uma ação.
- Como simular o preço das ações em diversas escalas temporais. No nosso modelo tínhamos tempo 1, 2, 3, etc. Agora fixamos um Δt pequeno e os tempos serão Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$, etc.
- Como determinar o valor das opções. Além de implementar as fórmulas desenvolvidas nos capítulos anteriores, apresentaremos o **método de Monte Carlo** e porque o seu uso pode ser melhor ou necessário.

Neste capítulo introduzimos alguns tópicos importantes da Estatística e Processos Estocásticos:

- Estimativa de parâmetros.
- Séries temporais.
- Método de Monte Carlo.

Uma vez estabelecido um modelo para certo fenômeno, se coloca o problema de **calibrar** o modelo aos dados reais, isto é, determinar os parâmetros dos modelo para que suas previsões se aproximem dos dados do mundo real. Apresentamos duas opções:

- Usar série de valores da ação do passado (o que faremos nesta seção).
- Usar o preço de vanilla options (calls e puts) para determinar os valores que o mercado está atribuindo ao risco (volatilidade). Faremos isso em capítulo posterior depois de apresentar a fórmula de Black and Scholes e a chamada volatilidade implícita.

Apresentamos uma proposta para calibrar o modelo binomial totalmente nova. A dificuldade básica é que a média m e variância σ obtida da série histórica dos preços de uma ação são com relação à probabilidade real. Em alguns modelos precisamos da variância com relação à probabilidade neutra a risco e isso é um problema. Neste caso o melhor é determinar a variância (volatilidade) implícita dada pela fórmula de Black and Scholes. Falaremos disso mais adiante.

Para simular a variação do preço das ações S_n com o modelo binomial precisamos de u e d e do valor da probabilidade de subida p. Assim nosso roteiro será:

1. Estimar m e σ, a média e variância com relação à probabilidade real p, partindo da série histórica de preços da ação.
2. Determinar u, d e p tais que a média e variância da série histórica coincidam com a média e variância do modelo binomial com relação a probabilidade p. Existem algumas opções, mas vamos nos fixar em uma delas (fixar $p = 1/2$), deixando outras opções (por exemplo fixar $d = 1/u$) como exercício.
3. Como a taxa de juros r é um dado do mercado, devemos verificar se a condição de ausência de arbitragem $u < 1 + r < d$ é satisfeita por u e d acima.
4. Caso a condição de ausência de arbitragem seja violada, recalculamos u e d de períodos de tempo Δt pequenos o suficiente para que a condição de ausência de arbitragem seja satisfeita. Provaremos que isto é sempre possível e apresentamos um algoritmo para isso.

4.1 Calibrando

4.1.1 Média e Desvio-Padrão dos Saltos

Nosso objetivo nesta subseção é estimar:

- valor da taxa de juros em um dia: r_{dia}.
- média e desvio padrão do salto diário no valor da ação: m_{dia} e σ_{dia} com relação à probabilidade real.

Para se determinar o valor da taxa de juros, a escolha natural é usar a taxa Selic (ver mais informações na p.188), a taxa básica de juros de referência na economia brasileira, cuo valor é uma taxa anual: r_{ano}. Para que $(1+r_{\text{dia}})^{360} = 1 + r_{\text{ano}}$, fixamos

$$r_{\text{dia}} = \sqrt[360]{1 + r_{\text{ano}}} - 1,$$

Começamos com duas definições básicas de salto no valor de um ativo e sua taxa de retorno (ou retorno).

Definição 4.2: Salto e Retorno

Definimos o **salto** J_n de um ativo S_n por

$$\text{salto}(S_n) = J_n = \frac{S_{n+1}}{S_n},$$

e seu **retorno** ou **taxa de retorno** por

$$\text{retorno}(S_n) = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n} = \frac{\Delta S_n}{S_n} = J_n - 1.$$

Desta forma $1 + \text{retorno}(S_n) = J_n$. É similar com a taxa de juros r e o valor que deve ser multiplicado para se obter novo valor $(1+r)$.

Seja s_n a série histórica do valor de uma certa ação nos dias $n = 1, 2, \ldots, M$. Queremos estimar o valor de $J_n = S_{n+1}/S_n$, o salto no valor da ação. Assim definimos os saltos da série histórica:

$$j_n = \frac{s_{n+1}}{s_n}, \qquad \text{para} \qquad n = 1, \ldots, M-1.$$

Observe que j_n é uma **amostra** de valores dos saltos J_n. A Estatística diz que, partindo de amostras j_n, as expressões abaixo são boas **estimativas** para a média e o desvio padrão dos saltos diários J_n **com relação à probabilidade real**.

$$m_{\text{dia}} = \frac{1}{M-1} \sum_{n=1}^{M-1} j_n \quad \text{e} \quad \sigma_{\text{dia}} = \left(\frac{1}{M-2} \sum_{n=1}^{M-1} [(j_n - m_{\text{dia}})^2] \right)^{1/2}. \tag{4.1}$$

Em nosso modelo, conforme detalhes desenvolvidos na Seção 4.4 da p.101, $E[J_n]$ e desvio padrão $\text{StDev}[J_n]$ são constantes independente de n. Assim podemos dizer que ($\approx$ significa aproximadamente):

$$E[J_n] \approx m_{\text{dia}} \qquad \text{e} \qquad \text{StDev}[J_n] \approx \sigma_{\text{dia}}.$$

Estes valores podem ser obtidos com auxílio de um software qualquer. Porque dividimos por $M-2$ na definição de σ_{dia} se temos $M-1$ valores? Veja num livro de Estatística, mas é que queremos estimar o desvio padrão de J_n baseado numa amostra (j_n). É muito importante observar que eles estimam a média e variância do salto no valor da ação **sob**

a probabilidade real. Qualquer software de planilha determina a média e o desvio padrão usando as formulas acima. A fórmula do desvio padrão acima é dito da amostra, em contraste com o desvio padrão da população. Por exemplo, no LibreOffice, a função `stdev` usa a fórmula acima e `stdevp` o da população (dividindo por $M-1$).

4.1.2 Escala Temporal e Parâmetros no Modelo JR

Nas simulações que faremos, fixamos uma escala temporal $\Delta t > 0$ de forma que se S_t é o valor da ação no tempo t (medido em dias) então na discretização do tempo $S_n = S(n\Delta t)$. Assim $S_1 = S(\Delta t)$, o valor da ação no tempo Δt, $S_2 = S(2\Delta t)$, etc.

Assim o up e down (u e d) que determinamos é relativo a um intervalo Δt. A ideia é que o modelo com escala Δt desejada possua a média e variância compatível com a estimada para um dia na subseção anterior. Apresentaremos o algoritmo baseado no chamado de modelo de Jarrow e Rudd (JR), que será o **modelo escolhido** neste texto. A dedução deste modelo será deixada para a Seção 4.4 da p.101. No modelo JR existem duas restrições:

- $\sigma_{\text{dia}} < m_{\text{dia}}$, para garantir que $d > 0$.
- um valor máximo para Δt devido à condição de ausência de arbitragem. No algoritmo daremos um Δt_{dado} desejado e ele retornará um $\Delta t \le \Delta t_{\text{dado}}$ permitido.

Em resumo, no Algoritmo 1 temos como:

- Entrada: $r_{\text{dia}}, m_{\text{dia}}, \sigma_{\text{dia}}$ e $\Delta t_{\text{dado}} > 0$ desejados, com $m_{\text{dia}} > \sigma_{\text{dia}}$ para que $d_{\Delta t} > 0$.
- Saída: $\Delta t \le \Delta t_{\text{dado}}$, $r_{\Delta t}$ os juros neste intervalo, a escala temporal máxima permitida pela condição de ausência de arbitragem, o valor de $p = 1/2$ para probabilidade de up (será sempre 1/2) e $u_{\Delta t}$ e $d_{\Delta t}$, o up e down para esta escala de tempo.

Algoritmo 1: Escala Temporal e Parâmetros no Modelo JR

Entrada: $\Delta t_{\text{dado}},\ r_{\text{dia}},\ m_{\text{dia}},\ \sigma_{\text{dia}}$
Saída: $p \leftarrow 1/2,\ \Delta t,\ u_{\Delta t},\ d_{\Delta t},\ r_{\Delta t}$
if $m_{dia} \le \sigma_{dia}$ **then Exit** Parâmetros Inconsistentes;
/* $\Delta t \le \Delta t_{\text{dado}}$ que garante ausência arbitragem. */
$M_0 \leftarrow \dfrac{1+r_{\text{dia}}}{m_{\text{dia}}};\quad M_1 \leftarrow 1 + \left(\dfrac{\sigma_{\text{dia}}}{m_{\text{dia}}}\right)^2;\quad \Delta t \leftarrow \Delta t_{\text{dado}};$
while $\left[1-(M_0)^{\Delta t}\right]^2 \ge (M_1)^{\Delta t} - 1$ **do** $\Delta t \leftarrow \Delta t/2$;
/* Calculando up, down e r no intervalo Δt */
$m_{\Delta t} \leftarrow (m_{\text{dia}})^{\Delta t};\quad \sigma_{\Delta t} \leftarrow \sqrt{(m_{\text{dia}}^2 + \sigma_{\text{dia}}^2)^{\Delta t} - (m_{\text{dia}}^2)^{\Delta t}};$
$u_{\Delta t} \leftarrow m_{\Delta t} + \sigma_{\Delta t};\quad d_{\Delta t} \leftarrow m_{\Delta t} - \sigma_{\Delta t};\quad r_{\Delta t} \leftarrow (1 + r_{\text{dia}})^{\Delta t} - 1;$
return $p \leftarrow 1/2,\ \Delta t,\ u_{\Delta t},\ d_{\Delta t},\ r_{\Delta t}$

Exemplo 4.1 (Refinando Escala de um Modelo) *Revisitando o modelo do Exemplo 2.6 da p.37 onde* $u = 2$, $d = 1/2$, $r = 1/4$, $S_0 = 2$. *Determine os valores de* $u_{\Delta t}$, $d_{\Delta t}$, $r_{\Delta t}$, $\Delta t = 0.5$ *e* 2.0. *Use-os para calcular os valores possíveis para cada* $\Delta t = 0.5,\ 1.0,\ 2.0$ *de* S_n/S_0 *com* $n = 1,\ 2, 4$.

Solução: Usando as probabilidades neutra a risco $p = q = 1/2$, $m_1 = (u+d)/2 = 1+r = 1.25$, e $\sigma_1 = (u-d)/2 = 0.75$ Como a condição de ausência de arbitragem é válida para $\Delta t = 1$, será válida para qualquer $\Delta t < 1$. Neste caso como $M_0 = 1$ (verifique) podemos usar **qualquer** $\Delta t > 0$.

Para $\Delta t = 0.5 = 1/2$, pelo algoritmo acima temos que

$$\begin{aligned} &m_{0.5} = \sqrt{1.25} \approx 1.118, &&\sigma_{0.5} = \sqrt{\sqrt{(1.25)^2 + (0.75)^2} - 1.25} \approx 0.456, \\ &u_{0.5} = m_{0.5} + \sigma_{0.5} \approx 1.574, &&d_{0.5} = m_{0.5} - \sigma_{0.5} \approx 0.662. \end{aligned}$$

$$r_{0.5} = \sqrt{1 + 0.25} - 1 \approx 0.12$$

Em acordo com a teoria, a condição de não arbitragem é válida:

$$d_{0.5} \approx 0.662 < 1 + r_{0.5} \approx 1.12 < u_{0.5} \approx 1.574.$$

Para $\Delta t = 2$, pelo algoritmo acima temos que

$$\begin{aligned} &m_2 = (1.25)^2 = 1.5625, &&\sigma_2 = \sqrt{((1.25)^2 + (0.75)^2)^2 - (1.25)^4} \approx 1.440, \\ &u_2 = m_2 + \sigma_2 \approx 3.002, &&d_2 = m_2 - \sigma_2 \approx 0.122, \end{aligned}$$

$$r_2 = (1 + 0.25)^2 - 1 = 0.5625.$$

Em acordo com a teoria, a condição de não arbitragem é válida:

$$d_2 \approx 0.122 < 1 + r_2 = 1.5625 < u_2 \approx 3.002.$$

A tabela abaixo apresenta os valores de S_n/S_0, bem como da média e desvio padrão, que são sempre os mesmos para cada valor de n.

Δt	S_1/S_0	S_2/S_0	S_4/S_0
0.5	{0.44, 1.0, 2.5}	{0.19, 0.45, 1.0, 2.6, 6.1}	{0.037, 0.088, ,0.21, 0.50, 1.2 ,2.8, 6.7, 15.8, 37.7}
1.0	{0.5, 2}	{0.25, 1, 4}	{0.063, 0.25, 1, 4, 16}
2.0	—	{0.12, 3.00}	{0.015, 0.37, 9}
m	1.25	1.56	2.44
σ	0.75	1.44	3.80

■

Exemplo 4.2 *Sabemos que uma certa ação foi negociada pelos seguintes valores em dias consecutivos:* $12, 13, 11, 10, 7$. *Calibre o modelo binomial do preço futuro desta ação de forma que o modelo não possua arbitragem na maior escala temporal* (Δt) *possível menor que 15 dias, isto é, com evolução máxima de 15 em 15 dias* ($\Delta t \leq 15$)*, sabendo que a taxa de juros diário é*
(a) $r = 15\%$. *(b)* $r = 5\%$. *(c)* $r = 1\%$.

Solução: Utilizando algum software (ou calculadora) determinamos:

- os saltos $j_i = s_{i+1}/s + i$: 1.08, 0.846, 0.909, 0.7.
- estimativas para a média diária $m_{\text{dia}} \approx 0.885$ e desvio padrão $\sigma_{\text{dia}} \approx 0.159$ (**não** é 0.137) de j_i.
- (modelo JR $u_1 = u_{\text{dia}} = m_{\text{dia}} + \sigma_{\text{dia}} \approx 1.0434$ e $d_1 = d_{\text{dia}} = m_{\text{dia}} - \sigma_{\text{dia}} \approx 0.726$ com $p = q = 1/2$.

Questão é: a condição de ausência de arbitragem $d_{\text{dia}} < 1 + r_{\text{dia}} < u_{\text{dia}}$ é satisfeita? Note que depende dos juros: para $r = 1\%$ sim mas para $r = 5\%$ e $r = 15\%$ **não** pois $u_{\text{dia}} < 1.05 < 1.1$. Determinando pelo Δt para satisfazer condição de não-arbitragem utilizando o Algoritmo 1 para cada taxa de juros, como $\Delta t_{\text{dado}} = 15$ no algoritmo, obtemos os valores da tabela abaixo.

r_{dia}	Δt	$u_{\Delta t}$	$d_{\Delta t}$	$r_{\Delta t}$
1%	$15/2^4 = 0.9375$	1.0463	0.7366	0.00937
5%	$15/2^5 = 0.46875$	1.0597	0.829	0.0231
15%	$15/2^6 = 0.234375$	1.056	0.888	0.0333

■

4.2 Simulando

Para simularmos numericamente o preço da ação utilizando o modelo binomial precisamos saber os valores de:

- S_0, preço inicial da ação (preço no tempo 0).
- T, o tempo final (em dias) de simulação.
- Δt, o tempo (em dias) transcorrido entre cada lançamento de moeda no modelo binomial.
- $u_{\Delta t}$ e $d_{\Delta t}$, up e down de cada intervalo Δt.
- p, a probabilidade de subida do valor da ação.

Com estes valores fixados – vimos na Seção anterior como obter estes valores partindo de dados do mercado e satisfazendo a hipótese de ausência de arbitragem – podemos simular um caminho percorrido pelo valor da ação através do Algoritmo 2. Precisamos assumir que exista uma rotina random() que retorna um número aleatório entre 0 e 1 com distribuição uniforme.

Algoritmo 2: Simulando Um Caminho do Preço de Ação

Entrada: $S_0, T, \Delta t, u_{\Delta t}, d_{\Delta t}, p$
Saída: $S(i\Delta t)$, $i\Delta t < T$
$S \leftarrow S_0$;
$t = 0$;
while $t < T$ **do**
  $t \leftarrow t + \Delta t$;
  if random() $< p$ **then** $S \leftarrow u_{\Delta t} S$;
  else $S \leftarrow d_{\Delta t} S$;
  Print $S_t = S$

Cada execução deste algoritmo dará um *run* ou caminho do preço da ação. Será o resultado de uma sequência de lançamento de moedas.

É comum querermos repetir a simulação usando escalas de temp o $\Delta t' < \Delta t$ mais finas, para melhorar a precisão das simulações.

Exemplo 4.3 *Assuma que partindo de uma série histórica determinamos que* $m_{dia} = 1.1$ *e* $\sigma_{dia} = 0.3$. *Apresente 2 runs (simulações completas) do valor da ação para tempo final* $T = 6$ *nas escalas temporais*
(a) $\Delta t = 0.2$, *a escala mais grossa, e* *(b)* $\Delta t = 0.05$, *a escala mais fina.*

Solução: Aplicando o Algoritmo 1 da p.90, sem a preocupação com a condição de ausência de arbitragem aqui obtemos:

- Para $\Delta t = 0.2$, $m_{\Delta t} = 1.019244487649146$, $\sigma_{\Delta t} = 0.122530950407229$, $u_{\Delta t} = 1.14177582689869$, $d_{\Delta t} = 0.896713926084228$.

- Para $\Delta t = 0.05$, $m_{\Delta t} = 1.00477688208721$, $\sigma_{\Delta t} = 0.060233310464668$, $u_{\Delta t} = 1.06501019255187$, $d_{\Delta t} = 0.944543571622538$.

Agora mostramos na Figura 4.2 o resultado, em preto usando $\Delta t = 0.05$, a escala mais fina, e em azul com $\Delta t = 0.2$, a escala mais grossa. Pode-se perceber independente de cor que com Δt menor se obtém um gráfico com irregularidades ainda maiores pois o número de saltos por unidade de tempo é 4 vezes maior. Na Figura 4.2 pode-se ver detalhes do que ocorre para t no intervalo [1, 2], onde também marcamos os pontos da simulação com bolas ($\Delta t = 0.05$) e quadrados ($\Delta t = 0.2$). ■

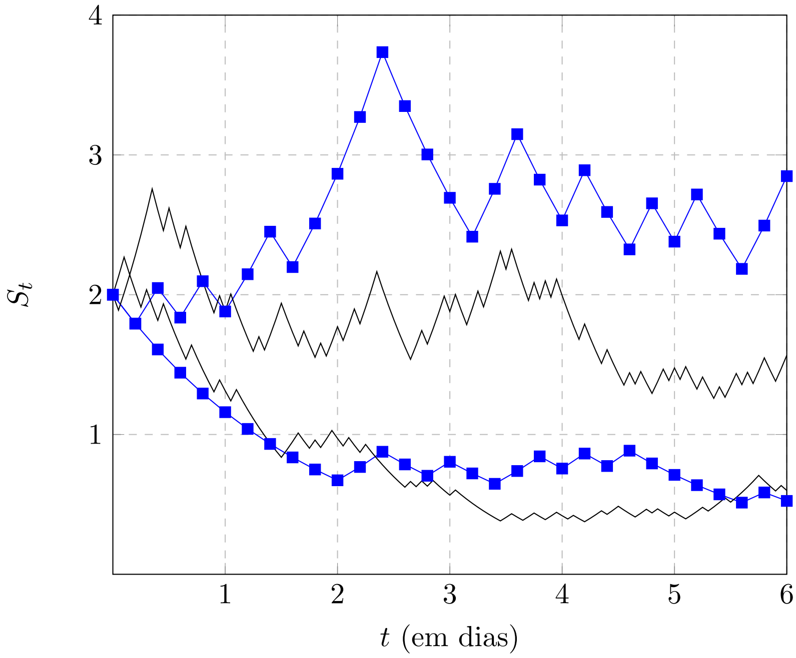


Figura 4.1: Valor da Ação com $m_{\text{dia}} = 1.1$ e $\sigma_{\text{dia}} = 0.3$, $\Delta t = 0.05$ (preto), 0.2 (azul)

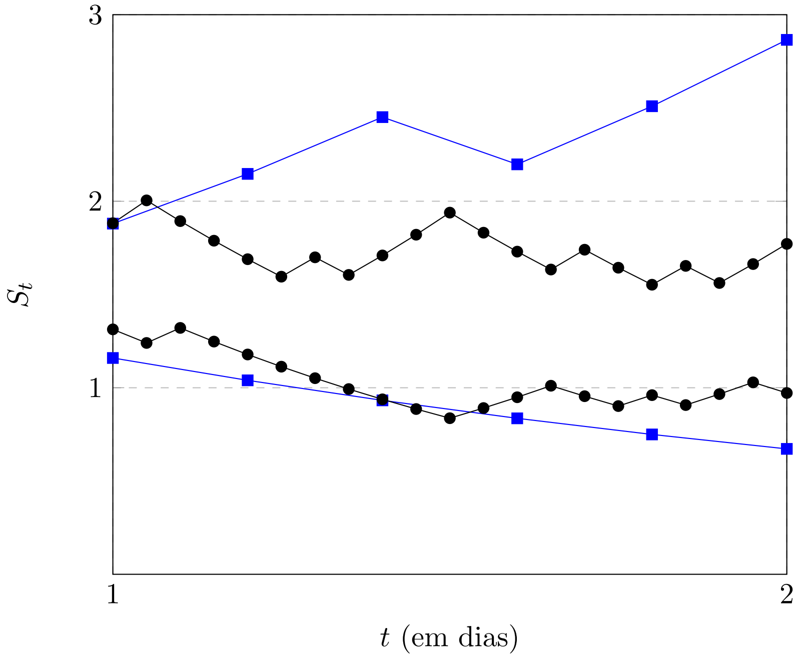


Figura 4.2: Detalhes da Figura 4.2: $\Delta t = 0.05$ (bola), 0.2 (quadrado)

4.3 Precificando

Nesta seção apresentamos algoritmos de precificação de **opções europeias**, cujo valor depende somente do valor final da ação. Reveja este e outros termos na p. 14.

Existe um problema bem conhecido em computação que é chamado de **explosão combinatória**, quando o uso de memória ou o tempo de execução cresce exponencialmente, ao invés de polinomialmente, no tamanho do problema; aqui neste contexto o crescimento é no número de vezes que lançamos a moeda N. Para recordar este problema, leia (muito importante) a Observação 2.8 da p.36. Se isto ocorrer, fica inviabilizado computacionalmente calcular TODOS os valores possíveis da opção. Como 2^{30} é cerca de 1 gigabyte e 2^{40} cerca de 1 terabyte, para $N = 50$ passos, a quantidade de memória necessária seria da ordem de $2^{10} = 1024$ terabytes de memória! Além disso o tempo de processamento fica muito longo ou, na prática impossível (digamos 10 mil anos, dependo do processador e de N dessa ordem). A saída será utilizar o chamado **método de Monte Carlo**, que apresentaremos nesta seção mais adiante. Em quais condições a **explosão combinatória** vai ocorrer? Refletiremos juntos sobre isso:

- Se o valor da opção não depende do caminho e além disso u, d e r são constantes, podemos gerar todos os $N + 1$ valores finais da opção e depois andar para trás na árvore utilizando a fórmula recursiva equação (2.6) da p.39 para determinar o valor de V_0.
- Se a opção depende do caminho, teremos 2^N valores finais da opção, e portanto uma **explosão combinatória**.
- Se u, d não são constantes ao longo do tempo de simulação, teremos 2^N valores finais para o ativo e, mesmo que a opção não dependa do caminho teremos uma **explosão combinatória**.
- Caso r não seja constante, ao aplicar a fórmula equação (2.6) da p.39) teremos que separar em caminhos distintos, gerando uma **explosão combinatória**.

Concluindo, apresentamos dois algoritmos com características distintas:

- Cálculo explícito (exato): Aplicando a fórmula equação (2.6) da p.39 quando o valor da opção depender somente do valor final do ativo e u, d, r são constantes ao longo do tempo. É a implementação direta da teoria.
- Método de Monte Carlo (aproximado): Pode ser utilizado em todos os casos e é de implementação simples **mas** o resultado não é exato, converge para o valor exato, mas de forma lenta. Pela simplicidade de implementação, mesmo em modelos bem sofisticados, é muito utilizado.

4.3.1 Conceitos de Métodos Numéricos

Antes de apresentar os métodos, apresentamos alguns conceitos básicos de **esquemas numéricos**, isto é, de algoritmos utilizados para aproximar um certo valor. Seguem exemplos.

- O esquema numérico abaixo aproxima π, isto é, $E_n \to \pi$ quando $n \to \infty$.

$$E_0 = 2, \quad E_n = \frac{4n^2}{4n^2 - 1} E_{n-1}, \qquad \text{para } n \geq 1.$$

- Seja $E = \displaystyle\int_0^2 e^{-x^2}\, dx$. Esta integral **não possui** primitiva, é o melhor que podemos fazer é **aproximar** sua valor exato E através de algum esquema numérico que vai gerar uma sequência E_n de valores aproximados para E.

- Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f'(x) = xf(x) + x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(1) = 2$. Qual o valor de $E = f(2)$? Este é um problema de valor inicial em equações diferencias ordinárias (EDO). Existem (diversos) esquemas numéricos que vão gerar sequência E_n que aproxima E.

Definição 4.3: Convergência

Seja E_n um valor determinado por um esquema numérico para aproximar o valor de E. Dizemos que o esquema numérico **converge** se $\lim_{n\to\infty} E_n = E$.

Quando se pensa em um método é importante saber o **quão rápido** é a convergência para a solução exata. Basicamente queremos saber o que ocorre com o erro da aproximação em função do n. Por exemplo se dobrarmos n o erro, $|E - E_n|$ cai pela metade? Ou seja, será que

$$|E - E_{2k}| \leq \frac{|E - E_k|}{2}?$$

Caso isto ocorra, por indução (Exercício 8 da p.114) teremos que para todo $n = 2^k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $C \in \mathbb{R}^+$,

$$|E - E_n| \leq \frac{|E - E_1|}{n} = \frac{C}{n}.$$

Poderíamos ter um outro esquema que quando dobramos n o erro se reduz por $1/4$. Este método teria convergência mais rápida para a solução com

$$|E - E_n| \leq \frac{C}{n^2}.$$

Quando o erro cai na mesma ordem que o índice da aproximação dizemos que a convergência é de ordem 1. No caso em que o erro cai com o dobro do aumento do índice (índice dobra, erro cai quatro vezes) dizemos que a convergência é de ordem 2. A próxima definição formaliza estas ideias.

Definição 4.4: Ordem de Convergência

Seja E_n um valor determinado por um esquema numérico para aproximar o valor de E. Dizemos que o esquema numérico possui **ordem de convergência** pelo menos $p \in \mathbb{R}^+$ se existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|E - E_n| \leq \frac{C}{n^p}.$$

Outro conceito importante é distinguir entre erro relativo e absoluto. A importância do erro relativo é que ele indica quantas casas decimais estão corretas na resposta.

Definição 4.5: Erro Absoluto e Relativo

Seja $\widetilde{E}$ uma aproximação de $E \neq 0$. Dizemos que o **erro absoluto** é $|\widetilde{E} - E|$ e o **erro relativo** é $\dfrac{|E - \widetilde{E}|}{E}$.

Assim se o erro relativo é menor que 10^{-k} isto indica que temos k casas decimais corretas.

Seja $e_n = |E - E_n|$ o erro. Supondo que o método é de ordem p esperaríamos que

$$e_n \approx \frac{C}{n^p}.$$

Assim, tomando log nos dois lados,

$$\log(e_n) \approx \log(C) - p \log n.$$

Assim em um gráfico com $y = \log e_n$ e $x = \log n$, (escala log-log), definindo $a = \log C$, esperamos uma equação da reta

$$y \approx a - px,$$

onde o coeficiente angular p da reta vai indicar a **ordem de convergência** do método. Esta é uma forma prática de se verificar a ordem de convergência de um método. Este coeficiente angular pode ser estimado utilizando **mínimos quadrados**[1]. Isto está ilustrado na Figura 4.5 da p.102, onde podemos ver duas retas aproximadas representando o erro em função de n (no caso destes gráficos MAX) em escala log-log.

4.3.2 Método Explícito para Opção Europeia Vanilla

Este método é baseado na teoria que desenvolvemos nos capítulos anteriores. Assumimos que u, d, r são constantes, e portanto as probabilidades neutras à risco $\widetilde{p}$ e $\widetilde{q}$ também o são. Assumimos que o payoff será uma função de S_N exclusivamente, ou seja, existe

[1] Teoria que permite calcular a reta que melhor aproxima (com menor erro possível em certo sentido) uma sequência de pontos. Neste caso os pontos do gráfico log-log.

uma $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que o valor da opção no tempo N é $V_N = f(S_N)$, basicamente para opções vanilla tipo call ou put. Explicaremos detalhes da implementação. No Algoritmo 3 inicializamos o vetor V com os valores de V_N para todos os valores possíveis de S_N e depois, usando a fórmula recursiva **para trás** dada pela equação (2.6) da p.39), calculamos V_{N-1}, V_{N-2}, ... Mas como V_j possui $j+1$ valores, podemos usar o mesmo vetor V para guardar os resultados sucessivos, até que na 1ª entrada do vetor V teremos o valor V_0. Note que assumimos neste algoritmo que o vetor V começa no índice 0: em algumas linguagens começa no 1 e o algoritmo deverá ser ligeiramente modificado. Veja a Seção 4.6 da p.109 para a implementação na linguagem Julia deste e dos próximos algoritmos.

Algoritmo 3: Precificando Opção Europeia

Entrada: S_0, N, u, d, r, f
Saída: V_0
if $(d >= 1 + r)$ **or** $(u <= 1 + r)$ **then** **Exit** Arbitragem no modelo;
$\widetilde{p} \leftarrow (1 + r - d)/(u - d)$; $\widetilde{q} \leftarrow 1 - \widetilde{p}$;
`/* Valor da opção no tempo final */`
for $j = 0$ **to** N **do** $V[j] \leftarrow f((d)^j(u)^{N-j}S_0)$;
`/* Aplicando equação (2.6) da p.39 */`
for $j = N - 1$ **to** 0 **do**
  for $i = 0$ **to** j **do** $V[i] \leftarrow (\widetilde{p}V[i] + \widetilde{q}V[i+1])/(1 + r)$;
return Valor da opção: $V_0 = V[0]$

Exemplo 4.4 *Retomamos o Exemplo 2.8 da p.41. É um put com strike 10 no tempo $T = 3$ com $u = 1.5$ e $d = 0.5$, $S_0 = 8$. Calculamos esta opção utilizando juros $r = 0\%$ e $r = 10\%$. Determine para qual valor converge o preço da opção quando aumentamos a discretização do tempo no modelo JR. Gere um gráfico com o valor de N e o valor da opção.*

Solução: O juros diário é dado: $r_{\text{dia}} = 0.1$. Já a média m_{dia} e desvio padrão σ_{dia} tem que ser calculado. No modelo JR, com $p = 1/2$, temos que $m_{\text{dia}} = (u + d)/2 = 1$ e $\sigma_{\text{dia}} = (u - d)/2 = 0.5$. Agora como $T = 3$, o tempo final, tomaremos $\Delta t = 1/2^i$ com $i = 0, \ldots, 14$, $N = T/\Delta t = 3, 3 \times 2, \ldots, 3 \times 2^{14}$, e utilizar o Algoritmo 1 da p.90 para calcular $u_{\Delta t}$, $d_{\Delta t}$ e $r_{\Delta t}$. Precificamos o valor da opção com estes parâmetros utilizando o Algoritmo 3. Apresentamos os resultados na Figura 4.3.2. Utilizamos na escala mais fina $N = 3 \times 2^{14} = 49152$, que corresponde a um $\Delta t = 3/N = 2^{-14} \approx 6.10 \times 10^{-5}$. No caso de $r = 0\%$, $V_0 \approx 3.957$ e para $r = 10\%$, $V_0 \approx 2.2263$. Pela figura fica clara a convergência quando $N \to \infty$. Deixaremos para os Projetos Computacionais o estudo da **ordem de convergência** do método. ∎

4.3.3 Método de Monte Carlo para Opções Europeias

Apresentamos o **Método de Monte Carlo** de simulação de modelos estocásticos, um método simples e que tem muitas aplicações. Na precificação de opções **europeias**,

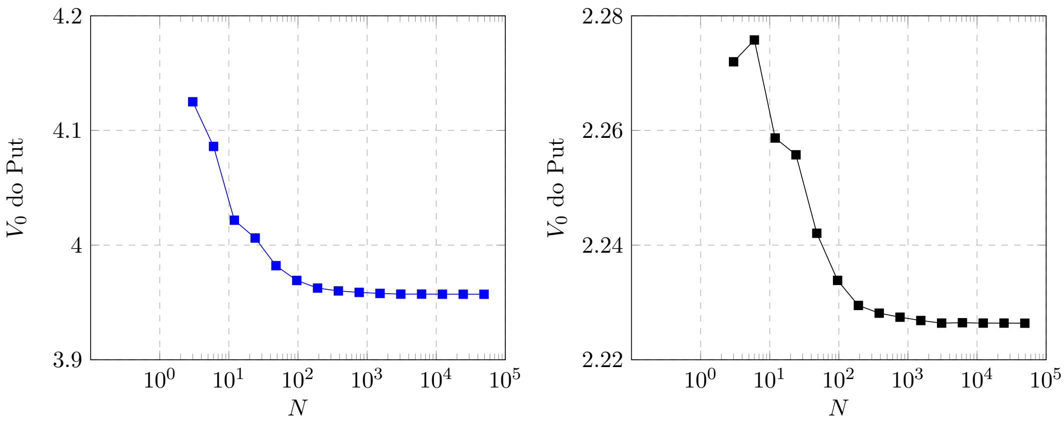


Figura 4.3: Valor do Put Europeu com $r = 0\%$ (azul) e $r = 10\%$ (preto)

servirá tanto para o caso em que o payoff depende de todo o caminho bem como quando u, d e r variam com o tempo e ao longo do caminho. Assim servirá para opções de qualquer tipo, não somente vanilla.

A ideia do método é a seguinte. Digamos que o tempo total de simulação do modelo T foi discretizado em $N \in \mathbb{N}$ partes, de forma que a cada iteração no tempo avançamos $\Delta t = T/N$. Fixamos um número M grande (mil, 5mil, 10 mil, etc.) de vezes em que geraremos todos os valores da ação, desde S_0 até seu valor final S_N, um caminho completo de valores da ação. Isto será feito jogando a moeda N vezes para gerar **cada caminho**, que chamamos também de **run** (execução) do modelo. Segue do Corolário 3.26 da p.72 que

$$V_0 = \widetilde{E}\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right],$$

isto é, V_0 é a média pela probabilidade neutra à risco dos valores da opção trazidos a tempo presente. Se os juros variam com o tempo e os lançamentos precisamos definir o processo de desconto D_n por

$$D_n = \frac{1}{(1+r_0)(1+r_1)\cdots(1+r_{n-1})} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+r_i}$$

E a fórmula geral fica bem elegante:

$$V_0 = \widetilde{E}[D_N V_N],$$

Em resumo, podemos **estimar** o valor V_0 da opção calculando a média de valores da opção V_N trazidos a tempo presente obtidos por muitos (mil, 10 mil, etc.) runs dos valores da ação segundo as **probabilidades neutras a risco**.

Podemos descrever o algoritmo de **Monte Carlo** assim:

---

1. Fixe MAX com valor grande (mil, 5 mil, etc.) e inicialize `soma` $= 0$ e $M = 0$.
2. Jogue moeda N vezes utilizando a probabilidade neutra a risco $\widetilde{p}_1, \widetilde{q}_1, \widetilde{p}_2, \ldots$ que varia ao longo do caminho e determine $r_1, u_1, d_1, r_2, u_2, d_2, \ldots$ bem como o caminho completo da ação $S_0, S_1, \ldots, S_N$ (um run da simulação)
3. Calcule o valor do desconto deste caminho: $D = \prod_{i=0}^{N-1}(1+r_i)^{-1}$.
4. Para cada caminho do passo 1 calcule $V_N = f(S_0, \ldots, S_N)$.
5. $M = M+1$, `soma` $=$ `soma` $+ D \cdot V_N$ (o valor descontado para o tempo zero da opção neste caminho) e volte para o passo 2 enquanto $M \leq$ MAX
6. Valor aproximado da opção: `soma`$/M$.

Apresentamos a implementação do Método de Monte Carlo no caso em que u, d e r são constantes no Algoritmo 5. Separamos no Algoritmo 4 a geração do caminho. Deixamos para os Projetos no final deste capítulo as modificações necessárias para implementar modelos com u, d e r dependendo de caminho e opções com barreiras.

Algoritmo 4: Gera Caminho Com Valor da Ação

Entrada: $N,\ S_0,\ u,\ d,\ r$
Saída: V_0
if $(d >= 1 + r)$ **or** $(u <= 1 + r)$ **then** **Exit** Arbitragem no modelo ;
`/* Calculando probabilidade neutra a risco */`
$p \leftarrow (1 + r - d)/(u - d)$;
$s[1] \leftarrow S_0$;
$D \leftarrow 1/(1 + r)^N$;
for $i = 2$ **to** $N + 1$ **do**
  if random() $< p$ **then** $s[i] \leftarrow u \cdot s[i - 1]$;
  else $s[i] \leftarrow d \cdot s[i - 1]$;
return $s[], D$

Neste método precisamos de memória somente para guardar um caminho de cada vez, sendo que o caminho tem N valores, com uso de memória similar ao do Algoritmo 3 da p.98. Além disso o tempo de execução dependerá do valor de MAX. Um problema é que a convergência do método para o valor correto de V_0 é um pouco lenta. Ou seja: Monte Carlo é eficiente no uso de memória, fácil de implementar mesmo em modelos mais complexos mas a convergência é lenta para o valor correto. Pode-se melhorar o método de Monte Carlo de várias formas, incluindo acelerando a convergência: Existem livros inteiros somente este método, mas considerando nosso propósito neste livro paramos por aqui.

Para ilustrar as ideias apresentamos na Figura 4.4 o erro relativo em função do valor de MAX para o algoritmo de Monte Carlo. Geramos dois gráficos que demonstram a redução do erro relativo em função do valor de MAX, o número máximo de iterações de

Algoritmo 5: Estima Valor da opção Europeia por Monte Carlo

```
Entrada: MAX, N, S_0, u, d, r, g
Saída: V_0
soma ← 0;
for M = 1 to MAX do
    /* Chamando o Algoritmo 4                                  */
    s, D = gera_caminho(N, S_0, u, d, r);
    soma ← soma + D * g(s);
V_0 ← soma/MAX;
return Valor aproximado da opção: V_0
```

Monte Carlo. A diferença principal entre os dois exemplos é o tempo final de $N = 50$ em um e de $N = 20$ no outro. Existe uma tendência de queda mas com certa irregularidade. Para se observar melhor o fenômeno aplicamos o algoritmo 30 vezes em cada caso e calculamos a média do erro. Assim foi gerada a Figura 4.5, onde pode-se ver a queda mais suave do erro em função do aumento de MAX, o número máximo de iterações no método de Monte Carlo. Observa-se que o erro relativo cai da ordem de 10^{-1} para 10^{-3}, cerca de 10^2 enquanto MAX aumenta de 10^2 para 10^6, cerca de 10^4. Assim pode-se ver que a ordem de convergência é próxima de 0.5 pois a redução do erro é a metade do aumento no número de iterações. O cálculo pode ser feito por regressão linear mas deixamos para os projetos os detalhes. Note que o erro para $N = 20$ é menor que para $N = 50$ pois o número de valores finais para S em um caso é $2^{20} \approx 10^6$, cerca de um milhão e $2^{50} \approx 10^{15}$, cerca de 1 milhão de bilhões de valores (bem mais difícil aproximar o valor médio da opção).

Nas duas simulações implementamos um call com strike K (variamos este valor) e $S_0 = 2,\ u = 1.10;\ d = 0.8;\ r = 0.04$. Os valor do strike e o valor do call determinado pelo método direto foi:

- $N = 20$ e $K = 3$. Valor do call: 0.7707837414814387.
- $N = 50$ e $K = 10$ Valor do call: 0.9110509612182965.

Revisitamos a questão da explosão combinatória no caso $N = 50$. Caso u, d, r sejam constantes e a opção dependa somente do valor final, sao apenas 51 valores distintos para a opção no tempo final. Caso u, d, r variem, ou o valor da opção dependa do caminho, são 1 milhão de bilhões de valores distintos da opção no tempo final. O método de Monte Carlo visitará apenas alguns deles, os mais prováveis (pela probabilidade neutra a risco) e calculará a média.

4.4 Teoria: Mudança de Escala e Método JR

Esta seção é de leitura opcional. Ela faz o desenvolvimento da teoria dos algoritmos de mudança de escala e do método JR.

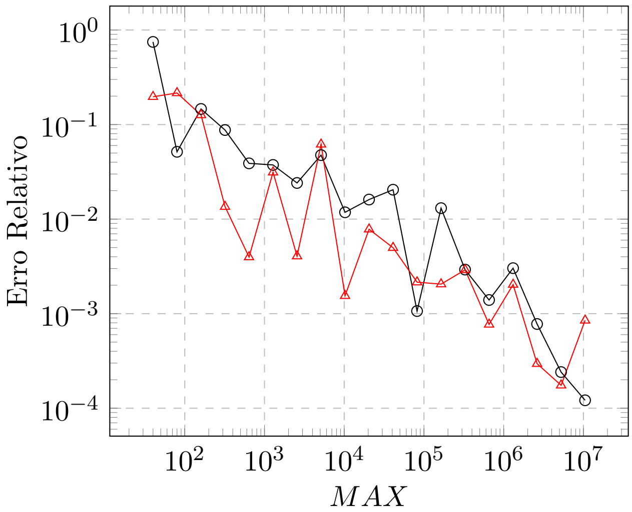


Figura 4.4: Monte Carlo com $N = 50$ (círculo) e $N = 20$ (triângulo)

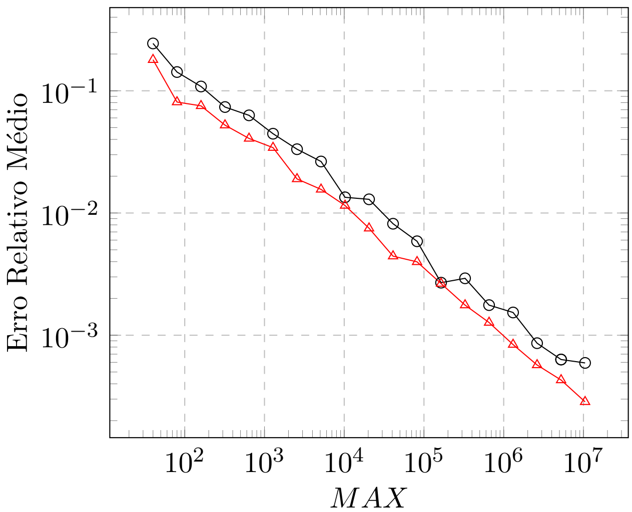


Figura 4.5: Monte Carlo (em média) com $N = 50$ (círculo) e $N = 20$ (triângulo)

4.4.1 Introdução à Mudança de Escala

Apresentamos as ideias de mudança de escala temporal no modelo JR nesta seção. Dada a média m_{dia} e desvio padrão σ_{dia} do salto diário obtido da série histórica, fixando $p = q = 1/2$ (mais sobre isso na próxima subseção, pois podemos usar outros valores), podemos determinar u_1 e d_1, os saltos diários, igualando a média e desvio padrão dos saltos $J_n = S_{n+1}/S_n$ do modelo binomial com estes valores. Pelo Exercício 3 da p.112 devemos ter

$$m_{\text{dia}} = (u_1 + d_1)/2 \quad \text{e} \quad \sigma_{\text{dia}} = (u_1 - d_1)/2 \quad \text{(queremos } u_1 > d_1\text{)}.$$

Assim,

$$u_1 = m_{\text{dia}} + \sigma_{\text{dia}} \quad \text{e} \quad d_1 = m_{\text{dia}} - \sigma_{\text{dia}}.$$

Mas e se quisermos andar em escala temporal diferente? Por exemplo se quisermos andar de dois em dois dias, que corresponde a $\Delta t = 2$, qual o valor para u_2 e d_2? Neste novo modelo o valor da ação H_n evolui segundo as equações

$$H_{n+2} = u_2 H_n \quad \text{ou} \quad H_{n+2} = d_2 H_n \quad \text{com probabilidade igual e} \quad H_0 = S_0.$$

Assim o tempo anda de 2 em 2 dias. Pode-se pensar que os valores de u_2 e d_2 deveriam ser o quadrado dos valores de u_1 e d_1, isto é,

$$\widetilde{u}_2 = (u_1)^2 \quad \text{e} \quad \widetilde{d}_2 = (d_1)^2,$$

mas isto **está errado** no seguinte sentido. Pelo Exercício 4 da p.112, os dois primeiros **momentos** (Definição 3.15 da p.59) de H_n são:

$$E[H_n] = m_{\text{dia}}^2 \quad \text{e} \quad E[H_n^2] = (m_{\text{dia}}^2 + \sigma_{\text{dia}}^2)^2. \tag{4.2}$$

Mas se usarmos os valores $\widetilde{u}_2 = (u_1)^2$ e $\widetilde{d}_2 = (d_1)^2$ a média dos saltos a cada dois dias será maior que a média de H_n pois (verifique)

$$\frac{\widetilde{u}_2 + \widetilde{d}_2}{2} = \frac{u_1^2 + d_1^2}{2} = m_{\text{dia}}^2 + \sigma_{\text{dia}}^2 > E[H_n] = m_{\text{dia}}^2 = m_{\text{2dias}}.$$

Pelos momentos de H_n da equação (4.2), obtemos que

$$\text{StDev}[H_n] = \sqrt{(m_{\text{dia}}^2 + \sigma_{\text{dia}}^2)^2 - m_{\text{dia}}^4} = \sigma_{\text{dia}}\sqrt{2m_{\text{dia}}^2 + \sigma_{\text{dia}}^2} = \sigma_{\text{2dias}}.$$

Igualando a média e o desvio padrão do pulo de 2 em 2 dias, utilizando resultado análogo ao Exercício 3 da p.112, devemos ter

$$m_{\text{2dias}} = (u_2 + d_2)/2 \quad \text{e} \quad \sigma_{\text{2dias}} = (u_2 - d_2)/2.$$

Concluímos que

$$u_2 = m_{\text{2dias}} + \sigma_{\text{2dias}} \quad \text{e} \quad d_2 = m_{\text{2dias}} - \sigma_{\text{2dias}}.$$

Ou seja, expressando os saltos de 2 em 2 dias em termos de m_{dia} e σ_{dia}, obtemos que

$$u_2 = m_{\text{dia}}^2 + \sigma_{\text{dia}}\sqrt{2m_{\text{dia}}^2 + \sigma_{\text{dia}}^2}, \quad d_2 = m_{\text{dia}}^2 - \sigma_{\text{dia}}\sqrt{2m_{\text{dia}}^2 + \sigma_{\text{dia}}^2}.$$

Temos que verificar também se a condição de ausência de arbitragem

$$d_{\text{dia}} = m_{\text{dia}} - \sigma_{\text{dia}} < r_{\text{dia}} < u_{\text{dia}} = m_{\text{dia}} + \sigma_{\text{dia}}$$

é satisfeita pois os valores de m_{dia} e σ_{dia} e de r_{dia} são obtidos de forma independente. Deixamos para próxima subseção este ponto.

Em resumo, determinamos $u_{\Delta t}$ e $d_{\Delta t}$ para $\Delta t = 2$ em função dos valores obtidas da série histórica m_{dia} e σ_{dia}. Na próxima subseção faremos o caso geral em que Δt pode ser qualquer valor. E veremos que quando Δt fica próximo de zero a condição de ausência de arbitragem será satisfeita.

4.4.2 Teoria da Mudança de Escala

Introduzimos um novo modelo para o valor da ação em que a cada passo andamos tempo $\Delta t > 0$. No modelo apresentado anteriormente, S_n é o valor da ação no tempo n e a cada passo andamos tempo $\Delta t = 1$, mas permitiremos agora andar em escalas menores, para tornar mais precisa a simulação, ou escalas maiores, para levar menos tempo simulando um tempo total maior.

Se S_t é o valor da ação no tempo t, neste novo modelo denotamos por $H_{n,\Delta t} = S(n\Delta t)$, o valor da ação no tempo $n\Delta t$. Iniciaremos com o mesmo valor nos dois modelos, de modo que $H_{0,\Delta t} = S_0 = S(0)$. Os saltos neste novo modelo dependerão do lançamento w_n ser H ou T e serão iguais $u_{\Delta t}$ ou $d_{\Delta t}$ com probabilidade p e $1-p$ respectivamente. Assim, de forma sucinta,

$$\frac{H_{n+1,\Delta t}}{H_{n,\Delta t}} = u_{\Delta t} \quad \text{ou} \quad d_{\Delta t}.$$

Note que o modelo anterior $S_n = H_{n,1}$, com $\Delta t = 1$, e portanto u, d dos capítulos anteriores são agora u_1, d_1. Para relacionar os saltos $u_{\Delta t}$ e $d_{\Delta t}$ com os saltos u_1 e d_1 do modelo S_n **garantiremos** que toda vez que pularmos o **mesmo intervalo de tempo**, ambos os modelos possuirão os dois primeiros momentos (Definição 3.15 da p.59) iguais, ou seja, terão mesma **média** e **variância**.

O próximo lema relaciona o valor de cada momento (precisamos somente dos dois primeiros, mas relacionamos qualquer um) de um salto de tempo com o momento do 1º salto.

Lema 4.6: Momentos dos Saltos

Fixe $q \in \mathbb{N}$ e defina o salto no valor da ação no intervalo de tempo $q\Delta t$ por

$$J_{q,\Delta t} = \frac{H_{n+q,\Delta t}}{H_{n,\Delta t}}.$$

Embora o salto dependa do n-ésimo lançamento de moeda, como seus momentos não dependem, omitimos n. Então seus momentos $k \in \mathbb{N}$ são potências dos momentos do 1º salto dados pela fórmula

$$E[(J_{q,\Delta t})^k] = E[(J_{1,\Delta t})^k]^q.$$

Prova: Omitindo o Δt na notação para simplificar, é fácil ver que

$$J_q = \frac{H_{n+q}}{H_n} = \frac{H_{n+q}}{H_{n+q-1}} \frac{H_{n+q-1}}{H_{n+q-2}} \cdots \frac{H_{n+1}}{H_n} = \prod_{m=n}^{n+q-1} \frac{H_{m+1}}{H_m}.$$

Logo,

$$E[J_q^k] = E\left[\prod_{m=n}^{n+q-1} \left(\frac{H_{m+1}}{H_m}\right)^k\right].$$

Note que H_{m+1}/H_m, independente de m, assume os mesmos valores com mesma probabilidade que J_1. Logo possui os mesmos momentos, isto é,

$$E\left[\left(\frac{H_{m+1}}{H_m}\right)^k\right] = E[J_1^k].$$

São $(n+q-1)-(n)+1 = q$ termos no produtório, cada termo independente do outro pois dependem somente do lançamento $m+1$ da moeda. Logo podemos usar o Lema 3.10 da p.57 e concluir que a esperança do produto é o produto da esperança, o que conclui a prova. ∎

Teorema 4.7

Seja $H_{n,\Delta t}$ o preço da ação no tempo $n\Delta t$ no modelo binomial cujos saltos de tempo Δt possuem média $m_{\Delta t}$ e desvio padrão $\sigma_{\Delta t}$ e $S_n = H_{n,1}$ o preço da ação no tempo n no modelo binomial cujos saltos de tempo 1 possuem média m_1 e desvio padrão σ_1. Supondo que $\Delta t \in \mathbb{Q}^+$, para que eles possuam a mesma média e desvio padrão em saltos de mesmo tempo, devemos ter as relações:

$$\begin{aligned} m_{\Delta t} &= (m_1)^{\Delta t}, \\ \sigma_{\Delta t} &= \sqrt{(m_1^2+\sigma_1^2)^{\Delta t} - (m_1)^{2\Delta t}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Podemos estender as relações acima para todo $\Delta t > 0$ por continuidade.

Prova: A média $(m_{\Delta t})$ e desvio padrão $(\sigma_{\Delta t})$ do salto de tempo Δt dada por $J_{1,\Delta t}$ satisfazem:

$$\begin{aligned} E[J_{1,\Delta t}] &= m_{\Delta t}, \\ E[(J_{1,\Delta t})^2] &= m_{\Delta t}^2 + \sigma_{\Delta t}^2. \end{aligned}$$

Para igualar a média e desvio padrão basta igualar os dois primeiros momentos dos saltos de mesmo tempo. Assim se $\Delta t = p/q \in \mathbb{Q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$, isto é, se $q\Delta t = p \cdot 1 = p$ queremos que os saltos $J_{q,\Delta t}$ (tempo transcorrido $q\Delta t$) e $J_{p,1}$ (tempo transcorrido p) possuam os dois primeiros momentos iguais. Pelo Lema4.6,

$$\begin{aligned} m_{\Delta t}^q &= m_1^p \\ (m_{\Delta t}^2 + \sigma_{\Delta t}^2)^q &= (m_1^2+\sigma_1^2)^p \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima e substituindo $\Delta t = p/q$ obtemos o resultado. ∎

4.4.3 Teoria dos Métodos

Considere o problema: fixado os valores para a média m e desvio padrão σ de um salto no modelo binomial do valor da ação, como determinar u, d e p de forma que o modelo tenha m e σ como média e desvio padrão?

Pelo Exercício 3 da p.112,

$$\begin{aligned} m &= pu + d(1-p), \\ \sigma &= (u-d)\sqrt{p(1-p)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Portanto temos 2 equações e 3 incógnitas (p, u, d): falta uma equação a mais! Algumas escolhas:

- $p = 1/2$, chamado de modelo de Jarrow e Rudd (JR), que será o **modelo escolhido** neste texto. A árvore terá uma tendência a crescer (não-simétrica) mas as probabilidades são iguais. Possui uma restrição que costuma ser satisfeita: $\sigma_{\text{dia}} < m_{\text{dia}}$. O próximo método não possui esta restrição.
- $u = 1/d$, chamado de modelo de Cox-Ross-Rubinstein (CRR), cuja característica principal é que gera uma árvore simétrica pois $ud = 1$ mas mas com $p \neq 1/2$ de forma geral. Veja os detalhes no Exercício 6 da p.113.
- Introduzir uma nova equação, como no método de Tian, onde forçamos o terceiro momento a ser igual: $pu^3 + (1-p)d^3 = m_3$. Não abordaremos neste livro.

Como em todos os métodos a média e a variância são as mesmas, quando $\Delta t \to 0$ todos os modelos binomiais vão convergir (pelo teorema do limite central) para o mesmo modelo: normal com mesma média e variância.

Vamos nos fixar no modelo de Jarrow e Rudd (JR) por ser o mais simples: $p = 1/2$. Colocando $p = 1/2$ em (4.4), obtemos que:

$$\frac{u+d}{2} = m \qquad \text{e} \qquad \frac{u-d}{2} = \sigma.$$

Logo a solução no Modelo de Jarrow e Rudd será:

$$p = p = 1/2, \quad u = m + \sigma \quad \text{e} \quad d = m - \sigma. \tag{4.5}$$

Determinaremos a fórmula para os up e downs do modelo de Jarrow e Rudd (JR) com cada unidade de tempo valendo Δt. Da série histórica de valores da ação podemos estimar sua média m_{dia} e desvio padrão σ_{dia} utilizando a equação (4.1) da p.89. Aplicando estes valores nas equações (4.3) e (4.5) obtemos que o up e down será dado por

$$u_{\Delta t} = (m_{\text{dia}})^{\Delta t} + \sqrt{(m_{\text{dia}}^2 + \sigma_{\text{dia}}^2)^{\Delta t} - (m_{\text{dia}}^2)^{\Delta t}}, \tag{4.6}$$

$$d_{\Delta t} = (m_{\text{dia}})^{\Delta t} - \sqrt{(m_{\text{dia}}^2 + \sigma_{\text{dia}}^2)^{\Delta t} - (m_{\text{dia}}^2)^{\Delta t}}. \tag{4.7}$$

Os juros do tempo 1 para o tempo Δt serão convertidos pelo modelo discreto. Se r_{dia} é a taxa de juros diária, temos que a taxa de juros do período Δt em dias será $r_{\Delta t}$ dada por

$$1 + r_{\Delta t} = (1 + r_{\text{dia}})^{\Delta t}.$$

Para termos ausência de arbitragem precisamos garantir que

$$0 < d_{\Delta t} < 1 + r_{\Delta t} < u_{\Delta t}.$$

Pelo Exercício 5 da p.113, garantimos que $d_{\Delta t} > 0$ se, e somente se, $m_{\text{dia}} > \sigma_{\text{dia}}$. Assim **precisamos** ter isso. Por (4.5) precisamos garantir que

$$m_{\Delta t} - (1 + r_{\Delta t}) < \sigma_{\Delta t} \quad \text{e} \quad (1 + r_{\Delta t}) - m_{\Delta t} < \sigma_{\Delta t},$$

isto é,

$$|m_{\Delta t} - (1 + r_{\Delta t})| < \sigma_{\Delta t} \tag{4.8}$$

Dividindo ambos os lados por $m_{\Delta t}$, utilizando as definições de $m_{\Delta t}$ e $\sigma_{\Delta t}$ em (4.3) com $m_1 = m_{\text{dia}}$ e $\sigma_1 = \sigma_{\text{dia}}$ e elevando ao quadrado cada lado, obtemos a **condição de ausência de arbitragem** no modelo Jarrow Rudd (JR) (deixamos para o leitor verificar):

$$\left(1 - \left(\frac{1 + r_{\text{dia}}}{m_{\text{dia}}}\right)^{\Delta t}\right)^2 < \left(1 + \left(\frac{\sigma_{\text{dia}}}{m_{\text{dia}}}\right)^2\right)^{\Delta t} - 1. \tag{4.9}$$

Além disso, para garantir que $d > 0$ temos que ter

$$\sigma_{\text{dia}} < m_{\text{dia}}.$$

Lema 4.8: Ausência de Arbitragem no Modelo Calibrado

Dados $m, \sigma > 0$ e $r > -1$, existe $\Delta t_0 > 0$ tal que para todo $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$,

$$\left(1 - \left(\frac{1 + r}{m}\right)^{\Delta t}\right)^2 < \left(1 + \left(\frac{\sigma}{m}\right)^2\right)^{\Delta t} - 1.$$

Prova: A condição pode ser reescrita como

$$\left(1 - e^{\Delta t K_1}\right)^2 < e^{\Delta t K_0} - 1, \tag{4.10}$$

onde

$$K_0 = \ln\left[1 + \left(\frac{\sigma}{m}\right)^2\right] \quad \text{e} \quad K_1 = \ln\left[\frac{1 + r}{m}\right].$$

Note que $K_0 > 0$ pois $\sigma/m > 0$. O sinal de K_1 não sabemos: dependerá da comparação da taxa de juros reais com o valor esperado (pela probabilidade real) do crescimento médio no preço da ação em um período. Observe que $K_1 < 0$ se, e somente se, o crescimento médio do valor da ação $m > 1 + r$.

Começamos recordando a série de Taylor de e^x:

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! + \cdots + x^n/n! + \cdots$$

Começamos utilizando um argumento que não é rigoroso para na sequência provar de forma rigorosa. De forma intuitiva, Para $x = \Delta t > 0$ próximo de zero, pela série de Taylor $e^x - 1 \approx x$, assim a condição (4.10) simplifica para

$$(\Delta t K_1)^2 < \Delta t K_0.$$

Logo basta que (porque?) $0 < \Delta t < K_0/(K_1)^2$. Mas esta estimativa é aproximada.

Faremos agora uma estimativa precisa. Se $|x| \leq 1$, pela série de Taylor, como $e = e^1 = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \cdots \approx 2.7$,

$$|e^x - 1| \leq |x||1 + 1/2! + 1/3! + \cdots| = |x|(e-1) < 2|x|$$

Assim se $\Delta t|K_1| \leq 1$,

$$|1 - e^{\Delta t K_1}| \leq 2\Delta t|K_1|.$$

Por outro lado, também por Taylor, se $x > 0$, $e^x - 1 > x$. Assim

$$\Delta t K_0 < e^{\Delta t K_0} - 1$$

Logo garantimos (4.10) se $\Delta t|K_1| \leq 1$ e $(2\Delta t|K_1|)^2 \leq \Delta t K_0$, isto é

$$\Delta t_0 = \min\left(\frac{1}{|K_1|}, \frac{K_0}{4(K_1)^2}\right), \quad \text{se} \quad K_1 \neq 0, \tag{4.11}$$

caso contrário Δt_0 pode ser qualquer valor positivo. ■

Segue deste lema que existe $\Delta t_0 > 0$ tal que para todo $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$ a condição (4.9) será satisfeita.

Concluímos que o Algoritmo 1 retorna valores corretos. As entradas são estimativas para a média (m_{dia}) e desvio padrão (σ_{dia}) dos saltos diários nos valores da ação, os juros diários (r_{dia}) e a escala temporal desejada Δt_{dado} em dias da simulação. O algoritmo retorna:

- $\Delta t \leq \Delta t_{\text{dado}}$, a escala temporal que deve ser utilizada.
- $r_{\Delta t}$, $u_{\Delta t}$ e $d_{\Delta t}$, os juros, up e down da ação no intervalo Δt compatível os valores diários r_{dia}, m_{dia}, σ_{dia} e satisfazendo a ausência de arbitragem: $d_{\Delta t} < 1 + r_{\Delta t} < u_{\Delta t}$.

4.5 Comentários Finais

Conforme vimos o modelo o modelo binomial para o valor de uma ação é muito fácil de ser implementado pela sua simplicidade mesmo incorporando juros e saltos que variam com o tempo e de acordo com o resultado dos lançamentos de moeda. O problema principal dele é que sua convergência é lenta e oscilatória (Exercício 5 da p.116) para o valor verdadeiro. Existem diversas propostas para melhorar este método mas que não serão abordados neste texto introdutório.

Em aplicações de finanças temos que determinar o tempo transcorrido entre duas datas e não existe um único padrão. Aqui no livro ignoramos isto e as simulações são simplesmente de dias corridos (pode-se pensar que são dias úteis, em que ocorrem negócios).

Estas convenções são chamadas de **day counting conventions**, e são relevantes em derivativos de forma geral, onde acorda-se qual será a convenção combinada para contagem de dias.

Uma convenção muito utilizada é a 30/360, onde consideramos que o ano possui 360 dias e os meses 30 dias, mesmo fevereiro ou meses com 31 dias. Usando a convenção 30/360, o tempo transcorrido em anos entre dd/mm/yyyy e dd'/mm'/yyyy', será dado por

$$\frac{(dd' - dd) + 30(mm' - mm) + 360(yyyy' - yyyy)}{360}.$$

Outra possibilidade é considerar somente o número de dias em que a bolsa está aberta, cerca de 21 dias por mês, e fixar um ano de 252 dias. Leia mais sobre isso em `en.wikipedia.org/wiki/Day_count_convention`.

4.6 Código em Júlia

Nesta Seção mostramos a implementação em Julia[2] dos Algoritmos apresentados neste capítulo. Começamos com a implementação do Algoritmo 1 da p.90 em que calculamos os parâmetros u, d, r na escala de tempo Δt a partir da média e desvio padrão dos saltos diários no valor da ação pelo modelo JR. Garantimos a ausência de arbitragem através da valor de Δt determinado pelo algoritmo.

```
function escala_temp_JR(dt0, r_dia, mu_dia, sigma_dia)
    if (mu_dia <= sigma_dia)
        println("Parâmetros inconsistentes");
        return -1;
    end
    M0= (1+r_dia)/mu_dia;
    M1= 1 +(sigma_dia/mu_dia)^2;
    dt=dt0;
    while (1-M0^dt)^2 >= M1^dt -1
        dt=dt/2;
    end
    # Calculando up, down e r no intervalo dt
    mu_dt= (mu_dia)^dt;
    sigma_dt=sqrt( (mu_dia^2 + sigma_dia^2)^dt - mu_dia^(2*dt));
    u_dt = mu_dt + sigma_dt;
    d_dt = mu_dt - sigma_dt;
    r_dt= (1+r_dia)^dt -1;
    return dt, u_dt, d_dt, r_dt;
end
```

[2] Uma linguagem similar ao Matlab mas de código aberto. Julia é o Ju do Jupyter. Dizem que homenagem ao Julia Set, batizado por ter sido criado pelo matemático Gaston Julia.

Implementamos o Algoritmo 3 da p.98, que precifica o valor de opções europeias. Como arrays começam em 1 m Julia, note que a implementação é ligeiramente diferente do Algoritmo apresentado.

```
function valor_opcao_europeia(N, S0, u, d, r, payoff, strike)
    # Testando ausência de arbitragem
    if d>=1+r || u<=1+r
         println("Existe Arbitragem");
         return -1;
    end
    p=(1+r-d)/(u-d);
    q=1-p;
    # Vetor com valores da opcao
    V=zeros(N+1);
    # Valor de V_N dado pelo Payoff
    for j=0: N
         V[j+1]=payoff(d^j*u^(N-j)*S0, strike);
    end
    # Voltando até o tempo zero na árvore
    for j= reverse(0:N-1)
        # Calculando E_j[V_{j+1}]/(1+r)
        for i=0: j
            V[i+1]=(p*V[i+1]+q*V[i+2])/(1+r);
        end
    end
    return V[1];
end
```

O Payoff deve ser uma função de dois parâmetros (o valor da ação e o strike) e que retorna o valor da opção. Definimos um call e um put e um payoff que utiliza a definição de put para exemplificar.

```
function put(S,K)
   if (K-S)<0
       return 0;
   else
       return K-S;
   end
end
function call(S,K)
   if (S-K)<0
       return 0;
   else
       return S-K;
   end
```

```
end
```

Assim podemos recalcular o Exemplo 2.8 da p.41, um put com strike $K = 10$ no tempo $N = 3$ com $S_0 = 8, u = 1.5, d = 0.5$ e $r = 0\%$ com o comando:
`valor_opcao_europeia(8, 3, 1.5, 0.5, 0, put, 10)` e obter $4.125 = 33/8$.

Segue a implementação do Método de Monte Carlo do Algoritmo 5 da p.101.

```
function monte_carlo(S0, MAX, N, u,d,r, payoff_caminho)
    soma=0;
    for j= 1:MAX
       s,D = caminho(N, S0, u, d, r);
       soma += payoff_caminho(N,s)*D;
    end
    return soma/MAX;
end
```

Para o método de Monte Carlo precisamos gerar o caminho com os valores da ação através do Algoritmo 4 da p.100.

```
function gera_caminho_simples(N, S0, u, d, r)
    # Testando ausência de arbitragem
    if d>=1+r || u<=1+r
    println("Existe Arbitragem");
    return -1;
    end
    p=(1+r-d)/(u-d);
    s=zeros(N+1); s[1]=S0;
    m=rand(N); # gerando N lançamentos de moeda
    D=1/(1+r)^(N);
    for i=2: N+1
        if m[i-1]<p
    s[i] = u*s[i-1];
else
    s[i] = d*s[i-1];
end
    end
    # vetor com a série temporal e o desconto D.
    return s, D;
    # Using Plots; plot(s); plot!(s); cumulativo
end
```

Testamos o método de Monte Carlo comparando o valor exato (determinado pelo Algoritmo 3 da p.98) com o determinado por Monte Carlo utilizando o código abaixo. Testamos o Exemplo 2.8 da p.41, mas pode-se facilmente modificá-lo.

```
function testa_MC(MAX)
```

```
    N=3; S0=8;  r=0/100; u=1.5;  d=0.5;
    function payoff_caminho_put_dez(N,s)
       return put(s[N+1],10)
    end
    function payoff(s)
       return put(s,10)
    end
    valor=monte_carlo(S0, MAX, N, u, d, r, payoff_caminho_put_dez)
    valor_exato= valor_opcao_europeia(S0, N, u, d, r, payoff)
    erro_relativo= abs(valor-valor_exato)/valor_exato);
    return erro_relativo;
end
```

Podemos fazer regressão linear com a função

```
linreg(x, y) = hcat(fill!(similar(x), 1), x) \ y;
```

A entrada são dois vetores x e y, a saida os coeficientes da reta que melhor aproxima.

4.7 Exercícios

1. Quais são as vantagens e desvantagens do Método de Monte Carlo com relação ao método direto de precificação de opções? Em particular quais são as diferenças no uso de memória dos métodos.

2. Sabemos que uma certa ação foi negociada pelos seguintes valores em dias consecutivos: $34, 37, 35, 36, 38, 37$. Calibre o modelo binomial do preço futuro desta ação de forma que o modelo não possua arbitragem na maior escala temporal (Δt) possível para cada uma das taxa de juros **diária** abaixo. É necessário determinar S_0, Δt e os valores correspondentes de u, d, r. Estude o Exemplo 4.2 da p.92 para fazer este exercício.

   (a) $r = 20\%$. (b) $r = 10\%$. (c) $r = 5\%$.

3. Seja $J_n = S_{n+1}/S_n$ o salto diário no valor da ação no modelo binomial. Prove que:

$$E[J_n] = up + (1-p)d \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Var}[J_n] = p(1-p)(u-d)^2.$$

   Conclua que se $p = 1/2$,

$$E[J_n] = \frac{u+d}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{StDev}[J_n] = \frac{|u-d|}{2}.$$

4. Seja $J_n = S_{n+1}/S_n$ o salto diário e $H_n = S_{n+2}/S_n$ o salto a cada dois dias no valor da ação no modelo binomial. Prove que:

$$E[H_n] = (E[J_n])^2 = (pu + (1-p)d)^2 \quad \text{e}$$
$$E[H_n^2] = (E[J_n^2])^2 = (pu^2 + (1-p)d^2)^2.$$

5. Pela equação (4.7) da p.106,

$$d_{\Delta t} = (m_{\text{dia}})^{\Delta t} - \sqrt{(m_{\text{dia}}^2 + \sigma_{\text{dia}}^2)^{\Delta t} - (m_{\text{dia}}^2)^{\Delta t}}.$$

   Fixado $\Delta t = 1$, que corresponde a um dia, obtemos que

$$d_{\text{dia}} = m_{\text{dia}} - \sigma_{\text{dia}}.$$

   Prove que $d_{\text{dia}} > 0$ se, e somente se, $d_{\Delta t} > 0$, se e somente se, $m_{\text{dia}} > \sigma_{\text{dia}}$

   Dica: Se f é uma função crescente ($x < y$ implica $f(x) < f(y)$) então você pode aplicar f nos dois lados de uma desigualdade sem alterá-la. No caso precisamos usar o fato que $f(x) = x^k$ é crescente para todo $k > 0$, com domínio $x > 0$. Pode-se provar usando cálculo, pelo sinal de f'.

6. (método CRR: desenvolvimento) Desenvolveremos o modelo de Cox, Ross and Rubinstein (CRR), uma alternativa ao modelo JR onde assumimos que $d = 1/u$. Em ambos os modelos queremos determinar parâmetros u, d, p do modelo binomial de forma que os saltos $J_n = S_{n+1}/S_n$ – que no modelo binomial assumem valores u ou d com probabilidade p e $1-p$ respectivamente – tenham média m e desvio-padrão σ. Nosso problema é, dado $m, \sigma > 0$, determinar p, u, d tais sejam satisfeitas (vide equação (4.4) da p.106):

$$\begin{aligned} \text{(Média)} \quad & m = pu + d(1-p), \\ \text{(desvio-padrão)} \quad & \sigma = (u-d)\sqrt{p(1-p)}, \\ \text{(Modelo CRR)} \quad & d = 1/u. \end{aligned}$$

   Faça o seguinte roteiro:

   a) Da primeira equação deduza que

$$p = \frac{m-d}{u-d}.$$

   b) Use a equação do item anterior na 2ª equação para obter

$$\sigma^2 = (m-d)(u-m).$$

   c) Substitua a 3ª equação na equação do item anterior, expanda os termos e multiplique por u para obter a equação do 2º grau em u:

$$u^2 - 2\alpha u + 1 = 0, \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{1}{2}\left[m + \frac{1+\sigma^2}{m}\right].$$

   d) Conclua que $u = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$ e $d = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$.

   e) Para que a fórmula faça sentido precisamos que o argumento da raiz quadrada seja positivo. Prove que $\alpha^2 - 1 > 0$ para todo $m, \sigma > 0$.
   Dica: Por cálculo 1, $m + 1/m > 2$ para todo $m > 0$.

f) Precisamos garantir que p definido pela expressão é uma probabilidade. Prove que $0 < p < 1$. Dica: Verifique que equivale a mostrar que $d < m < u$ o que implica $|m - \alpha| < \sqrt{\alpha^2 - 1}$.

g) Prove que $d > 0$.

h) Prove que $p > 1/2$ se, e somente se, $m^2 > \sigma^2 + 1$. Com um pouco mais de esforço de álgebra pode-se provar que:

$$p = \frac{m^2 - (\sigma^2 + 1)}{2\sqrt{\sigma^2 + (m-1)^2}\sqrt{\sigma^2 + (m+1)^2}} + \frac{1}{2}.$$

7. (método CRR: ausência de arbitragem) Pode-se definir $u_{\Delta t}$ e $d_{\Delta t}$ para o método CRR da seguinte forma. Seja $m^1_{\Delta t}$ e $m^2_{\Delta t}$ a média e o segundo momento do jump no valor da ação de tamanho Δt. Assim, pelo Teorema 4.7 da p.105,

$$m^1_{\Delta t} = (m_{\text{dia}})^{\Delta t} \quad \text{e} \quad m^2_{\Delta t} = (m^2_{\text{dia}} + \sigma^2_{\text{dia}})^{\Delta t}.$$

Agora definimos $\alpha_{\Delta t}$ e utilizamos isto para definir $u_{\Delta t}$ e $d_{\Delta t}$:

$$\alpha_{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\frac{1 + m^2_{\Delta t}}{m^1_{\Delta t}}\right], \quad u = \alpha_{\Delta t} + \sqrt{\alpha^2_{\Delta t} - 1} \quad \text{e} \quad d = \alpha_{\Delta t} - \sqrt{\alpha^2_{\Delta t} - 1}.$$

Prove que dado r_{dia} e definindo $r_{\Delta t} = (1 + r_{\text{dia}})^{\Delta t} - 1$, existe $\Delta t > 0$ tal que a condição de ausência de arbitragem $d_{\Delta t} < 1 + r_{\Delta t} < u_{\Delta t}$ é satisfeita. Pode-se fazer isso de forma similar ao que fizemos para o método JR no texto.

8. Suponha que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|E - E_{2k}| \leq \frac{|E - E_k|}{2}.$$

Prove (indução) que se $C = |E - E_1|$, para todo $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$,

$$|E - E_n| \leq \frac{C}{n}.$$

4.8 Projetos Computacionais

Cada projeto deve ser acompanhado de um relatório contendo detalhes da metodologia, escolha de parâmetros, fonte dos dados e resultados, incluindo figuras. O Código utilizado deve aparecer num apêndice do relatório ou incorporado ao relatório para quem usar ambiente do tipo `Jupyter`.

1. (ordem de convergência) Considere o esquema numérico abaixo que aproxima π:

$$E_0 = 2, \quad E_n = \frac{4n^2}{4n^2 - 1} E_{n-1}, \qquad \text{para } n \geq 1.$$

Determine sua **ordem de convergência** da seguinte forma.

(a) Determine o erro e_n em função de n com n potências de k (tipo $n = 2^k$).

(b) Plot o gráfico log-log de e_n em função de n.

(c) Escolha um segmento onde o erro esteja decaindo linearmente. Pode ter um segmento inicial onde o algoritmo ainda não entrou em sua taxa de convergência e um segmento final onde chegamos ao erro de máquina (erro relativo da ordem de 10^{-16}) onde o erro deixa de cair.

(d) Neste segmento determine o coeficiente linear aproximado utilizando regressão linear.

2. (saltos no valor da ação) Obtenha uma série temporal s_i de valores de uma ação com valores diários por 3 ou 4 meses.

   a) Plot a série s_i.

   b) Plot a série de jumps $j_i = s_{i+1}/s_i$.

   c) Calcule o valor médio m dos jumps e seu desvio-padrão. Note que estes valores médios são relativos a um dia pois a série temporal dos valores da ação é de cada dia.

   d) Plot no mesmo gráfico s_i e o crescimento médio t_i definido por $t_0 = s_0$ e $t_{i+1} = m \cdot t_i$.

   e) Plot no mesmo gráfico de $\log s_i$ e $\log t_i$, sendo que este último é uma reta. Qual seu coeficiente angular?

   f) Baseado no item anterior, quando comparamos desempenho de ações, é melhor observar em escala de log de valores para podermos enxergar os saltos. O crescimento ou decrescimento em linha reta na escala log indica ganhos ou perdas de mesmo percentual. Plot 4 ações de setores distintos da economia em escala logarítimica. Para ajudar na comparação é comum normalizar e dividir todos os valores pelo valor inicial s_0, e fica claro qual foi o ganho ao longo do tempo. Faça comentários baseados no gráfico de quais ações tiveram pior/melhor desempenho em periodos distintos. Acompanhe pelo menos 2 anos de cada ação.

3. (risco $\times$ retorno) Busque 10 séries de valores de ações distintas, durante um intervalo de 2 a 3 meses.

   (a) Determine seu salto médio (m_{dia}) e desvio-padrão (σ_{dia}), isto é sua volatilidade diária ou risco.

   (b) Plot num gráfico no plano cartesiano pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ representando cada ação da seguinte forma. Tomamos x = risco (desvio-padrão) e y = ao retorno médio ($m_{\text{dia}} - 1$) (veja Definição 4.2 da p.89) Marque também um ponto no eixo y representando a taxa Selic, cujo retorno é fixo igual a r_{dia} e cujo risco é 0. Este gráfico de risco $\times$ retorno será usado no modelo CAPM de capítulo mais adiante.

(c) Aprenda o que é um **boxplot**. Coloque no mesmo gráfico o boxplot dos saltos de cada uma das séries e faça um análise relativa do desempenho desta ações. Após observar os boxplot das 10 escolha um subconjunto de 3 a 5 ações com desempenhos de características distintas.

(d) Gere várias séries temporais do preço da ação utilizando nosso modelo binomial pelo mesmo período. Plote a série original e as geradas pelo modelo. Analise o resultado obtido.

4. (método direto prático) Busque valores de 1 call e 1 put de alguma ação ofertada no mercado. Obtenha a série temporal da ação por 2 a 3 meses até hoje, calibre o modelo utilizando o Algoritmo 1 da p.90 e implemente o Algoritmo 3 da p.98 para determinar o valor do call e put.

   (a) Compare os valores do mercado e desta modelagem.

   (b) Faça $\Delta t \to 0$ e veja o valor que se obtém no limite. Compare os valores do mercado e desta modelagem. Retornaremos a isso mais adiante no livro.

5. (método direto convergência) Escolha um exemplo do livro de uma opção com $T = 1, 2$ ou 3. Nosso objetivo é aplicar o Algoritmo 1 da p.90 para ter modelos com $\Delta t \to 0$ e verificar a velocidade de convergência do valor da opção utilizando o Algoritmo 3 da p.98. Para isso, partindo de $N_0 = T$, utilize $N = N_0 \cdot a^k$, $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Plot um gráfico do valor de $V_0 \times N$. Veja como o valor da opção converge. Observe natureza oscilatória do valor no início (use mais valores de N no início para observar melhor).

   (b) Plot um gráfico do erro $\times$ N em escala log-log. O valor exato pode ser assumido como sendo o valor calculado com o maior valor de N utilizado.

   (c) Faça regressão linear para verificar a ordem de convergência.

6. (método Monte Carlo) Objetivo é implementar o método de Monte Carlo e, inicialmente reproduzir os gráficos da Figura 4.4 da p.102 em uma opção não-vanila, onde não sabemos o valor exato por fórmula. Para isto considere $S_0 = 10$, $r = 0.1$, $N = 40$, $u = 1.13$, $d = 0.85$. Considere um put asiático europeu com $K = 45$ e payoff dado por $f(S_0, \ldots, S_N) = (K - S_{\text{média}})^+$, onde $S_{\text{média}}$ é a média do valor da ação ao longo de um caminho.

   (a) Implemente Monte Carlo com $MAX = m_0 \cdot a^k$, $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Plot um gráfico do erro $\times$ MAX em escala log-log. O valor exato pode ser assumido como sendo o valor calculado com o maior valor de MAX.

   (c) Faça regressão linear para verificar a ordem de convergência, que deve ser próxima de 0.5 como dito no texto.

   (d) Para reproduzir Figura 4.5 deve-se para cada MAX fixado, aplicar Monte Carlo certo número de vezes (10, 20 ou 30 vezes) e calcular a média do erro. Isto torna o gráfico mais estável na redução de erro.

7. (Monte Carlo e opções não vanilla) Tomando por base os parâmetros do Projeto 6 (mas com outro strike K) determine o valor de cada uma das opções abaixo. Escolha 2 valores interessantes para B e outros 2 valores para K.

   a) **lookback europeu**: payoff $(S_{\max} - S_{\min})^+$ que pode ser exercido somente na data final, comparando os valores máximo e mínimo da ação ao longo da opção.

   b) **call com barreira europeu**: payoff $(S - K)^+$ mas se ao longo do tempo da opção $S_t > B$, B a barreira, a opção perde o valor. É conhecido como up-and-out ou barreira de knock-out. Existem barreiras do tipo knock-in, que ativam o valor do contrato: se a ação não atingir a barreira a opção não terá valor. Teremos que modificar ligeiramente o Algoritmo 5 da p.101.

   Observação: A referência básica é que **em média neutra a risco** (e portanto para efeito da simulação de Monte Carlo) a ação vai valer $S_0(1 + r)^N$ no tempo N. Assim o valor do strike K no tempo N tem que levar isto em conta pois caso contrário a opção estará sempre in the money ou out of money.

8. (Monte Carlo com juros estocásticos) Considere um modelo onde os juros começam com $r_0 = 0.2$ e sobem ou descem 0.005. Assim $r_1 = 0.2 \pm 0.005$. De forma geral, $r_{n+1} = r_n \pm 0.005$ de acordo com o lançamento de moeda. Aqui fixaremos $u = 1.4$ e $d = 0.9$ com $N = 20$. $S_0 = 100$.

   (a) Prove que este modelo não possui arbitragem.

   (b) Determine o valor de 2 puts e 2 calls com strikes distintos. Utilize strikes na faixa 70 a 140.

   Observação: Neste caso, por não termos u, d, r constantes, temos que implementar Monte Carlo conforme descrito na página 99, modificando o Algoritmo 5 da p.101.

9. (Monte Carlo com u, d, r variáveis no tempo e com o lançamento) Considere um modelo onde $N = 30$, $S_0 = 1000$,

$$S_{n+1} = S_n \pm 30 \quad \text{e} \quad r_n = 0.01\frac{n}{n+1} \pm 0.002$$

   de acordo com o resultado do lançamento da moeda.

   (a) Prove que este modelo não possui arbitragem.

   (b) Determine o valor de um put ou call (escolha) com strike na faixa 700 a 1400 e uma barreira (inferior ou superior) com valor escolhido por voce.

   (c) Escolha uma opção que dependa do caminho (asiático ou lookback) e determine seu valor.

   Observação: Neste caso, por não termos u, d, r constantes, temos que implementar Monte Carlo conforme descrito na página 99, modificando o Algoritmo 5 da p.101.

5

Opções Americanas

Opções americanas podem ser exercidas a qualquer momento entre o tempo de assinatura de contrato e a data final. Assim quem compra a opção deve avaliar a cada momento se deve continuar com a opção ou deve executá-la imediatamente. Baseado na teoria desenvolvida no Capítulo 2 da p.23, devemos verificar se a esperança de valor futuro (sob a probabilidade neutra a risco) descontado da opção é maior ou menor que o valor de execução imediata. No caso de opções bermudianas o problema é similar mas com menos opções de tempo de execução: ao invés de diários eles podem ser semanais ou quinzenais por exemplo.

Para fazer o estudo matemático das opções americanas, incluindo uma fórmula fechada, ao invés de uma formula recursiva, introduziremos um importante objeto de processos estocásticos, o **tempo de parada**. Além disso revisitaremos martingais e apresentaremos funções convexas com aplicações em finanças.

5.1 Precificação e Hedge

Como uma opção americana oferece mais possibilidades para quem as possui, claro que seu valor será maior ou igual a uma opção europeia do mesmo tipo. Ainda assim, veremos que no caso de call europeias o valor é igual.

Definição 5.1: Valor Intrínseco

Dizemos que o **valor intrínseco** de uma opção no tempo n é o quanto seu proprietário receberá caso possa executar a opção neste tempo n, seu valor de execução imediata.

Note que opção europeia somente pode ser executada no tempo final N, e portanto possui valor intrínseco somente em seu tempo final. No caso de opção americana, supomos que o seu **valor intrínseco** é $G_n \geq 0$, um processo estocástico adaptado (depende somente dos lançamentos de moeda $w_1 \cdots w_n$). Isto inclui o caso mais simples onde temos uma função de payoff $g \geq 0$ que depende somente do valor da ação, e portanto $G_n = g(S_n)$. Abrange também opções asiáticas, como por exemplo o put asiático com strike K:

$$G_n = \left(K - \frac{\sum_{i=0}^{n} S_i}{n+1}\right)^+ .$$

Adaptaremos a equação (2.6) da p.39, que precifica opções europeias. Seria bom antes revê-la. Precificamos a opção americana (e as bermudianas) da seguinte forma:

1. O valor V_N da opção no tempo final N é o valor intrínseco: $V_N = G_N \geq 0$.

2. A cada tempo $n = N-1, \ldots, 0$ quem tiver a opção vai comparar:

   - a expectativa de valor futuro da opção, sob a probabilidade neutra a risco, trazida a tempo presente, isto é $\widetilde{E}_n(V_{n+1})/(1+r)$;
   - seu valor intrínseco G_n.

   O valor V_n da opção no tempo n será o maior dos dois: (a) **expectativa de valor futuro trazida a tempo** presente versus **valor intrínseco**. Em resumo, $V_n = \max[G_n, \quad \widetilde{E}_n(V_{n+1})/(1+r)]$.

3. No caso de opções **bermudianas**, em que a execução antecipada é permitida somente em certas datas (digamos toda quinta-feira), temos dois casos: (a) Se n é uma data em que se pode executar a opção antecipadamente, utilizamos a fórmula de 2; $V_n = \max[\cdots]$; (b) caso contrário $V_n = \widetilde{E}_n(V_{n+1})/(1+r)$.

Em resumo, obtemos a fórmula recursiva de precificação de **opções americanas** (para opções **bermudianas** a modificação é simples e deixamos para o leitor − no resto do capítulo, exceto nos exercícios, focamos em opções americanas):

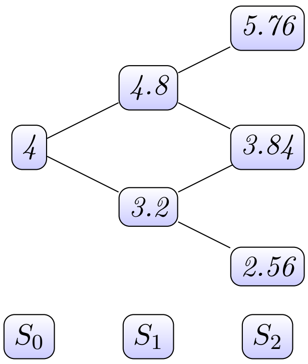
$$\begin{aligned} V_N &= G_N \geq 0, \\ V_n &= \max\left[G_n, \quad \frac{\widetilde{E}_n[V_{n+1}]}{1+r}\right], \quad \text{para } n = N-1, \ldots, 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde,

$$\widetilde{E}_n[V_{n+1}](w_1 \cdots w_n) = \widetilde{p} V_{n+1}(w_1 \cdots w_n H) + \widetilde{q} V_{n+1}(w_1 \cdots w_n T).$$

Note que **caso** o valor intrínseco seja **sempre menor ou igual** que a expectativa de valor futuro, a opção americana terá **o mesmo valor** que a europeia. O valor da opção americana vai superar a europeia somente se em algum ponto $G_n > \widetilde{E}_n[V_{n+1}]/(1+r)$.

Exemplo 5.1 *Considere uma ação cujos valores diários são dados pela árvore abaixo.*



Sabendo que os juros são de 10% ao dia, determine o valor de uma opção americana do tipo put com strike 4.

Solução: Tente obter os valores que apresentamos utilizando as fórmulas. Mas da árvore obtemos $S_0 = 4, u = 1.2, d = 0.8$. Além disso $r = 0.1$. Calculamos que $p = 0.75$. Como é um put com strike 4, $G_n = (4 - S_n)^+$,

ω	$S(\omega)$	$V_2(\omega) = G_2(\omega)$
HH	5.76	0
HT	3.84	0.16
TH	3.84	0.16
TT	2.56	1.44

Do mesmo modo calculamos os valores de V_1 que seguem na tabela (valores aproximados):

ω	$S(\omega)$	$G_1(\omega)$	$\widetilde{E}_1[V_2]/(1+r)$	$V_1(\omega)$
H	4.8	0	0.036	0.036
T	3.2	0.8	0.436	0.8

Agora somente em $\omega = T$ o maior valor foi o de execução imediata da opção.

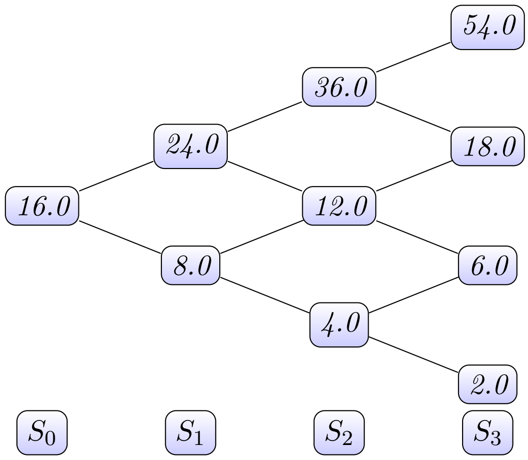
Finalmente no tempo zero o valor intrínseco $G_0 = 0$ e a esperança de valor futuro 0.20. Assim, o valor do put (colocando mais casas decimais agora) é $V_0 = 0.20661157$. Por contraste, a mesmo opção europeia (execução somente no tempo final) vale 0.123

Olhando da ótica de quem **compra esta opção**, veremos as decisões a cada tempo:

- No tempo 1 ele deve executar se o 1º lançamento for T e aguardar próximos lançamentos caso contrário.
- No tempo 2, tempo final:
  - HH: Opção chega ao tempo final sem valor (0), e portanto não é executada.
  - HT: Opção deve ser executada no tempo 2 com valor 0.16.
  - TH ou HT: Foi executada no tempo 1 com valor 0.8. Se fosse esperar até o tempo 2 poderia receber 0.16 ou 1.44, mas melhor garantir 0.8. Este é o significado de valor imediato maior que esperança de valor futuro (que pode ser maior ou menor, mas em **média** será menor).

■

Exemplo 5.2 *Considere uma ação cujos valores diários são dados pela árvore abaixo.*



Sabendo que os juros diários são de 10%, determine o valor de uma opção americana do tipo put com strike 20.

Solução: Tente obter os valores que apresentamos utilizando as fórmulas. Mas da árvore obtemos $S_0 = 16, u = 1.5, d = 0.5$. Além disso $r = 0.1$. Calculamos que $p = 0.6$. Como é um put com strike 20, $G_n = (20 - S_n)^+$. Como $V_3 = G_3$, $V_3(HHH) = 0$, $V_3(HHT) = V_3(HTH) = V_3(THH) = 2$, $V_3(HTT) = V_3(THT) = V_3(TTH) = 14$ e $V_3(TTT) = 18$. Agora para os valores de V_2 temos que comparar o valor intrínseco G_2 (de execução imediata) com o valor descontado futuro $\widetilde{E}_2[V_3]/(1 + r)$. Segue na tabela (valores aproximados):

ω	$S(\omega)$	$G_2(\omega)$	$\widetilde{E}_2[V_3]/(1+r)$	$V_2(\omega)$
HH	36	0	0.727	0.727
HT	12	8	6.18	8
TH	12	8	6.18	8
TT	4	16	14.18	16

Assim em $\omega = HT$, TH, TT, o maior valor foi dado pela execução imediata da opção. Assim a opção americana é mais cara que a mesma opção europeia por ter mais oportunidades de execução. Já em $\omega = HH$ é melhor **não executar** imediatamente a opção pois a expectativa de valor futuro é maior.

Do mesmo modo calculamos os valores de V_1 que seguem na tabela (valores aproximados):

ω	$S(\omega)$	$G_1(\omega)$	$\widetilde{E}_1[V_2]/(1+r)$	$V_1(\omega)$
H	24	0	3.30	3.30
T	8	12	10.18	12

Agora somente em $\omega = T$ o maior valor foi o de execução imediata da opção.

Finalmente no tempo zero o valor intrínseco $G_0 = 4$ e a esperança de valor futuro 6.16. Assim, o valor do put (colocando mais casas decimais agora) é $V_0 = 6.16679$ Por contraste, a mesma opção europeia (execução somente no tempo final) vale 4.5439

Olhando da ótica de quem **compra esta opção**, veremos as decisões a cada tempo:

- No tempo 1 ele deve executar se o 1º lançamento for T e aguardar próximos lançamentos caso contrário.
- No tempo 2 ele deve executar se o 2º lançamento for T. Juntando a informação do tempo 1, observamos quatro situações possíveis com relação a sequência dos 2 primeiros lançamentos:
  - HH: aguardar 3º lançamento.
  - HT: Executar no tempo 2 com valor 8.
  - TH: Executar no tempo 1 com valor 12.
  - TT: Executar no tempo 1 com valor 12. Note que no tempo 2 o valor seria 14.18 mas com risco de ter saído a sequência TH e receber 6.18. Melhor garantir 12 no tempo 1 que correr o risco de no tempo 2 ficar entre 6 e 14.
- No tempo 3 ele deve executar se o 3º lançamento for T, caso contrário a opção vai expirar valendo 0. Assim com HHH a opção se encerra sem valer nada e com HHT é executado com valor 2.

■

Este resultado é bem simples, e apresentamos como lema.

Lema 5.2: Comparando com Opção Europeia

O valor de uma opção americana é sempre maior ou igual que uma opção europeia com mesmo valor intrínseco no tempo final de execução.

Prova: Chamando de V_n^A e V_n^E o valor da opção americana e europeia, respectivamente, basta comparar a equação (2.6) da p.39 com a equação (5.1) da p.120 para se ver que: Por hipótese $V_N^A \geq V_N^E$ (no caso igual) e por indução para trás, supondo que $V_n^A \geq V_n^E$ para algum n,

$$V_{n-1}^A \geq \frac{\widetilde{E}_{n-1}[V_n^A]}{1+r} \geq \frac{\widetilde{E}_{n-1}[V_n^E]}{1+r} = V_{n-1}^E.$$

■

O próximo teorema mostra como montar uma carteira X_n **autofinanciável** que **replique** o valor de uma opção americana até o momento de sua execução, isto é, faça um **hedge** desta posição do ponto de vista de quem a **vende**. São 4 possibilidades de execução da opção até o tempo de expiração da opção:

- Se valor intrínseco > esperança de valor futuro descontada:
  - se opção **for executada**: Paga-se G_n com o hedge X_n e não sobra nada.

  - se opção **não for executada**: Consome-se a sobra $C_n > 0$ e continua-se o hedge de execuções futuras com a sobra $X_n - C_n$.

- Se valor intrínseco $\leq$ esperança de valor futuro descontada:
  - se opção **for executada**: Paga-se G_n com o hedge X_n e pode-se consumir a diferença $X_n - G_n$ (pode ser zero!).
  - se opção **não for executada**: Segue-se com o hedge (é o caso mais normal).

Assim, ao contrário da opção europeia, com este hedge podemos consumir parte positiva dos recursos caso a opção:

(a) **não seja executada** no momento certo, quando seu valor intrínseco ficou estritamente maior que a esperança de valor futuro;

(b) **seja executada** no momento errado, quando seu valor intrínseco ficou estritamente menor que a esperança de valor futuro.

Caso o comprador da opção a execute somente no momento correto, o vendedor terá uma proteção perfeita contra o valor V_n da opção e não receberá nenhum valor estritamente positivo extra. Provamos tudo isto no próximo teorema, que demonstra que este é o valor justo pois qualquer valor abaixo desse ou acima dessa gera arbitragem. O teorema é uma adaptação do que foi apresentado no Teorema 2.13 da p.39.

Teorema 5.3: Replicando Opção Americana

Seja $G_n \geq 0$, um processo estocástico adaptado, o valor intrínseco de uma **opção americana**. Considere V_n definido pela equação (5.1) da p.120, para $n = 0, \dots, N-1$,

$$\Delta_n(\omega) = \frac{V_{n+1}(\omega H) - V_{n+1}(\omega T)}{S_{n+1}(\omega H) - S_{n+1}(\omega T)} = \frac{\Delta V_{n+1}}{\Delta S_{n+1}},$$

$$C_n = V_n - \frac{\widetilde{E}_n[V_{n+1}]}{1+r}.$$

Considere ainda a sequência de **carteiras** definidas pela equação da riqueza

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - C_n - \Delta_n S_n), \quad \text{com} \quad X_0 = V_0. \tag{5.2}$$

Ela é **autofinanciada** da seguinte forma: No tempo n utilizamos X_n para comprar Δ_n ações, consumir C_n (pode ser zero mas não é negativo) e aplicar o que sobrar em renda fixa. No tempo $n+1$ teremos o valor X_{n+1}.

Então:

(a) $X_n = V_n$ para todo n, ou seja, **replica** o valor da opção americana.

(b) $X_n \geq G_n$ (carteira faz hedge do valor intrínseco).

(c) Caso se execute a opção com $G_n < V_n$ ou não se execute com $C_n > 0$, parte estritamente positiva do hedge poderá ser consumido. Caso contrário, nenhum valor estritamente poderá ser consumido.

Prova: (a) Segue adaptação da prova do Teorema 2.13 da p.39. Provamos por indução que $X_n = V_n$ para todo $n = 0, \ldots, N$. O primeiro passso é parte da definição: $X_0 = V_0$.

Assim suponha que $X_n(\omega) = V_n(\omega)$ para todo ω. Queremos provar que: $X_{n+1}(\omega H) = V_{n+1}(\omega H)$ e $X_{n+1}(\omega T) = V_{n+1}(\omega T)$ para todo ω. Provamos que $X_{n+1}(\omega H) = V_{n+1}(\omega H)$ para todo ω e deixamos para o leitor provar (*mutatis mutandis*[1]) que $X_{n+1}(\omega T) = V_{n+1}(\omega T)$.

Por (5.2),

$$\begin{aligned} X_{n+1}(\omega H) &= \Delta_n(\omega)S_{n+1}(\omega H) + (1+r)[X_n(\omega) - C_n(\omega) - \Delta_n(\omega)S_n(\omega)], \\ &= \Delta_n(\omega)uS_n(\omega) + (1+r)[X_n(\omega) - C_n(\omega) - \Delta_n(\omega)S_n(\omega)], \\ &= \Delta_n(\omega)S_n(\omega)(u - (1+r)) + (1+r)[X_n(\omega) - C_n(\omega)]. \end{aligned}$$

Agora trataremos de cada um dos dois termos do lado direito. Para o primeiro termo, usando a definição de Δ_n, (ver passso a passo na prova do Teorema 2.13 da p.39)

$$\Delta_n(\omega)S_n(\omega)(u - (1+r)) = \widetilde{q}[V_{n+1}(\omega H) - V_{n+1}(\omega T)].$$

Quanto ao segundo termo, usando a hipótese de indução $X_n = V_n$, a definição de C_n obtemos que

$$\begin{aligned} (1+r)[X_n(\omega) - C_n(\omega)] &= (1+r)[V_n(\omega) - C_n(\omega)] \\ &= \widetilde{E}_n[V_{n+1}](\omega) \\ &= \widetilde{p}V_{n+1}(\omega H) + \widetilde{q}V_{n+1}(\omega T). \end{aligned}$$

Juntando os dois termos, obtemos que

$$\begin{aligned} X_{n+1}(\omega H) &= \widetilde{q}[V_{n+1}(\omega H) - V_{n+1}(\omega T)] + \widetilde{p}V_{n+1}(\omega H) + \widetilde{q}V_{n+1}(\omega T), \\ &= (\widetilde{q} + \widetilde{p})V_{n+1}(\omega H), \\ &= V_{n+1}(\omega H). \end{aligned}$$

Assim para todo ω, $X_{n+1}(\omega H) = V_{n+1}(\omega H)$.

Concluímos que $X_{n+1} = V_{n+1}$.

(b) Segue de (a) pois $X_n = V_n \geq G_n$ pela mesma equação citada em (a).

[(a) e (b) Da equação (5.1) da p.120 segue que V_n é o máximo entre G_n e a esperança condicional. Assim teremos um valor estritamente positivo C_n se, e somente se, deixou-se de se executar no momento ideal.

(c) Caso se execute a opção com $G_n < V_n = X_n$, sobrará $X_n - G_n > 0$ para consumo. Caso não se execute a opção com $C_n > 0$, este valor poderá ser consumido e o hedge prosseguirá. Caso contrário se executará a opção valendo $G_n = X_n$ (o valor da carteira) ou não se executará com $C_n = 0$, o que implica que $V_n = X_n = \widetilde{E}_n[V_{n+1}]/(1+r)$, um hedge perfeito do valor futuro descontado. ∎

[1]Em latim: "mude o que tem que ser modificado", algo usual em Matemática, quando provamos um caso e o outro é simples adaptação

5.2 Opções Americanas são Supermartingais

Releia o Teorema 5.3 e as 4 possibilidades de execução da opção americana a cada tempo na página p.123. Observe que em **duas** das quatro o vendedor terá lucro.

Assim o que o vendedor faz é um **overheadge** do valor intrínseco pois $X_n = V_n \geq G_n$ para todo n e ele precisa estar pronto para pagar o valor intrínseco G_n da opção a qualquer momento. Quanto a ser martingal ou supermartingal (esperança de valor futuro menor):

- Nos pontos em que o valor **intrínseco** G_n supera a esperança de valor futuro descontado, o processo descontado **deixa** de ser um martingal pois como
$$V_n = G_n > \frac{\widetilde{E}_n[V_{n+1}]}{1+r},$$
dividindo por $(1+r)^n$ e definido o processo descontado $Y_n = V_n/(1+r)^n$,
$$Y_n = \frac{V_n}{(1+r)^n} > \frac{\widetilde{E}_n[V_{n+1}]}{(1+r)^{n+1}} = \widetilde{E}_n[Y_{n+1}],$$
e portanto o processo descontado Y_n é um **supermartingal** nestes pontos.
- Nos pontos em que o valor **intrínseco** G_n é menor ou igual a esperança de valor futuro descontado, temos que
$$V_n = \frac{\widetilde{E}_n[V_{n+1}]}{1+r},$$
e portanto o processo descontado Y_n é um **martingal** neste pontos.

Juntando os dois casos, temos que o valor da opção americana descontada Y_n é um **supermartingal** (ver Definição 3.22 da p.69), pois seu valor diminui com o tempo. A prova está no próximo teorema, que além disso prova que o overhedge feito por $X_n = V_n$ é o **menor possível**. Outra forma de dizer é que o valor da **menor** carteira autofinanciável que pode pagar o valor intrínseco G_n da opção é V_n.

Teorema 5.4: Opção Americana Descontada é um Supermartingal

Seja V_n o valor da opção americana definida por (5.1). Então:

(a) $V_n \geq G_n$ para todo n. (b) $\dfrac{V_n}{(1+r)^n}$ é um supermartingal.

(c) V_n é o **menor** processo que satisfaz (a) e (b), isto é, se
$$Y_n \geq G_n \quad \text{e} \quad \frac{Y_n}{(1+r)^n} \text{ é um supermartingal,}$$
então $V_n \leq Y_n$.

Prova: (a) Para $n = N$, de (5.1) segue que $V_N = G_N$. Para $n < N$, como V_n é o máximo que inclui G_n, $V_n \geq G_n$.

(b) De (5.1), como V_n é igual ao máximo,

$$V_n \geq \frac{\widetilde{E}_n[V_{n+1}]}{1+r}.$$

Dividindo por $(1 + r)^n$ nos dois lados e usando linearidade da esperança condicional obtemos o resultado.

Provamos (c) por indução para trás. Seja Y_n um processo que satisfaz (a) e (b). Para $n = N$, por (5.1) segue que $V_N = G_N$, e por (a) $Y_N \geq G_N = V_N$.

Agora suponha que $Y_{n+1} \geq V_{n+1}$ para algum $n < N$. Por (b) $Y_n/(1+r)^n$ é supermartingal e multiplicando por $(1 + r)^n$ os dois lados obtemos (verifique!)

$$Y_n \geq \frac{\widetilde{E}_n[Y_{n+1}]}{1+r} \geq \frac{\widetilde{E}_n[V_{n+1}]}{1+r}.$$

Por (a), $Y_n \geq G_n$. Por (5.1) V_n é o maior entre G_n e $\widetilde{E}_n[V_{n+1}]/(1 + r)$, ambos menores que Y_n. Segue que $Y_n \geq V_n$. ■

Juntando este teorema com o Teorema 5.3, concluímos que esta é a **menor carteira autofinanciada** que faz o hedge do valor intrínseco G_n sem lucro caso o comprador da opção a execute somente no momento correto. Trata-se do único valor que não gera arbitragem pois um valor acima disso geraria arbitragem para o vendedor, e abaixo disso para o comprador.

5.3 Precificação Numérica: Método Explícito

Nesta seção implementamos um esquema numérico baseado na equação (5.1) da p.120. Por ser quase igual à precificação de opção europeia feita pelo Algoritmo 3 da p.98, sugerimos ao leitor que reveja o mesmo.

Assumimos que u, d, r são constantes, e portanto as probabilidades neutras à risco $\widetilde{p}$ e $\widetilde{q}$ também o são. Assumimos que o payoff será uma função de S_N exclusivamente, ou seja, existe uma $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que o valor intrínseco da opção americana no tempo n é $G_n = f(S_n)$. Veja a Seção 5.6 da p.141 para a implementação deste algoritmo na linguagem Julia.

Observação 5.1 (Opção Americana e o Método de Monte Carlo) *O uso do método de Monte Carlo para precificar opções americanas apresenta o seguinte problema: para decidir se devemos executar ou não a opção em determinado momento temos que saber a esperança de valor futuro, e como (a princípio) geramos apenas um caminho completo de cada vez não temos como tomar esta decisão. Existem várias propostas para superar isso que deixamos para o leitor explorar em outros livros e fontes. Aqui apenas exploramos levemente alguma ideia em projeto ao final deste capítulo.*

Algoritmo 6: Precificando Opção Americana

Entrada: $S_0,\ N,\ u,\ d,\ r,\ f$
Saída: V_0
if *$(d >= 1 + r)$* **or** *$(u <= 1 + r)$* **then** **Exit** Arbitragem no modelo;
$\widetilde{p} \leftarrow (1 + r - d)/(u - d)$; $\quad \widetilde{q} \leftarrow 1 - \widetilde{p}$;
`/* Valor da opção no tempo final */`
for $j = 0$ **to** N **do** $V[j] \leftarrow f((d)^j(u)^{N-j}S_0)$;
`/* Aplicando equação (5.1) da p.120 */`
for $j = N - 1$ **to** 0 **do**
  for $i = 0$ **to** j **do** $V[i] \leftarrow \max[(\widetilde{p}V[i] + \widetilde{q}V[i+1])/(1+r),\ f((d)^i(u)^{j-i}S_0)]$;
return Valor da opção: $V_0 = V[0]$

Exemplo 5.3 *Retomamos o Exemplo 5.2 da p.122. É um put com strike 20 no tempo $T = 3$ com $u = 1.5$ e $d = 0.5$, $S_0 = 16$. Calculamos esta opção utilizando juros $r = 10\%$. Obtemos o valor $V_0 = 6.16679$. Determine para qual valor converge o preço da opção quando aumentamos a discretização do tempo no modelo JR. Gere um gráfico com o valor de N e o valor da opção.*

Solução: O juros diário é dado: $r_{\text{dia}} = 0.1$. Já a média m_{dia} e desvio padrão σ_{dia} tem que ser calculado. No modelo JR, com $p = 1/2$, temos que $m_{\text{dia}} = (u + d)/2 = 1$ e $\sigma_{\text{dia}} = (u - d)/2 = 0.5$. Agora como $T = 3$, o tempo final, tomamos $\Delta t = 1/2^i$ com $i = 0, \ldots, 14$, $N = T/\Delta t = 3, 3 \times 2, \ldots, 3 \times 2^{14}$, e utilizar o Algoritmo 1 da p.90 para calcular $u_{\Delta t}$, $d_{\Delta t}$ e $r_{\Delta t}$. Precificamos o valor da opção com estes parâmetros utilizando o Algoritmo 6. Apresentamos os resultados na Figura 5.3. Utilizamos na escala mais fina $N = 3 \times 2^{14} = 49152$, que corresponde a um $\Delta t = 3/N = 2^{-14} \approx 6.10 \times 10^{-5}$. Pela figura fica clara a convergência quando $N \to \infty$, para cerca de 5.7428. Deixaremos para os Projetos Computacionais o estudo da **ordem de convergência** do método. ■

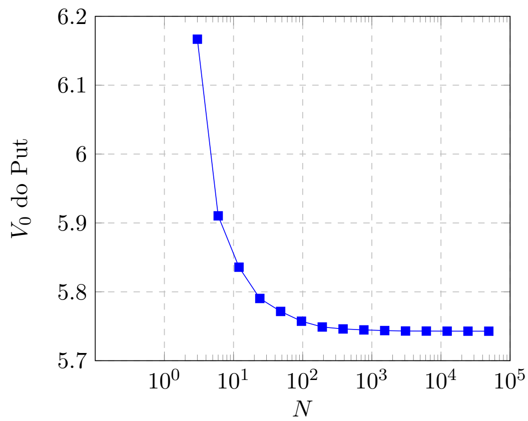


Figura 5.1: Valor do Put Americano $r = 10\%$

5.4 Funções Convexas e Desigualdade de Jensen

Funções convexas são utilizadas em diversas áreas da Matemática. Surgem em problemas de otimização por possuírem mínimo global. Por exemplo, nas teorias de equilíbrio econômico geral (modelo de Arrow-Debreu), assume-se que os agentes econômicos possuem função de preferência convexa e conjunto de bens que pode ser adquirido é convexo. No caso de finanças, o payoff de um call e de um put é uma função convexa.

Nesta seção definimos conjunto e função convexa e suas conexões com probabilidade e processos estocásticos.

Definição 5.5: Combinação e Conjunto Convexo

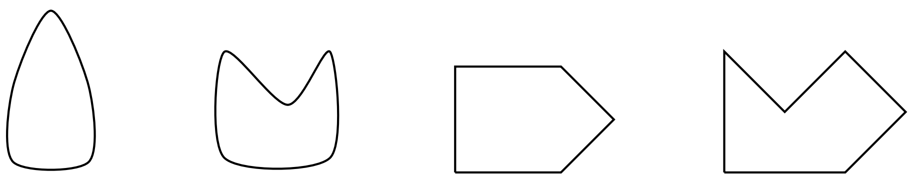
Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^n$). Dizemos que A é **convexo** se para todo $u, v \in A$, o segmento de reta que vai de u até v está contido em A, isto é, se para todo $u, v \in A$,

$$(1-t)u + tv \in A \quad \text{para todo} \quad t \in [0,1].$$

Chamamos de **combinação convexa** de u e v as somas $au + bv$ com $a + b = 1$ e $a, b \in [0,1]$. Assim A é um **conjunto convexo** se toda **combinação convexa** de pontos de A está contida em A.

Note que na expressão $(1-t)u + tv$, quando $t = 0$ estamos em u, em $t = 1$ estamos em v e para valores intermediários, isto é, combinações convexas, estamos entre os dois. Em álgebra linear chamamos $au + bv$, $a, b \in \mathbb{R}$ de combinação linear de u e v. Note que uma combinação convexa é um caso particular de combinação linear, pois $a = (1-t)$ e $b = t$, de forma que $a + b = 1$. Isto é generalizado no Lema 5.8 da p.131.

Exemplo 5.4 *Apresentamos exemplos de regiões convexas e não convexas. No caso das não-convexas descubra pontos no interior cujo segmento que os interliga não está inteiramente contido na região.*



convexa *não-convexa* *convexa* *não-convexa*

Exemplo 5.5 *São conjuntos convexos em $\mathbb{R}^2$: círculos, elipses, triângulos, retângulos, polígonos regulares (pentágonos, hexágonos,etc.) e segmentos de reta.*

Não são conjuntos convexos em $\mathbb{R}^2$: circunferências ($\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ (somente a linha, sem o interior), gráfico de funções como seno ou x^2: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = f(x)\}, f(x) = \operatorname{sen} x$ ou x^2.

Definição 5.6: Função Convexa e Côncava

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é **convexa** se para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, 1]$,

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Dizemos que uma função é **côncava** caso ocorra a desigualdade contrária na equação acima.

Na Figura 5.2 ilustramos o significado. Em termos da definição acima temos: o ponto no eixo x denotado por $a_t = (1-t)x + ty$, um ponto entre x e y; o ponto do eixo y denotado por $y_t = (1-t)f(x)+tf(y)$, um ponto entre $f(x)$ e $f(y)$. Assim, $f(a_t) \leq y_t$. De forma sucinta qualquer segmento de reta interligando dois pontos do gráfico da função está acima de seu gráfico. No Lema abaixo provamos que a região **acima** do gráfico é convexa.

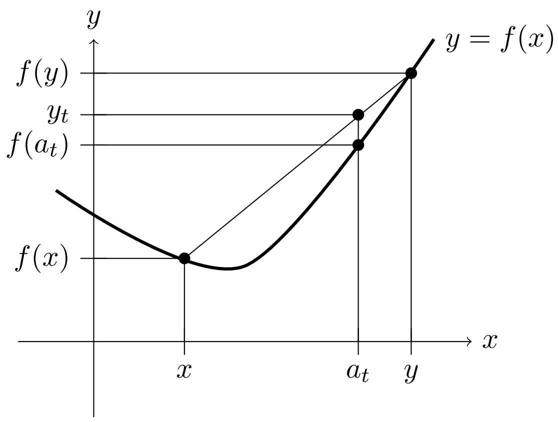


Figura 5.2: Função Convexa

Lema 5.7: Função Convexa e Conjunto Convexo

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se,

$$\text{o conjunto} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq f(x)\} \quad \text{é convexo.}$$

Prova: Suponha $x < y$ e defina sua combinação convexa $a_t = (1-t)x + ty$ e $y_t = (1-t)f(x) + tf(y))$. Note que:

(a) O lado esquerdo da definição de função convexa é $f(a_t)$.

(b) O lado direito é y_t.

Como a equação da reta que une os pontos do gráfico $(x,\ f(x))$ e $(y,\ f(y))$ é dada por $(a_t,\ y_t)$, (ver Exercício 28 da p.146), temos que $f(a_t) \leq y_t$ (a função é convexa) se, e somente se, o ponto $(a_t,\ f(a_t)) \in \mathbb{R}^2$ do gráfico de f esta abaixo do ponto (a_t, y_t), do segmento de reta que une dois pontos do gráfico. A Figura5.2 ajuda a entender a demonstração. ■

Exemplo 5.6 *São exemplos canônicos*[2] *de função convexa* $f(x) = x^2$ *e* $f(x) = |x|$. *Além disso* $f(x) = e^x$ *também é convexa. Não são convexas (porque?)* $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \sqrt{|x|}$

Exemplo 5.7 *Classifique as funções abaixo em côncavas, convexas ou nenhum dos casos. Considere* $K > 0$ *fixo. Queremos analisar somente a região* $x > 0$.
(a) $p(x) = (K - x)^+$ *(put).* *(b)* $c(x) = (x - K)^+$ *(call).* *(c)* $f(x) = 4 - x^2$.
(d) $g(x) = \log x$. *(e)* $h(x) = \operatorname{sen} x$. *(f)* $j(x) = e^x$.

Solução: Basta determinar o gráfico de cada uma. Pode usar um software online para isso. Por exemplo `fooplot.com`. São convexas: $(x - K)^+$ (call), $(K - x)^+$ (put), e^x. São côncavas: $4 - x^2$, $\log x$. Não são côncavas nem convexas: $\operatorname{sen} x$. ■

Observação 5.2 (Funções Convexas e Derivadas) *Existem vários resultados que relacionam funções convexas e derivadas. O mais importante é que se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é convexa e possui duas derivadas em todos os pontos, então* $f''(x) \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Mas não precisamos disso aqui. Deixamos como exercício de cálculo.*

Lema 5.8: Combinação Convexa

Se K é um conjunto convexo, $u_1, \ldots, u_n \in K$, $t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ e $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, então $\sum_{i=1}^{n} t_i u_i = t_1 u_1 + \cdots t_n u_n \in K$.
Este somatório é chamado de **soma ou combinação convexa** de $u_1, \ldots, u_n$.

Prova: Por indução, para $n = 1$ é trivial pois $t_1 = 1$ e $t_1 u_1 = u_1 \in K$. Suponha verdadeiro para $n = k$ e provaremos para $n = k + 1$. Suponha que $\sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1$ e $u_1, \ldots, u_{k+1} \in K$. Podemos escrever a combinação convexa dos $k + 1$ elementos como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} t_i u_i &= t_{k+1} u_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} t_i u_i \\ &= t_{k+1} u_{k+1} + (1 - t_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i}{1 - t_{k+1}} u_i. \end{aligned}$$

[2] Em Matemática, exemplo mais comum, padrão, encontrado em todos livros. A palavra se refere aos cânones, os dogmas da igreja.

Definindo,

$$\widehat{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i}{1 - t_{k+1}} u_i,$$

obtemos que

$$\sum_{i=1}^{k+1} t_i u_i = t_{k+1} u_{k+1} + (1 - t_{k+1}) \widehat{u}.$$

Como $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1 - t_{k+1}$, $\widehat{u}$ é uma combinação convexa de $n = k$ elementos em K, e segue por hipótese de indução que $\widehat{u} \in K$. Assim o somatório é igual a uma combinação convexa de dois elementos de K e portanto pertence a K. ■

Vamos relacionar **conjuntos convexos com probabilidade**. Em espaços finitos Ω podemos definir a probabilidade P através da probabilidade p_i de cada elemento $w \in \Omega$, com $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Assim a esperança $E(X) = \sum_i p_i x_i$, com $x_i = X(w_i)$ e $p_i = P(\{w_i\})$. Desta forma a média (esperança) é uma combinação convexa. Após fazer esta relação fica claro que o próximo lema é uma aplicação direta das definições e lemas apresentados.

Lema 5.9: Desigualdade de Jensen

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma **função convexa** e X uma v.a. definida em Ω_M. Então

$$g(E(X)) \leq E(g(X)).$$

A mesma relação vale para esperança condicional:

$$g(E_n(X)) \leq E_n(g(X)).$$

Caso g seja côncava obtemos a desigualdade contrária.

Prova: Como Ω_M é finito, podemos escrever que $\Omega_M = \{\omega_1, \ldots, \omega_L\}$. Seja $x_i = X(\omega_i)$ e $p_i = P(\{\omega_i\})$ (probabilidade de cada ω_i). Logo, $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{L} x_i p_i$. Assim queremos provar que para todo $x_1, \ldots, x_L \in \mathbb{R}$ e $p_1, \ldots, p_L \in [0, 1]$ com $\displaystyle\sum_{i=1}^{L} p_i = 1$,

$$g\left(\sum_{i=1}^{L} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{L} p_i g(x_i).$$

Para $L = 2$ esta é a definição de função convexa. Para L qualquer prova-se por indução, seguindo os passos da prova do Lema5.8. Deixamos como exercício.

Para esperança condicional, observe na Definição 3.17 da p.61 que fixado os lançamentos $w_1 \cdots w_m$, a esperança condicional E_m é uma combinação convexa. Assim a prova segue como fizemos para E. ■

O próximo resultado é uma aplicação da desigualdade de Jensen no contexto de precificação de opções, onde em certas condições o valor de uma opção americana será igual a opção correspondente europeia.

Teorema 5.10: Call Americano = Europeu se $r \geq 0$

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função convexa para $x > 0$ com $g(0) = 0$. Suponha que a taxa de juros $r \geq 0$. Considere duas opções, uma americana e outra europeia, com mesmo payoff g que depende somente do valor da ação no momento, ou seja, $G_n = g(S_n)$. Então o valor destas opções no tempo 0 é o mesmo. Em particular um call $g(s) = (s-K)^+$, $K > 0$ satisfaz as hipóteses. Portanto todo call americano com $r > 0$ terá o mesmo valor que um call europeu, não valendo a pena executar a opção **antes** do tempo final.

Prova: Como g é convexa e $g(0) = 0$, para todo $s > 0$ e $t \in [0, 1]$,

$$g(ts + (1-t)0) = g(ts) \leq tg(s) + (1-t)g(0) = tg(s). \tag{5.3}$$

Sejam V_n^A e V_n^E o valor da opção americana e europeia, respectivamente, no tempo n. Pela equação (5.1) da p.120,

$$g(S_{n+1}) \leq V_{n+1}^A.$$

Dividindo os dois lados por $1 + r$ obtemos

$$\frac{g(S_{n+1})}{1+r} \leq \frac{V_{n+1}^A}{1+r}.$$

Como $r \geq 0$, podemos usar (5.3) com $t = 1/(1+r) \in [0, 1]$, $s = S_{n+1}$,

$$g\left(\frac{S_{n+1}}{1+r}\right) \leq \frac{g(S_{n+1})}{1+r} \leq \frac{V_{n+1}^A}{1+r}.$$

Aplicando $\widetilde{E}_n$ e usando a desigualdade de Jensen (Lema 5.9),

$$g\left(\widetilde{E}_n\left[\frac{S_{n+1}}{1+r}\right]\right) \leq \widetilde{E}_n\left[g\left(\frac{S_{n+1}}{1+r}\right)\right] \leq \frac{\widetilde{E}_n[V_{n+1}^A]}{1+r}.$$

Como $S_n/(1+r)^n$ é um martingal com relação à probabilidade neutra a risco (Lema 3.24 da p.71),

$$g\left(\widetilde{E}_n\left[\frac{S_{n+1}}{1+r}\right]\right) = g(S_n) \leq \frac{\widetilde{E}_n[V_{n+1}^A]}{1+r}.$$

Assim, pela fórmula da opção americana V_n^A dada pela equação (5.1) da p.120, temos que

$$V_n^A = \frac{E_n[V_{n+1}^A]}{1+r},$$

que é igual a fórmula do valor da opção europeia V_n^E dada pela equação (5.1) da p.120 para $n = N-1, \ldots, 0$. Como $V_N^A = V_N^E = g(S_N)$ por estas mesmas fórmulas, segue o resultado.

Resta provar que $g(s) = (s-K)^+$, $K > 0$ satisfaz as hipóteses. Claro que $g(0) = 0$. Provamos que g é convexa. Sejam $x, y > 0$ e $t \in [0,1]$. Temos que dividir em 3 casos.

Caso 1: Se $x, y > K$. Neste caso $z = (1-t)x + ty > (1-t)K + tK = K$. Logo a função $g(s) = s - K$ para $s = x, y$ ou z. Assim,

$$g((1-t)x+ty) = (1-t)x + ty - K, \quad g(x) = x - K, \quad g(y) = y - K.$$

Logo $x = g(x) + K$ e $y = g(y) + K$. Concluímos que g é convexa pois

$$\begin{aligned} g((1-t)x+ty) &= (1-t)x + ty - K \\ &= (1-t)(g(x)+K) + t(g(y)+K) - K \\ &= (1-t)g(x) + tg(y) + K(1-t+t-1) \\ &= (1-t)g(x) + tg(y). \end{aligned}$$

Caso 2: Se $x, y < K$ é similar sendo que mais simples pois $g(x) = g(y) = 0$.

Caso 3: Se $x < K < y$ teríamos dois subcasos. Faremos somente o que $z = (1-t)x + ty > K$, sendo o outro mais simples. Aqui $g(x) = 0$, $g(y) = y - K$ e $g(z) = z - K$. Logo, como $x < K$ e $g(x) = 0$,

$$\begin{aligned} g((1-t)x+ty) &= (1-t)x + ty - K \\ &= (1-t)x + t(g(y)+K) - K \\ &\le (1-t)K + t(g(y)+K) - K \\ &= tg(y) + K(1-t+t-1) \\ &= (1-t)0 + tg(y) \\ &= (1-t)g(x) + tg(y). \end{aligned}$$

■

Observação 5.3 *Veja o Exercício 35 da p.147 para um exemplo, em contexto de juros negativos, de um call americano cujo valor é maior que do call europeu correspondente.*

5.5 Tempo de parada

O tempo de parada (ou stopping time) é uma v.a. que indica **quando** um processo estocástico deve parar, normalmente segundo alguma regra ou estratégia. No contexto de finanças, em precificação de opções americanas, o stopping time indica quando a opção deve ser executada. Como o tempo, neste livro, é **discreto** (0,1,2,3,...), o stopping time assume valores em $\mathbb{N}$. Em alguns textos – mas não nesse – é permitido que assuma também valor ∞, significando que o processo não para.

Definição 5.11: Tempo de Parada ou Stopping Time

Dizemos que uma v.a.
$\tau : \Omega_M \to \mathbb{N}$ é um **stopping time (tempo de parada)** se

$$\tau(w_1 \cdots w_n w_{n+1} \cdots w_M) = n \quad \text{implica que} \quad \tau(w_1 \cdots w_n z_{n+1} \cdots z_M) = n$$

para **qualquer** sequência $z_{n+1} \cdots z_M$.

Exemplo 5.8 *Considere o tempo de parada $\tau : \Omega_5 \to \mathbb{N}$. Sabemos que $\tau(HTHTH) = 3$, $\tau(HHTHT) = 2$, $\tau(TTTTT) = 5$. Determine todos os **valores possíveis** de:*
(a) $\tau(TTTTH)$. (b) $\tau(TTTHT)$. (c) $\tau(HTHHH)$.
(d) $\tau(HHHHH)$. (e) $\tau(HTHTT)$.

Solução: (a) $\tau(TTTTH)$ tem seu valor limitado por $\tau(TTTTT) = 5$. De fato não pode ser $0, 1, 2, 3$ ou 4 pois caso contrário $\tau(TTTTT)$ teria que ser $0, 1, 2, 3$ ou 4 pois os primeiros quatro lançamentos são iguais. Pode no entanto ser 5.

(b) Não pode ser $0, 1, 2, 3$ pois senão $\tau(HTTTT)$ deveria ter o mesmo valor por possuir os mesmos três primeiros lançamentos. Pode ser 4 e 5

(c) $\tau(HTHHH)$ tem que valer 3 pois $\tau(HTHTH) = 3$, tendo em comum os três primeiros lançamentos.

(d) $\tau(HHHHH)$ tem que valer 2 pois $\tau(HHTHT) = 2$, tendo em comum os dois primeiros lançamentos.

(e) $\tau(HTHTT)$. tem que valer 3 pois $\tau(HTHTH) = 3$, tendo em comum os três primeiros lançamentos. ■

No sequência a definição de processo estocástico parado por um stopping time é muito importante, chamado de **processo congelado**. Trata-se da combinação de um processo estocástico X_n com um stopping time τ para gerar um novo processo estocástico, $X_{n\wedge\tau}$.

Definição 5.12: Processo Congelado por um Stopping Time

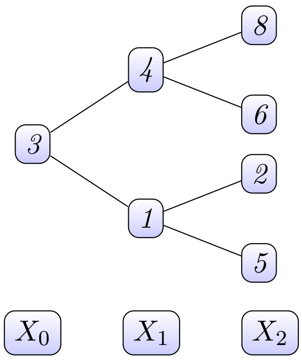
Seja $X_n : \Omega_M \to \mathbb{R}$ um processo estocástico adaptado e $\tau : \Omega_M \to \mathbb{N}$ um stopping time. Definimos o **processo congelado** $X_{n\wedge\tau}$ por

$$X_{n\wedge\tau}(\omega) = X_{n\wedge\tau(\omega)}(\omega).$$

A ideia é que o valor do processo X_n ficará congelado a partir do ponto em que ele foi parado por τ. Estude com cuidado os exemplos abaixo.

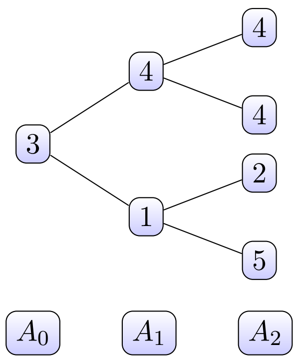
Exemplo 5.9 *Considere o processo X_n definido pela árvore abaixo e os stopping times* *definidos por*

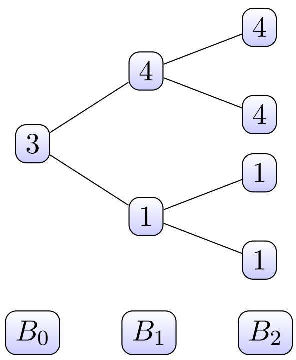
ω	$\tau_1(\omega)$	$\tau_2(\omega)$	$\tau_3(\omega)$	$\tau_4(\omega)$
HH	1	1	0	2
HT	1	1	0	5
TH	2	1	0	4
TT	3	1	0	2

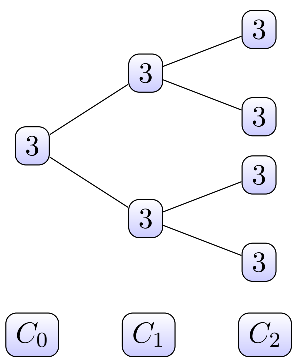


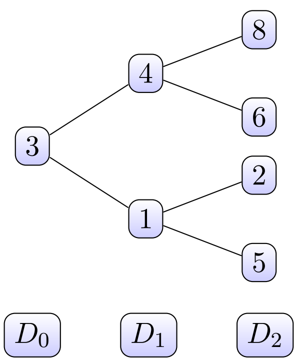
Determine as árvores para os processos congelados $X_{n\wedge\tau_i}$.

Solução: Seja $A_n = X_{n\wedge\tau_1}$, $B_n = X_{n\wedge\tau_2}$, $C_n = X_{n\wedge\tau_3}$, $D_n = X_{n\wedge\tau_4}$. Seguem as árvores.









Explicando em palavras, a árvore gerada por τ_1 congelou somente o ramo H depois do 1º lançamento. A árvore do τ_2 congelou toda a árvore a partir do tempo 1. A do τ_3

congelou os valores desde o tempo zero, antes de qualquer lançamento. A do τ_4 manteve a árvore pois parou somente no tempo 2 ou não parou. ■

No contexto de finanças, um stopping time será uma **estratégia** de execução de uma opção americana (ou bermudiana). Corresponderá a uma **decisão** de executar (parar) uma opção sabendo somente o que ocorreu **até aquele momento**, sem poder ver o futuro. Com isto o valor da opção será congelado no instante em que o mesmo foi executado. Este é o significado da definição de stopping time. Reveja agora a Definição 5.11 da p.135 e também leia o Exercício 36 da p.148.

O que ocorre com um martingal quando é congelado? Segue um resultado que mostra que ele é preservado.

Teorema 5.13: Martingais e Processos Congelados

Seja M_n um processo estocástico adaptado τ um stopping time, ambos definidos em Ω_M. Se M_n é um martingal (submartingal, supermartingal), então $M_{n\wedge\tau}$ é um martingal (submartingal, supermartingal).

Prova: Seja $W_n = M_{n\wedge\tau}$. Provamos que se M_n é martingal, então W_n é martingal. Os casos de submartingal e supermartingal são obtidas por troca de igualdades por desigualdades. Dividimos em dois casos, fixando o $\omega = w_1 \cdots w_n$ mas para simplificar notação vamos omiti-lo.

(a) caso $\tau(\omega) \geq n+1$, temos que $(n+1)\wedge\tau = n+1$ e $n\wedge\tau = n$. Logo,

$$W_n = M_{n\wedge\tau} = M_n = \widetilde{E}_n[M_{n+1}] = \widetilde{E}_n[M_{(n+1)\wedge\tau}] = \widetilde{E}_n[W_{n+1}].$$

(b) caso $\tau^*(\omega) \leq n$, temos que $n\wedge\tau = (n+1)\wedge\tau = \tau$. Logo,

$$W_n = M_{n\wedge\tau} = M_\tau = M_{(n+1)\wedge\tau} = W_{n+1} = \widetilde{E}_n[W_{n+1}].$$

■

Baseado no stopping time podemos apresentar uma fórmula **explícita** para o valor de uma opção americana, que é análoga a fórmula explícita de opções europeias dada pelo Corolário 3.26 da p.72.

Teorema 5.14: Fórmula Explícita para Opção Americana

Considere uma **opção americana** cujo o valor intrínseco é $G_n \geq 0$, um processo adaptado (depende somente dos lançamentos de moeda $w_1 \cdots w_n$). Defina

$$Z_n = \max_{\tau \geq n} \widetilde{E}_n \left[\frac{G_\tau}{(1+r)^{\tau - n}} \right],$$

onde o máximo é no subconjunto de stopping times com $\tau(\omega) \geq n$. Se V_n é valor desta opção no tempo n (dada pela equação 5.1 da p.120), então

$$V_n = Z_n \quad \text{para todo} \quad n = 0, \ldots, N.$$

Em particular, o valor desta opção americana no tempo zero é:

$$V_0 = \max_{\tau \in \mathsf{T}} \widetilde{E} \left[\frac{G_\tau}{(1+r)^\tau} \right],$$

com T o conjunto de **todos** stopping times.

Prova: Como o máximo na definição de Z_n é entre todos stopping times com valor maior ou igual a n, podemos tomar $\widehat{\tau} \equiv n$ como um destes stopping times, que assume o valor n para todos os caminhos. Assim, usando propriedades de $\widetilde{E}_n$,

$$Z_n = \max_{\tau \geq n} [\cdots] \geq \widetilde{E}_n \left[\frac{G_{\widehat{\tau}}}{(1+r)^{\widehat{\tau} - n}} \right] = \widetilde{E}_n \left[\frac{G_n}{(1+r)^{n-n}} \right] = G_n.$$

Na definição de Z_{n+1}, como o conjunto de stopping times é finito, vai existir um stopping time $\tau^* \geq n+1$ que realiza o máximo de forma que

$$Z_{n+1} = \widetilde{E}_{n+1} \left[\frac{G_{\tau^*}}{(1+r)^{\tau^* - n - 1}} \right],$$

Usando a definição de Z_n, cujo máximo inclui todos $\tau^* \geq n+1 \geq n$, obtemos que

$$Z_n \geq \widetilde{E}_n \left[\frac{G_{\tau^*}}{(1+r)^{\tau^* - n}} \right].$$

Pela propriedade da torre da esperança condicional, $\widetilde{E}_n \widetilde{E}_{n+1} = \widetilde{E}_n$

$$\begin{aligned} Z_n \geq & \widetilde{E}_n \widetilde{E}_{n+1} \left[\frac{1}{(1+r)} \frac{G_{\tau^*}}{(1+r)^{\tau^* - n - 1}} \right] \\ = & \widetilde{E}_n \left[\frac{1}{(1+r)} \widetilde{E}_{n+1} \left[\frac{G_{\tau^*}}{(1+r)^{\tau^* - n - 1}} \right] \right] \\ = & \widetilde{E}_n \left[\frac{Z_{n+1}}{1+r} \right]. \end{aligned}$$

Dividindo por $(1+r)^n$ dos dois lados concluímos que Z_n é um supermartingal.

Resta provar que $Z_n \geq G_n$ é o menor supermartingal descontado com esta propriedade pois pelo Teorema 5.4 da p.126 isto implica que $Z_n = V_n$.

Seja $Y_n \geq G_n$ com $Y_n/(1+r)^n$ um supermartingal.

Desta forma, se $\tau \geq n$ é um stopping time, como $N \wedge \tau = \tau$ e $G_n \leq Y_n$,

$$\frac{G_\tau}{(1+r)^\tau} = \frac{G_\tau}{(1+r)^{N\wedge\tau}} \leq \frac{Y_\tau}{(1+r)^{N\wedge\tau}} = \frac{Y_{N\wedge\tau}}{(1+r)^{N\wedge\tau}}.$$

Pela monotonicidade da esperança condicional e como $Y_n/(1+r)^n$ é um supermartingal, usando a propriedade *multistep-ahead* do Lema 3.23 da p.70,

$$\widetilde{E}_n\left[\frac{G_\tau}{(1+r)^\tau}\right] \leq \widetilde{E}_n\left[\frac{Y_{N\wedge\tau}}{(1+r)^{N\wedge\tau}}\right] \leq \frac{Y_{n\wedge\tau}}{(1+r)^{n\wedge\tau}} = \frac{Y_n}{(1+r)^n}.$$

Concluímos que, para todo stopping time $\tau \geq n$,

$$\widetilde{E}_n\left[\frac{G_\tau}{(1+r)^{\tau-n}}\right] \leq Y_n.$$

Como Z_n é o máximo do lado esquerdo, concluímos que $Z_n \leq Y_n$, ou seja, é o menor processo no sentido do Teorema 5.4 da p.126, o que implica que $Z_n = V_n$. ■

Observação 5.4 *Estudaremos no Capítulo 8 da p.187 (modelos de taxas de juros) o processo de desconto*

$$D_n = \frac{1}{(1+r)^n}.$$

Assim, de forma bem mais elegante,

$$V_0 = \max_{\tau\in\mathsf{T}_0} \widetilde{E}\left[D_\tau G_\tau\right].$$

Qual a leitura da fórmula do teorema? É que o stopping time é uma **estratégia de execução** da opção e, uma vez fixada a estratégia, podemos calcular quanto se teria de retorno com esta estratégia em média, sob a probabilidade neutra a risco. Devemos determinar o **máximo**, entre todas as estratégias possíveis. A estratégia que realiza o máximo será chamada de **ótima** e pode não ser única. O próximo teorema mostra como determinar uma estratégia ótima.

Teorema 5.15: Tempo Ótimo de Execução

Considere uma **opção americana** cujo o valor intrínseco é $G_n \geq 0$, um processo adaptado, e V_n é o valor desta opção no tempo n (dada pela equação 5.1 da p.120). Defina

$$\tau^*(\omega) = \min\{n;\quad V_n(\omega) = G_n(\omega)\}.$$

Em palavras, $\tau^*(\omega)$ é a 1ª vez, ao longo do caminho ω, em que vale a pena executar a opção. Então,

$$V_0 = \widetilde{E}\left[\frac{G_{\tau^*}}{(1+r)^{\tau^*}}\right].$$

Prova: Iniciamos provando que o processo W_n definido abaixo é um martingal:

$$W_n = \frac{V_{n\wedge\tau^*}}{(1+r)^{n\wedge\tau^*}}. \tag{5.4}$$

Temos que provar a igualdade acima para cada $\omega = w_1 \cdots w_n$. Para simplificar notação omitimos o ω mas ele estará fixo em cada caso.

(a) caso $\tau^*(\omega) \geq n+1$, pela definição de τ^*, $V_n \neq G_n$. Pela equação 5.1 da p.120, $V_n = \widetilde{E}_n[V_{n+1}/(1+r)]$. Dividindo por $(1+r)^n$ dois dois lados,

$$\frac{V_n}{(1+r)^n} = \widetilde{E}_n\left[\frac{V_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right].$$

Como $n \wedge \tau^* = n$ e $n+1 \wedge \tau^* = n+1$,

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{V_{n\wedge\tau^*}}{(1+r)^{n\wedge\tau^*}} = \frac{V_n}{(1+r)^n} \\ &= \widetilde{E}_n\left[\frac{V_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] = \widetilde{E}_n\left[\frac{V_{(n+1)\wedge\tau^*}}{(1+r)^{(n+1)\wedge\tau^*}}\right] \\ &= \widetilde{E}_n[W_{n+1}]. \end{aligned}$$

(b) caso $\tau^*(\omega) \leq n$, teremos $n \wedge \tau^* = (n+1) \wedge \tau^* = \tau^*$. Logo,

$$W_n = \frac{V_{n\wedge\tau^*}}{(1+r)^{n\wedge\tau^*}} = \frac{V_{(n+1)\wedge\tau^*}}{(1+r)^{(n+1)\wedge\tau^*}} = W_{n+1}.$$

Logo $W_n = \widetilde{E}_n[W_{n+1}]$.

Como W_n definido na equação 5.4 é um martingal, $0 \wedge \tau^* = 0$, $N \wedge \tau^* = \tau^*$, usando o Lema 3.23 da p.70,

$$W_0 = V_0 = E[W_N] = \widetilde{E}\left[\frac{V_{\tau^*}}{(1+r)^{\tau^*}}\right].$$

Como τ^* é o menor n tal que $G_n = V_n$, segue que $V_{\tau^*} = G_{\tau^*}$, o que completa a prova. ∎

Encerramos este capítulo com um resumo da **precificação** de opções europeias e americanas com taxa de juros fixa. Para isto considere o processo de desconto $D_n = (1+r)^n$, a esperança neutra a risco $\widetilde{E}$, isto é, a esperança que torna o valor da ação descontada $D_n S_n$ um martingal, o valor intrínseco G_n no tempo n de uma opção americana e o valor intrínseco G_N no tempo final N de uma opção europeia.

O valor no tempo zero V_0 da opção

- **europeia** é determinada:
  - pela recursão $V_n = \widetilde{E}_n[V_{n+1}/(1+r)]$ com valor inicial $V_N = G_N$.
  - explicitamente por $V_0 = \widetilde{E}\left[D_N V_N\right]$,
- **americana** é determinada:

- pela recursão $V_n = \max(G_n, \quad \widetilde{E}_n[V_{n+1}/(1+r)])$ com valor inicial $V_N = G_N$.
- explicitamente por $V_0 = \max_{\tau \in \mathsf{T}} \widetilde{E}\,[D_\tau G_\tau]$,

As fórmulas por recursão determinam o valor **exato** mas geram o problema de explosão combinatória por necessitar do cálculo de **todos** os valores da opção na árvore. Uma forma de evitar isso é **estimar** o valor da opção utilizando a fórmula explicita e o Método de Montecarlo.

5.6 Código em Júlia

Nesta Seção mostramos a implementação em Julia do Algoritmo 6 da p.128, que precifica o valor de opções americanas. Compare com o que foi apresentado na Seção 4.6 da p.109.

```
function valor_opcao_americana(N, S0, u, d, r, payoff, strike)
    # Testando ausência de arbitragem
    if d>=1+r || u<=1+r
       println("Existe Arbitragem");
       return -1;
    end
    p=(1+r-d)/(u-d);
    q=1-p;
    # Vetor com valores da opção
    V=zeros(N+1);
    # Valor de V_N dado pelo Payoff
    for j=0: N
       V[j+1]=payoff(d^j*u^(N-j)*S0, strike);
    end
    # Voltando até o tempo zero na árvore
    for j= reverse(0:N-1)
       # Calculando E_j[V_{j+1}]/(1+r)
       for i=0: j
          V[i+1]=max(payoff(d^i*u^(j-i)*S0, strike), (p*V[i+1]+q*V[i+2])/(1+r));
       end
    end
    return V[1];
end
```

O Payoff deve ser uma função de dois parâmetros (o valor da ação e o strike) e que retorna o valor intrínseco da opção. Veja na p.110 exemplos de payoffs (calls e puts).

Podemos recalcular o Exemplo 5.1 da p.120, um put com strike $K = 4$ no tempo $N = 2$ com $S_0 = 4, u = 1.2, d = 0.8$ e $r = 0.1$, com o comando:
`opcao_americana(2, 4, 1.2, 0.8, 0.1, put, 4,1)` e obter que
$V_0 = 0.20661157024793358$.

Podemos recalcular o Exemplo 5.2 da p.122, um put com strike $K = 20$ no tempo $N = 3$ com $S_0 = 16, u = 1.5, d = 0.5$ e $r = 0.1$, com o comando:
`opcao_americana(3, 16, 15/10, 0.5, 0.1, put, 20,1)` e obter que
$V_0 = 6.166791885800149$.

5.7 Exercícios

1. Explique de forma simples porque uma opção europeia possui valor menor ou igual a uma opção americana do mesmo tipo?

2. Qual a diferença entre valor intrínseco de uma opção americana e seu valor real?

3. Qual o tempo ótimo de execução de uma opção americana do ponto de vista do comprador.

4. (a) Descreva em palavras a recorrência para trás que precifica uma opção americana. (b) O que tem que ocorrer para que uma opção americana e europeia do mesmo tipo tenha o mesmo valor?

5. Compare o valor de uma opção americana e uma bermudiana do mesmo tipo. Justifique sua resposta de forma simples.

6. Explique de forma simples porque opções americanas são supermartingais sob a probabilidade neutra a risco. Comece explicando o que é um supermartingal.

7. Seja V_n o valor de uma opção americana com valor intrínseco G_n com juros r. Então:

   (i) V_n _____ G_n para todo n; (ii) $\frac{1}{(1+r)^n} V_n$ é um __________;

   (iii) Se Y_n satisfaz (i) e é um supermartingal descontado, then Y_n ________ V_n para todo n.

8. Suponha que no tempo $n = 10$ uma opção americana tem valor intrínseco 4 e que está sendo feito o hedge perfeito da teoria até aqui.

   (a) Dentre os 4 cenários abaixo, em quais o comprador da opção agiu de forma incorreta segundo a teoria?

   (b) Explique como o vendedor da opção americana vai manter o hedge em cada uma das situações abaixo. Utilize o modelo "após consumir (ou não) X, deve pagar (investir) Y . . . ''

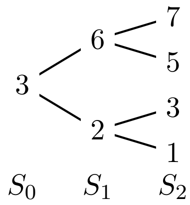
   (I) Se a esperança de valor futuro é 3 e o comprador não executou a opção.

   (II) Se a esperança de valor futuro é 5 e o comprador não executou a opção.

   (III) Se a esperança de valor futuro é 6 e o comprador executou a opção.

   (IV) Se a esperança de valor futuro é 2 e o comprador não executou a opção.

9. Considere os valores de S_n dados no diagrama abaixo.



Suponha que a taxa de juros é 3% e que considere uma opção americana expirando no tempo 2 com valor intrínseco $G_n = (7 - S_n)^+$. Determine :

(a) a probabilidade neutra a risco $\widetilde{p}_0$.

(b) as probabilidades neutras a risco $\widetilde{p}_1(\omega)$ for each ω.

(c) A quantidade de ações $\Delta_1(\omega)$ para cada ω para se fazer o hedge no tempo 1.

(d) $V_1(T)$.

10. Suponha que uma ação começa com valor $S_0 = 50$, e que a cada lançamento de moeda sobe seu valor em 30 unidades com H e diminui em 10 unidades com T. Suponha que a taxa de juros é de 5%. Considere uma opção **americana** expirando no tempo 3 com valor intrínseco $G_n = (70 - S_n)^+$. Determine $V_1(T)$. Determine quantas ações devem ser compradas após 2 lançamento sabendo que foram HT.

11. Considere o seguinte modelo CRR para o valor da ação: $S_0 = 16, u = 1.5, d = 0.5$. Determine o valor de cada uma das opções americanas que expiram no tempo 2:

(a) Supondo juros $r = 0$, cujo valor intrínseco no tempo n é $(10 - \max\limits_{0 \le i \le n} S_i)^+$

(b) Supondo $r = 10\%$, de um put com strike 20.

(c) Supondo $r = 0\%$, de um put com strike 20.

(d) Determine a estratégia ótima de execução de cada um dos contratos acima.

12. Determine se é um stopping time ou não as seguintes v.a. : W em Ω_2 e Z em Ω_3. Caso não seja, modifique os valores no **menor número de pontos possível** para que seja um s.t(resposta não é única – se quiser busque todas as respostas).

(a) $W(HH) = 2,\ W(HT) = 1,\ W(TH) = 1,\ W(TT) = 1.$

(b) $Z(HHH) = 2,\ Z(HHT) = 3,\ Z(HTH) = 3,\ Z(HTT) = 3,$
$Z(THH) = 3,\ Z(THT) = 2,\ Z(TTH) = 1,\ Z(TTT) = 2.$

13. Suponha que W é um stopping time e $W(THHTTT) = 4$ and $W(HTHHTT) = 3$. Determine, justificando sua resposta, o valor exato ou mínimo para:

(a) $W(THTTH)$. (b) $W(HHTHH)$.

14. Suponha que W é um stopping time e $W(HTTT) = 3$ and $W(HHHH) = 2$. Determine, justificando sua resposta, o valor exato ou mínimo para:

(a) $W(HTTH)$. (b) $W(HHTH)$. (c) $W(HTHH)$. (d) $W(TTHT)$.

15. Suponha que τ é um stopping time e $\tau(HHTTHHTT) = 5$, $\tau(HHTTTHTT) = 6$. Determine, justificando sua resposta, **todos** os valores possíveis de:
    (a) $\tau(HHTHHHTT)$.
    (b) $\tau(HHTTHTTT)$.
    (c) $\tau(HHTTHHHH)$.
    (d) $\tau(HHHTTHHH)$.

16. Prove que se τ e κ e $K \in \mathbb{N}$, são stopping times:
    (a) $\tau + \kappa$.   (b) $\tau + K$.   (c) $\max(\tau, \kappa)$;   (d) $\min(\tau, \kappa)$;

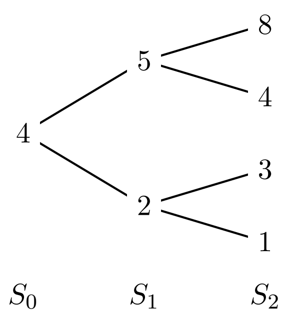
17. Suponha que τ é um stopping time em Ω_M. Fixe $k \in \mathbb{N}$ com $k \leq M$. Defina

$$A = \{\omega \in \Omega_M; \quad \tau(\omega) \leq k\}.$$

    Em notação compacta, $A = \{\tau \leq k\}$, o conjunto dos lançamentos de moeda onde τ vale menos ou é igual a k. Prove que se $w_1 w_2 \cdots w_n y_{n+1} \cdots y_M \in A$ then $w_1 w_2 \cdots w_n z_{n+1} \cdots z_M \in A$, isto é, se os primeiro k lançamentos são iguais então: (a) ou ambas sequências pertencem a A; (b) ou nenhuma delas pertence a A.

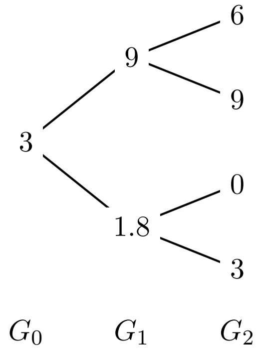
18. (barreira no preço de uma ação) Seja S_n um processo estocástico adaptado (pense no preço de uma ação). Fix uma barreira k, um certo valor. Defina $\tau : \Omega_M \to \mathbb{N}$ por $\tau(\omega) = \min\{n; S_n(\omega) \geq k\}$. Caso o conjunto seja vazio para um certo ω (ao longo do caminho ω o valor da ação não excedeu k) definimos $\tau(\omega) = M+1$. Assim τ é o tempo da 1ªvez que a barreira k foi ultrapassada pelo valor da ação. Prove que τ é um stopping time.

19. Considere um put americano com strike 6 que expira no tempo 2 com valores para S_n dado no diagrama abaixo:



    Suponha que a taxa de juros é 10%. Determine:
    (a) os valores V_0, V_1 e V_2 da opção.
    (b) o tempo de parada ótimo τ^*.

20. Considere uma opção americana expirando no tempo 2 com valores de execução intrínseca G_n dados pelo diagrama abaixo.

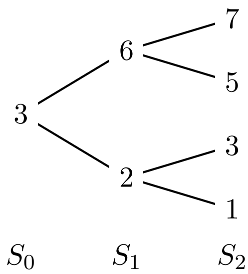


Supondo que a taxa de juros é 0% e que as probabilidades neutras a risco são fixas no tempo dadas por $\widetilde{p} = 1/3$. Determine:

(a) o valor V_0 da opção.

(b) o tempo de parada ótimo τ^*.

21. Considere os valores de S_n dadas no diagrama abaixo.



Supondo que a taxa de juros é zero, considere uma opção americana expirando no tempo 2 com valor intrínseco

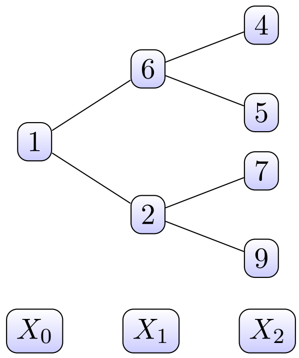
$$G_n = \left(3 - \frac{S_n}{2}\right)^+ .$$

Determine o tempo de parada ótimo τ^*.

22. O que é um processo congelado?

23. (processo congelado) Considere o processo X_n definido pela árvore abaixo e os stopping times definidos por

ω	$\tau_1(\omega)$	$\tau_2(\omega)$
HH	1	1
HT	1	1
TH	2	1
TT	3	1



Determine as árvores para os processos congelados $X_{n\wedge\tau_i}$.

24. Sabemos que Z é um stopping time em Ω_3 e $Z(HTT) = 1$, $Z(THT) = 2$, $Z(TTT) = 3$, $Z(TTH) = 3$. Seja $X_0 = 2$ e $X_n(\omega) = 2\#T(\omega) + 3\#H(\omega)$, onde $\#T(\omega)$ o número de tails $\#H(\omega)$ o número de heads.

    Desenhe a árvore representando $W_n = X_{n\wedge Z}$, o processo X_n congelado por Z.

25. Suponha que $S_0 = 4$, $u = 2$, $d = 1/2$ and $r = 1/4$ (logo $\widetilde{p} = \widetilde{q} = 1/2$ e $1/(1+r) = 4/5 = 0.8$) num modelo de 2 períodos (S_0, S_1, S_2). Considere uma opção americana com payoff
$$G_n = (5 - S_n)^+.$$

    Determine:

    (a) seu valor no tempo 0.

    (b) o valor do stopping time τ para cada caminho (HH, HT, TH, TT).

    (c) repita (a) e (b) com
$$G_n = (4 - S_n)^+.$$

    (d) Seja V_n o valor da opção em $n = 0, 1, 2$ e τ dado em (b). Determine os valores do processo congelado $V_{n\wedge\tau}$.

26. Suponha que o valor S_n de uma ação começa com valor 100, e que, nos próximos 2 meses, a cada mês, seu valor sobe em 20% ou cai em 10%. Sabemos que Z é um stopping time em Ω_4 e $Z(HTHH) = 3$, $Z(THTH) = 1$, $Z(HTTT) = 4$, $Z(HTTH) = 4$, $Z(HHTH) = 2$.

    Desenhe uma árvore representando $W_n = S_{n\wedge Z}$, o processo S_n congelado por Z.

27. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que possui duas derivadas em todos os pontos. Prove que f é convexa se, e somente se, o $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dica: livro do Spivak.

28. Prove que a equação da reta que passa pelos pontos do plano $(x_1,\ y_1)$ e $(x_2,\ y_2)$ é $((1-t)x_1 + tx_2,\ (1-t)y_1 + ty_2)$, $t \in \mathbb{R}$.

29. Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Prove que para todo $x_1, \ldots, x_M \in \mathbb{R}$ e $p_1, \ldots, p_M \in [0, 1]$ com $\sum_{i=1}^{M} p_i = 1$.

$$g\left(\sum_{i=1}^{M} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{M} p_i g(x_i)$$

Dica: Estude a prova do Lema5.8.

30. O valor de uma opção americana no tempo zero é $\max_{\tau \in \mathsf{T}_0} \widetilde{E}\left[D_\tau G_\tau\right]$.

(a) Explique o significado de **cada um** dos símbolos desta fórmula.

(b) Explique como podemos determinar o valor da opção utilizando esta fórmula.

31. Prove que o payoff do put é uma função convexa, isto é, que $g(s) = (K - s)^+$, $K > 0$, é uma função convexa. Faça o gráfico antes e verifique geometricamente que a região acima do gráfico é convexa.

Dica: Veja prova do Teorema 5.10 da p.133.

32. Defina $J_n = \max_{\tau \in \mathsf{T}} \widetilde{E}_n \left[\dfrac{W_\tau}{(1 + r)^{\tau - n}}\right]$ com $n \leq N$. Prove, tomando um $\tau \in \mathsf{T}$ apropriado, que:

(a) $J_n \geq W_n$ para todo $n \leq N$.

(b) $J_N = W_N$.

33. Qual a dificuldade do uso do Método de Monte Carlo para precificar opções americanas. Porque este problema não ocorre para opções europeias?

34. Existiu no mundo real juros negativos? Algo como voce coloca 100 numa aplicação em renda fixa e no final do ano receberá 90?

35. (exemplo de call americano com juros negativos) Considere no modelo CRR o valor da ação com $S_0 = 16$, $u = 1.5, d = 0.5$ e juros (negativos) de 10% (dinheiro **perde valor** ao longo do tempo na renda fixa). Determine o valor de um call americano e europeu com strike 1 e tempo de expiração 2. , quando **vale a pena** executar antes e o seu valor é maior que de uma opção de call europeia. Conclua que este call tem preço diferente e que vale a pena se executado antes. De acordo com a teoria, isto ocorre somente pois $r < 0$.

Resposta: Valor da opção americana é 6.814814814814815 com execução antecipada no tempo 1 se $\omega = H*$. Valor da opção europeia (sem execução antecipada) é 6.320987654320986.

36. Leia sobre (uma referência no final) um problema clássico que envolve determinar o melhor tempo de parada. Tem muitas versões (escolha do melhor parceiro para o casamento, contratação de funcionário, etc.). Apresentamos a versão do problema que consiste na escolha do posto com menor preço de combustível para abastecer o carro em uma viagem longa. Neste caso você está na estrada (ainda com combustível) e vai escolher onde abastecer seu carro. Ao passar por um posto e ver o preço você tem que decidir se abastece ou não. Caso não abasteça não poderá voltar (perderia tempo de viagem) para abastecer. Digamos que você sabe que encontrará 40 postos no caminho da sua longa viagem. Qual é a melhor estratégia para abastecer pelo menor preço possível? Note que:

    (a) Abastecer logo pode ser ruim por perder oportunidades que ainda vão surgir.

    (b) Demorar para abastecer pode fazer perder a melhor oportunidade.

    Apresentamos a resposta pela surpresa: envolve o número e (≈ 2.7), base do logaritmo natural. A resposta é aguardar n/e postos e abastecer no próximo melhor que todos anteriores.

    Referência: Ferguson, Thomas S. (1989). "Who Solved the Secretary Problem?". *Statistical Science*. **4** (3): 282–289.

37. Considere uma **opção americana** cujo o valor intrínseco é $G_n \geq 0$, um processo adaptado, e V_n é valor desta opção no tempo n (dada pela equação 5.1 da p.120). Defina

    $$\tau_n^*(\omega) = \min\{k \geq n; \quad V_k(\omega) = G_k(\omega)\}.$$

    Em palavras, $\tau_n^*(\omega)$ é a 1ª vez depois do tempo n, ao longo do caminho ω, em que vale a pena executar a opção. Então,

    $$V_n = \widetilde{E}_n \left[\frac{G_{\tau_n^*}}{(1+r)^{\tau_n^* - n}} \right].$$

    Dica: seguir a prova do Teorema 5.15 da p.139, começando por provar que para $k \geq n$ é um martingal

    $$W_k = \frac{V_{k \wedge \tau_n^*}}{(1+r)^{k \wedge \tau_n^*}}.$$

5.8 Projetos Computacionais

Cada projeto deve ser acompanhado de um relatório contendo detalhes da metodologia, escolha de parâmetros, fonte dos dados e resultados, incluindo figuras. O Código utilizado deve aparecer num apêndice do relatório ou incorporado ao relatório para quem usar ambiente do tipo `Jupyter`.

1. Faça um programa que precifique puts bermudianos onde a execução pode ocorrer em dias alternados (dia sim, dia não), começando no 1º dia após o início do contrato. Precifique exemplos do livro e outros que você crie (com $N = 10$) e compare com o valor da opção americana correspondente.

2. Fixe um contrato de put americano e precifique-o refinando a escala temporal. Determine a ordem de convergência do erro para o valor com $\Delta t \to 0$.

3. Explorar numericamente, formular uma teoria, e justificar teoricamente o valor limite:

   (a) de um **put americano** quando o strike $K \to \infty$ em comparação com um put europeu.

   de um **call europeu** quando se fixa os outros parâmetros e

   (b) o strike $K \to \infty$.

   (c) o tempo $N \to \infty$.

4. (Fronteira de execução de put americano) Considere um put vanilla americano. Gere um gráfico onde o eixo x seja o tempo n e no eixo y o valor de S_n. Use escala logaritmica em y e marque um x para cada valor possível. Use, no entanto, uma cor diferente para indicar quando a opção deve ser executada antecipadamente. Assim pode-se ver a **fronteira** de execução, que aparecerá como uma região na parte inferior do gráfico. Esta é base para métodos mais eficientes de precificação, pois com poucos pontos podemos estimar a região de execução.

5. Escreva um programa cuja entrada seja os parâmetros do modelo CRR (N, u, d, r) e o strike (K) de um put americano. A saída é o stopping time ótimo τ^* desta opção conforme a teoria, gerando uma tabela do tipo:

ω	$\tau^*(\omega)$
$HHH\cdots$	
$\vdots$	
$TTT\cdots$	

6

Otimização de Carteiras

6.1 Introdução

A questão básica da teoria de otimização de carteiras é determinar como alocar recursos entre ativos e montar uma **carteira de investimentos** que maximize o retorno esperado do investimento e, ao mesmo tempo, minimize o risco. Para isso precisamos introduzir métricas – forma de medir o risco e o retorno.

Começamos com breve história desta área da finança matemática:

- Um marco inicial é a Tese de Doutorado de H. Markowitz, defendida na Universidade de Chicago em 1954, sobre a **teoria das carteiras** (*portfolio theory*) e como alocar de forma ótima recursos financeiros entre diversos ativos. A ideia geral é otimizar o retorno limitando o risco máximo da carteira ou minimizar o risco dado um certo retorno esperado.
- Baseado neste trabalho, no meio da década de 1960, William F. Sharpe introduziu o **índice sharpe** (veja Definição 6.3 da p.155), que ajuda a classificar o risco-retorno de diferentes ativos: quanto maior o índice, maior o retorno esperado relativamente ao risco do ativo. Ele o incorporou este índice à teoria de carteiras de Markowitz para criar o **modelo CAPM** (Capital Asset Pricing Model).
- Em 1990 Markowitz, Sharpe e Miller ganharam o premio Nobel pelos trabalhos em torno do modelo CAPM.

Note que neste capítulo o importante é saber o retorno dos ativos segundo as **probabilidades reais** e não as neutras a risco. Alguns objetivos desta área da finanças:

- Medir retorno esperado.
- Introduzir o conceito de risco, formas de medi-lo e como reduzi-lo.
- Introduzir modelo baseado nos conceitos acima para decidir como alocar recursos financeiros de forma ótima.

6.2 Risco e Retorno

Para se medir a efetividade de um investimento feito em um ativo deve-se determinar a razão entre o lucro obtido dividido pelo investimento inicial. Assim se foi investido I_0 no passado e após um certo período (digamos um mês) o ativo vale I, o lucro neste período foi de $I - I_0$ e o **retorno** R será dado por

$$R = \frac{I - I_0}{I_0}.$$

De forma equivalente, R é o “juros” implícito neste investimento no sentido que resolve a equação

$$I = I_0(1 + R).$$

Supomos que o valor resultante do investimento inicial I_0 é conhecido e vale I em uma data até o dia de hoje. Agora como proceder para **estimar** o retorno de um investimento em um ativo que será feito hoje mas cujo valor em data futura é incerto? Neste caso o valor I do investimento em data futura será uma v.a. O retorno será dado pela mesma fórmula acima, mas como I é uma v.a. , R também será. Assim o valor do retorno R é incerto, e precisamos introduzir **métricas** para comparar os retornos de $R_1, R_2, \ldots$ entre si.

Neste texto utilizaremos as métricas de desempenho de ativos da próxima definição, que dependem da fixação de um tempo (um dia, 15 dias, um mês) para a maturação do investimento.

Definição 6.1: Risco e Retorno de um Ativo

O valor de um ativo hoje é S_0 (conhecido) e seu valor em certo momento no futuro é dado por uma v.a. S. Definindo o **retorno** do ativo por

$$R = \frac{S - S_0}{S_0},$$

definimos o **retorno** (esperado) de S por $E[R]$ e o seu **risco** por $\mathrm{StDev}[R]$, ambos com relação à probabilidade real.

Para entender a definição acima, apresentamos um resultado clássico de probabilidade que permite quantificar como o **desvio-padrão** está relacionado com a “incerteza” no valor do ativo.

Teorema 6.2: Desigualdade de Chebyshev

Seja X uma v.a. em Ω finito com média μ e desvio-padrão σ. Então para cada $k > 0$,

$$P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$$

Prova: Como $f(x) = x^2$ é uma função crescente, ela não altera desigualdades. Assim

$$P\{|X-\mu| \geq k\sigma\} = P\{|X-\mu|^2 \geq (k\sigma)^2\}.$$

Usando isto, passando k^2 para o outro lado e multiplicando os dois lados por σ^2, temos que provar que

$$(k\sigma)^2 P\{|X-\mu|^2 \geq (k\sigma)^2\} \leq \sigma^2.$$

Defina $Y = (X-\mu)^2$ e $a = (k\sigma)^2$, como $E[Y] = \sigma^2$, basta provar que[1]

$$aP\{|Y| \geq a\} \leq E|Y|.$$

Pela definição de esperança (ver p.57) e como os termos do somatório são todos positivos, a soma parcial dos termos onde $|Y| > a$ é menor que o total. Assim,

$$E|Y| \geq \sum_{|Y(\omega)|>a} |Y(\omega)|P(\omega) > a \sum_{|Y(\omega)|>a} |P(\omega)| = aP\{|Y| > a\}.$$

■

Utilizando a desigualdade de Chebyshev temos como mensurar o "risco" do valor de X ficar longe do valor esperado (média) em função do desvio-padrão. Note que isto **não depende** da distribuição de X (em particular **não estamos** assumindo uma distribuição normal). Por exemplo, a probabilidade que:

- $|X-\mu| \geq 3\sigma$ é menor que 11.2%.
- $|X-\mu| < 4\sigma$ é maior que 93.7%.
- $|X-\mu| \geq 5\sigma$ é menor que 4%.

Exemplo 6.1 *Suponha uma v.a. R possua média 25 e desvio-padrão σ. Determine a probabilidade mínima que:*
(a) $R \in [24,\ 26]$ se $\sigma = 0.2$. *(b) $R \in [24.5,\ 25.5]$ se $\sigma = 0.1$.*
Determine o menor intervalo I centrado em 25 tal que $R \in I$ com probabilidade mínima de:
(c) 90% se $\sigma = 0.3$.

Solução: O intervalo de (a) e (b) é $[25-5\sigma,\ 25+5\sigma]$. Pela desigualdade de Chebyshev (verifique) ambos possuem a mesma probabilidade de 96%.

(c) Por Chebyshev, com probabilidade de até $10\% = 1/10 = 1/k^2$, obtemos $k = \sqrt{10} \approx 3.16$, estará fora de intervalo com raio $3.16\sigma \approx 0.95$. Assim com 90% de probabilidade estará em $[25-0.95,\ 25+0.95] = [24.05,\ 25.95]$. ■

Observação 6.1 *Existem outras formas de medir risco. Uma das ideias é utilizar a* ***entropia****, que faz parte de um conjunto de ideias emprestadas da Física que chamamos de* ***Econofísica****. Deixamos para o leitor explorar em outras fontes o assunto.*

[1] Conhecido como desigualdade de Markov: $P\{|Y| > a\} \leq E|Y|/a$.

Neste capítulo estamos preocupados com reduzir o risco. Assim pode-se, de forma equivalente, medir o risco com a variância (veja Definição 3.11) ao invés do desvio-padrão, pois minimizar $x \geq 0$ ou x^2 é equivalente.

A base da teoria das carteiras é fazer uma análise do *tradeoff*[2] entre risco e retorno. Para isto é importante o uso do gráfico do risco versus retorno.

Exemplo 6.2 (Risco × Retorno) *Considere os ativos representados no gráfico de risco × retorno da Figura 6.1.*
Identifique o(s) ativo(s) que você investiria para garantir

(a) um retorno médio mínimo de 16.

(b) um retorno médio mínimo de 10 com menor risco possível.

(c) um risco máximo de 0.3 com maior retorno possível.

Identifique o(s) ativo(s):

(d) De renda Fixa. *(e) Com maior retorno.*

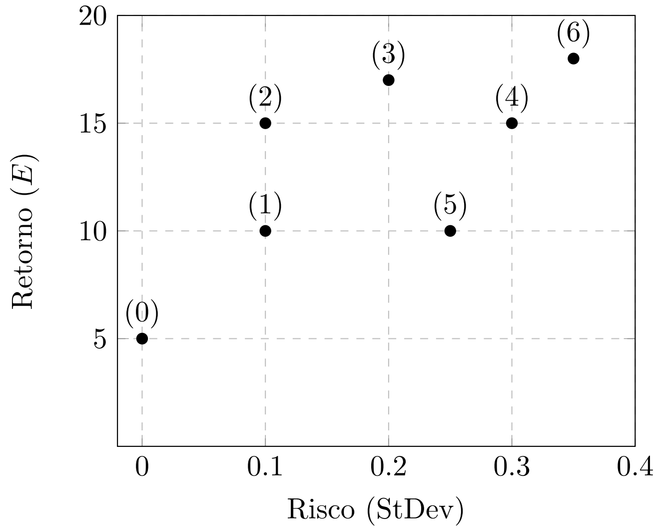


Figura 6.1: Risco × Retorno

Solução: (a) Ativos (3) e (6).

(b) Ativo (2) pois com retorno 15 (acima de 10) e risco 0.1. O Ativo (1) possui o mesmo risco mas com retorno menor (não vale a pena). Os outros ativos possuem risco ainda maior ou retorno abaixo de 10 (o ativo (0)).

(c) Ativo (3) possui risco 0.2 (menor que 0.3) com maior retorno entre os ativos com risco abaixo de 0.3.

(d) O único ativo com risco zero, e portanto de renda fixa, é o (0).

(e) Ativo (6). ∎

Este exemplo serve para motivar temas explorados neste capítulo:

[2]Literalmente troca, no contexto é o perde-ganha: temos que trocar mais retorno por mais risco.

- Qual ação possui a melhor combinação de risco-retorno? Uma resposta é o **índice de Sharpe**, apresentado na próxima seção.
- O que acontece com o risco e com o retorno de carteiras com 2 ou mais ativos? Será possível, fazendo combinações apropriadas, obter retorno maior com risco menor?

6.3 Índice Sharpe

Para se analisar o desempenho de ativos de renda variável (ação), estamos interessados no retorno esperado **acima** daquele proporcionado pela renda fixa. Quanto maior o retorno, melhor o ativo. Por outro lado, queremos que o risco seja o menor possível. Uma ideia, que fundamenta o **índice de Sharpe** é quanto retorno temos por cada unidade de risco.

Definição 6.3: Índice de Sharpe

Seja r_0 o retorno do ativo de renda fixa, R uma v.a. representando o retorno do ativo S. Definimos o índice de Sharpe do ativo S por

$$\mathrm{Sharpe}[S] = \frac{E[R] - r_0}{\mathrm{StDev}[R]}.$$

Observação 6.2 *Na verdade o retorno da renda fixa r_0 **também** é uma v.a. R_0 ao invés de constante. Assim o índice de Sharpe é definido por*

$$Sharpe[S] = \frac{E[R - R_0]}{\mathrm{StDev}[R - R_0]}.$$

Se R é constante reobtemos a fórmula da definição acima pois $\mathrm{StDev}[R - r_0] = \mathrm{StDev}[R]$ (a constante não altera o desvio-padrão) e $E[R - r_0] = E[R] - r_0$ pela linearidade da média. Seguimos o capítulo assumindo R constante. Teremos um capítulo dedicado a R variável.

Exemplo 6.3 (Índice de Sharpe) *Determine (se for o caso estime) o índice Sharpe de cada um dos ativos de renda variável S_i (isto é, com $i \geq 1$) da Figura 6.1. Com isto classifique eles de melhor para pior risco-retorno.*

Solução:

Ativo	Retorno	Risco	Índice Sharpe
S_1	10	0.1	50
S_2	15	0.1	100
S_3	17	0.2	60
S_4	15	0.3	33
S_5	10	0.25	20
S_6	18	0.35	37

Assim temos que a melhor ação é S_2, seguida de S_3, S_1, S_6, S_4 e, por último, S_5. ■

Revisite o exemplo anterior e note que o índice Sharpe do ativo S é, geometricamente, o **coeficiente angular** da reta que passa na renda fixa e por S no gráfico risco-retorno conforme apresentamos na Figura 6.2. Assumimos que o risco, no eixo x, seja medido em desvio-padrão — cuidado pois às vezes se coloca a variância no eixo x. Assim, pode-se ver qual o ativo com maior índice Sharpe, geometricamente, comparando a inclinação destas retas. Pense, dinamicamente, em retas que passam na renda fixa, começando pelo eixo y e que vão encontrando os ativos. A ordem do encontro determina a ordem dos índice de Sharpe dos ativos. Veja como esta releitura está de acordo com o exemplo anterior.

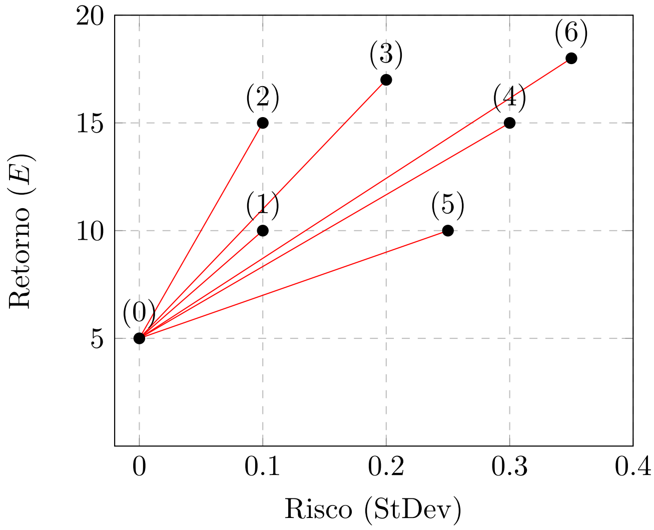


Figura 6.2: Índice de Sharpe: Significado Geométrico

6.4 Covariância e Correlação

Vamos apresentar os conceitos e definição de covariância e correlação com aplicações na análise do risco e retorno de uma **carteira** ou **portfolio** de ativos financeiros de renda variável. Assim começamos modificando a Definição 2.1 da p.25 para esta seção: retiramos a renda fixa da composição da carteira e o vetor indica o percentual de cada ativo na composição da carteira.

Definição 6.4: Carteira ou Portfolio

Dado n ativos de renda variável, com retornos dados pelas v.a. $R_1, \ldots, R_n$, uma **carteira** ou **portfolio** é um vetor $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in [0,\ 1]^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1,$$

π_i o percentual de recursos da carteira aplicado em cada ativo. Definimos $X_\Pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i R_i$ como a v.a. do retorno da carteira.

Exemplo 6.4 *Uma carteira* $\Pi = (0.2,\ 0.3,\ 0.5)$ *significa que 20% dos recursos serão investidos no ativo 1, 30% no ativo 2 e 50% no ativo 3.*

Já vimos o risco e o retorno de um ativo. Agora veremos o que ocorre com o risco e com o retorno quando se combinam ativos em uma carteira. O fato fundamental é que **podemos reduzir o risco** combinando ativos.

Exemplo 6.5 (Ativos Correlacionados) *Dependendo de diversos fatores, ativos podem ter movimento de preço similar. Um exemplo é de crise financeira, em que todos ativos caem simultaneamente. Ainda assim, sempre tem alguns setores mais atingidos do que outros pela crise.*

Outro fator são efeitos setoriais, por exemplo, algum fato de geopolítica que afete setores de energia, alimentos agrícolas, indústria automobilística, bancos de forma distinta, causando o aumento (ou queda) no valor de empresas de algum setor somente.

Finalmente podemos ter empresas que se complementam no sentido que quando uma aumenta de valor a outra perde valor: consumidor passa de energia elétrica para aeólica, de forma que quando o valor de uma ação sobre a outra desce e vice-versa (correlação negativa). A forma que medimos isto é através da ***covariância*** *e da* ***correlação***

A covariância mede a variação relativa de ativos com relação ao seu valor médio. Generaliza a variância (ver Definição 3.11 da p.57)

Definição 6.5: Covariância

Dadas v.a. X e Y com 1º e 2º momentos finitos, definimos a **covariância** por

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Segue que $\mathrm{Cov}[X, X] = \mathrm{Var}[X]$.

Em que sentido a covariância mede a variação de valor de dois ativos?
Começamos com uma observação simples: uma v.a. que não seja constante vai assumir valores acima e abaixo da média (caso contrário a média não seria a média). Vamos

analisar o **sinal** de $(X - E(X))(Y - E(Y))$ e a implicação para o valor da covariância. Dividiremos em 3 casos:

(a) Se os dois termos forem simultaneamente positivos ou negativos, isto é:

- quando X está acima da média, Y também está acima da média;
- quando X está abaixo da média, Y também está abaixo da média.

A **covariância será positiva** caso isto aconteça a maior parte das vezes, indicando que o movimento de X e Y é sempre na mesma direção: ambos ficam acima ou abaixo da média simultaneamente.

(b) Se os dois termos tiverem simultaneamente sinais trocados, isto é:

- quando X está acima da média, Y está abaixo da média;
- quando X está abaixo da média, Y está acima da média.

A **covariância será negativa** caso isto aconteça a maior parte das vezes, indicando que o movimento de X e Y é sempre em direção oposta: quando um fica acima da média o outro fica simultaneamente e vice-versa.

(c) Caso os movimentos de ficar acima e abaixo da média sejam independentes, o sinal será positivo ou negativo o mesmo número de vezes aproximadamente, de forma que ao se somar para calcular a média obteremos um cancelamento que fará a **covariância ficar próxima de zero**.

Esta é a intuição por trás da definição. Mas pode-se ter casos em que fica-se acima e abaixo da média o mesmo número de vezes mas com intensidade maior quando se está acima, de forma a resultar em covariância positiva.

Deixamos para o leitor provar o lema a seguir.

Lema 6.6: fórmula para covariância

Dadas v.a. X e Y com 1º e 2º momentos finitos,

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Exemplo 6.6 *Considere as v.a.* X_1, X_2, X_3 *definidas pela tabela abaixo. Determine* $\mathrm{Cov}[X_i, X_j]$ *para todo* i, j *supondo que* $P(w_1) = P(w_2)$.

ω	X_1	X_2	X_3
w_1	2	-3	1
w_2	-2	1	3

Interprete a relação entre o sinal das covariâncias e o movimento das v.a. em torno da média.

Solução: Vamos começar calculando os valores de $X_i - E(X_i)$:

ω	$X_1 - E(X_1)$	$X_2 - E(X_2)$	$X_3 - E(X_3)$
w_1	2	-2	-1
w_2	-2	2	1

Pode-se ver na tabela acima quando que a v.a. fica acima ou abaixo da média. Fica claro que X_2 e X_3 se movem juntos, acima e abaixo da média; X_1 se move sempre na direção contrária: quando X_2 sobe, X_1 desce e vice-versa. Isto vai se refletir no sinal das covariância, que pela simetria basta calcular $\text{Cov}[X_i, X_j]$ com $i < j$:

$$\text{Cov}[X_1, X_2] = -4 < 0, \ \text{Cov}[X_1, X_3] = -2 < 0, \ \text{Cov}[X_2, X_3] = 2 > 0.$$

As covariância abaixo são simplesmente as variâncias:

$$\begin{aligned}&\text{Cov}[X_1, X_1] = \text{Var}[X_1] = 4 = \text{Cov}[X_2, X_2] = \text{Var}[X_2],\\ &\text{Cov}[X_3, X_3] = \text{Var}[X_3] = 1.\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.7 *Considere as v.a.* X_1, X_2, X_3 *definidas pela tabela abaixo. Determine* $\text{Cov}[X_i, X_j]$ *para todo* i, j *supondo que* $P(w_1) = \cdots = P(w_4)$.

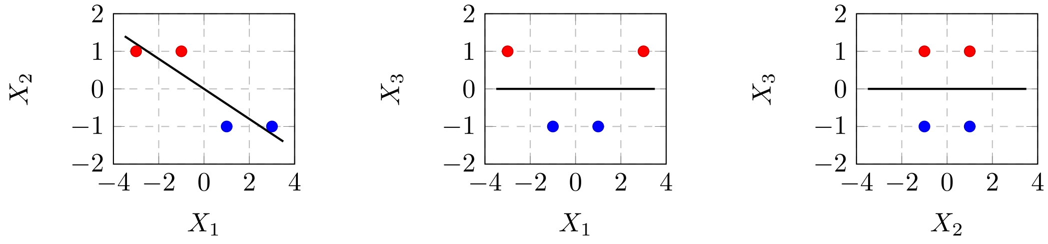
ω	X_1	X_2	X_3
w_1	3	-1	1
w_2	-1	1	-1
w_3	-3	1	1
w_4	1	-1	-1

Interprete a relação entre o sinal das covariâncias e o movimento das v.a. em torno da média.

Solução: Neste exemplo, todas v.a. possuem média zero. Assim pode-se ver que **sempre** que X_1 sobe, X_2 desce e vice-versa. Isto vai se refletir na covariância: $\text{Cov}[X_1, X_2] = -2 < 0$. Por outro lado, note que quando X_1 sobe, X_3 pode ter subido ou descido, com algo similar ocorrendo quando X_1 desce. O mesmo ocorre na relação entre X_2 e X_3. De fato, $\text{Cov}[X_1, X_3] = \text{Cov}[X_2, X_3] = 0$. Neste exemplo colocamos números para que isto ocorresse de forma exata: de forma geral ficaria próximo de zero mas não exatamente zero. Finalmente as variâncias:

$$\begin{aligned}&\text{Cov}[X_1, X_1] = \text{Var}[X_1] = 5,\\ &\text{Cov}[X_2, X_2] = \text{Var}[X_2] = \text{Cov}[X_3, X_3] = \text{Var}[X_3] = 1.\end{aligned}$$

Aproveitamos este exemplo para apresentar o **gráfico de dispersão** ou **scatter plot**. São 3 gráficos, colocando nos eixos x e y os valores de X_i e X_j com $i < j$. Note como para v.a. com covariância negativa os pontos ficam próximos de uma reta, de forma que sabendo o valor de uma v.a. podemos saber o valor da outra. Esta reta é determinada por meio da chamada **regressão linear**[3] em Estatística ou, na linguagem de Álgebra Linear, a teoria dos **mínimos quadrados**. Por outro lado, com covariância zero não existe relação entre os valores: a reta que fica mais próxima está sempre longe dos pontos (note que o eixo y seria outra opção para esta reta, mas igualmente longe dos pontos). Mais sobre isso nos exercícios.



■

A unidade da covariância é o produto das unidades de X e Y. Podemos torná-lo adimensional dividindo pelo produto do desvio padrão de X e de Y pois a dimensão de X, $E(X)$ e $\mathrm{StDev}(X)$ é a mesma. Reveja a discussão sobre dimensão logo após a Definição 3.13 da p.58. Assim podemos definir **novas** v.a. $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ por

$$\widetilde{X} = \frac{X}{\mathrm{StDev}[X]}, \quad \widetilde{Y} = \frac{Y}{\mathrm{StDev}[Y]}.$$

Agora podemos calcular a $\mathrm{Cov}[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ e esta grandeza poderá comparada com outras pois a escala foi tornada comum. Esta ideia está por trás da definição de correlação, que apresentamos logo abaixo: a correlação entre duas v.a. é a covariância entre as variáveis após a adimensionalização.

Definição 6.7: Correlação

Dadas v.a. X e Y definimos a **correlação** por

$$\mathrm{Corr}[X, Y] = \frac{\mathrm{Cov}[X, Y]}{\mathrm{StDev}[X]\ \mathrm{StDev}[Y]}.$$

Segue que $\mathrm{Corr}[X, X] = 1$.

[3] Dados $p_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, determine $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a reta r com equação $y = ax + b$ está o mais próxima possível de todos os pontos; mais precisamente, queremos minimizar a soma do quadrado (daí o termo mínimos quadrados) das distâncias $d(p_i,\ r)$. Em linguagem de Cálculo: Determine $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $D(a, b) = \sum_i (d(p_i,\ r))^2$ seja minimizado.

Lema 6.8

Para toda v.a. X, Y, $\operatorname{Corr}[X, Y]$ é um número entre -1 e 1.

Prova: Vamos provar que para todo X, Y,

$$|\operatorname{Cov}[X, Y]| \leq \operatorname{StDev}[X] \operatorname{StDev}[Y],$$

pois segue que $|\operatorname{Corr}[X, Y]| \leq 1$ e portanto a correlação pertence a $[-1, 1]$. A prova é idêntica a um teorema importante em Álgebra Linear, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz[4], Caso $\operatorname{Var}[Y] = 0$, teremos $\operatorname{StDev}[Y] = 0$ e Y constante igual a $E[Y]$ e portanto (exercício) $\operatorname{Cov}[X, Y] = 0$. Assim, supondo $\operatorname{Var}[Y] \neq 0$, defina polinômio do segundo grau em k: $f(k) = \operatorname{Cov}[X + kY, X + kY] = \operatorname{Var}[X + kY] \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{R}$ pois variância é sempre positiva. Pelas propriedades de linearidade da esperança (Teorema 3.10 da p.57) e definição de variância – deixamos para o leitor verificar –

$$f(k) = \operatorname{Var}[Y]k^2 + 2\operatorname{Cov}[X, Y]k + \operatorname{Var}[X].$$

Como sabemos que o polinômio do segundo grau ($\operatorname{Var}[Y] > 0$) $f(k) \geq 0$ para todo k, devemos ter $\Delta \leq 0$ (se $\Delta > 0$ teríamos duas raízes **distintas** reais, e portanto f assumiria valor negativo entre as raízes). Logo

$$\Delta = 4(\operatorname{Cov}[X, Y])^2 - 4\operatorname{Var}[Y]\operatorname{Var}[X] < 0.$$

Dividindo por 4, trocando termo de lado, tirando raiz quadrada (lembrando que $\sqrt{x^2} = |x|$ e não x!), e utilizando a definição de desvio-padrão obtemos o resultado. ■

Outro ponto de vista é que utilizamos como unidade de movimentação do valor de uma v.a. o seu desvio-padrão: queremos saber quantos desvio-padrão estamos acima ou abaixo da média.

O valor da correlação tem um significado absoluto (independe de escala) pois é adimensional: correlação próxima de 1 ou -1 indica que as variáveis sobem e descem ao mesmo tempo com muita frequência. Correlação próxima de zero indica falta de relação de movimento nos valores das v.a. Os valores da covariância, por não serem normalizados, não permitem este tipo de análise. Veja os exercícios para exploração deste assunto.

Terminamos esta parte teórica com a definição abaixo.

[4]Dados vetores u, v, $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$, relacionando produto escalar com tamanho (norma) dos vetores. Utilizando-o definirmos ângulo entre vetores. Em particular dois vetores são ortogonais entre si se, e somente se, $\langle u, v\rangle = 0$. Ser ortogonal (vetores) e possuir covariância zero (v.a.) são propriedades similares, bem como produto escalar positivo (apontar aproximadamente para mesma direção) ou covariância positiva (variam juntas), etc.

Definição 6.9: Matriz de Covariânica e Correlação

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a. . Definimos a **matriz de covariância** e a **matriz de correlação**, denotadas por $\mathrm{Cov}[X_1, \ldots, X_n]$ e $\mathrm{Corr}[X_1, \ldots, X_n]$ cujas entradas $a_{ij} = \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$ ou $\mathrm{Corr}[X_i, X_j]$. Pelas propriedades da covariância é uma matriz simétrica [a] pois $a_{ij} = a_{ji}$ e positivo-definida [b]

[a] Se M é simétrica, pelo Teorema Espectral da Álgebra Linear existe uma matriz O ortogonal tal que OMO^t é diagonal.

[b] Dizemos que uma matriz quadrada A é positivo-definido se $v^t A v \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Esta positividade da matriz de covariância corresponde à positividade $\mathrm{Cov}[X] \geq 0$ de uma v.a. .

6.5 Teoria de Markowitz

O objetivo da **teoria da carteira de Markowitz** – também conhecido como **Modelo da Média-Variância** – é alocar de forma ótima recursos financeiros entre diversos ativos de renda variável: em linguagem de finanças, determinar a composição ótima de uma **carteira** ou **portfolio** de ativos financeiros de renda variável. Vamos em seção mais adiante incorporar a renda fixa a este modelo e apresentar o CAPM (Capital Asset Pricing Model).

Vamos formular o problema de como alocar uma riqueza inicial x_0 entre ativos de renda variável com retornos $R_1, \ldots, R_n$. Usando a notação da Definição 6.4 da p.157, vamos começar calculando o risco e o retorno da carteira Π. Mais precisamente, fixado Π, definimos a v.a.

$$X_\Pi = \pi_1 R_1 + \cdots + \pi_n R_n = \sum_{i=1}^{n} \pi_i R_i,$$

onde

$$\pi_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1.$$

Do mesmo modo que fizemos para cada ativo, o **retorno médio da carteira** será:

$$E[X_\Pi] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \pi_i R_i\right] = \sum_i \pi_i E\left[R_i\right]. \tag{6.1}$$

O **risco da carteira** será dado por $\mathrm{StDev}[X_\Pi]$, que pode ser calculado tirando a raiz quadrada de $\mathrm{Var}[X_\Pi]$. Para simplificar notação, definimos $\mu_i = E[R_i]$ e consideramos uma carteira com apenas dois ativos com retornos R_1 e R_2:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}[X_\Pi] &= E[\{X_\Pi - E[X_\Pi]\}^2] \\
&= E\left[\{\pi_1 R_1 + \pi_2 R_2 - E[\pi_1 R_1 + \pi_2 R_2]\}^2\right] \\
&= E\left[\{\pi_1(R_1 - \mu_1) + \pi_2(R_2 - \mu_2)\}^2\right] \\
&= \pi_1^2 E[(R_1 - \mu_1)^2] + \pi_2^2 E[(R_2 - \mu_2)^2] \\
&+ 2\pi_1\pi_2 E[(R_1 - \mu_1)(R_2 - \mu_2)]] \\
&= \pi_1^2 \operatorname{Cov}[X_1, X_1] + 2\pi_1\pi_2 \operatorname{Cov}[X_1, X_2] + \pi_2^2 \operatorname{Cov}[X_2, X_2] \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} \pi_i \pi_j \operatorname{Cov}[X_i, X_j].
\end{aligned} \tag{6.2}$$

O caso geral com n ativos pode ser feito *mutatis-mutandis* para o caso $n = 2$ acima. Finalizamos colocando em notação matricial. Se Π é o vetor (coluna) que representa a carteira e Π^t o vetor transposto (linha), usando a matriz de covariância,

$$\operatorname{Var}[X_\Pi] = \Pi^t \operatorname{Cov}[R_1, \ldots, R_n]\Pi.$$

Desta forma o risco da carteira pode ser calculado à partir dos coeficientes da matriz de covariância dos ativos. Como já tinhamos observado, por ser uma variância, o resultado é sempre positivo: assim a matriz de covariância é dita positivo-definida. Note também que é uma função quadrática – um polinômio do segundo grau em em função das variáveis $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ – pois aparecem termos em π_i e em π_i^2 apenas.

Agora podemos formular os dois problemas básicos da Teoria da carteira de Markowitz, problemas de **otimização com restrição**. Na linguagem da chamada **programação matemática** temos uma função **objetivo** para ser maximizada ou minimizada e uma (ou mais) restrições. Existem diversos métodos numéricos para se fazer isso e neste texto não entramos nos métodos, deixando para o leitor usar pacotes de otimização de alguma linguagem ou de planilhas eletrônicas (todas possuem métodos de otimização com restrição implementados).

- Fixe um risco máximo σ_0. Determine Π tal que $\operatorname{Var}[X_\Pi] \le \sigma_0$ (restrição) e $E[X_\Pi]$ (função objetivo) seja o máximo possível. Neste problema a função objetivo é linear e a restrição não é (é quadrática).

- Fixe um retorno mínimo μ. Determine Π tal que $E[X_\Pi] \ge \mu$ (restrição) e $\operatorname{Var}[X_\Pi]$ (função objetivo) seja a menor possível. Neste problema a função objetivo é não linear (quadrática) e a restrição é linear.

Vamos rever a Figura 6.1 da p.154, quando representamos 6 ativos de renda variável no gráfico risco $\times$ retorno. Qual figura seria obtida variando o vetor $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in [0, 1]^6$ com $\sum_i \pi_i = 1$ e marcando os pontos $(\operatorname{StDev}[X_\Pi], E[X_\Pi])$? Vamos ver em alguns exemplos e depois retornamos à teoria. Vamos usar a variância, ao invés do desvio-padrão, como medida de risco para não usar a raiz quadrada e facilitar as contas. Note que a comparação de quem possui mais ou menos risco é preservada por esta troca (pois a função raiz quadrada é estritamente crescente).

Exemplo 6.8 (Redução de Risco pela Diversificação) *Suponha que dois ativos tenham correlação zero (e portanto covariância zero). Suponha que ambos possuam o mesmo retorno e mesmo risco.*

(a) Compare o risco (medido em StDev*) e o retorno de investir tudo em um dos ativos ou dividir metade dos recursos em cada ativo.*

(b) Repita a análise para n ativos não correlacionados entre si.

Solução: (a) Seja $\Pi = (0.5,\ 0.5)$, metade em cada ativo. Claro que o retorno da carteira Π e do investimento em somente um dos ativos será o mesmo. Suponho que a variância de ambos é σ^2, e como a covariância é zero, pela equação 6.2, temos que

$$\mathrm{Var}[X_\Pi] = \sigma^2(0.5)^2 + 0 \cdot (0.5)(1-0.5) + \sigma^2(1-0.5)^2 = 2(0.5)^2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Logo, o risco da carteira é $\mathrm{StDev}[X_\Pi] = \sigma/\sqrt{2} \approx 0.7\sigma$: o risco da carteira é reduzido para 70% do risco da aplicação em um único ativo, demonstrando a redução de risco.

(b) Neste caso a carteira terá variância (verifique)

$$\mathrm{Var}[X_\Pi] = n(1/n)^2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Logo $\mathrm{StDev}[X_\Pi] = \sigma/\sqrt{n}$. Como $1/\sqrt{n}$ é decrescente em n, e como vale 1 para $n = 1$, fará o risco reduzir com aumento de n. Mais ainda, se $n \to \infty$ o risco vai para zero; o efeito de redução de risco pela **diversificação** dos investimentos. ■

Exemplo 6.9 (Carteira com 2 ativos: Risco × Retorno) *Considere 2 ativos cujo retorno e risco são dados pela tabela abaixo.*

	R_1	R_2
Retorno	3	4
*Risco (*Var*)*	1	2

Determine a equação da curva no gráfico risco (em Var*) × retorno de carteiras com estes dois ativos sob 3 cenários diferentes:*

(a) covariância 1*;* *(b) covariância* 0*;* *(c) covariância* -1.

(d) Identifique geometricamente qual o tipo de função.

(e) Em qual dos cenários é possível reduzir mais o risco? Justifique com a ideia conceitual de covariância.

(f) Refaça com covariância 2.

Solução: Dado $\Pi = (\pi_1, \pi_2)$, vamos simplificar a notação definindo $t = \pi_1$ e portanto $\pi_2 = 1 - t$. Seja $s = \mathrm{Cov}[R_1, R_2]$. Usando as equações 6.1 e 6.2, temos que

$$E[X_\Pi] = 3t + 4(1-t) = 4 - t,$$

$$\mathrm{Var}[X_\Pi] = 1t^2 + st(1-t) + 2(1-t)^2 = (3-s)t^2 + (s-4)t + 2.$$

Assim podemos representar a curva parametrizada por $t \in [0,\ 1]$ os pontos gerados pela carteira X_Π no gráfico risco $\times$ retorno:

$$c(t) = ((3-s)t^2 + (s-4)t + 2,\ 4-t). \tag{6.3}$$

Agora vamos identificar esta curva parametrizada. Como $y = E[X_\Pi]$, $t = 4 - y$. Como $\text{Var}[X_\Pi] = x$, obtemos uma equação do segundo grau, e portanto uma **parábola** cuja equção é:

$$x = (3-s)y^2 + (7s-20)y + 34 - 12s.$$

Como $3 - s > 0$ para $s = -1, 0, 1, 2$, nos 4 casos, a parábola cresce na direção x. Note que a parábola está na direção do eixo x pois é da forma $x = ay^2 \cdots$, com $a > 0$, ao invés da forma usual $y = ax^2 + \cdots$, em que ela está direcionada na direção do eixo y.

Utilizando a equação (6.3), geramos um gráfico para cada $s = -1, 0, 1, 2$ variando t no intervalo $[0, 1]$ e obtemos a Figura 6.3. Os pontos extremos representam os dois ativos. Exploramos o caso geral de forma teórica no Exercício 18 da p.176.

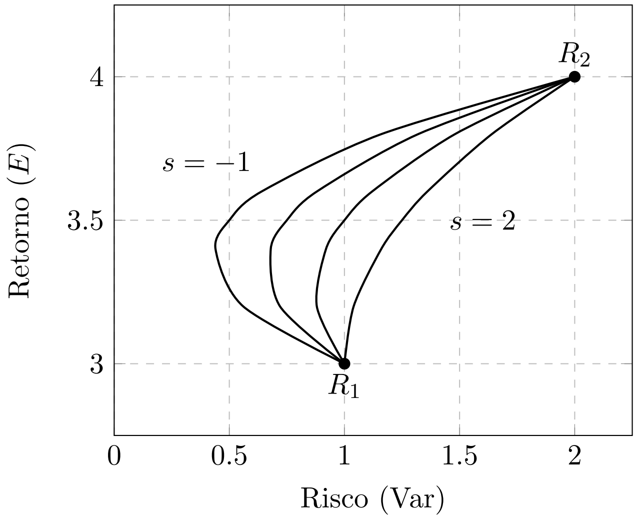


Figura 6.3: Diversificação

Note que a curva que reduz mais o erro é quando a covariância é negativa, pois a perda em um ativo é compensada pelo ganho no outro, reduzindo o risco mesmo com a queda de um deles. Conseguimos, combinando adequadamente os dois ativos, reduzir o risco abaixo de 0.5, metade do risco associado ao ativo com maior risco. A medida que a covariância aumenta, este efeito de redução de risco diminui, embora mesmo com covariância zero observamos redução no risco, conforme ilustrado no Exemplo 6.8. Mesmo com covariância positiva, se for pequena, ainda temos redução do risco pela diversificação (no gráfico $s = 1$). No entanto em algum ponto a covariância pode ser tão grande (neste exemplo em $s = 2$) que não se reduz o risco com diversificação. ■

Lema 6.10: Risco-Retorno de 2 ativos é uma Parábola ou Hipérbole

Considere 2 ativos quaisquer e uma carteira X_Π formada por estes dois ativos. Então a curva no gráfico risco × retorno de pontos da carteira X_Π pertence a uma:
(a) **parábola** na direção do eixo x caso risco seja medida em **variância**.
(b) **hipérbole** na direção do eixo x caso risco seja medida em **desvio-padrão**.

Prova: Comece relendo a solução do exemplo anterior, pois os elementos deste prova estão lá. Vamos usar $c_1, c_2, \ldots$ para os valores (constantes) das médias, variâncias e covariância, e $C_1, C_2, \ldots$ para soma/produto/divisão/subtração destas constantes entre si. Pelas equações 6.1 e 6.2, a média carteira é dada pelo polinômio do 1º grau

$$E[X_\Pi] = c_1 t + c_2(1-t) = C_1 t + c_2,$$

e a variância pelo polinômio do 2º grau

$$\text{Var}[X_\Pi] = c_3 t^2 + 2c_4 t(1-t) + c_5 t^2 = C_2 t^2 + C_3 t + C_4.$$

Como $y = E[X_\Pi] = C_1 t + c_2$, obtemos que

$$t = \frac{y - c_2}{C_1}, \quad \text{uma relação linear entre } t \text{ e } y.$$

Como $x = \text{Var}[X_\Pi] = C_2 t^2 + C_3 t + C_4$, fazendo a substituição de t utilizando a equação acima vamos obter que

$$x = C_5 y^2 + C_6 y + C_7,$$

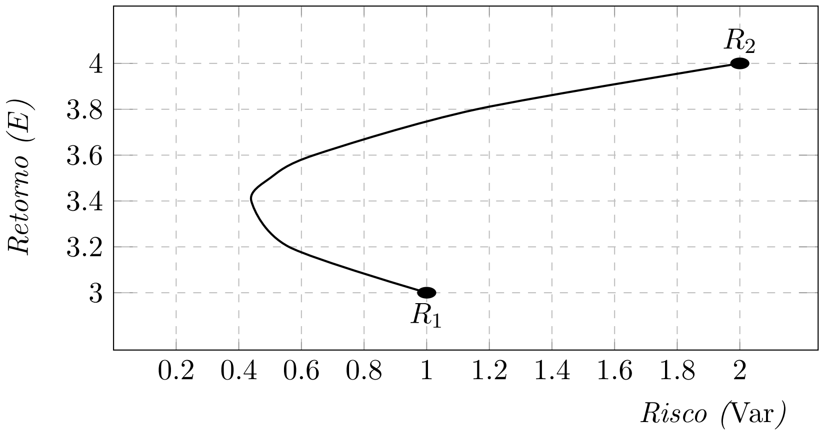
ou seja, $(x, y) = c(t) = (\text{Var}[X_\Pi],\ E[X_\Pi])$ pertence a uma parábola, completando (a).

(b) Como $\text{StDev}[X_\Pi] = \sqrt{\text{Var}[X_\Pi]}$, vamos ter que se $\widetilde{x} = \text{StDev}[X_\Pi] = \sqrt{x}$, pois $x = \text{Var}[X_\Pi]$. Logo

$$\widetilde{x}^2 = x = C_5 y^2 + C_6 y + C_7,$$

a equação de uma hipérbole. ∎

Exemplo 6.10 (Carteira com 2 ativos) *Reproduzimos na figura abaixo o risco × retorno de dois ativos com covariância -1 do Exemplo 6.9. No gráfico marcamos os ativos R_1, R_2 bem como uma linha correspondente aos pontos da carteira X_Π que combina estes 2 ativos.*



Determine utilizando o gráfico acima, entre todas carteiras formadas com estes 2 ativos,
(a) com risco máximo 0.6*, qual o maior retorno possível?*
(b) com risco máximo 1.2*, qual o maior retorno possível?*
(c) com risco máximo 2.2*, qual o maior retorno possível?*
(d) qual o menor risco possível? Com qual retorno?
(e) com retorno mínimo 3.9*, qual o menor risco possível?*

Solução: (a) Note que com riscos menores que 0.6 o retorno é ainda menor. Assim fixado este risco máximo, devemos buscar na realidade carteira exatamente com este risco. Observamos 2 pontos no gráfico com risco $x = 0.6$: um com retorno $y = 3.2$ e outro $y = 3.6$. Logo o maior retorno para este risco é 3.6. Note que o mesmo ocorre para riscos entre 0.42 e 1.

(b) Novamente, riscos menores que 1.2 dão retorno menor. Com risco $x = 1.2$ temos somente uma carteira com retorno 3.8.

(c) Note que **não** existe carteira com risco 2.2. Assim temos que buscar ponto com risco menor, mas com maior retorno. Concluímos que é o ponto com risco 2 e retorno 4.

(d) O menor risco possível será dado pelo **vértice** da parábola. Risco cerca de $x = 0.43$ e retorno $y = 3.4$.

(e) Retornos maiores que $y = 3.9$ fazem aumentar o risco. Assim com retorno $y = 3.9$ obtemos risco cerca de $x = 1.6$. ■

O que ocorre quando combinamos 3 ativos? Vamos ver no próximo exemplo.

Exemplo 6.11 (Bala de Markowitz) *Considere 3 ativos cujo retorno e risco são dados pela tabela abaixo.*

	R_1	R_2	R_3
Retorno	2.5	4.5	3
Risco (Var)	1.25	2.75	2.5

Além disso suas covariâncias são:

$$\text{Cov}[R_1, R_2] = -0.75, \quad \text{Cov}[R_1, R_3] = -1.25, \quad \text{Cov}[R_2, R_3] = 1.$$

Utilizando os valores de $E[X_\Pi]$ *e* $\mathrm{Var}[X_\Pi]$ *com* $\Pi = (s,\ t,\ 1-(s+t))$, $s \in [0,1]$ *e* $t \in [0,\ 1-s]$, *determine vários pontos no gráfico de risco* $\times$ *retorno da carteira* X_Π.

Solução: Com auxílio de software, utilizando as fórmulas acima geramos Figura 6.4. Note que agora temos uma **região** e não somente uma curva pois temos 2 parâmetros variando. A região se parece com a ponta de uma bala, e recebe o nome de **bala de Markowitz**. Para auxiliar o entendimento marcamos pontos representando os 3 ativos.

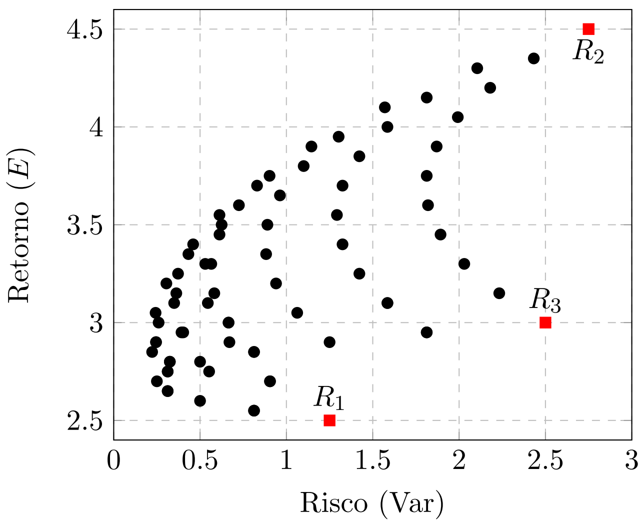


Figura 6.4: Bala de Markowitz com 3 ativos

Note como obtemos, por combinação apropriada destes 3 ativos, retornos maiores com risco menor. ■

Provamos no Lema 6.10 que para 2 ativos obtemos uma parábola no gráfico risco-retorno. Pode-se ver na Figura 6.4 que a a fronteira da regiao preenchida pelas carteiras formadas por 3 ativos se parece com uma parábola; isto é verdade mas omitimos a prova por fugir ao escopo deste livro (Álgebra Linear avançada).[5]

Exemplo 6.12 (Carteira com 3 ativos) *Considere os 3 ativos do Exemplo 6.11 e o gráfico de risco-retorno das carteiras formadas por estes ativos representadas na Figura 6.4. Determine utilizando esta figura, entre todas carteiras formadas com estes 3 ativos,*

(a) com risco máximo 0.5, *qual o maior retorno possível?*
(b) com retorno mínimo 3, *qual o menor risco possível?*
(c) com retorno mínimo 2.6, *qual o menor risco possível?*

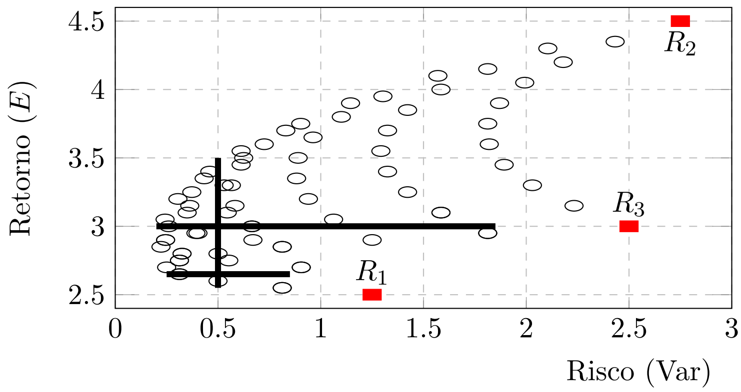
Solução: (a) Aqui, ao contrário dos 2 ativos, temos uma infinidade de carteiras (veja figura abaixo) com risco $x = 0.5$. Marcamos no gráfico o segmento com $x = 0.5$. As

[5] Robert C. Merton; An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. The Journal of Financial and Quantitative Analysis. Vol. 7, No. 4 (1972), pp. 1851-1872

carteiras com maior retorno estão na parte final superior deste segmento, e o retorno máximo é de cerca de 3.5.

(b) Na figura abaixo marcamos com um segmento as carteiras com retorno 3. Entre elas o menor risco está na parte inicial à esquerda: 0.2

(c) Note que com retorno 2.6 os risco são **maiores** que com retorno, por exemplo 3. Após alguma reflexão, ficará claro que o **vértice** da parábola terá retorno em torno de 6 com risco 2 (resposta do item (b)), que satisfaz a pergunta (c) também.



■

Baseados nos exemplos apresentados, observamos que de todos os pontos da **bala de Markowitz**, existe uma região, a fronteira da bala em sua parte superior, onde estão as carteiras com melhor risco-retorno. Esta região é chamada de **fronteira eficiente**. Apresentamos a representação na Figura 6.5.

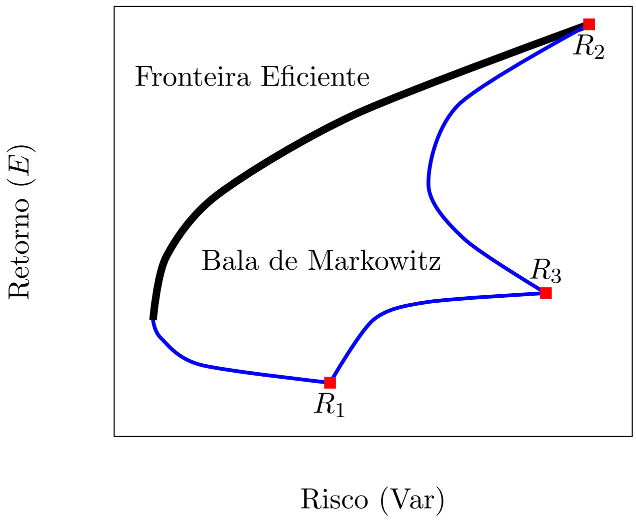


Figura 6.5: Fronteira Eficiente na Bala de Markowitz

Definição 6.11: Bala de Markowitz

Dados n ativos com risco e a carteira X_Π formada com eles, definimos como **bala de Markowitz** a região do gráfico risco × retorno

$$B = \left\{ (\text{Var}[X_\Pi],\ E[X_\Pi]) \in \mathbb{R}^2;\ \Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in [0,\ 1]^n;\ \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \right\}.$$

Definição 6.12: Fronteira Eficiente

Dentre os pontos da bala de Markowitz B, a **fronteira eficiente** Γ são os pontos que **maximizam** o retorno para cada risco de carteira pertencente B. Em linguagem matemática, $(x, y) \in \Gamma$ se, e somente se, $(x, y) \in B$ e $y \geq z$, para todo $(x, z) \in B$.

A fronteira eficiente são os pontos do "topo" da bala, conforme mostra a Figura 6.5.

Concluímos que no **Modelo de Carteira de Markowitz**, as carteiras compostas **somente com ativos de risco** com melhor risco-retorno estarão sempre na **fronteira eficiente** da **bala de Markowitz**

6.6 Modelo CAPM

Vamos agora **incluir a renda fixa** na Teoria de carteira de Markowitz para obter o chamado **Modelo CAPM** (Capital Asset Pricing Model). Isto será feito incorporando o índice de Sharpe (Definição 6.3 da p.155) na análise da melhor carteira para se investir. A questão é: Dentre todos as carteiras, qual a com **maior índice de Sharpe**? Vamos resolver isto com auxílio do lema abaixo.

Lema 6.13: Índice de Sharpe e Geometria

Dados n ativos com risco e a carteira X_Π formada com eles, considere a reta s que passa pelos pontos $(\text{StDev}[X_\Pi],\ E[X_\Pi])$ e $(0,\ r_0)$, onde r_0 é o retorno do ativo de renda fixa. Então o índice de Sharpe da carteira X_Π é o coeficiente angular da reta s.

Prova: Seja $\sigma = \text{StDev}[X_\Pi]$ e $r = E[X_\Pi]$. Assim a reta passa por $(\sigma,\ r)$ e $(0,\ r_0)$. Como o coeficiente angular de s é o quociente de $\Delta y/\Delta x$ de dois pontos dados,

$$\text{Coef. angular de } s = \frac{\sigma - 0}{r - r_0} = \frac{\sigma}{r - r_0} = \text{Sharpe}(X_\Pi).$$

■

Em função deste lema, para determinar a carteira com maior índice Sharpe – chamada de **carteira ótima** – dentro da bala de Markowitz temos que determinar a reta com **maior** coeficiente angular que parte da carteira livre de risco $R = (0,\ r_0)$ e vai para alguma ponto da bala. Observando a Figura 6.6 fica claro que a carteira ótima será o ponto P de tangência desta reta com a fronteira eficiente. **Atenção** que neste gráfico medimos o risco em StDev para poder ver o índice de Sharpe de forma geométrica no gráfico conforme o lema. Assim, como já observamos, neste gráfico a fronteira eficiente está contida em uma **hipérbole**.

Definição 6.14: Capital Market Line e Carteira Ótima

Chamamos de **Capital Market Line** a reta que passa pelo ativo sem risco (ponto $(0,\ r_0)$) e tangencia a fronteira eficiente. Este ponto de tangência, que corresponde a carteira com o maior índice Sharpe, é conhecido como **carteira ótima** ou **carteira tangente** ou **capital market portfolio**.

Por fim podemos montar carteiras mistas, com renda fixa R mais um pouco da carteira ótima P. Se P é a carteira ótima com retorno μ e $\text{StDev}[P] = \sigma$ e R é o ativo sem risco de renda fixa, que possui média r_0 e risco 0, a carteira $C = tR + (1-t)P$, $t \in [0, 1]$, vai ter como média: $y = tr_0 + (1-t)\mu$, e risco $x = (1-t)\sigma$. Ou seja, os pontos C desta carteira vão pertencer ao segmento de reta parametrizado por $t \in [0, 1]$

$$t(0,\ r_0) + (1-t)(\sigma, \mu).$$

Assim, carteiras compostas por renda fixa + carteira ótima vão corresponder a pontos

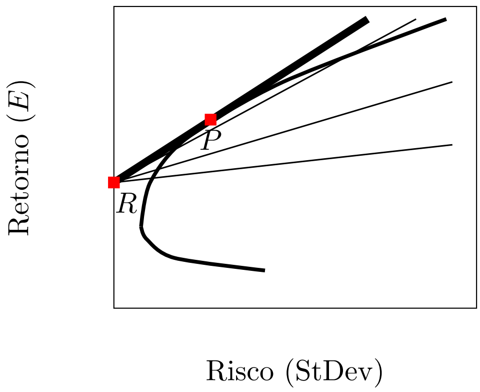


Figura 6.6: Capital Market Line e Carteira Ótima

no segmento que conecta R e P na Figura 6.6. Desta forma podemos montar carteiras com risco variando de zero até σ (risco da carteira ótima), mas sempre com maior retorno possível e índice de Sharpe máximo.

Por fim podemos, selling short (ficando vendido, isto é, com quantidade negativa de ações – ver Definição 1.3 da p.6) na carteira P ótima, conseguir montar carteiras **depois do ponto P**, com risco e retorno ainda maiores, mas sempre com índica Sharpe máximo.

6.7 Gerando Carteiras Aleatórias

Para se fazer simulações de carteiras precisamos sortear carteiras aleatórias com mesma probabilidade. A questão é: como sortear uma carteira $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ com mesma probabilidade para todas carteiras possíveis (distribuição uniforme)? Começamos com uma definição.

Definição 6.15: simplex unitário

Chamamos de **simplex unitário** o subconjunto Δ^n do $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\Delta^n = \left\{ (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \mathbb{R}^n; \qquad \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \quad \text{e} \quad \pi_i \geq 0 \right\}.$$

Associamos uma carteira (sem alavancagem) a cada elemento do simplex unitário Δ_n. Outra associação é identificar Δ_n com o espaço de todas probabilidades possíveis em um conjunto com n elementos. Mais precisamente, se Ω é um conjunto com n elementos, então $(\Omega, \mathcal{P})$ é um espaço de probabilidade distinto para cada $\mathcal{P} \in \Delta_n$. Esta visão é importante em problemas aplicados onde queremos minimizar alguma função de $\mathcal{P}$ no espaço de todas $\mathcal{P}$ possíveis. Com esta identificação podemos escrever que queremos algum $\mathcal{P}_0 \in \Delta_n$ tal que

$$\min_{\mathcal{P} \in \Delta_n} f(\mathcal{P}) = f(\mathcal{P}_0)$$

Lema 6.16: distribuição uniforme no simplex unitário

O algoritmo abaixo sorteia $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \Delta_n$ com distribuição uniforme.

1. Sorteie x_i, $i = 1, \ldots n - 1$ uniformemente em $[0, 1]$.
2. Ordene os x_i's, trocando os índices, de forma que $x_i \leq x_{i+1}$. Defina $x_0 = 0$ e $x_n = 1$.
3. Defina $\pi_i = x_i - x_{i-1}$ para $i = 1, \ldots, n$.

Prova: Ver [Dev]. ■

Assim Δ_2 é o segmento de reta obtido pela interseção do 1o quadrante do $\mathbb{R}^2$ (todos positivos) com a reta $x + y = 1$; Δ_3 é o triângulo obtido pela interseção do 1o octante do $\mathbb{R}^3$ (todos positivos) com o plano $x + y + z = 1$ (plano). Sortear de maneira uniforme é escolher um ponto do segmento, do triângulo de maneira uniforme.

Observação 6.3 *Um algoritmo que **não** funciona para sortear (de maneira uniforme) elementos de Δ_n é:*

1. *Sorteie x_i, $i = 1, \ldots n$ uniformemente em $[0, 1]$.*

2. Defina $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$ (a soma deles) e defina $p_i = x_i/s$ (normalização dos x_i' s).

Embora $\sum p_i = 1$, a distribuição ***não*** *será uniforme. Pode-se ver isso para $n = 2$ verificando que se X, Y são independentes com distribuição uniforme em $[0, 1]$, $\tilde{X} = X/(X + Y)$ terá densidade (não uniforme):*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)^2}, & \textit{para } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2x^2}, & \textit{para } \frac{1}{2} < x \le 1, \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Observando o gráfico da densidade, nota-se a concentração em torno de $1/2$. Por exemplo, $P(0.5 < \tilde{X} < 0.6) \approx 0.16$ é três vezes maior que $P(0.9 < \tilde{X} < 1.0) \approx 0.05$ Veja o projeto computacional na página 178.

6.8 Comentários Finais

Os modelos de Markowitz e sua extensão, o CAPM, são modelos da década de 60 do século passado, cujos pontos fracos são bastante conhecidos:

- Baseados na hipótese que o retorno dos ativos segue uma distribuição normal pois basea-se em análise da média-variância.
- Assume que a covariância é constante no tempo. Como o tempo de investimento é em horizonte maior nestes modelos – não são modelos de day trade – esta hipótese não é razoável.
- Tendem a concentrar a carteira em poucos ativos, indo de encontra a ideia de diversificação de ativos na montagem da carteira.

Na prática os modelos que apresentamos, nesta forma pura, são pouco utilizado mas, ainda assim, são uma referência na literatura, sendo um ponto de partida de modelos mais complexos.

De fato existem modelos de covariância estocástica, modelos que não assumem nenhuma distribuição em particular para os retornos, bem como outras formas de calcular o risco como pela chamada **entropia** da carteira.

6.9 Exercícios

1. Prove que dadas v.a. X e Y com 1º e 2º momentos finitos,

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

2. Sabendo que a média de S é 50, usando a desigualdade de Chebyshev (Teorema 6.2 da p.152), complete as lacunas abaixo:

   (a) Se $\sigma = 0.2$, então a probabilidade que $|S - 50| > 0.75$ é no máximo _____.

   (b) Se $\sigma = 0.4$, então $I = [\_\_\_\_\_]$ é o menor intervalo tal que a probabilidade que S pertence a I é no mínimo 80%.

3. Vamos comparar a estimativa dada pela desigualdade de Chebyshev (Teorema 6.2 da p.152), que não assume nenhuma hipótese sobre a distribuição da v.a. X, com estimativa sabendo mais sobre a v.a. Por exemplo, sabendo que a distribuição de X é **normal**, a probabilidade de ficar próximo à média aumenta. Supondo $\mu = E[X]$ e $\sigma = \mathrm{StDev}[X]$, verifique isso completando a tabela abaixo.

	X qualquer	X normal
$P\{\lvert X-\mu\rvert < \sigma\}$		
$P\{\lvert X-\mu\rvert < 2\sigma\}$		
$P\{\lvert X-\mu\rvert < 3\sigma\}$	$> 88.8\%$	

4. Um modelo utilizado (apresenta algumas ideias do TRI (Teoria de Resposta ao Item, utilizado no ENEM) para se normalizar notas em provas com muitos alunos é considerar a média μ e o desvio-padrão σ das notas de todos alunos e calcular a nota normalizada N_M de um aluno que tirou a nota p na prova por

$$N_M = 500 + 100 \cdot \frac{p - \mu}{\sigma}.$$

   Assim quem ficou com nota p igual a média fica com nota $N_M = 500$, e se $p = \mu + \sigma$ a nota é $500+100 = 600$; de forma geral, começando com 500, ganha-se 100 pontos a mais (a menos) a cada desvio-padrão acima (abaixo) da média. Use a desigualdade de Chebyshev para estimar qual o percentual de alunos com nota:

   (a) entre 380 e 620. (b) entre 300 e 700.

   Supondo que a probabilidade é simétrica com relação à média ($P\{X > \mu + k\} = P\{(X < \mu - k\}$) estime qual o percentual de alunos com nota:

   (c) acima de 900. (d) acima de 1000. (sim, isso é possível!)

5. Explique qual a justificativa para a fórmula do índice de Sharpe.

6. Explique o significado geométrico do índice Sharpe em um gráfico de risco retorno.

7. Considere os ativos da Figura 6.7.

   (a) Qual ativo é melhor para se investir entre o (2), (5) e (6)?

   (b) Qual ativo é melhor para se investir entre o (3) e o (5)?

8. Considere os ativos da Figura 6.7. Sabendo que (0) é o ativo de renda fixa, e que (i) com $i \geq 1$ representa um ativo de renda variável, **ordene** os ativos de renda variável pelo seu índice Sharpe (note que propositalmente não colocamos escalas no gráfico).

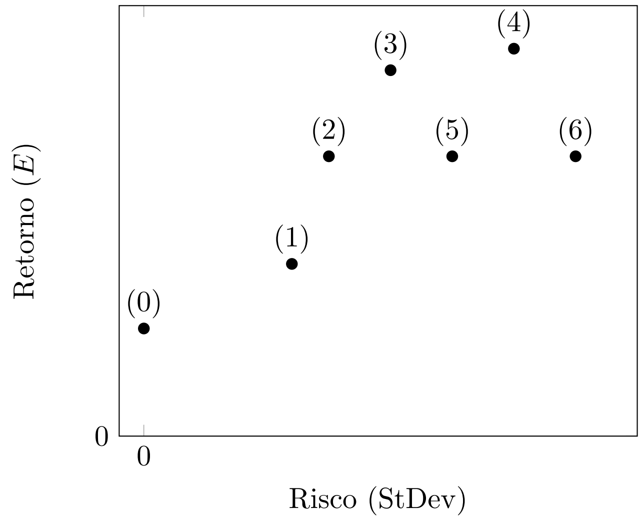


Figura 6.7: Classifique pelo Índice de Sharpe os ativos

9. Pesquise sobre o uso da **entropia** como forma de medir risco em finanças. Aproveite para ler um pouco sobre a **Econofísica**.

   Uma referência (facilmente encontrável na internet): "Applications of Entropy in Finance: A Review". Rongxi Zhou, Ru Cai and Guanqun Tong; Entropy (2013), Vol. 15, 4909-4931.

10. Prove que se $\text{Var}[Y] = 0$ então:

    (a) Y é constante igual a $E[Y]$.

    (b) Para toda v.a. X, $\text{Cov}[X, Y] = 0$.

11. Dada uma v.a. X definimos a sua padronização ou normalização por

$$Z_X = \frac{X - E(X)}{\text{StDev}[X]}.$$

    Prove que:

    (a) Z_X tem média zero e variância 1. (b) $\text{Cov}[Z_X, Z_Y] = \text{Corr}[X, Y]$.

12. O que é o gráfico de dispersão de duas v.a. ? Qual será o aspecto do gráfico de dispersão se a covariância das duas v.a. for grande?

13. Suponha que a correlação entre duas v.a. é 1. Vamos provar que a relação entre elas é linear: existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $Y = aX + b$. Para isto siga o roteiro:

    (a) Suponha que $E[X] = E[Y] = 0$, $\text{StDev}[X] = \sigma_X$, $\text{StDev}[Y] = \sigma_Y$ e $\text{Corr}[X, Y] = 1$. Fixe $b = \sigma_Y/\sigma_X$. Prove que $E[(Y - bX)^2] = 0$. Conclua que $Y = bX$, que conclui a prova deste caso.

    (b) No caso geral considere $\widetilde{X} = X - E[X]$ e $\widetilde{Y} = Y - E[Y]$. Use o resultado anterior para concluir que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $Y = bx + a$. Determine os valores de a, b em função das médias e desvios-padrão.

14. Vamos provar que quando a correlação $\rho = \text{Corr}[X, Y]$ fica próxima de 1, Y fica "próximo" de $aX + b$ no sentido que o erro (quadrático) $E[\{Y - (aX + b)\}^2]$ vai para zero quando $\rho \to 1^+$.

    (a) Suponha que $E[X] = E[Y] = 0$ e $\rho = \text{Corr}[X, Y]$. Prove que (faça a conta)

    $$E\left[\left(\frac{Y}{\sigma_Y} - \frac{X}{\sigma_X}\right)^2\right] = 2(1 - \rho).$$

    Qual o valor de a, b neste caso?

    (b) No caso geral considere $\widetilde{X} = X - E[X]$ e $\widetilde{Y} = Y - E[Y]$. Use o resultado anterior para concluir que existe $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $E[Y - (aX + b)]$ vai para zero quando $\rho \to 1^+$.

15. O que é a matriz de covariância? Porque ela é simétrica?

16. Qual o valor máximo da $\text{Cov}[X, Y]$ de duas v.a. X, Y quaisquer?

17. Considere dois ativos não-correlacionados com risco (variância) σ_1^2 e σ_2^2. Determine qual a composição da carteira $\Pi = (\pi_1,\ \pi_2)$ composta por estes ativos com **menor** risco possível e qual o valor deste risco (em função de σ_1, σ_2). Conclua que aqui obtemos a redução de risco por diversificação, tal qual o Exemplo 6.8 da p.164.

18. Refaça o exercício anterior mas no caso geral, supondo que a correlação entre os dois ativos é $\rho \in [-1,\ 1]$. Será necessário dividir a análise em dois casos. Qual a condição em ρ para que o risco da carteira seja **estritamente** menor que de ambos os riscos dos ativos. Este exercício é a versão teórica do Exemplo 6.9 da p.164.

19. Prove que se ρ_{ij} é a correlação entre X_i e X_j e $\sigma_i = \text{StDev}[X_i]$, então a variância da carteira $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ é dada por (somatório duplo)

    $$\text{Var}[X_\Pi] = \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i \pi_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j.$$

20. Suponha que $\sigma_{ij} = \text{Cov}[R_i,\ R_j]$, com R_i o retorno do ativo i. Defina a **covariância média** por

    $$\text{Cov}_M = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \sigma_{ij},$$

a soma de todos σ_{ij} com $i \neq j$ dividido pelo total $n^2 - n = n(n-1)$. Prove que para carteiras com com divisão igual de recursos entre n os ativos ($\pi_i = 1/n$), a variância da carteira converge para Cov_M quando $n \to \infty$.

21. É verdadeiro ou Falso:

    (a) Com dois ativos com riscos $\sigma_1 \neq \sigma_2$, sempre existe uma combinação destes ativos de forma a obtermos uma carteira com risco estritamente menor que $\min(\sigma_1,\ \sigma_2)$.

    (b) Se X pertence a fronteira eficiente de Markowitz, então para todo Y pertencente à bala de Markowitz com $E[X] = E[Y]$, temos que $\mathrm{StDev}[X] \leq \mathrm{StDev}[Y]$.

    (c) Se P é a carteira ótima do CAPM, $\mathrm{Var}[P] \leq \mathrm{Var}[Y]$ para todo Y na bala de Markowitz.

    (d) Se P é a carteira ótima do CAPM e R é o ativo de renda fixa, então a carteira $tP + (1-t)R$ não pertence à bala de Markowitz para todo $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 1$.

6.10 Projetos Computacionais

Cada projeto deve ser acompanhado de um relatório contendo detalhes da metodologia, escolha de parâmetros, fonte dos dados e resultados, incluindo figuras. O Código utilizado deve aparecer num apêndice do relatório ou incorporado ao relatório para quem usar ambiente do tipo `Jupyter`.

O risco e o retorno partindo da série temporal pode ser obtido utilizando a Subseção 4.1.1 da p.88. A matriz de covariância de forma análoga ou utilizando pacotes de softwares.

Colocamos entre parênteses o objetivo de cada Projeto.

1. (observar variação no risco e retorno com variação do tempo do investimento em si, e com a passagem do tempo). Partindo da série temporal de 10 ações distintas ao longo de pelo menos 4 anos, calcule o o risco e retorno:

   (a) diário; (b) semanal; (c) mensal.

   Usar janela móvel de 1 ano para risco retorno diário e semanal (poucos dados para o mensal) e ver como varia ao longo do tempo (graficamente), o risco e retorno acima para uma das ações.

2. (bala de Markowitz com carteiras de ações negociadas) Obtenha o histórico de 10 ações de setores diversos e determine os retornos médios e a matriz de covariância. Sorteie os pesos da carteira (ver Seção 6.7 da p.172) e marque um ponto no gráfico de risco retorno. Gerando muitas carteiras, verifique a bala de Markowitz no gráfico.

3. (bala de Markowitz com carteiras aleatórias) Crie 20 ativos aleatórios (sorteie retornos de cada ativo e a faça o sorteio de uma matriz de covariância[6]). Sorteie

[6]Pode-se gerar uma matriz de covariância C do seguinte modo: gere uma matriz diagonal D com os

os pesos da carteira (ver Seção 6.7 da p.172) e marque um ponto no gráfico de risco retorno. Gerando muitas carteiras, verifique a bala de Markowitz no gráfico.

4. (gráfico de dispersão) Pegue um conjunto de 4 séries temporais de ações, como dois grupos de 2 ativos do mesmo setor (energia, financeiro, etc.). Acrescente ao grupo o do índice IBOVESPA. Gere um conjunto de **gráficos de dispersão** ou **scatter plot** dois a dois. Faça uma análise dos resultados obtidos e explique utilizando a teoria.

5. (Teoria de Markowitz) Aplicar a teoria de Markowitz após a escolha de 10 ativos negociados na bolsa brasileira. Isto é, obtenha o histórico de 10 ações de setores diversos. Determine os retornos médios e a matriz de covariância. Para cada risco máximo R, determinar a composição da carteira X_π ótima. Gerar um gráfico com valor de R no eixo x e o valor de π de 5 ativos com maior participação na carteira no eixo y. Assim podemos ver a variação na composição da carteira em função de R. Verificar o efeito de concentração de ativos no modelo de Markowitz. Gere um gráfico com pontos da bala e com pontos da fronteira ótima.

6. (Modelo CAPM) Aplicar o modelo CAPM numa cesta com 4 ações do mercado brasileiro. Isto é, obtenha o histórico de 4 ações de setores diversos. Determine os retornos médios e a matriz de covariância. Usando como referência a SELIC atual como retorno do ativo livre de risco, determine a carteira ótima do Modelo CAPM. Marque num gráfico risco-retorno o ponto ótimo e pontos da bala de Markowitz.

7. Use o algoritmo correto e o errado para gerar distribuições em Δ_3. Para enxergar o resultado em $\mathbb{R}^2$ projete Δ_3 no plano $x + y + z = 0$ que é paralelo ao plano $x+y+z = 1$ que contém Δ_3 e identifique este plano com o $\mathbb{R}^2$ conforme o seguinte roteiro:

   a) Prove que a projeção ortogonal em $x + y + z = 0$ é dado por $P(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x - y - z,\ 2y - x - z,\ 2z - x - y)$.

   b) Prove que $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{v} = -(1, 1, -2)$ é base ortogonal de $x + y + z = 0$. Logo as coordenadas (α, β) de um ponto (a, b, c) deste plano na base **ortonormal** $\{\vec{u}/\sqrt{2},\ \vec{v}/\sqrt{6}\}$ são: $\alpha = (b - a)/\sqrt{2}$ e $\beta = 3c/\sqrt{6}$.

   c) Assim $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que leva os pontos de Δ_3 no $\mathbb{R}^2$ sem modificar área é: $T(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = ((\pi_2 - \pi_1)/\sqrt{2},\ (2\pi_3 - \pi_1 - \pi_2)/\sqrt{6})$.

riscos dos n ativos (valores positivos) e uma matriz ortogonal Q aleatória para ter como matriz de covariância $C = QDQ^T$. Para gerar Q, pode-se gerar X $n \times n$ com entradas $N(0, 1)$ (normais com média 0 e variância 1) independentes e usar a decomposição $X = QR$ (algoritmo de ortogonalização de Gram-Schmidt) para gerar Q. Vai dar certo (quase sempre) se $\det X \neq 0$.

7

Gestão de Risco e Análise VaR

7.1 Introdução

Toda carteira com ativos financeiros envolve risco de perda de dinheiro. No capítulo anterior vimos como otimizar uma carteira em termos da relação risco versus retorno. A questão fundamental da **gestão de risco** é quantificar (em reais, dólar) o pior cenário de perda num horizonte de tempo determinado (1 dia, 10 dias, 1 mês, etc.) que uma carteira pode trazer com certo nível de confiança (probabilidade): o chamado **Valor em Risco**.

Definição 7.1: Valor em Risco (VaR)

Fixado um tempo futuro t (tipicamente 1 ou 10 dias, 1 mês) e probabilidade P (tipicamente 95%, 97.5%, 99%), o **Valor em Risco** ou **VaR** de uma carteira é a perda máxima que podemos ter com esta carteira ao fim do tempo t (tipicamente 1 dia, 1 mês, 1 ano) com nível de confiança (probabilidade) P. Dito de outro modo, existe a probabilidade (baixa) $1 - P$ (tipicamente 5%, 2.5% ou 1%) da perda ser superior ao VaR.

Dependendo VaR estar muito (ou baixo), o **gestor de risco** deve propor alterações nas posições da carteira de forma a chegar a um VaR apropriado. Para isto pode ser necessária uma análise do que está contribuindo mais para o VaR – risco cambial, taxa de juros ou de algum segmento do mercado (energia, petróleo, etc.) – e propor alterações na composição da carteira ou a compra de derivativos para reduzir a exposição a risco.

Um padrão utilizado no mundo todo é o VaR de 1 dia com 95% – em inglês *1-day 95% USDvalue-at-risk*. Nos EUA se diz que uma carteira possui "1-day 95% USDvalue-at-risk" de 3 mil, ou "1-month 99% USDvalue-at-risk" de 11 mil, etc.

As origens do VaR podem ser encontradas principalmente na década de 1950 nos trabalhos de Markowitz e outros. Um marco importante no crescimento do uso do VaR, incluindo do uso deste nome, deve-se ao empenho do banco J.P. Morgan em estabelecer uma medida standard de VaR ao final da década de 1980.

Uma das razões do sucesso da análise VaR é comunicar aos gerentes (não necessariamente com formação técnica), investidores e reguladores do mercado financeiro **de forma simples** a exposição a risco a que está submetida certa carteira, colocando de forma explícita um preço em reais (dólar) na perda máxima. Além disso valores máximos de exposição a risco podem ser reguladas por normas presentes em diversos mercados financeiros. Bancos, especialmente fundos de pensão, estão sujeitos a regulações neste sentido.

Para se determinar o VaR é necessário escolher um **modelo para os valores futuros do retorno da carteira.** Os 3 métodos mais importantes, e que vamos detalhar na sequência são:

1. Histórico: Modelar a distribuição futura baseada na série histórica.
2. Variância (Covariância): Supor que a distribuição futura é normal e estimar a volatilidade. Com base na curva normal pode-se obter os valores VaR.
3. Monte Carlo: Criar um modelo para o processo estocástico do valor da carteira e calcular sua distribuição futura utilizando o método de MonteCarlo.

Existem outras métricas de risco que vão utilizar a derivada com relação ao tempo (dados pelas gregas do mercado financeiro como gamma, vega, etc. Veja Seção 2.6 da p.44) da volatilidade, retorno, etc. que ficam ocultos nesta análise estática pois fixamos o tempo final. O mesmo VaR de carteiras diferentes pode esconder uma tendência ao aumento ou redução do mesmo ao longo do tempo. Assim a análise VaR é apenas um dos instrumentos para se fazer a Gestão de Risco, cuja definição encerra esta parte:

Definição 7.2: Gestão de Risco

A **Gestão de Risco** de uma carteira ou de uma operação de uma empresa ou, de forma mais geral, do setor financeiro de uma empresa consiste em monitorar os riscos de curto, médio e longo prazo de perda financeira da carteira (ou da operação ou da empresa) e propor operações que reduzam a exposição a risco, seja reposicionando a carteira ou comprando derivativos com risco na direção contrária (hedge) de forma a reduzi-lo. Este acompanhamento pode ser feito para garantir o cumprimento de normas de regulação externa ou de compliance internos. Um dos (longe de ser o único) seus instrumentos é a análise VaR.

7.2 Método Histórico

O Método Histórico para o cálculo do VaR é bastante utilizado, aparecendo em diversos lugares, como por exemplo em um folheto de um banco brasileiro sobre certo fundo:

> O VaR (Value at Risk) sintetiza a maior perda esperada dentro de um período de tempo e intervalo de confiança. A metodologia utilizada é a de simulação histórica para intervalo de 1 dia e nível de confiança de 95%.

O princípio deste método é que, do ponto de vista do risco, a história vai se repetir. O procedimento para se calcular o VaR é:

1. Fixada uma carteira (ou ativo) e o tamanho do histórico (por exemplo: últimos 6 meses, 1 ano, 5 anos), obter o **histórico** do valor desta carteira (ou ativo) e calcular a **série histórica de retornos** de certo período (diário, semanal, mensal, etc.).

2. Agora criamos "caixinhas" para contar os retornos, com mais precisão nos retornos negativos, pois as caixas não precisam ser do mesmo tamanho. Por exemplo:
   - Retornos positivos
   - Retornos no intervalo $[-1\%,\ 0\%)$.
   - Retornos no intervalo $[-2\%,\ -1\%)$.
   - Retornos no intervalo $[-2.5\%,\ -2\%)$.
   - Retornos no intervalo $[-3\%,\ -2.5\%)$.
   - Retornos abaixo de -3%.

3. Sabendo o número de retornos em cada caixa e o número total de retornos, podemos calcular o nível de confiança (a probabilidade) P da perda máxima ter um certo valor. Utilizando o exemplo acima, podemos calcular a probabilidade P da perda máxima ser 3%, ou ser 2.5%, ou ser 2%.

Note que se fixarmos o nível de confiança P, teremos que experimentar sobre qual tamanho das caixas nos permitirão calcular o VaR. No procedimento acima calculamos o P em função das caixas. Além disso somente as últimas caixas são relevantes para o cálculo do VaR, de forma que precisamos de uma resolução mais fina nestas caixas.

Exemplo 7.1 *Foram levantados retornos mensais de uma carteira e verificado a seguinte quantidade de retornos em alguns intervalos:*

Intervalo	*Quantos retornos*
entre -1% *e* -2%	*40*
menor que -2%	*60*

Determine toda análise VaR possível com estes dados sabendo que o número total de retornos é:

(a) 1000 com investimento inicial R\$2.000,00.

(b) 4000 com investimento inicial R\$5.000,00.

Solução: (a) São 60 em 1000 = 6% dos retornos menores que -2%. Como -2% de R\$2000 é R\$40, $100 - 6 = 94$, o VaR é de R\$40 com confiança 94%. Utilizando o outro dado, São 1000 em 1000 = 10% dos retornos menores que -1%. Como -1% de R\$2000 é R\$20, $100 - 10 = 90$, o VaR é de R\$20 com confiança 90%.

(b) Seguindo os modelo do item (a) obtemos que o VaR é de R\$100 com confiança 98.5% e o VaR é de R\$50 com confiança 97.5%.

Note como o VaR aumenta com aumento da confiança. ∎

Existe uma forma gráfica de se classificar os retornos em "caixinhas" que chamamos de **histograma** (veja em algum livro de estatística), um gráfico que representa a frequência relativa dos valores assumidos, dos retornos. Para efeito do cálculo do VaR focamos nos retornos mais negativos somente. Deixaremos para os projetos a exploração deste assunto.

7.3 Método da Variância

O princípio deste método é que os retornos do ativo podem ser modelados pela curva normal, e portanto bastam estimativas para o retorno médio do ativo que se quer calcular o VaR bem como de seu desvio-padrão. Estes podem ser calculados partindo da série temporal dos preços da carteira utilizando a Subseção 4.1.1 da p.88. Uma variação é atribuir peso menor para dados de passado mais longínquo quando se calcula a média/desvio-padrão.

Note que o método histórico é superior ao método da variância por não assumir nenhuma distribuição em particular. No entanto, no método histórico é mais difícil determinar o VaR para valores quaisquer de probabilidade pois temos que verificar no histograma e podemos ter dados faltando.

Utilizando o método normal basta consultar uma tabela ou usar um software para se saber a probabilidade do retorno estar em certo intervalo. Apresentamos alguns desses valores na Figura 7.1 Observando-a sabemos que dados média μ e desvio-padrão σ dos

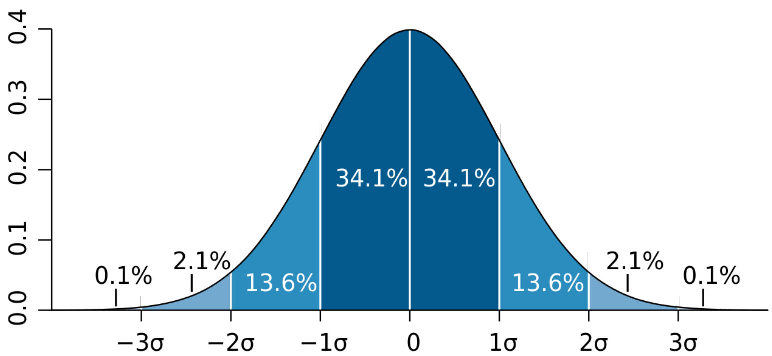


Figura 7.1: Probabilidades na Curva Normal

retornos, a probabilidade dele estar abaixo de:

- $\mu - \sigma$ é de 15.8% $(13.6 + 2.1 + 0.1)$.
- $\mu - 2\sigma$ é de 2.2% $(2.1 + 0.1)$.
- $\mu - 3\sigma$ é de 0.1%.

Existem tabelas que informam que:

- 10% dos valores estão abaixo de $\mu - 1.28\sigma$. [1]
- 5% dos valores estão abaixo de $\mu - 1.65\sigma$. [2]
- 1% dos valores estão abaixo de $\mu - 2.33\sigma$. [3].

Exemplo 7.2 *O retorno médio mensal de uma carteira é de* 0.5% *com desvio-padrão* 0.4%*. Qual o VaR de um investimento inicial de 1 milhão de reais nesta carteira com:*
(a) 99% de probabilidade. *(b) 90% de probabilidade.*

Solução: (a) Como $\mu = 0.5$ e $\sigma = 0.4$, com 99% o VaR (percentual) é de $0.5 - 2.33(0.4) = -0.432$. Calculando 0.432% de 1 milhão, obtemos um VaR de R$4.320,00 com 99%.

(b) Como $0.5 - 1.28(0.4) = -0.012$, calculamos 0.012% de 1 milhão e obtemos um VaR de R$120,00 com 90%.

Note como ocorre uma redução muito grande no VaR, fruto da queda rápida da curva normal. ■

7.4 Método de Monte Carlo

Carteiras que contenham opções ou outros derivativos vão incluir diversos fatores que farão os métodos anteriores não serem bons. Vão depender por exemplo do tempo de maturidade das opções da carteira, a volatilidade que pode variar com o tempo, bem como da evolução dos ativos relacionados com os derivativos.

Neste método vamos escolher um modelo para os ativos e seus derivativos e fazemos simulações de Monte Carlo do valor da carteira. Fazendo um grande número de simulações (digamos 1000) podemos obter dados da distribuição do retorno e proceder como no Método Histórico.

O princípio deste método é que escolher um bom modelo. Não vamos, no entanto, explorar mais este tópico.

7.5 Exercícios

1. Defina o que é a VaR de uma carteira.
2. O que acontece com o VaR de uma carteira quando:
   (a) aumentamos a probabilidade de 90% para 95%?
   (b) aumentamos o tempo de 10 dias para 1 mês?
3. Tanto a análise VaR quanto o modelo CAPM são formas de se estudar carteiras. Compare a diferença de abordagem e seus usos.

[1]Mais precisamente: 1.281551565545
[2]Mais precisamente: 1.644853626951
[3]Mais precisamente: 2.326347874041

4. No que consiste a gestão de risco e onde entra a análise VaR na gestão de risco?

5. Foram levantados retornos diários de uma carteira e verificado a seguinte quantidade de retornos:

Intervalo	Quantos retornos
maior que 1%	5
entre 0% e 1%	10
entre -1% e 0%	25
entre -2% e -1%	50
entre -3% e -2%	7
menor que -3%	3

Faça toda análise VaR possível com estes dados com diversos níveis de confiança, todos acima de 80%.

6. O retorno médio mensal de uma carteira é de 3% com desvio-padrão 2.5. Qual o VaR (método da variância) de um investimento inicial de 100 mil reais nesta carteira com:

(a) 95% de probabilidade. (b) 99% de probabilidade.

7. Compare o método histórico com o da variância. Quais são as vantagens e desvantagens de cada um?

8. O que é o método de Monte Carlo para o cálculo do VaR e porque ele pode ser útil?

7.6 Projetos Computacionais

Cada projeto deve ser acompanhado de um relatório contendo detalhes da metodologia, escolha de parâmetros, fonte dos dados e resultados, incluindo figuras. O Código utilizado deve aparecer num apêndice do relatório ou incorporado ao relatório para quem usar ambiente do tipo `Jupyter`.

1. Partindo da série histórica de algum ação (últimos 5 anos), faça uma análise VaR com 90% e 95% de probabilidade usando o método histórico e o da variância para retornos:

(a) diários; (b) quinzenais; (c) mensais. Inclua os histogramas bem como uma análise dos resultados obtidos.

2. Determine a série histórica dos retornos diários e mensais de um certo ativo utilizando um histórico de pelo menos 5 anos. Para podermos comparar os retornos, coloque valores anualizados de retorno. Desta forma, por exemplo, um retorno

diário de r_d se transforma no retorno anualizado de $(1 + r^d)^{365} - 1$. Estude a variação nos histogramas dos retornos diários e mensais (ambos convertidos para retorno diário para que possam ser comparados).

8

Modelos de Taxas de Juros

8.1 Juros e Inflação

Existem diversas taxas de juros na economia brasileira:

- A taxa **Selic**, a mais importante, é um valor de referência para remuneração de títulos públicos oferecidos pelo Banco Central do Brasil (BCB). Vamos detalhar na sequência.
- As taxas embutidas nos **CDBs e CDIs**, títulos oferecidos por bancos para se capitalizar, seja para fechar o saldo do dia (banco não pode fechar o dia com saldo negativo, sendo obrigado e pegar emprestado para zerar o saldo), seja para aumentar a oferta de crédito ao consumidor (novos negócios, empréstimos pessoais, etc.) Os CDBs (Certificado de Depósito Bancário) são oferecidos ao mercado, podendo ser adquirido por qualquer investidor. O CDI (Certificado de Depósito Interbancário) é semelhante a um CDB, porém os CDIs somente são negociados no mercado interbancário, transferindo recursos de uma instituição financeira para outra. Por terem por trás um banco os CDBs e CDIs tendem a ter juros baixos, mas dependem do tamanho da instituição. Os bancos menores tem que oferecer taxas maiores de CDBs para conseguir vendê-los. Oferecem retorno próximos à Selic, normalmente como percentual. Por exemplo, 95% ou 102% da Selic. Os de bancos menores serão ofertados com retorno acima da Selic.
- A **TLP** (taxa de longo prazo), a taxa Juros do BNDES (Banco Nacional de Desenvolvimento Económico e Social) oferecida para empreendimentos de infraestrutura. O valor é por setor (saneamento, energia solar, energia eólica, geração, transmissão e distribuição de energia, compra de ônibus e caminhões por pequenas e médias empresas,etc.)
- Juros no financiamento de carros novos oferecido por uma concessionária ou fabricante de veículos. Costuma ser baixo pois em caso de falta de pagamento o colateral (garantia do empréstimo) é dado pelo próprio veículo, que é tomado de volta. De forma similar na compra de apartamento, chamado de crédito imobiliário.

- Financiamento da agricultura (banco do Brasil oferece a chamada linha safra).

- Cheque especial. Taxas são altas por serem utilizados por pessoas sem acesso a outras formas de crédito.

- Juros na compra de bens de lojas de varejo.

De forma geral, quanto mais seguro o pagamento da dívida, menor é a taxa de juros. Assim empréstimos feitos por governos, que (quase) nunca deixam de pagar (no caso brasileiro isto ocorreu em fevereiro de 1987, quando se declarou uma moratória na dívida internacional; Argentina passou por isso algumas vezes) possuem as taxas de juros mais baixas. Pela questão da segurança, a taxa de juros dos títulos do governo americano são bem mais baixas que de títulos do governo brasileiro e de outros países cuja economia não seja tão estável. Os juros embutidos nos CDBs dos bancos também variam de acordo com o porte do Banco que o emite: quanto maior o banco, menor o juros embutido no CDB pois é mais fica.

Complementando informações sobre a **Selic**:

- Seu valor é uma referência, entre outras coisas, para a remuneração dos títulos públicos (LFTs, NTNs, conforme falamos mais adiante) que são negociados através do **Sistema Especial de Liquidação e de Custódia (Selic)**.

- Seu valor é um instrumento de política monetária utilizado pelo BCB para que ele possa cumprir sua principal missão: ser o **guardião** do valor da moeda, ou seja, manter o valor da inflação do país dentro de certo intervalo, as chamadas **metas da inflação**.

- Seu valor é definido em reuniões do Comitê de Políticas Monetária (Copom) do BCB em datas pré-determinadas (basicamente mensal). Os encontros duram dois dias (terça e quarta-feira). Depois é publicada uma ata contendo as deliberações com justificativa para às decisões tomadas. Além disso eles indicam se o viés da taxa Selic é para ser mantido, de alta ou de baixa.

- De forma similar, cada país define sua taxa básica de juros. No caso americano, o board do FED (Federal Reserve System) reúne-se todo mês para definir a taxa de juros básica, publicando atas das reuniões e com metas de inflação a ser perseguida: `www.federalreserve.gov`.

- Pode-se saber mais sobre o que é, seu uso, seu valor atual e sua série histórica de valores em `www.bcb.gov.br`.

Definição 8.1: Inflação

A inflação de um país é um percentual indicando o aumento de preço de uma cesta de mercadorias durante certo período. Existem diversas metodologias, entre elas o IGP (Índice Geral de Preços), o INPC (Índice Nacional de Preços do Consumidor) e o IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo). Estes últimos dois são calculados pelo IBGE e a cesta de mercadorias é definida pela Pesquisa de Orçamentos Familiares - POF do IBGE. Veja detalhes em `www.ibge.gov.br`. O IGP, que possui algumas variações como IGP-DI, IGP-M, é calculado pela Fundação Getúlio Vargas (FGV).

O Banco Central do Brasil adotou o regime de metas de inflação em junho de 1999. Isto foi após a implantação do **Plano Real** em 1994, o marco zero da estabilização monetária no Brasil, com o fim da nossa hiperinflação crônica. Para apreciar esta mudança radical na trajetória da inflação no Brasil, veja a Figura 8.1. Colocamos escala logarítmica em y para poder ver bem os dois períodos no mesmo gráfico.

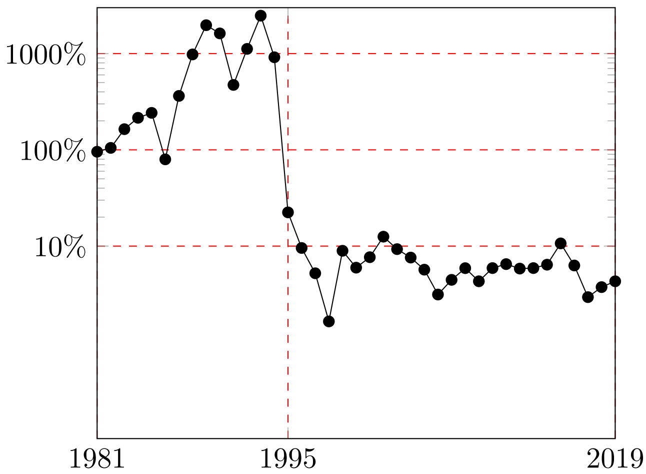


Figura 8.1: Histórico da Inflação no Brasil de 1981 a 2019

Observamos nesta figura que a inflação no período:

- 1981 até 1994 (14 anos): foi mais baixa de 79% em 1986 (congelamento de preços, um plano fracassado de controle da inflação); acima de 3 dígitos em todo período exceto em 1981 e 1986; acima de 900% em 6 anos, quase metade do período;
- 1995 até 2019 (25 anos): foi mais alta de 22% em 1995, segunda maior 12% em 2002; de 1 dígito exceto em 1995, 2002 e 2015.

É difícil qualificar a importância de termos uma inflação sob controle, com um dígito, desde esta época.

Antes de 1994 ocorreram diversas tentativas fracassadas de acabar com a inflação, mas todas eram abordagem erradas, com tentativas de congelamento de preço.

A inflação é causada pelo aumento de moeda circulante (papel e eletrônica) pelo governo. O aumento de preço é uma consequência, e não a causa da inflação. Querer acabar com a inflação por meio de congelamento é o mesmo que querer acabar com a febre atacando um termômetro. Por trás da febre existe uma infecção, a verdadeira causa do aumento de temperatura.

Numa perspectiva histórica – para mostrar que a ideia de congelar preços para reduzir a inflação é uma solução errada e antiga – o Imperador Diocleciano no império romano tentou fazer isso no ano 301, quando publicou o Decreto de Preços Máximos[1] Neste decreto ele dizia que o aumento de preço era devido à ganância dos comerciantes e convocava a população a fiscalizar a lista de preços de mais de mil mercadorias. As punições, no contexto do império romano eram bem duras para quem aumentasse o preço. É fácil reconhecer neste decreto de mais de 1700 anos atrás a linguagem e prática de várias tentativas de congelamentos no Brasil e no mundo.

Em resumo, quem conhece um mínimo de economia sabe que **congelamento e controles de preços não funcionam**: vão sempre resultar em escassez (filas) no curto e prazo e reduzir a produção da mercadoria com preço controlado no médio prazo, agravando mais ainda seu valor. Quando isto ocorre os governos se veem tentados a dobrar a aposta: aumentando a força da fiscalização ou aumentando a abrangência do congelamento, até terminar, como sempre termina, em caos econômico, com desabastecimento de mercadorias.

Sobre isso escreveu em 1951 Mises, um grande economista do século 20:

> What the bureaucrats have in mind when talking about "fighting" inflation is not avoiding inflation, but suppressing its inevitable consequences by price control. This is a hopeless venture. The attempt to fix prices at a lower rate than that which the unhampered market would determine renders unremunerative the business of some producers, that is, those operating at the highest costs. This forces them to discontinue production. [2]
> Ludwig Von Mises, New York World Telegram & Sun (1951), reimpresso em "Economic Freedom and Interventionism", Capítulo 19 Inflation (1990).

8.2 Modelo de Taxa de Juros

Até aqui assumimos que os juros são constantes. De fato, para cenários futuros de até um ano, em uma economia estável como a americana ou a brasileira recente pode ser razoável esta hipótese. Neste sentido assumir nos modelos de opções juros fixos é

[1] Em Latin: *Edictum de Pretiis Rerum Venalium.*

[2] O que os burocratas têm em mente quando falam em "combater"a inflação não é evitar a inflação, mas suprimir suas inevitáveis consequências através do controle de preços. Mas essa é uma iniciativa fadada ao fracasso. A tentativa de se fixar os preços em um nível menor do que o determinado pela forças do livre mercado resulta em negócios sem lucro para alguns produtores – aqueles operando com os custos mais altos. E isso força-os a interromper a produção.

razoável pois o tempo de vida de opções é até 1 ano. Mas para prazos maiores de 5, 10 ou mais anos, os juros futuros são uma incerteza importante.

Alguns exemplos onde modelos para evolução da taxa de juros futura é fundamental:

- Quando se monta uma **operação** – jargão da área de negócios que significa montar digamos uma nova fábrica, um novo negócio, assumir a gestão de uma estrada etc. – cujo retorno será de longo prazo (10, 20, 30 anos).
- A precificação de derivativos cujo ativo é justamente a taxa de juros, como por exemplo os títulos do governo (bonds, ver Definição 8.7) e os swaps (de juros).

Começamos introduzindo nova notação pois o juros agora não é mais constante, e sim um processo estocástico.

Definição 8.2: Processo da Taxa de Juros

Denotamos por R_n, $n \in \mathbb{N}$, o **processo da taxa de juros**, um processo estocástico adaptado em Ω_m (depende somente de $w_1 \cdots w_n$) tal que uma unidade monetária (real, dólar) investido no tempo n vai valer $1 + R_n$ no tempo $n + 1$. Assumimos que $R_n > -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que o juros hoje é uma constante conhecida, R_0, chamada de spot rate.

Definição 8.3: Spot Rate

A taxa de juros hoje, dada por R_0 é chamada de **spot rate**.

Nos modelos faz sentido tomar R_0 como sendo o valor da Selic hoje.

Como a taxa de juros é estocástica, a correção no preço para trazê-lo à tempo presente é feita por um processo estocástico.

Definição 8.4: Processo de Desconto

Denotamos por D_n, $n \in \mathbb{N}$, o **processo de desconto**, um processo estocástico adaptado Ω_m definido por

$$D_n = \frac{1}{(1 + R_0) \cdots (1 + R_{n-1})}, \quad n > 0, \quad D_0 = 1.$$

Desta forma o **valor presente** de uma quantia X no tempo n (futura) é dado por $D_n X$, ao invés de

$$\frac{X}{(1 + r)^n}$$

no contexto de juros constantes r.

A teoria de precificação de derivativos nos fornece o seguinte resultado.

Lema 8.5: Fórmula da Precificação com Juros Estocásticos

Um derivativo cujo payoff no tempo $m \in \mathbb{N}$ é uma v.a. X em Ω_m, valerá no tempo zero

$$V_0 = \widetilde{E}[D_m X],$$

a esperança com relação à medida neutra a risco do payoff X trazido a tempo presente.

Prova: Essa é a fórmula que aparece no Corolário 3.26 da p.72 no contexto de juros constante. Em palavras, o valor do derivativo é a esperança com relação a medida neutra a risco do valor descontado do contrato. ■

Apresentamos agora um modelo para taxa de juros R_n conhecido como **Modelo de Black-Derman-Toy (BDT)**, originalmente de 1990, mas aqui na versão de [Sh] que modificamos bastante.

Definição 8.6: Modelo BDT

O **Modelo BDT** da taxa de juros é o processo estocástico R_n em Ω_m, $n \leq m$, definido por

$$R_n(\omega) = f(n)(1+\varepsilon)^{\#H(\omega)/m},$$

com

$$f(n) = r_0 \cdot (1-a)^n \quad \text{ou} \quad f(n) = r_0 + a\log(n+1),$$

onde r_0, a, ε são constantes positivas e $\#H(\omega)$ = número de caras em ω. Neste modelo assumimos que $\widetilde{p} = 0.5$.

O valor de r_0 é a taxa de juros inicial, a **spot rate**. Com este modelo obtemos os 3 perfis básicos da estrutura de juros futuros, conforme apresentado na Figura 8.2 da p.194:

- Crescimento econômica, com $f(n) = r_0 + a\log(n+1)$.
- Recessão econômica, com $f(n) = r_0 \cdot (1+a)^n$.
- Incerteza sobre o futuro, a próximo de zero em qualquer um dos f's.

O valor de $\varepsilon > 0$ indica o quanto a taxa de juros vai variar em função dos lançamentos. Note que o expoente de $(1+\varepsilon)$ varia entre 0 e 1 pois dividimos o número de H's por m, o seu valor máximo. Com $\varepsilon = 0$ o modelo seria determinístico.

A questão de como **calibrar** este modelo e como relacionar suas previsões com informações do mercado será abordada na próxima seção.

8.3 Estrutura a Termo

Começamos apresentando um título (bond), emitido pelos governos, que está relacionado com a taxa de juros de longo prazo da economia. Podemos chamá-lo de título *vanilla* *bond*, por ser o mais simples.

Definição 8.7: Zero Cupom Bond (ZCB)

Chamamos de **zero cupom bond (ZCB)** um título emitido pelo governo que paga um valor fixo chamado de **valor de face** em uma data fixa futura, chamada de **vencimento**.

O zero cupom significa que o título **não paga** cupom de juros durante a vida do título, isto é, certa remuneração percentual do seu valor de face. Existem diversos tipos de títulos no caso brasileiro, sendo que apenas a LTN é um ZCB:

- LTN (Letras do Tesouro Nacional) são um ZCB com valor de face de R$ 1.000,00. Dizemos que é um título **pré-fixado** pois seu valor é determinado no momento da compra (o valor de face na data do vencimento). Vencimentos típicos são de 6, 12 ou 24 meses.

- NTN-F (Notas do Tesouro Nacional): Pagam um valor fixo como a LTN mas semestralmente paga um juros fixo (um cupom) sobre o valor de face de R$ 1.000,00. É portanto um título pré-fixado.

- LFT (Letras Financeiras do Tesouro): Rentabilidade atrelada à Selic. Falamos que é pós-fixado pois seu valor é corrigido pela Selic.

- NTN-B Principal. Rentabilidade dada por uma taxa de juros pré-fixada mais a variação da inflação (medida pelo IPCA), que é pós-fixada.

Estes títulos são negociadas inicialmente (mercado primário) pelo governo e depois negociados entre os portadores de títulos. Além disso a liquidez é garantida pois o governo garante a recompra diária de títulos antes da data de vencimento. Usualmente esses negócios são intermediados por meio de corretoras.

Se definirmos por B_m o valor de um ZCB que vence no tempo m com valor de face F, calculamos o juros embutido neste título, isto é, seu retorno (yield) y_m, pela fórmula

$$B_m = \frac{F}{(1 + y_m)^m}.$$

Assim y_m representa o valor do juros esperado para o tempo futuro m, medido em anos neste contexto.

Definição 8.8: Estrutura a Termo dos Juros

O gráfico cujos pontos são $(m,\ y_m)$, tempo m por valor da taxa de juros y_m esperada para o tempo futuro m se chama **estrutura a termo**.

Tanto y_m quanto B_m são valores que podem ser obtidos facilmente no mercado. Pode-se consultar no site do banco central do Brasil `www.bcb.gov.br` o valor destes títulos com diversos vencimentos em datas do passado.

Apresentamos na Figura 8.2 alguma estruturas a termos possíveis, que correspondem a certos cenários macroeconômicos:

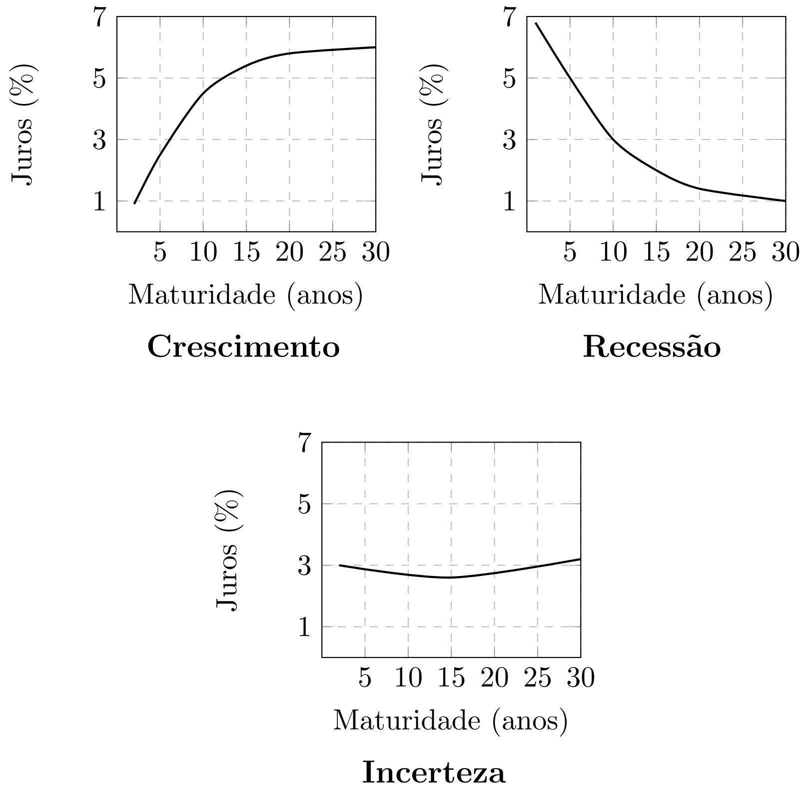


Figura 8.2: Exemplos de Estrutura a Termo

- Uma curva ascendente: juros hoje baixos mas, devido ao aquecimento da economia, expectativa de aumento de juros ao longo do tempo. Cenário de **Crescimento** da Economia.

- Uma curva descendente: juros altos hoje mas com perspectiva de baixa pelo desaquecimento da economia. Cenário de **Recessão** da Economia.

- Uma curva flat: economia estagnada ou muito estável. Cenário de **Incerteza** sobre o futuro da Economia.

Existem duas classes básicas de **modelos para a estrutura a termo:**

- Modelos baseados na taxa de juros instantânea (short-rate models): Vasiceck-Hull-White e Cox-Ingersoll-Ross (CIR) no caso contínuo, Ho-Lee e Black-Derman-Toy

(BDT) no caso discreto. Neste caso determinamos a estrutura a termo a partir da taxa de juros.

- Modelo do retorno total (whole yield model): Heath-Jarrow-Morton (HJM) no caso contínuo. Toda a curva da estrutura a termo é o dado inicial e o modelo prevê a evolução da curva.

Aqui no livro vamos apresentar apenas como conectar a estrutura a termo com modelos de taxa de juros instantânea. Aplicando o Lema 8.5, relacionamos o valor de um zero cupom bond B_m com valor de face F no tempo m com o modelo da taxa de juros, para concluir que

$$B_m = \widetilde{E}[D_m F].$$

Esta relação é utilizada para **calibrar** os modelos de juros.

- A estrutura a termo dada pelo mercado determina B_m.
- A Selic (ou alguma taxa do tipo) deve ser R_0, a taxa de juros hoje.

Pode-se gerar uma função de erro e tentar obter o valor de parâmetros – no caso do Modelo BDT (Definição 8.6 da p.192) o valor de r_0, a, ε – que minimizem este erro. Não vamos, no entanto, calibrar o modelo aqui, estamos apenas indicando como poderia ser feito.

Por fim, podemos utilizar o modelo BDT para simular evoluções da estrutura a termo no futuro. Mas não vamos entrar neste ponto.

8.4 Exercícios

1. O que são CDBs e qual sua relação com a taxa Selic?
2. Como é definido o valor da Selic e qual a estratégia para determinar seu valor?
3. Porque existem diversos índices de inflação?
4. Até aqui assumimos juros constantes. Em quais situações isto não é uma hipótese realista?
5. O que é um Zero Cupom Bond (ZCB)? Qual a relação entre os valores de dois ZCBs com datas de vencimento distintas? Quem vale mais?
6. Se um ZCB com valor de face R$1.000,00 com vencimento daqui a 1 ano e meio vale hoje R$950,00, qual a taxa de juros embutida neste título?
7. Um título com valor de face R$1.000,00 paga cupom de 0,5% a cada 6 meses, com o próximo pagamento daqui a 2 meses. Sabendo que ele vai vencer daqui a 1 ano e meio e que hoje vale R$900,00, qual a taxa de juros embutida neste título?
8. Explique o que é a estrutura a termos da taxa de juros.

8.5 Projetos Computacionais

Cada projeto deve ser acompanhado de um relatório contendo detalhes da metodologia, escolha de parâmetros, fonte dos dados e resultados, incluindo figuras. O Código utilizado deve aparecer num apêndice do relatório ou incorporado ao relatório para quem usar ambiente do tipo `Jupyter`.

1. Gerar gráficos de estrutura a termo dos juros no Brasil partindo das planilhas de valores do site do Banco Central do Brasil. Gerar 5 estruturas a termo, com intervalos de 1 ano entre cada uma, partindo de hoje para o passado. Coloque valor da Selic como r_0. Os dados serão interpolados com splines[3](não use polinômio interpolador ou segmentos de reta).

2. (versão ampliada do projeto anterior) Usando dados dos últimos 5 ou 10 anos, fazer o filme da evolução da estrutura a termo. Os dados serão interpolados com splines.

3. Implementar o modelo BDT com parâmetros arbitrários mas que gerem valores razoáveis para os juros. Explicar como foram escolhidos os parâmetros. Baseado neste modelo, determinar o valor dos ZCB (zero cupom bounds) para algumas datas (digamos 5) e determinar a estrutura a termo correspondente. Repetir com outros conjuntos de parâmetros variando apenas a e ε.

[3]Curva polinomial por partes suaves.

Referências Bibliográficas

[B3] www.b3.com.br Site oficial da B3, a bolsa de valores do Brasil.

[CRR] John C. Cox, Stephen A. Ross, Mark Rubinstein. Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics 7, (1979), 229-263.

[Sh] Steven E. Shreve. Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Princing Model. Springer-Verlag (2004).

[Hu] John C. Hull. Options, Futures and Other Derivatives. Prentice-Hall (1989).

[DW] Emanuel Derman and Paul Wilmott; Financial Modelers' Manifesto. January 7 2009 https://wilmott.com/financial-modelers-manifesto

[Dev] Luc Devroye Non-Uniform Random Variate Generation Springer-Verlag (1986).

[Jo1] Mark Joshi. The Concepts and Practice of Mathematical Finance (Mathematics, Finance and Risk). Cambridge University Press (2008).

[Jo2] Mark Joshi. Mathematics of Money. Um artigo do livro "The Princeton Companion to Mathematics". Editores Timothy Gowers, June Barrow-Green, Imre Leader. Princeton University Press (2008). Este artigo apresenta de forma sucinta os principais problemas das finanças matemática.

[GS] Joseph Stamplfi; Victor Goodman. The Mathematics of Finance: Modeling and Hedging. Pure and Applied Undergraduate Texts 7. American Mathematical Society (2001).

[RO] Steven Roman. Introduction to the Mathematics of Finance. Undergraduate Texts in Mathematics (UTM) Vol. 151. Springer-Verlag (2012).

[Will] Ruth J. Williams Introduction to the Mathematics of Finance. Graduate Studies in Mathematicsm Volume 72. American Mathematical Society (2006).

[Wilm] Paul Wilmott. The Mathematics of Finantial Derivatives. Cambridge University Press (1995).

[KK] Ralf Korn and Elke Korn. Option Pricing and Portfolio Optimization. Graduate Studies in Mathematicsm Volume 31. American Mathematical Society (2001).