Universidade de São Paulo

Julho, 2023

PMR3401 - Relatório EP Extra

Autor: Douglas Oliveira de Carvalho

Sumário

1 Introdução

O Método de Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica poderosa e versátil, empregada em engenharia e física para a resolução de problemas de valor de contorno parciais, como a equação de Laplace, apresentada na questão. Neste relatório, demonstraremos como implementar e aplicar o MEF para resolver problemas de condução elétrica em regime estacionário em duas dimensões.

Na condução estacionária, o fluxo de corrente em um material condutor é governado pela equação de Laplace, conforme apresentado em (1). Este relatório visa resolver numericamente esta equação diferencial parcial (EDP) sobre um domínio específico, utilizando uma malha triangular de elementos finitos. A equação governante é a seguinte:

$$-\sigma \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{1}$$

2 Potencial Eletrostático

A solução do problema foi implementada em MATLAB, por sua capacidade em lidar com matrizes grandes e eficiência em cálculos numéricos. A discretização do domínio foi realizada por meio de uma malha triangular de elementos finitos. A implementação do MEF em questões de condução elétrica envolve as seguintes etapas:

Discretização do domínio em uma malha de elementos finitos;
Definição das funções de forma e dos coeficientes da matriz de condutância;
Montagem da matriz global de condutância e do vetor de força;
Aplicação das condições de contorno , e Resolução do sistema de equações lineares resultante.
Para discretizar o domínio, utilizou-se a função delaunay do MATLAB, que gera uma malha triangular baseada em uma matriz de pontos. A função de forma utilizada é a linear, adequada para elementos triangulares. A matriz de condutância e o vetor de força foram montados por meio da integração numérica sobre cada elemento. As condições de contorno foram aplicadas diretamente ao sistema de equações lineares, substituindo as linhas correspondentes na matriz global de condutância e no vetor de força. Finalmente, o sistema de equações lineares foi resolvido utilizando o operador de divisão à esquerda do MATLAB,

Ao final, a distribuição de potencial foi plotada em gráficos 3D e de cores para visualização da distribuição do potencial elétrico no domínio. Os códigos e resultados serão apresentados em detalhes nas seções seguintes.

O desenvolvimento das equações começa com a definição da matriz de condutividade do elemento. Para um elemento triangular linear, o operador laplaciano da função de interpolação no espaço bidimensional é dado por:

$$\nabla \phi = B\mathbf{a} \tag{2}$$

onde B é a matriz de gradiente e a é o vetor de coeficientes. A matriz de condutividade do elemento é então dada por:

$$A_e = \int_{\Omega_e} B^T \sigma B d\Omega \tag{3}$$

onde é a condutividade, e é a área do elemento, e o integral é feito sobre toda a área do elemento.

A matriz de força de carregamento do elemento é geralmente zero para problemas de condução estacionária, pois não há fontes de corrente no domínio. Assim, a matriz de força de carregamento do elemento é dada por:

$$\mathbf{f}e = \int \Omega_e \mathbf{N}^T f d\Omega = \mathbf{0} \tag{4}$$

onde f é a densidade de força de carregamento (igual a zero) e N é a matriz de funções de forma.

As condições de contorno naturais podem ser aplicadas diretamente à matriz de condutividade do elemento e ao vetor de força de carregamento. A equação do elemento é então dada por:

$$A_e \mathbf{a} = \mathbf{f}_e + \mathbf{g}_e \tag{5}$$

onde ge é o vetor de força devido às condições de contorno naturais.

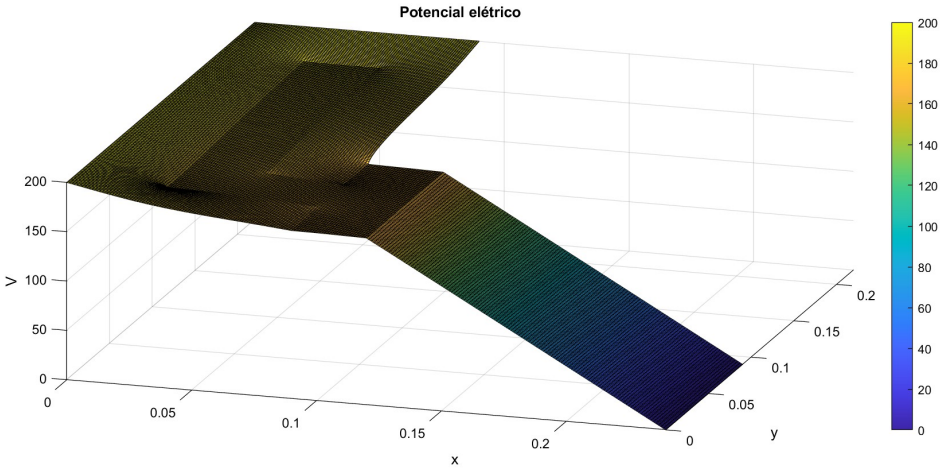
Finalmente, a matriz global do sistema e o vetor de força global são obtidos somando as contribuições de todos os elementos. As condições de contorno essenciais são então aplicadas ao sistema global, resultando na equação final a ser resolvida:

$$A\mathbf{v} = \mathbf{f} \tag{6}$$

onde A é a matriz global de condutividade, f é o vetor global de força, e v é o vetor de potenciais nodais a ser resolvido.

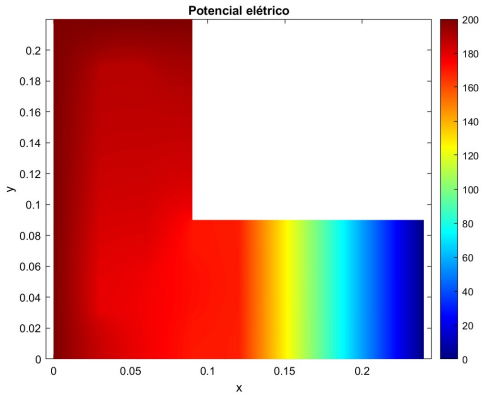
2.1 Plotagem das Voltagens

A representação 3D permite visualizar a complexidade do campo elétrico em um espaço tridimensional, facilitando a identificação de regiões de alta ou baixa voltagem. Além disso, é possível rotacionar o gráfico, explorando diferentes perspectivas e ângulos, o que pode ajudar na compreensão e análise mais aprofundada dos dados.



Voltagem na Malha

A figura abaixo apresenta um gráfico bidimensional que ilustra com cores a diferença de potencial. Por meio dessa visualização, é possível observar a distribuição do potencial elétrico e compreender o comportamento da peça devido à mistura dos materiaiss. O gráfico bidimensional proporciona uma representação clara e concisa das informações, permitindo uma compreensão rápida e precisa da relação entre as condutividades no estudo do objeto em questão.



Potencial elétrico

A discretização em elementos finitos é uma técnica poderosa para a solução de problemas complexos, mas também apresenta desafios que podem levar a resultados insatisfatórios se não forem abordados corretamente. Um dos problemas que pode ocorrer é uma discretização pobre, que ocorre quando a malha utilizada possui elementos muito grandes em relação às características do problema. Isso pode levar a resultados imprecisos ou até mesmo incorretos, pois a representação da geometria ou do comportamento físico não é capturada adequadamente.

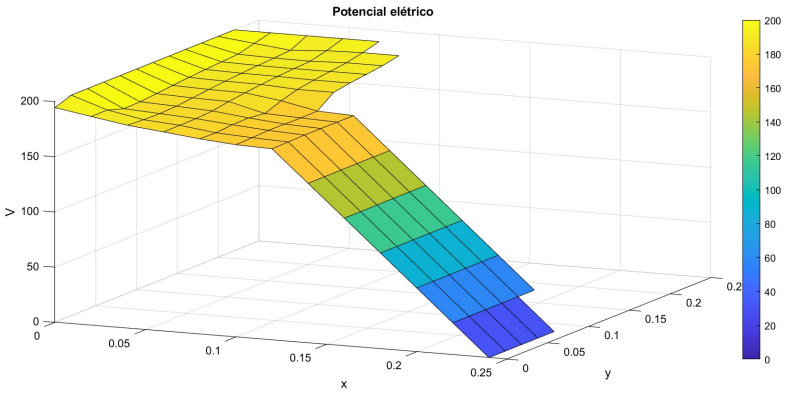
Uma discretização pobre pode resultar em uma baixa resolução da solução, com perda de detalhes importantes. Isso pode comprometer a precisão dos resultados, especialmente em regiões críticas do domínio do problema. Além disso, a discretização pobre pode levar a uma baixa convergência, exigindo uma malha muito mais refinada para alcançar resultados aceitáveis.

Por outro lado, a busca por uma discretização muito profunda, com uma malha muito refinada, pode acarretar problemas relacionados à capacidade computacional. Quanto mais elementos são adicionados à malha, maior será a quantidade de cálculos necessários, o que pode resultar em um aumento significativo no tempo de processamento e na demanda de recursos computacionais. Isso pode tornar a simulação inviável em termos de tempo e custo computacional, especialmente para problemas complexos ou de grande escala.

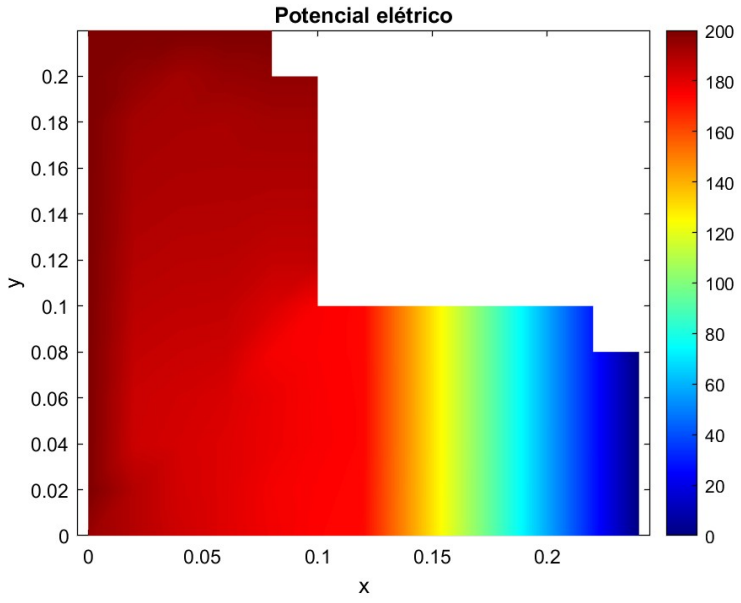
É importante encontrar um equilíbrio entre a precisão da discretização e a capacidade computacional disponível. A seleção adequada do tamanho e da densidade dos elementos na malha é essencial para obter resultados confiáveis e

eficientes. Uma análise cuidadosa das características do problema, juntamente com técnicas de refinamento adaptativo de malha, pode ajudar a evitar tanto a discretização pobre quanto a excessivamente profunda.

A seguir, será apresentado um exemplo de discretização pobre, destacando as limitações e os problemas decorrentes dessa abordagem.



Discretização Pobre



Discretização Pobre

A discretização pobre adotada resultou em uma perda de informações signi-

ficativa sobre o potencial elétrico da figura. Apesar disso, a discretização ainda é utilizável para fazer uma análise geral do fenômeno em estudo. Embora não possamos obter uma representação detalhada do comportamento do potencial em todas as regiões do domínio, o método dos elementos finitos foi capaz de fornecer uma estimativa razoável da distribuição de potencial.

É interessante observar que, mesmo com uma discretização pobre, foi possível obter um valor de resistência para a peça com uma precisão considerável. Os cálculos realizados indicaram um erro em torno de 5% em relação ao valor anterior, de malha muito mais refinada, sendo a malha pobre da ordem de 20 vezes maior que a anterior. Esse resultado ressalta a força do método dos elementos finitos em fornecer estimativas robustas mesmo em condições de pouca capacidade computacional.

3 Densidade de Corrente

A densidade de corrente elétrica, $\vec{J}(x, y)$, é uma medida da quantidade de corrente elétrica que passa por uma unidade de área em um determinado ponto do domínio. A densidade de corrente é um conceito fundamental na teoria do eletromagnetismo e na análise de dispositivos elétricos e eletrônicos.

A densidade de corrente elétrica é determinada pela lei de Ohm no espaço, que em termos da densidade de corrente e do potencial elétrico é dada por:

$$\vec{J}(x, y) = -\sigma \nabla V(x, y) \tag{7}$$

onde σ é a condutividade elétrica, ∇ é o operador gradiente e $V(x, y)$ é o potencial elétrico.

No contexto do método de elementos finitos, o potencial elétrico é aproximado como uma função contínua por partes e a densidade de corrente pode ser calculada a partir desta aproximação do potencial.

No MATLAB, a função gradiente pode ser usada para calcular as derivadas parciais de uma matriz, o que é útil para calcular o gradiente do potencial elétrico. A sintaxe da função gradiente é:

```
[Vx, Vy] = gradient(V, h)
```

onde V é a matriz do potencial elétrico e h é o espaçamento da malha. A função retorna as derivadas parciais de V com respeito a x e y, respectivamente.

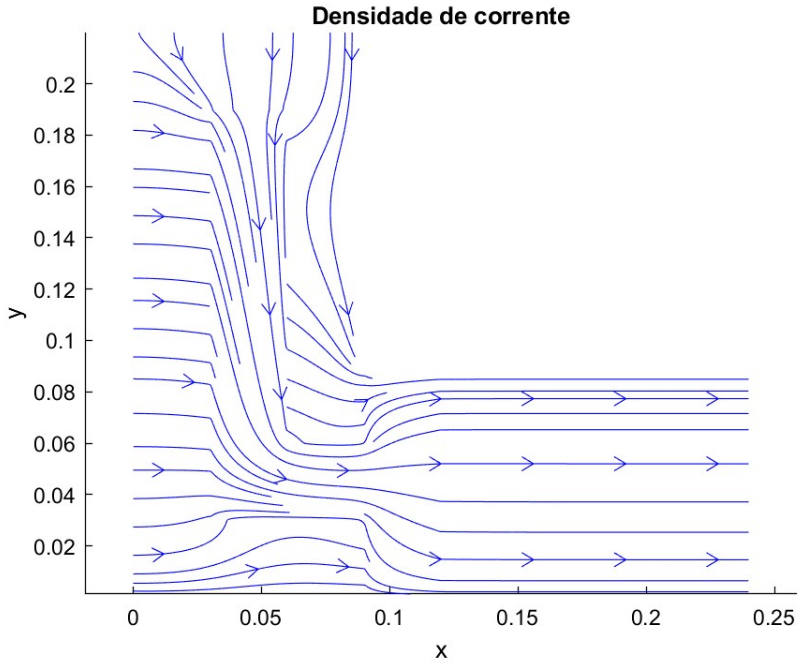
A densidade de corrente pode então ser plotada usando as funções quiver ou streamline, que permitem a visualização de campos vetoriais em duas dimensões.

A visualização da densidade de corrente pode fornecer informações valiosas sobre o comportamento do campo elétrico e pode ser usada para verificar a corretude e a precisão das soluções obtidas pelo método de elementos finitos.

3.1 Plotagem da Densidade de corrente

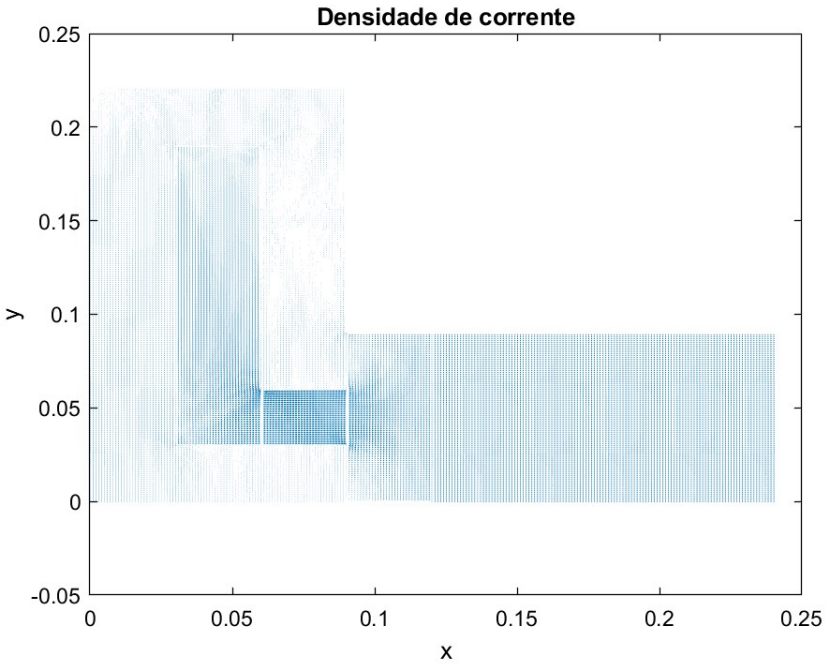
A imagem a seguir apresenta um gráfico que ilustra a densidade de corrente do sistema . Através dessa representação visual, é possível identificar padrões,

áreas de alta ou baixa densidade de corrente e entender como a corrente elétrica flui nas diferentes regiões do sistema.



Densidade de Corrente

A imagem a seguir mostra o gráfico resultante da plotagem da densidade de corrente com maior discretização. Cada seta representa uma região específica do sistema e indica tanto a direção quanto a magnitude da densidade de corrente naquela região. Dessa forma, é possível identificar áreas de maior e menor fluxo de corrente com maior precisão.



Densidade de Corrente discreta

4 Integral Numérica e Resistência

A resistência elétrica do bloco foi calculada utilizando a relação de Ohm para um meio contínuo: $R = \frac{\Delta V}{I_m}$, onde ΔV é a diferença de potencial e I_m é a corrente média.

A corrente média foi calculada a partir da densidade de corrente através das superfícies $x = 0$ e $y = 0.22$, usando a seguinte integral:

$$I_m = \int \vec{J} \cdot \vec{n}, dS \tag{8}$$

onde $\vec{J}$ é a densidade de corrente, $\vec{n}$ é o vetor normal à superfície e dS é o diferencial de área.

Para a superfície $y = 0.22$, temos que $dS = dx$, resultando na integral

$$I_m = \int_0^{0.9} J|_{y=0.22}, dx \tag{9}$$

Para a superfície $x = 0$, temos que $dS = dy$, resultando na integral

$$I_m = \int_0^{0.22} J|_{x=0}, dy \tag{10}$$

As integrais foram resolvidas numericamente utilizando o método do trapézio. A escolha deste método deve-se à sua simplicidade e eficácia para problemas com integrais definidas. A função trapz do MATLAB foi usada para calcular estas integrais. A sintaxe da função é:

```
I = trapz(X, Y)
```

onde X é o vetor das coordenadas e Y é o vetor dos valores da função a ser integrada.

O cálculo da corrente média nos permitiu obter a resistência elétrica do bloco, usando a relação de Ohm para um meio contínuo.

Por último, a equação da continuidade foi verificada para assegurar a conservação da corrente elétrica no bloco:

$$\int_0^{0.9} J|y = 0.22, dx + \int 0^{0.22} J|x = 0, dy = \int 0^{0.9} J|_{x=0.24}, dy \tag{11}$$

A verificação desta equação fornece uma validação adicional da corretude da solução obtida.

4.1 Determinação da Resistência

A equação final para a resistência elétrica é então dada por:

$$R = \frac{\Delta V}{I_m} = \frac{V_{max} - V_{min}}{I_m} \tag{12}$$

onde V_{max} e V_{min} são os potenciais máximos e mínimos no bloco, respectivamente, e I_m é a corrente média. O valor da resistência elétrica do bloco é:

$$R = 2.507 \times 10^{-7}\Omega \tag{13}$$

5 Conclusão

O curso de "Mecânica Computacional para Mecatrônica"desempenha um papel crucial ao fornecer as habilidades necessárias para realizar análises utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). Durante o desenvolvimento deste trabalho, pudemos aplicar os conhecimentos adquiridos no curso para a solução de problemas de condução elétrica. Através da implementação do MEF, pudemos compreender a complexidade envolvida na modelagem de fenômenos físicos reais e adquirir uma apreciação profunda das sutilezas e desafios enfrentados nesse processo.

Este exercício destacou a utilidade e a importância do MEF como uma ferramenta poderosa para a análise numérica de equações diferenciais parciais complexas, que muitas vezes não possuem soluções analíticas viáveis. O MEF nos permite aproximar numericamente essas soluções e obter resultados confiáveis e precisos.

Nesse contexto, o livro "MATLAB-based Finite Element Programming in Electromagnetic Modeling", escrito por Özlem Özgün e Mustafa Kuzuoğlu, foi uma referência valiosa para a implementação do MEF em MATLAB. Suas técnicas e abordagens forneceram insights essenciais e orientações práticas para a resolução dos problemas apresentados.

6 Código MATLAB

A seguir está o código MATLAB completo que foi executado para realizar a análise, contém funções do livro supracitado:

```
delh = 1/1000; % tamanho do elemento triangular
x = 0:delh:0.24;
y = 0:delh:0.22;
fe = 0;

% cria a matriz de coordenadas
[X, Y] = meshgrid(x, y);

% gera a matriz de conectividade, que liga os pontos dos elementos na
% matriz rigidez global

conn = delaunay(X(:), Y(:));


M = size(conn, 1); % numero de triangulos
N = numel(X); % numero total de nos

% plotagem da malha
triplot(conn, X(:), Y(:), 'k');
axis equal tight
xlabel('x'); ylabel('y');

A = sparse(N,N);
b = sparse(N,1);

% Calculo da matriz do elemento Ae, do vetor de elementos be e da area do elemen
Ae = cell(M,1);
be = cell(M,1);
areae = zeros(M,1);


Ne = 3; % numero de nos em cada elemento triangular

for e = 1:M
    % calcular as coordenadas do centroide do elemento
    xc = mean(X(conn(e, :)));
    yc = mean(Y(conn(e, :)));

    % determinar a condutividade para este elemento baseado em sua posicao
    % na malha, sendo 0 para o "buraco" visto que consideramos a malha um
    % retangulo completo, e cond1 e cond2 para as duas regioes distintas do
```

```
    % problema

    cond = get_condutividade(xc, yc);

    [Ae{e}, be{e}, areae(e)] = element_matrix_tri2(e, X(:), Y(:), conn, cond, co

  for i = 1:Ne            % loop sobre os nos locais de cada elemento
    ig = conn(e,i);      % no global correspondente ao i
    for j = 1:Ne         % loop sobre os nos locais de cada elemento
        jg = conn(e,j); % no global correspondente ao j
        A(ig,jg) = A(ig,jg) + Ae{e}(i,j); % preenche a matriz global
    end
    b(ig) = b(ig) + be{e}(i); % preenche o vetor b global
end


% Obtendo as coordenadas de cada no
coord = [X(:) Y(:)];

% Inicializando as variaveis para armazenar os nos de contorno
boundary1_nodes = [];
boundary2_nodes = [];

% Percorrendo todos os nos
for i = 1:size(coord, 1)
    x = coord(i, 1);
    y = coord(i, 2);

    % Verificando se o no corresponde a primeira condicao de contorno
    if (x == 0 && y > 0 && y < 0.22) || (y == 0.22 && x >= 0 && x <= 0.09)
        boundary1_nodes = [boundary1_nodes; i];
    end

    % Verificando se o no corresponde a segunda condicao de contorno
    if x == 0.24 && y >= 0 && y <= 0.09
        boundary2_nodes = [boundary2_nodes; i];
    end
end


% Imposicao das condicoes de contorno
BCnodes = [boundary1_nodes; boundary2_nodes];  % IDs dos nos de contorno
BCvalues = [200*ones(size(boundary1_nodes)); zeros(size(boundary2_nodes))];
% Valores da funcao nos nos de contorno

% Aplicando as condicoes de contorno
```

```
nodes = 1:N;
nodes(BCnodes) = 0;
othernodes = find(nodes ~= 0);
Atemp = speye(N, N);
Atemp(othernodes,:) = 0;
A(BCnodes,:) = 0;
A = A + Atemp;
b(BCnodes) = BCvalues;

% Resolucao do sistema global
V = A\b;  % valores de potencial nos nos

% Ajustando a matriz V para ter a mesma forma que X e Y
Vmat = reshape(V, size(X));

% Plotando o potencial
figure;
surf(X, Y, Vmat);
title('Potencial eletrico');
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('V');
colorbar;



% Plotando o potencial em 2D com cores quentes e frias
figure;
pcolor(X, Y, Vmat);
shading interp;

colormap(jet);
colorbar;

title('Potencial eletrico');
xlabel('x');
ylabel('y');
axis equal;


% Calculando o gradiente do potencial
[Vx, Vy] = gradient(Vmat, delh, delh);

% Calculando a densidade de corrente
Jx = -get_condutividade(X, Y) .* Vx;
Jy = -get_condutividade(X, Y) .* Vy;
```

```
% Plotando a densidade de corrente
figure;
quiver(X, Y, Jx, Jy);
title('Densidade de corrente');
xlabel('x');
ylabel('y');

% Plotando a densidade de corrente
figure;
streamslice(X, Y, Jx, Jy);
title('Densidade de corrente');
xlabel('x');
ylabel('y');

axis equal; % Para manter os eixos x e y com a mesma escala

% Calcular a corrente em cada superficie
Ix = Jx(1, :) .* delh;  % J em x=0 (direcao normal e x)
Iy = Jy(:, 1) .* delh;  % J em y=0 (direcao normal e y)
Iz = Jy(:, end) .* delh;  % J em y=0.22 (direcao normal e -y)

% Calcular a integral utilizando a regra do trapezio
Im_x = trapz(Ix);
Im_y = trapz(Iy);
Im_z = trapz(Iz);

% Verificar a equacao da continuidade
if abs(Im_x + Im_y - Im_z) > 1e-6
    disp('Aviso: A equacao da continuidade nao esta satisfeita!')
end

% Calcular a corrente total
Im_total = Im_x + Im_y;

% Calcular a resistencia
V0 = 200;  % tensao aplicada em x=0, y=0.22
R = V0 / Im_total;

% Exibir a resistencia calculada
disp(['A resistencia calculada para a peca e de: ', num2str(R), ' ohms']);


% ********************************* fim ********************************

% funcao para determinar a condutividade com base na posicao
```

```
function cond = get_condutividade(x, y)

cond0 = 0;
cond1 = 4*10^6;
cond2 = 9*10^7;

cond = cond1 * ones(size(x)); % inicializar todos os pontos com cond1

% entao atualize os pontos para cond0 ou cond2 se eles satisfazem as condicoes c

cond(x>0.09 & y>0.09) = cond0;

cond((x>0.03 & y>0.03 & x<0.06 & y<0.19) | ...
     (x>0.06 & y>0.03 & x<0.09 & y<0.06) | ...
     (x>0.09 & y>0 & x<0.12 & y<0.09)) = cond2;
end
```

"Dê-me, Senhor, agudeza para entender, capacidade para reter, método e faculdade para aprender, sutileza para interpretar, graça e abundância para falar."

Santo Tomás de Aquino