

Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Karlovej

Matematické problémy vázňov

2. februára 2015

Ondrej Škopek

Problém 100 väzňov [2]

- 100 väzňov označených 1-100

Problém 100 väzňov [2]

- 100 väzňov označených 1-100
- 100 zásuviek označených 1-100

Problém 100 väzňov [2]

- 100 väzňov označených 1-100
- 100 zásuviek označených 1-100
- Každý väzeň otvorí ≤ 50 zásuviek

Problém 100 väzňov [2]

- 100 väzňov označených 1-100
- 100 zásuviek označených 1-100
- Každý väzeň otvorí ≤ 50 zásuviek
- Žiadna výmena informácií v priebehu

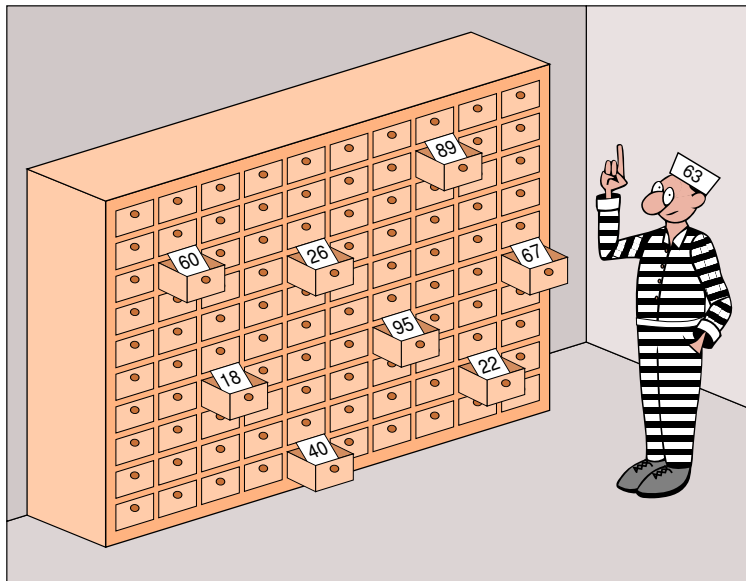
Problém 100 väzňov [2]

- 100 väzňov označených 1-100
- 100 zásuviek označených 1-100
- Každý väzeň otvorí ≤ 50 zásuviek
- Žiadna výmena informácií v priebehu
- Omilostí **všetkých** práve vtedy, keď každý nájde svoje číslo

Problém 100 väzňov [2]

- 100 väzňov označených 1-100
- 100 zásuviek označených 1-100
- Každý väzeň otvorí ≤ 50 zásuviek
- Žiadna výmena informácií v priebehu
- Omilostí **všetkých** práve vtedy, keď každý nájde svoje číslo
- Neomilostí **nikoho**, ak aspoň jeden nenájde svoje číslo

Problém 100 vězňů [6]



Stratégia?

- Väzeň „inteligent”: „Každý z nás otvorí 50 zásuviek náhodne, lepšia stratégia nie je.”

Stratégia?

- [illegible]

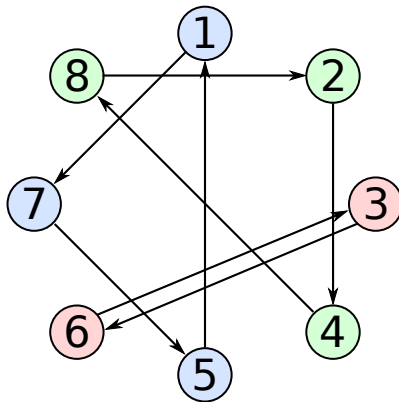
Stratégia?

- Väzeň „inteligent”: „Každý z nás otvorí 50 zásuviek náhodne, lepšia stratégia nie je.”
- Pravdepodobnosť prežitia: $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 0.000000000000000000000000000000007889 \approx 8 \cdot 10^{-31}$
- Väzeň matematik: „Každý z nás otvorí zásuvku so svojim číslom a pokračujeme vždy otvorením tej zásuvky, ktorej číslo sme našli vnútri predchádzajúcej.”

Stratégia?

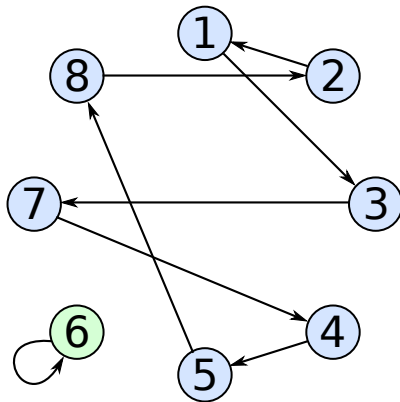
- Väzeň „inteligent”: „Každý z nás otvorí 50 zásuviek náhodne, lepšia stratégia nie je.”
- Pravdepodobnosť prežitia: $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 0.000000000000000000000000000000007889 \approx 8 \cdot 10^{-31}$
- Väzeň matematik: „Každý z nás otvorí zásuvku so svojím číslom a pokračujeme vždy otvorením tej zásuvky, ktorej číslo sme našli vnútri predchádzajúcej.”
- Pravdepodobnosť prežitia: > 30% !!!
- Ale... prečo?

Príklad 1 [5]



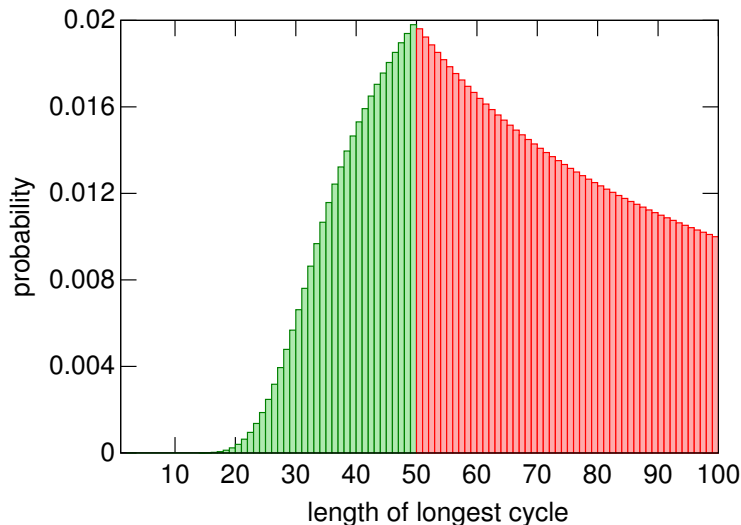
číslo zásuvky	1	2	3	4	5	6	7	8
číslo väzňa	7	4	6	8	1	3	5	2

Príklad 2 [4]



číslo zásuvky	1	2	3	4	5	6	7	8
číslo väzňa	3	1	7	5	8	6	4	2

Pravdepodobnostná distribúcia permutácií podľa dĺžky najdlhšieho cyklu [9]



Problém troch väzňov [10]

Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni

Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť

Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)

Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)
- Kto má akú šancu na prežitie?

Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)
- Kto má akú šancu na prežitie?

Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)
- Kto má akú šancu na prežitie?

Monty Hallov problém [7]

Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)
- Kto má akú šancu na prežitie?

Monty Hallov problém [7]

- Troje dverí

Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)
- Kto má akú šancu na prežitie?

Monty Hallov problém [7]

- Troje dverí
- Monty vie, za ktorými dverami je auto, ale nesmie to prezradiť

Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)
- Kto má akú šancu na prežitie?

Monty Hallov problém [7]

- Troje dverí
- Monty vie, za ktorými dverami je auto, ale nesmie to prezradiť
- Súťažiaci sa dozvie čo je za jednými zo zvyšných dverí

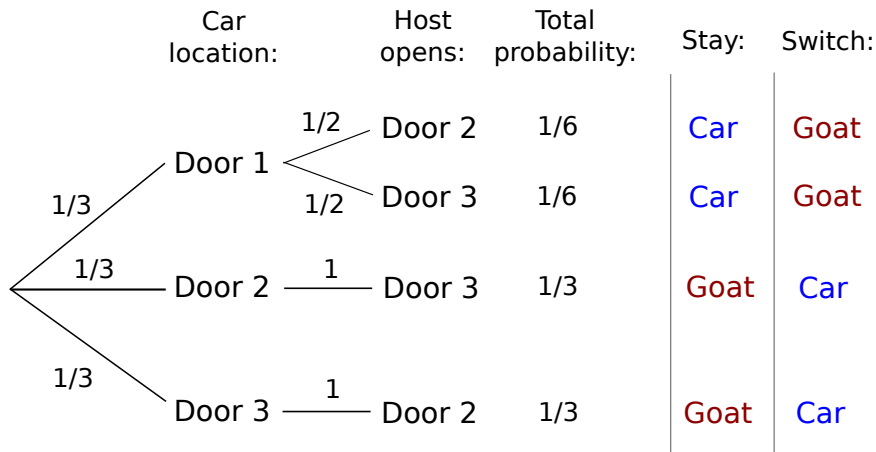
Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)
- Kto má akú šancu na prežitie?

Monty Hallov problém [7]

- Troje dverí
- Monty vie, za ktorými dverami je auto, ale nesmie to prezradiť
- Súťažiaci sa dozvie čo je za jednými zo zvyšných dverí
- Ktoré dvere s vyššou pravdepodobnosťou skrývajú auto?

Decision tree [3]



Väzňova dilema [8]

Prisoner's dilemma [8]

- Väzni nemôžu komunikovať

Väzňova dilema [8]

Prisoner's dilemma [8]

- Väzni nemôžu komunikovať
- Ak sa A a B navzájom zradia, každý „dostane“ 5 rokov

Väzňova dilema [8]

Prisoner's dilemma [8]

- Väzni nemôžu komunikovať
- Ak sa A a B navzájom zradia, každý „dostane“ 5 rokov
- Ak A zradí B a B ostane ticho, A bude omilostený a B „dostane“ 20 rokov (a naopak)

Väzňova dilema [8]

Prisoner's dilemma [8]







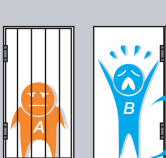




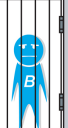
- Väzni nemôžu komunikovať
- Ak sa A a B navzájom zradia, každý „dostane“ 5 rokov
- Ak A zradí B a B ostane ticho, A bude omilostený a B „dostane“ 20 rokov (a naopak)
- Ak A a B obaja останú ticho, obaja si „odsedia“ 1 rok

Väzňova dilema [8]

Prisoner's dilemma [8]

- Väzni nemôžu komunikovať
- Ak sa A a B navzájom zradia, každý „dostane“ 5 rokov
- Ak A zradí B a B ostane ticho, A bude omilostený a B „dostane“ 20 rokov (a naopak)
- Ak A a B obaja ostanú ticho, obaja si „odsedia“ 1 rok
- Ako sa (pravdepodobne) zachovajú?

Ilustrácia [1]

Prisoners' dilemma		prisoner B				
		confess		remain silent		
						
prisoner A	confess		 5 years	 5 years	 0 year	 20 years
	remain silent		 20 years	 0 year	 1 year	 1 year

© 2010 Encyclopædia Britannica, Inc.

Aplikácie teórie hier

- Klasické „hry“ (šach, dáma, poker, ...)

Aplikácie teórie hier

- Klasické „hry“ (šach, dáma, poker, ...)
- Vyjednávanie (o cenách, rukojemníkoch, ...)

Aplikácie teórie hier

- Klasické „hry“ (šach, dáma, poker, ...)
- Vyjednávanie (o cenách, rukojemníkoch, ...)
- Súťaživosť (koordinácia, partnerstvo, R&D, ...)

Aplikácie teórie hier

- Klasické „hry“ (šach, dáma, poker, ...)
- Vyjednávanie (o cenách, rukojemníkoch, ...)
- Súťaživosť (koordinácia, partnerstvo, R&D, ...)
- Competitive strategy:
<https://www.coursera.org/learn/competitivestrategy>

Aplikácie teórie hier

- Klasické „hry“ (šach, dáma, poker, ...)
- Vyjednávanie (o cenách, rukojemníkoch, ...)
- Súťaživosť (koordinácia, partnerstvo, R&D, ...)
- Competitive strategy:
<https://www.coursera.org/learn/competitivestrategy>
- Welcome to Game Theory:
<https://www.coursera.org/course/welcomegametheory>

A čo teraz?

A čo teraz?

Hurá! Naspäť na učenie sa vzorcov!

A čo teraz?

Hurá! Naspäť na učenie sa vzorcov! Alebo skúsím niečo nové...

- Bonusové úlohy

A čo teraz?

Hurá! Naspäť na učenie sa vzorcov! Alebo skúsím niečo nové...

- Bonusové úlohy
- Introduction to Mathematical Thinking:
<https://www.coursera.org/course/maththink>

A čo teraz?

Hurá! Naspäť na učenie sa vzorcov! Alebo skúsím niečo nové...

- Bonusové úlohy
- Introduction to Mathematical Thinking:
<https://www.coursera.org/course/maththink>
- Programming for Everybody (Python):
<https://www.coursera.org/course/pythonlearn>

Ďakujem za pozornosť

Ďakujem za pozornosť

Ondrej Škopek
<oskopek@matfyz.cz>

Zdroje I



Acting Man. *The Prisoner's Dilemma*. 2015. URL: http://www.acting-man.com/blog/media/2014/11/prisoners_dilemma.jpg.



Wikipedia. *100 prisoners problem*. 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/100_prisoners_problem.



Wikipedia. *Decision tree for the Monty Hall problem*. 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Monty_tree_door1.svg.



Wikipedia. *Graph representation of the permutation (1 3 7 4 5 8 2)(6)*. 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Permutation_cycles_qtl2.svg.

Zdroje II



Wikipedia. *Graph representation of the permutation (1 7 5)(2 4 8)(3 6)*. 2015. URL:

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Permutation_cycles_qtl1.svg.



Wikipedia. *Illustration for the 100 prisoners problem*. 2015.

URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:100_prisoners_problem_qtl1.svg.



Wikipedia. *Monty Hall problem*. 2015. URL:

http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem.



Wikipedia. *Prisoner's dilemma*. 2015. URL:

http://en.wikipedia.org/wiki/Prisoner%27s_dilemma.

Zdroje III



Wikipedia. *Probability mass function of the length of the longest cycle of a random permutation of length 100. Cycle lengths ≤ 50 are green, cycle lengths < 50 are red.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Permutation_longest_cycle_length_pmf_qtl2.svg.



Wikipedia. *Three Prisoners problem.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Three_Prisoners_problem.