2. februára 2015

Handout

Ondrej Škopek <oskopek@matfyz.cz>

Problém 100 väzňov (The Locker Problem) [2]

Riaditeľ väznice sa rozhodne dať poslednú šancu svojim 100 väzňom odsúdeným na smrť. Do svojej kancelárie, kde má 100 zásuviek (označených číslami 1-100) náhodne umiestni kartičky s číslami väzňov, ktorí sú tiež označení číslami 1-100. Väzni majú po jednom vchádzať do kancelárie. Každému dovolí otvoriť najviac 50 zásuviek. Z miestnosti odchádzajú inou chodbou, nemajú ako podať ďalším čakajúcim väzňom informácie.

Riaditeľ väznice sa rozhodol, že **omilostí všetkých** väzňov, ale iba **(práve) vtedy**, keď sa **každému** z väzňov **podarí nájsť svoje číslo** v jednej z 50 otvorených zásuviek. Ak čo len jeden z nich svoje číslo nenájde, všetci zomrú. Akú stratégiu majú väzni použiť, ak chcú mať čo najväčšiu šancu prežiť?

Problém troch väzňov (The Monty Hall Problem) [8], [4]

Monty Hallov problém: Predstavte si, že ste v televíznej súťaži. Dostali ste možnosť si vybrať jedny z troch dverí. Za jednými z nich je Váš vytúžený model červeného športového auta, za zvyšnými dvoma dverami sú kozy. Dostanete tú cenu, ktorá sa nachádza za Vami vybranými dverami.

Vyberiete si dvere, povedzme, že dvere č. 1. Moderátor (vediac o tom, za ktorými dverami sa čo nachádza) otvorí jedny zo zvyšných dvoch (nevybraných) dverí, za ktorými je koza (povedzme dvere č. 3). Opýta sa Vás, či chcete zmeniť svoje rozhodnutie a vybrať si dvere č. 2, alebo zostať s dverami č. 1. Ktorá z možností je pre Vás lepšia, ak chcete vyhrať auto?

Problém troch väzňov: Traja väzni (A, B a C) sú v rôznych celách a odsúdení na smrť. Guvernér vybral jedného z nich náhodne, ktorého omilostil. Strážca vie, ktorého vybral, ale nesmie im to povedať. Väzeň A prosí strážcu, aby mu prezradil identitu jedného z dvoch, ktorí budú popravení. „Ak B je omilostený, povedz mi meno väzňa C. Ak C je omilostený, povedz mi meno väzňa B. Ak som ja omilostený, hoď si mincou a povedz mi meno jedného z väzňov B alebo C."

Strážca povie väzňovi A, že väzeň B bude popravený. Väzeň A sa potešil, lebo si myslí, že pravdepodobnosť jeho prežitia sa práve zvýšila z 1/3 na 1/2, lebo už je to len medzi ním a väzňom C. A tajne povie C túto úžasnú správu a ten sa tiež poteší, lebo si myslí, že šance väzňa A sú stále len 1/3 a tie jeho sú už 2/3. Kto z nich má pravdu?

Väzňova dilema (Prisoner's dilemma) [5]

Dvaja členovia kriminálneho gangu sú zatknutí a uväznení. Každý väzeň je „na samotke," bez možnosti vzájomnej komunikácie. Polícia si uvedomí, že nemajú dostatok dôkazov na ich odsúdenie za celý trestný čin, ktorý (asi) spáchali. Plánujú ich odsúdiť každého na jeden rok bezpodmienečne, za menšie priestupky. Zároveň každému ponúknu možnosť zradiť svojho kolegu a svedčiť proti nemu, alebo mlčať a kooperovať navzájom. Platí nasledujúca ponuka:

- Ak sa A a B navzájom zradia, každý z nich si „odsedí" 5 rokov
- Ak A zradí B a B ostane ticho, A bude omilostený a B si „odsedí" 20 rokov (a naopak)
- Ak A a B obaja ostanú ticho, obaja si „odsedia" 1 rok (za menšie priestupky)

Ako sa pravdepodobne zachovajú?

Bonusové úlohy

Dvaja štatistici v lese (Two statisticians in the woods) [1]

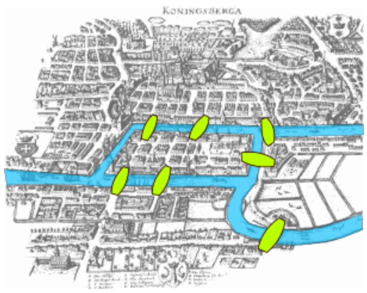
Ak sa dvaja štatistici stratia navzájom v nekonečnom lese, prvé čo spravia bude, že sa opijú. Týmto spôsobom budú blúdiť viac-menej náhodne, čo im dáva najlepšiu šancu sa znova nájsť. Ale štatistici by mali ostať triezvi, ak by hľadali huby. Keby sa potácali podnapití, zmenšili by prebádanú plochu a s väčšou pravdepodobnosťou by sa vrátili na miesto, kde už predtým všetko vyzbierali.

Sedem mostov mesta Kráľovec (Seven bridges of Krönburg) [6]

Kráľ sa rozhodol, že sa chce prejsť po svojom obľúbenom meste. Lenže bol lenivý, a tiež nedokázal dlho sústrediť svoju pozornosť.

Vystavil nasledujúcu úlohu:

Treba nájsť cestu cez mesto tak, aby som pri prechádzke prešiel po každom moste práve raz. Na ostrovy sa nedá dostať iným spôsobom ako mostom a musím prejsť po každom moste. Ak už raz vstúpim na most, prejdem ho celý. Samozrejme, nemusím začínať a končiť v tom istom mieste, naspäť sa rád dopravím kočom. Existuje takáto prechádzka?



Obr. 1: Zdroj: [3]

Kráľ a jeho traja radcovia (The King's Wise Men) [7]

Kráľ mal troch **múdrych** radcov, ale chcel vedieť, ktorý z nich je najmúdrejší. Každému dal na hlavu klobúk a rozostavil ich tak, aby každý videl na klobúky zvyšných dvoch, ale nie na svoj. Každý klobúk bol buď žltý, alebo modrý. Kráľ im oznámil, že **aspoň jeden** z nich má na hlave modrý klobúk a dodal, že súťaž je **férová voči všetkým** z nich. Zakázal im akúkoľvek vzájomnú komunikáciu. Kto prvý vstane a povie, akej farby klobúk má na hlave, bude vyhlásený za najmúdrejšieho v celom kráľovstve.

Radcovia dlho stáli a rozmýšľali, keď zrazu sa najmúdrejší z nich postavil a správne odpovedal na otázku. Čo povedal a ako na to prišiel?

Prezentáciu k prednáške nájdete na: `http://oskopek.com/2015_popmath_gymy/svk_presentation.pdf`
Toto zadanie nájdete na: `http://oskopek.com/2015_popmath_gymy/svk_handouts.pdf`
Vzorové riešenia nájdete na: `http://oskopek.com/2015_popmath_gymy/svk_solutions.pdf`

References

[1] Rhett Allain. *How Should Two Lost People Find Each Other?* 2013. URL: http://www.wired.com/2013/09/two-statisticians-lost-in-the-woods/.

[2] Wikipedia. *100 prisoners problem.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/100_prisoners_problem.

[3] Wikipedia. *Konigsberg bridges.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png.

[4] Wikipedia. *Monty Hall problem.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem.

[5] Wikipedia. *Prisoner's dilemma.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Prisoner%27s_dilemma.

[6] Wikipedia. *Seven Bridges of Königsberg.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg.

[7] Wikipedia. *The King's Wise Men.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Induction_puzzles#Examples.

[8] Wikipedia. *Three Prisoners problem.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Three_Prisoners_problem.