

Faculty of Mathematics and Physics, Charles University

# Mathematical problems of prisoners

February 2, 2015

Ondrej Škopek

# 100 prisoners problem [2]

- 100 prisoners, numbered 1-100

# 100 prisoners problem [2]

- 100 prisoners, numbered 1-100
- 100 drawers, numbered 1-100

# 100 prisoners problem [2]

- 100 prisoners, numbered 1-100
- 100 drawers, numbered 1-100
- Every prisoner opens  $\leq 50$  drawers

# 100 prisoners problem [2]

- 100 prisoners, numbered 1-100
- 100 drawers, numbered 1-100
- Every prisoner opens  $\leq 50$  drawers
- No information exchange allowed during play

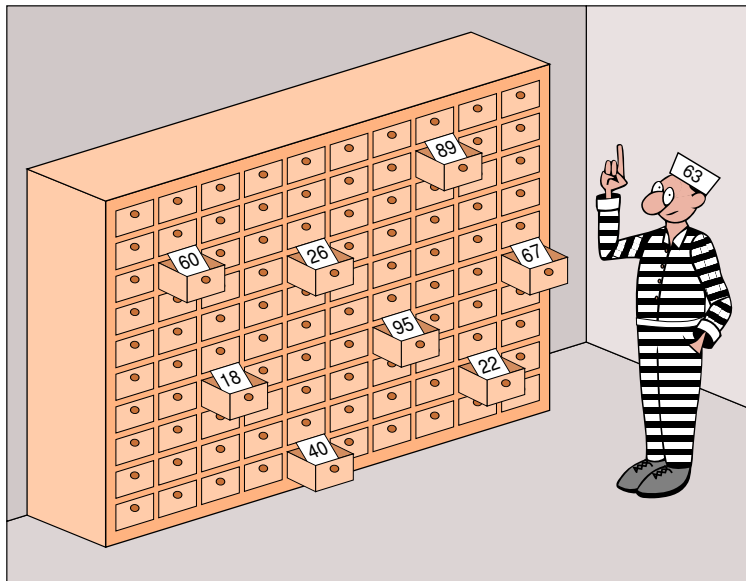
# 100 prisoners problem [2]

- 100 prisoners, numbered 1-100
- 100 drawers, numbered 1-100
- Every prisoner opens  $\leq 50$  drawers
- No information exchange allowed during play
- **Everyone** is pardoned, if everyone finds their number

# 100 prisoners problem [2]

- 100 prisoners, numbered 1-100
- 100 drawers, numbered 1-100
- Every prisoner opens  $\leq 50$  drawers
- No information exchange allowed during play
- **Everyone** is pardoned, if everyone finds their number
- **No one** is pardoned, if at least one prisoner fails

# 100 prisoners problem [6]





# Strategy?

- “Inteligent” prisoner: “We each open 50 drawers at random, there is no better strategy.”

# Strategy?

- [illegible]

# Strategy?

- “Intelligent” prisoner: “We each open 50 drawers at random, there is no better strategy.”
- Survival probability:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 0.0000000000000000000000000000007889 \approx 8 \cdot 10^{-31}$
- Mathematician prisoner: “We each open the drawer with our number and continue to open that drawer, which has the number we found in the previous drawer.”

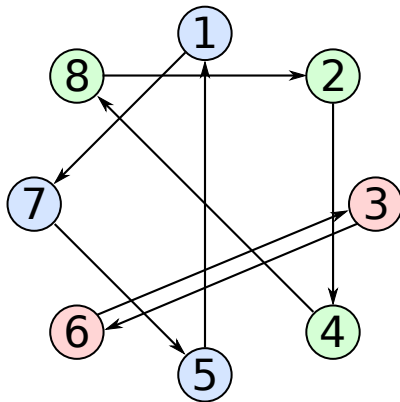
# Strategy?

- “Intelligent” prisoner: “We each open 50 drawers at random, there is no better strategy.”
- Survival probability:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 0.00000000000000000000000000000007889 \approx 8 \cdot 10^{-31}$
- Mathematician prisoner: “We each open the drawer with our number and continue to open that drawer, which has the number we found in the previous drawer.”
- Survival probability:  $> 30\%$  !!!

# Strategy?

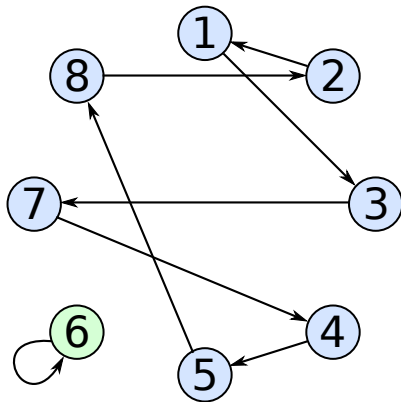
- “Intelligent” prisoner: “We each open 50 drawers at random, there is no better strategy.”
- Survival probability:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 0.0000000000000000000000000000007889 \approx 8 \cdot 10^{-31}$
- Mathematician prisoner: “We each open the drawer with our number and continue to open that drawer, which has the number we found in the previous drawer.”
- Survival probability: > 30% !!!
- But... why?

# Príklad 1 [5]



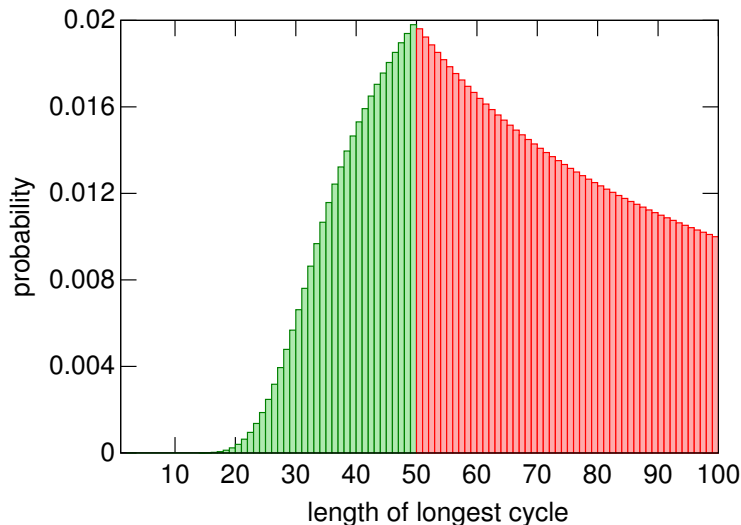
číslo zásuvky	1	2	3	4	5	6	7	8
číslo väzňa	7	4	6	8	1	3	5	2

## Príklad 2 [4]



číslo zásuvky	1	2	3	4	5	6	7	8
číslo väzňa	3	1	7	5	8	6	4	2

# Pravdepodobnostná distribúcia permutácií podľa dĺžky najdlhšieho cyklu [9]





# Problém troch väzňov [10]

# Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni

# Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť

# Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)

# Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)
- Kto má akú šancu na prežitie?

# Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)
- Kto má akú šancu na prežitie?

# Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)
- Kto má akú šancu na prežitie?

*Monty Hallov problém [7]*

# Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)
- Kto má akú šancu na prežitie?

*Monty Hallov problém [7]*

- Tri dvere



# Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)
- Kto má akú šancu na prežitie?

## *Monty Hallov problém [7]*

- Tri dvere
- Monty vie, za ktorými dverami je auto, ale nesmie to prezradiť

# Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)
- Kto má akú šancu na prežitie?

## *Monty Hallov problém [7]*

- Tri dvere
- Monty vie, za ktorými dverami je auto, ale nesmie to prezradiť
- Súťažiaci sa dozvie čo je za jednými zo zvyšných dverí

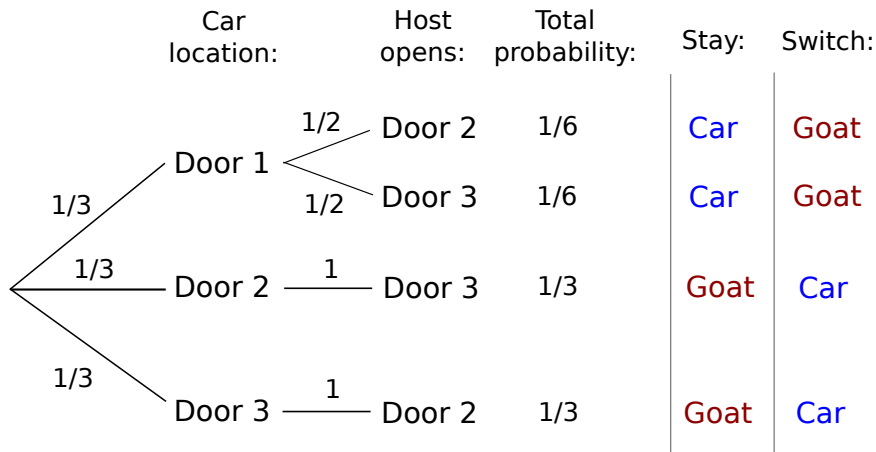
# Problém troch väzňov [10]

- Traja väzni
- Strážca vie, ktorý dostal milosť, ale nesmie to prezradiť
- Väzeň A sa dozvie meno jedného z popravených (okrem neho)
- Kto má akú šancu na prežitie?

## *Monty Hallov problém [7]*

- Tri dvere
- Monty vie, za ktorými dverami je auto, ale nesmie to prezradiť
- Súťažiaci sa dozvie čo je za jednými zo zvyšných dverí
- Ktoré dvere s vyššou pravdepodobnosťou skrývajú auto?

# Decision tree [3]



# Vězňova dilema [8]

## *Prisoner's dilemma [8]*

- Vězni nemôžu komunikovať

# Väzňova dilema [8]

## *Prisoner's dilemma [8]*

- Väzni nemôžu komunikovať
- Ak  $A$  a  $B$  sa navzájom zradia, každý „dostane“ 5 rokov

# Väzňova dilema [8]

## *Prisoner's dilemma [8]*

- Väzni nemôžu komunikovať
- Ak  $A$  a  $B$  sa navzájom zradia, každý „dostane“ 5 rokov
- Ak  $A$  zradí  $B$  a  $B$  ostane ticho,  $A$  bude omilostený a  $B$  „dostane“ 20 rokov (a naopak)

# Väzňova dilema [8]

## *Prisoner's dilemma [8]*

- Väzni nemôžu komunikovať
- Ak  $A$  a  $B$  sa navzájom zradia, každý „dostane“ 5 rokov
- Ak  $A$  zradí  $B$  a  $B$  ostane ticho,  $A$  bude omilostený a  $B$  „dostane“ 20 rokov (a naopak)
- Ak  $A$  a  $B$  obaja ostanú ticho, obaja „odsedia“ 1 rok







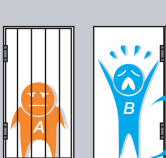



# Väzňova dilema [8]

## *Prisoner's dilemma [8]*

- Väzni nemôžu komunikovať
- Ak  $A$  a  $B$  sa navzájom zradia, každý „dostane“ 5 rokov
- Ak  $A$  zradí  $B$  a  $B$  ostane ticho,  $A$  bude omilostený a  $B$  „dostane“ 20 rokov (a naopak)
- Ak  $A$  a  $B$  obaja ostanú ticho, obaja „odsedia“ 1 rok
- Ako sa (pravdepodobne) zachovajú?

# Ilustrácia [1]

Prisoners' dilemma		prisoner B	
		confess 	remain silent 
prisoner A	confess 	 5 years    5 years	 0 year    20 years
	remain silent 	 20 years    0 year	 1 year    1 year

© 2010 Encyclopædia Britannica, Inc.

# Aplikácie teórie hier

- Klasické „hry“ (šach, dáma, poker, ...)

# Aplikácie teórie hier

- Klasické „hry“ (šach, dáma, poker, ...)
- Vyjednávanie (cien, rukojemníkov, ...)

# Aplikácie teórie hier

- Klasické „hry“ (šach, dáma, poker, ...)
- Vyjednávanie (cien, rukojemníkov, ...)
- Súťaživosť (koordinácia, partnerstvo, Research & Development, ...)

# Aplikácie teórie hier

- Klasické „hry“ (šach, dáma, poker, ...)
- Vyjednávanie (cien, rukojemníkov, ...)
- Súťaživosť (koordinácia, partnerstvo, Research & Development, ...)
- Competitive strategy:  
<https://www.coursera.org/learn/competitivestrategy>

# Aplikácie teórie hier

- Klasické „hry“ (šach, dáma, poker, ...)
- Vyjednávanie (cien, rukojemníkov, ...)
- Súťaživosť (koordinácia, partnerstvo, Research & Development, ...)
- Competitive strategy:  
<https://www.coursera.org/learn/competitivestrategy>
- Welcome to Game Theory:  
<https://www.coursera.org/course/welcomegametheory>

# A čo teraz?



# A čo teraz?

Hurá! Naspäť na učenie sa vzorcov!

# A čo teraz?

Hurá! Naspäť na učenie sa vzorcov! Alebo skúsím niečo nové...

- Bonusové úlohy

# A čo teraz?

Hurá! Naspäť na učenie sa vzorcov! Alebo skúsím niečo nové...

- Bonusové úlohy
- Introduction to Mathematical Thinking:  
<https://www.coursera.org/course/maththink>

# A čo teraz?

Hurá! Naspäť na učenie sa vzorcov! Alebo skúsím niečo nové...

- Bonusové úlohy
- Introduction to Mathematical Thinking:  
<https://www.coursera.org/course/maththink>
- Programming for Everybody (Python):  
<https://www.coursera.org/course/pythonlearn>

Ďakujem za pozornosť

# Ďakujem za pozornosť

Ondrej Škopek  
<oskopek@matfyz.cz>



Acting Man. *The Prisoner's Dilemma*. 2015. URL: [http://www.acting-man.com/blog/media/2014/11/prisoners\\_dilemma.jpg](http://www.acting-man.com/blog/media/2014/11/prisoners_dilemma.jpg).



Wikipedia. *100 prisoners problem*. 2015. URL: [http://en.wikipedia.org/wiki/100\\_prisoners\\_problem](http://en.wikipedia.org/wiki/100_prisoners_problem).



Wikipedia. *Decision tree for the Monty Hall problem*. 2015. URL: [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Monty\\_tree\\_door1.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Monty_tree_door1.svg).



Wikipedia. *Graph representation of the permutation (1 3 7 4 5 8 2)(6)*. 2015. URL: [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Permutation\\_cycles\\_qtl2.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Permutation_cycles_qtl2.svg).

# Zdroje II



Wikipedia. *Graph representation of the permutation  $(1\ 7\ 5)(2\ 4\ 8)(3\ 6)$ .* 2015. URL:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/File:  
Permutation\\_cycles\\_qtl1.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Permutation_cycles_qtl1.svg).



Wikipedia. *Illustration for the 100 prisoners problem.* 2015.  
URL: [http://en.wikipedia.org/wiki/File:  
100\\_prisoners\\_problem\\_qtl1.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:100_prisoners_problem_qtl1.svg).



Wikipedia. *Monty Hall problem.* 2015. URL:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Monty\\_Hall\\_problem](http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem).



Wikipedia. *Prisoner's dilemma.* 2015. URL:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Prisoner%27s\\_dilemma](http://en.wikipedia.org/wiki/Prisoner%27s_dilemma).



# Zdroje III



Wikipedia. *Probability mass function of the length of the longest cycle of a random permutation of length 100. Cycle lengths  $\leq 50$  are green, cycle lengths  $< 50$  are red.* 2015. URL: [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Permutation\\_longest\\_cycle\\_length\\_pmf\\_qtl2.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Permutation_longest_cycle_length_pmf_qtl2.svg).



Wikipedia. *Three Prisoners problem.* 2015. URL: [http://en.wikipedia.org/wiki/Three\\_Prisoners\\_problem](http://en.wikipedia.org/wiki/Three_Prisoners_problem).