
Coronavirus au Sénégal : Quels modèles mathématiques et quels rôles pour le numérique dans le plan de riposte national ?

Étant

Mars 2020

Amsata Niang

statisticien consultant à la FAO (Rome)

Dia Ndiaye

Élève ingénieur de la promotion 2017 de l'École polytechnique de Paris

Contents

1	Introduction	1
2	Modélisation de l'épidémie	1
3	Simulation numérique	4
4	Autres modèles statistiques	7
4.1	Le modèle Logistique	7
4.2	Le modèle de Richards	9
4.3	Le modèle exponentiel	9
5	Limites des modèles présentés	10
6	Conclusion	11

1 Introduction

L'épidémie du nouveau coronavirus a provoqué des chocs dans les marchés financiers et dans des économies entières. Depuis son apparition en Décembre 2019, le monde fait face à une crise sanitaire majeure. C'est ainsi que l'OMS déclara le 30 janvier 2020, le COVID-19 comme une urgence sanitaire internationale [1]. Au moment où nous écrivons ces lignes, aucun traitement spécifique vérifié par les normes de recherche internationale n'a encore été découvert, même si la recherche sur les vaccins s'accélère dans le cadre d'un effort mondial [2]. De plus, certains paramètres épidémiologiques très importants tels que le nombre de reproduction de base de l'épidémie (le nombre moyen de personnes infectées par un individu malade) ne sont pas encore connus avec une bonne précision. À l'ère de la mondialisation accentuée par une connectivité et une mobilité mondiale sans précédent, de telles épidémies sont une menace majeure à l'échelle internationale en raison des petits effets du réseau mondial. On pourrait même supposer que, conditionnellement à un événement catastrophique mondial (défini de manière générale comme ayant des milliers de victimes) survenu en 2020, la cause probable ne serait ni une catastrophe nucléaire, ni climatique mais plutôt une pandémie. Ceci est encore aggravé par une urbanisation très dense, nos villes dynamiques densément peuplées se transformant en nœuds de propagation dans le réseau de diffusion des maladies, devenant ainsi extrêmement vulnérables et fragiles. Dans cet article, nous allons nous intéresser particulièrement à la propagation du COVID-19 au Sénégal pour discuter de ce qui peut se produire lorsqu'une épidémie frappe une ville, quelles mesures doivent être prises immédiatement et quelles implications cela a pour la planification urbaine, l'élaboration des politiques et la gestion. Pour cela, en se focalisant sur les villes du Sénégal, l'objectif sera de modéliser mathématiquement et de simuler numériquement la propagation du coronavirus dans une ville donnée, tout en examinant comment les schémas de mobilité urbaine affectent la propagation de la maladie.

2 Modélisation de l'épidémie

Pour répondre aux questions posées en introduction, nous allons utiliser un modèle mathématique compartimental permettant d'étudier la dynamique d'une maladie infectieuse au sein d'une population donnée. Au fur et à mesure qu'une épidémie éclate, sa dynamique de transmission varie considérablement, selon les localisations géographiques de l'infection initiale et sa connectivité avec le reste du pays. Il s'agit de l'une des informations les plus importantes tirées des récentes études fondées sur des données d'études des maladies épidémiques dans les populations urbaines [3]. Cependant, les différents résultats appellent des mesures similaires pour contenir l'épidémie et tenir compte d'une telle possibilité dans la planification et la gestion des villes. Étant donné

que l'exécution de modèles d'épidémies individuelles est difficile et que l'objectif de cette étude est de montrer les principes généraux de la propagation d'une épidémie dans les villes, l'idée sera de modéliser la propagation du COVID-19 dans les villes du Sénégal en adaptant le modèle à différentes réalités et paramètres spécifiques aux villes du Sénégal, notamment la mobilité, les interactions socio-économiques entre les habitants des villes...etc.

Le modèle suppose une subdivision de la population totale de chaque ville en cinq groupes en fonction de l'état de santé et de la localisation des uns et des autres.

- S: le groupe des Sains regroupant l'ensemble des personnes saines dans la population considérée.
- C : ce compartiment regroupe toutes les personnes susceptibles d'être porteuses (contaminées) ou capables de développer des symptômes, car ayant été en contact avec une personne infectée.
- I: le compartiment des Infectés regroupe l'ensemble des personnes testées positives
- R: les Rétablies qui sont l'ensemble des personnes guéries après avoir été infectées
- F: le groupe des cas critiques (fatal) regroupant les personnes déclarées positives et développant la forme la plus grave (fatale) de l'infection.

Avant de définir le modèle mathématique, nous allons définir quelques paramètres dont chacun a une signification particulière dans la modélisation.

α désigne le taux de fatalité du COVID-19. C'est à dire la probabilité qu'une personne infectée développe la forme grave de la maladie. Ce taux peut bien sûr varier d'un patient à un autre, mais aussi d'une ville à une autre, en fonction des niveaux du système sanitaire des différentes villes, de l'âge des patients...etc Selon les données de l'organisation mondiale de la santé, si l'on considère l'ensemble des pays touchés par le COVID-19, ce taux est passé de 2.1% à 4.4% entre le 20 janvier 2020 et le 23 mars 2020 [10].

β représente le taux de contact effectif pour chaque personne dans la population considérée. Il pourrait s'écrire sous la forme d'un produit de deux paramètres. La valeur du premier rend compte de la proportion des contacts effectifs entre une personne saine et une personne infectée, parmi tous ceux possibles dans la population considérée pendant un intervalle de temps dt (ce paramètre est relié à la densité de population, par exemple). La valeur du second paramètre rend compte de la probabilité qu'un tel contact transmette la maladie de la personne infectée à la personne saine.

τ le temps moyen pour qu'un individu susceptible ne soit pas encore infectieux.

γ désigne le taux de guérison. Il peut dépendre de différents facteurs qui sont spécifiques à chaque pays, chaque ville : système sanitaire, infrastructures de prise en charge médicale... etc

μ est un paramètre dont la valeur est proportionnelle à la virulence du virus. Il peut aussi être défini comme étant le taux de mortalité lié au COVID-19 dans une ville donnée.

Ainsi pour représenter la dynamique de chacune de ces variables, nous allons nous inspirer de la modélisation du modèle SIR présenté dans [4] et [5] en y ajoutant quelques modifications notamment le compartiment des cas critiques.

L'architecture du modèle est donnée par le schéma suivant :

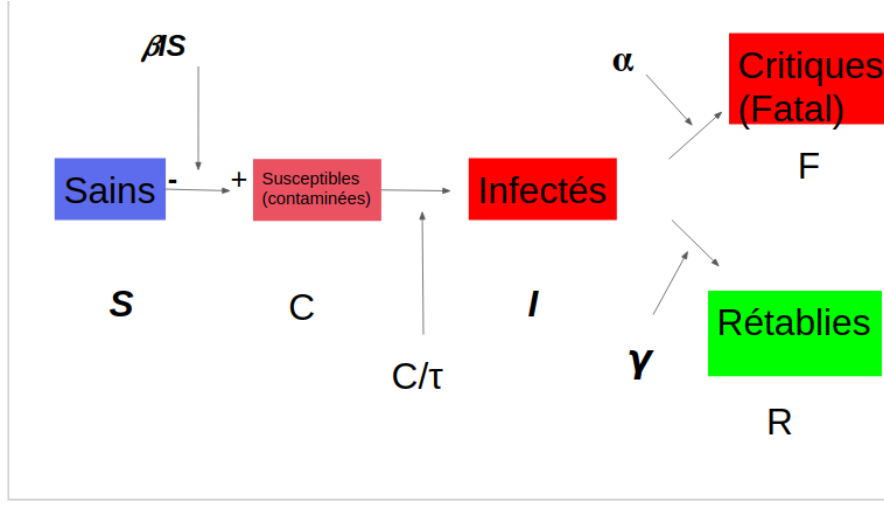


Figure 1: Architecture d'un modèle d'étude de la propagation du COVID-19

Dès que l'épidémie survient, en l'absence d'un contrôle efficace de la situation, l'effectif de la population saine diminue symétriquement :

$$\frac{dS}{dt} = -N^{-1}\beta SI$$

Si nous supposons qu'un individu reste malade en moyenne γ jours, $\frac{1}{\gamma}$ est à tout instant, la mesure du flux d'individus qui guérissent, quitte donc le compartiment des Infectés, pour venir s'accumuler dans le compartiment des Rétablis. Ce flux peut varier d'une ville à une autre, car dépendant de plusieurs paramètres comme la qualité de la prise en charge des patients, les infrastructures sanitaires disponibles pour la prise en charge des patients...etc.

En fonction de ce flux, le nombre de personnes infectées à un instant t est donné par :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{C}{\tau} - \frac{I}{\gamma}$$

Le problème peut se modéliser par le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -N^{-1}\beta SI \\ \frac{dC}{dt} = N^{-1}\beta SI - \frac{C}{\tau} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{C}{\tau} - \frac{I}{\gamma} \\ \frac{dR}{dt} = \frac{I}{\gamma} \\ \frac{dF}{dt} = I\alpha \\ N = S + C + I + R + F \end{array} \right. \quad (2)$$

où N représente la population totale. Rien qu'en observant ce système, on peut dès à présent conclure partiellement sur la vitesse de propagation de l'épidémie en fonction des différents paramètres. Ceci montre pourquoi le nombre d'infection lié au COVID-19 croît d'une manière quasi-exponentielle dès qu'une certaine négligence est observée à son apparition.

Puisque nous nous intéressons dans cette étude à la propagation du COVID-19 à l'intérieur d'un pays particulier, en fonction de la mobilité moyenne de chaque ville du pays, il serait intéressant d'enrichir le modèle en estimant la probabilité avec laquelle l'épidémie se propage d'une zone à une autre.

Pour cela, nous allons introduire les variables suivantes :

β_j le taux de transmission du virus au jour j , $m_{w,v}$ la mobilité des personnes de l'emplacement v à l'emplacement w , $x_{v,j}$ et $y_{w,j}$ désignent la fraction de personnes infectées et susceptibles au jour j , aux lieux v et w respectivement.

$$\begin{cases} x_{v,j} &= \frac{I_{v,j}}{N_v} \\ y_{w,j} &= \frac{S_{w,j}}{N_w} \end{cases}$$

où N_v et N_w représentent la population totale dans les villes v et w respectivement.

Alors la probabilité que l'épidémie se produit au jour j dans la ville w est donnée par :

$$e(j, w) = \frac{\beta_j S_{v,j} (1 - \exp(\sum_{n=1}^j m_{w,v}^n x_{v,n} y_{w,n}))}{1 + \beta_j y_{w,j}}$$

pour estimer la vitesse avec laquelle la maladie se propage au sein d'une population, nous introduisons un paramètre très important pour comprendre la dynamique d'une épidémie au sein d'une

population. Ce paramètre, noté R_0 , permet d'estimer le nombre moyen de personnes contaminées par une autre personne déjà infectée.

Il est mathématiquement défini par la formule suivante :

$$R_0 = \beta(\gamma + \alpha)^{-1}.$$

Sa valeur varie d'une ville à une autre, car elle dépend de différents paramètres comme la mobilité interne, la densité des interactions entre les habitants d'une ville...etc. Dans cette étude, il nous sera très difficile d'estimer cette valeur pour toutes les villes du Sénégal, car étant limité par l'accès aux données sur l'urbanisation de ces villes. Et sa valeur est une bonne mesure pour désigner la vitesse de propagation du COVID-19 à l'intérieur d'une ville donnée.

3 Simulation numérique

Dans cette partie, nous allons essayer d'illustrer numériquement nos différentes hypothèses. Pour cela, nous avons travaillé avec les données engendrées par la propagation du COVID-19 au Sénégal. Ces données sont disponibles sur le site de l'OMS et sont mises à jour quotidiennement [6]. Dans le cadre de notre étude, nous prenons aussi le soin d'ajouter quotidiennement les informations concernant la localisation (ville) de chaque nouveau cas détecté sur le territoire national. Pendant tout le processus de la simulation numérique, nous allons nous focaliser sur le paramètre R_0 afin de monter son réel impact sur la maîtrise et la régularisation de la vitesse de propagation

du COVID-19.

Pour cela, prenons par exemple une certaine ville v du Sénégal, et supposons que $R_0 = 15$, c'est à dire, en fonction de la mobilité très intense des personnes, des mesures barrières non respectées...etc, une personne infectée contaminerait en moyenne 15 personnes dans la population sensible au cours de son infection. Par précision, la valeur de ce paramètre peut être estimée par un algorithme d'optimisation. Mais nous ne serons pas à mesure de l'estimer dans cette étude car n'ayant pas l'accès aux données nécessaires. En effet, si nous avions les données sur la mobilité et l'urbanisation des villes du Sénégal, il nous serait possible d'estimer avec une bonne précision le nombre de déplacement moyen de chaque personne dans chaque ville et ainsi il serait donc possible d'avoir la valeur optimale de R_0 pour chaque ville.

Nous allons aussi ignorer les variables S et F correspondant à la population saine et à la fraction de la population développant la forme grave de la maladie respectivement.

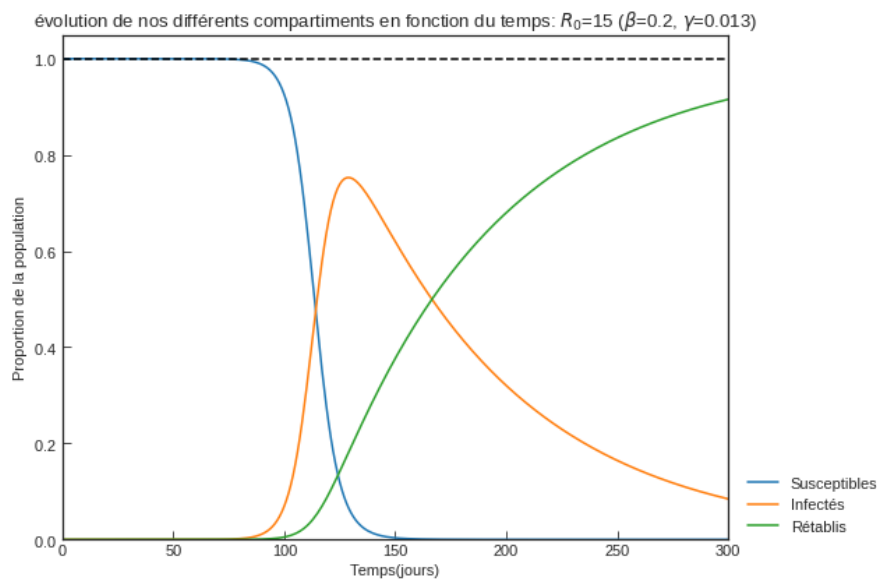


Figure 2: évolution de la population dans chaque compartiment pour $R_0 = 15$

Dans cette simulation, en outre de la valeur de R_0 , nous avons fixé les paramètres β et γ comme étant 0.2 et 0.013 respectivement. Pour rappel, β correspond au taux de contacts effectifs pour chaque personne dans la population considérée alors que γ représente le taux de guérison. Si l'on se basait sur les données du COVID-19 concernant le Sénégal, ce taux serait égal à 0.090 sur l'ensemble du territoire national à l'instant où ce rapport est finalisé. Mais comme nous considérons une ville quelconque, nous avons préféré fixer une valeur différente de celle-là afin de prendre en compte les quelques différences sanitaires éventuelles qui peuvent exister d'une ville à une autre.

Comme nous pouvons le voir, si des mesures barrières limitant les interactions entre les personnes ne sont pas prises et respectées, plus de 60% de la population de la ville considérée peut être infecté au bout de 50 jours. Ces mesures barrières peuvent être la réduction ou voir suppression des transports inter-urbains, des rassemblement regroupant un très grand nombre de personnes. Comme nous l'avons illustré dans la modélisation mathématique, les regroupements de personnes, qu'ils soient dans les transports ou autres, favorisent une augmentation de la vitesse

de propagation du virus avec notamment l'augmentation de la valeur de certains paramètres comme R_0 et β .

Toujours pour montrer à quel point il est important de jouer sur le paramètre R_0 pour un plan de riposte efficace face à la propagation du COVID-19 dans une ville, nous avons comparé la vitesse de progression de l'épidémie dans chacun de nos trois compartiments en fonctions de différentes valeurs de R_0 .

Ci-dessous les graphes correspondant à l'évolution de la population dans chaque compartiment.

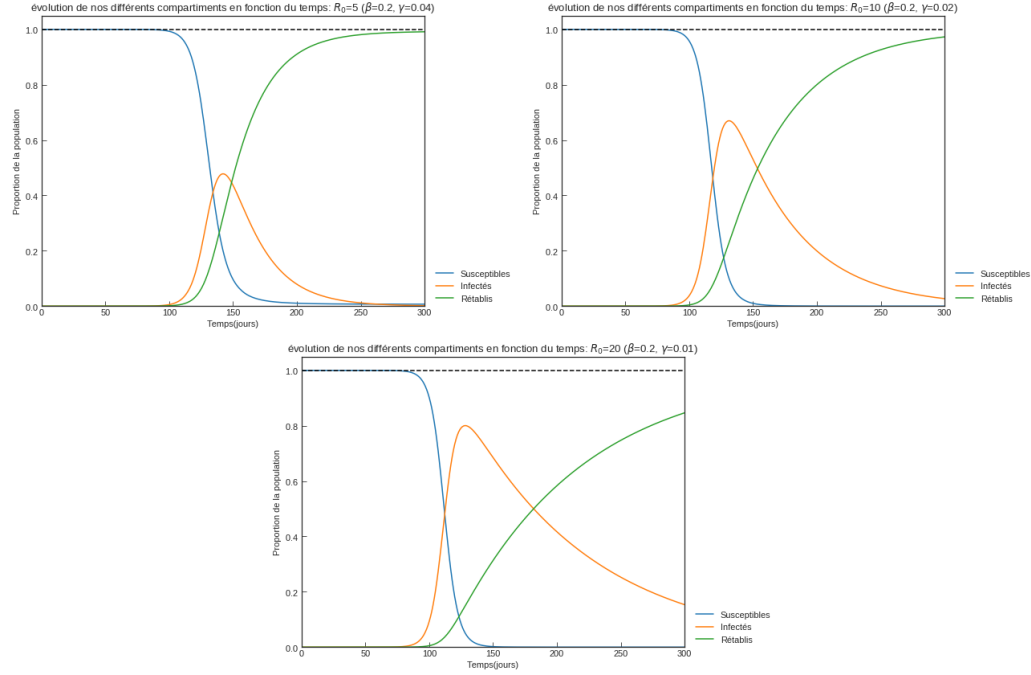


Figure 3: Évolution de la population dans chaque compartiment en fonction de différentes valeurs de R_0

Ceci prouve exactement les intuitions tirées de la modélisation mathématique. On voit que R_0 a une influence capitale sur la répartition de la population dans les différents compartiments. Ainsi pour élaborer un plan de riposte efficace basé sur une subdivision de la population en compartiments, il serait important, voir primordial de connaître avec la plus grande précision la valeur de R_0 pour chaque ville. Comme nous l'avons décrit précédemment, il existe une valeur optimale de R_0 pour chaque ville considérée, mais sa détermination nécessite l'accès à des données réelles : données sur le nombre total de déplacement dans une ville donnée. Ceci permettra, en fonction du nombre total d'habitant de la ville de calculer le nombre de déplacement moyen de chaque habitant, et donc la valeur de R_0 s'en suit sans difficulté.

4 Autres modèles statistiques

En dehors des modèles mécanistes comme ceux qui dérivent du modèle SIR, des modèles phénoménologiques peuvent être utilisés pour estimer le taux de croissance exponentielle de l'épidémie du COVID-19. En effet, la plupart des courbes cumulatives du nombre de personnes infectées lors d'une épidémie croît d'abord de façon exponentielle avant de se stabiliser au nombre total des personnes infectées lors de la propagation de l'épidémie. À cet effet, un simple modèle phénoménologique peut être utilisé pour décrire la forme de la courbe cumulative du nombre de personne infectées. Cependant, le modèle phénoménologique en tant que tel peut ne pas avoir de signification ou d'explication biologique.

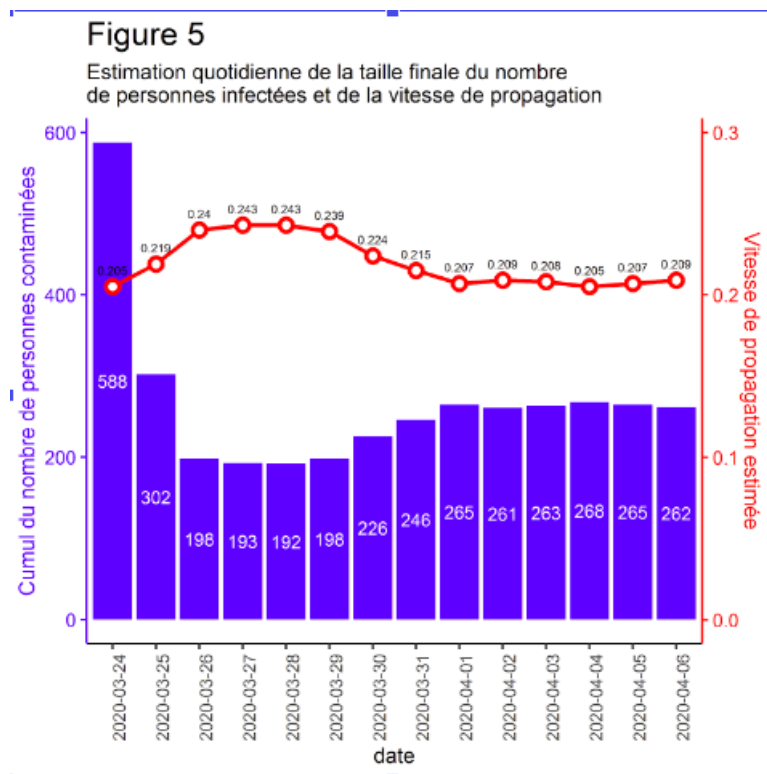
4.1 Le modèle Logistique

Un des modèles phénoménologiques fréquemment utilisé est le modèle Logistique. Appliqué aux données du COVID-19, ce modèle permet d'estimer de façon quotidienne l'ampleur de la maladie et lorsque le nombre de personnes infectées commence à converger, on pourra en conclure que l'épidémie est devenue stable au sein du territoire national. À partir de là, la modélisation devient de plus en plus intéressante, car il permettra de dire à l'autorité que ses mesures ont bien un impact positif pour freiner la propagation de l'épidémie. Les paramètres estimés avec le modèle logistique sont :

- le nombre initial de personnes infectées
- le nombre total de personnes infectées à la fin de l'épidémie
- le taux de croissance de l'épidémie

À partir de ces paramètres, il est possible de déduire la date à laquelle la pique de l'épidémie sera atteinte (le point d'inflexion de la courbe du cumul du nombre de personnes infectées) et le nombre de personnes infectées à cette date.

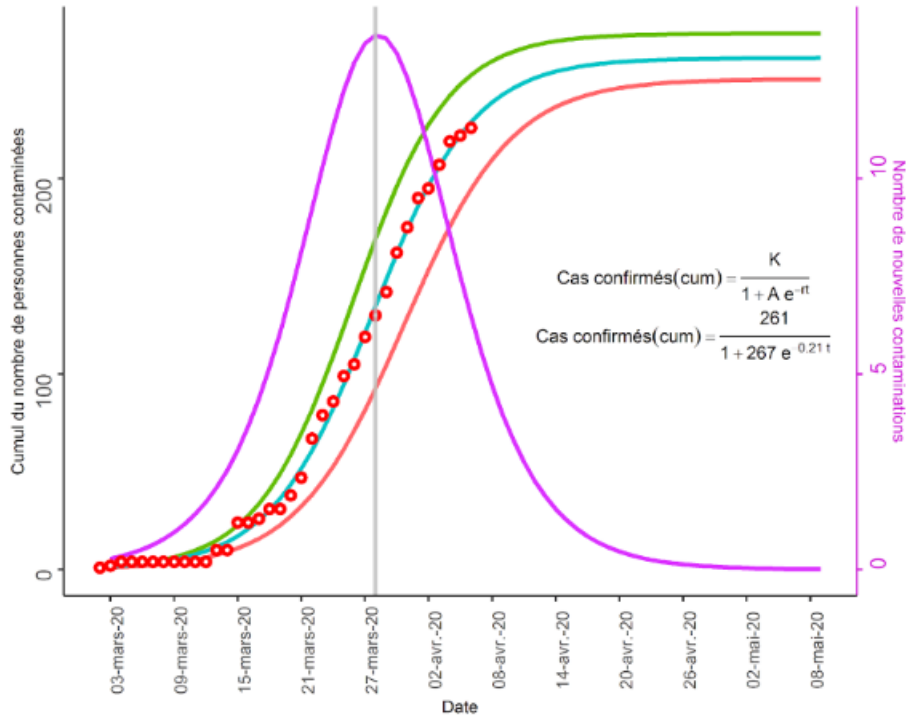
La figure 5 montre les estimations quotidiennes du nombre final de personnes infectées ainsi que la vitesse de propagation de la pandémie. Au regard, de ces estimations, la pandémie du COVID-19 semble toujours être dans une situation légèrement instable car la taille finale des personnes infectées n'est pas totalement convergente. On peut toujours s'attendre à des augmentations du nombre de personnes infectées.



La figure 6 montre l'estimation du modèle logistique à la date 6 Avril. Les résultats montrent que la pique de du Covid-19 serait atteint à la date du 28 Mars et on peut espérer une situation stable de la pandémie en fin Avril début Mai, toute chose étant égal par ailleurs. Cependant, vue que la taille finale du nombre de personnes infecté n'est pas encore convergente, ces projections sont seulement utiles pour appréhender la situation dans le court terme.

Figure 6

Estimation quotidienne de la taille finale du nombre de personnes infectées et l'évolution des nouveaux cas à la date du 06 Avril



4.2 Le modèle de Richards

Le modèle de Richards est une variante du modèle Logistique avec l'introduction d'une certaine flexibilité. Ceci, en introduisant un paramètre supplémentaire permettant de contrôler la pente de la courbe. Pour le moment ce n'est pas encore implémenté pour les données du Sénégal.

4.3 Le modèle exponentiel

Le début d'une pandémie est souvent caractérisé par une croissance exponentielle du nombre de personnes infectées. La courbe du cumul du nombre de personnes infectées peut, dans ce cas être décrite par un modèle exponentiel. Au regard de l'analyse comparative des modèles (Figure 7), le nombre cumulé de personnes infectées suit une tendance penchant à partir 04 Avril suivant ainsi les projections du modèle logistique. Toute chose étant égale par ailleurs, la taille finale du nombre de personnes infectées peut être atteint dans le moyen terme.

Figure 7

Comparaison des projections des modèles exponentiel et logistique

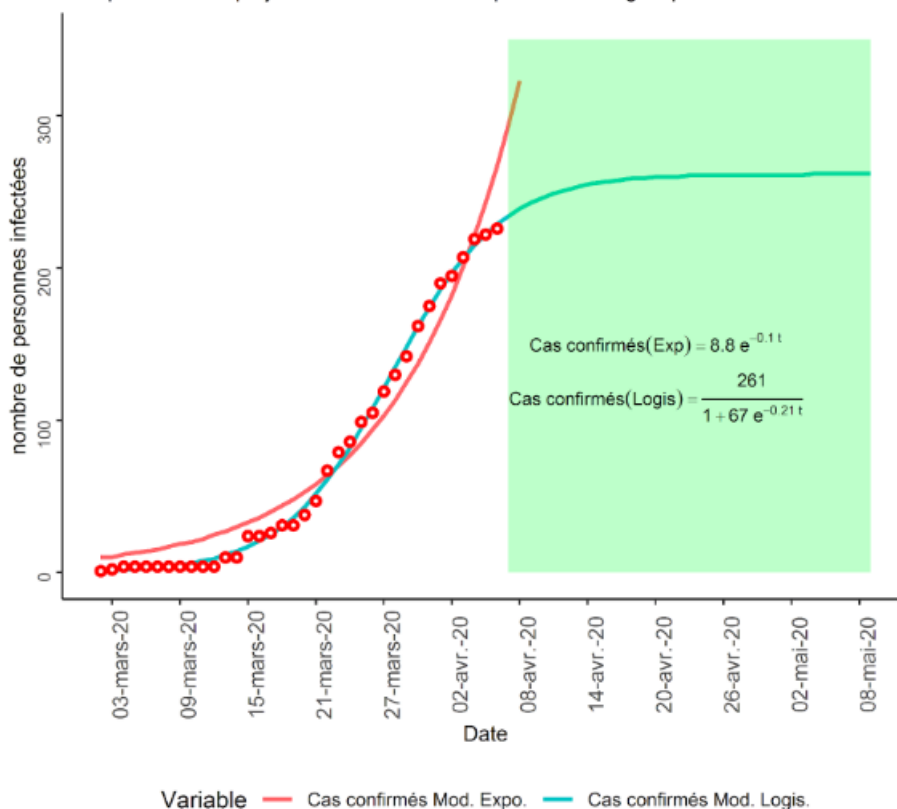


Figure 4:

5 Limites des modèles présentés

La principale limite des projections issues de la modélisation reste les biais sur les données observées. En effet, les données collectées quotidiennement et communiquées par le ministère de la santé ne seraient qu'une proportion de la vraie valeur du nombre de personnes infectées par le Covid-19 sur l'ensemble du territoire national. Ceci peut être lié par le fait que certaines personnes peuvent être infectées sans développer de symptômes (personnes asymptomatiques). Il faut aussi noter que la transmission communautaire observée dans certaines villes du pays est un réel problème pour maîtriser le nombre de personnes touchées par le Covid-19. Aussi est-il important de noter que les données observées sont fortement corrélées à l'effort des autorités sanitaires consistant à détecter et faire le suivi des personnes ayant été en contact avec une personne infectée. À ce stade, une stratégie qui serait intéressante est de tester massivement la population.

Comme le montre la figure ci-dessous, le nombre de cas déclarés positifs est fortement corrélé avec le nombre de tests réalisés.

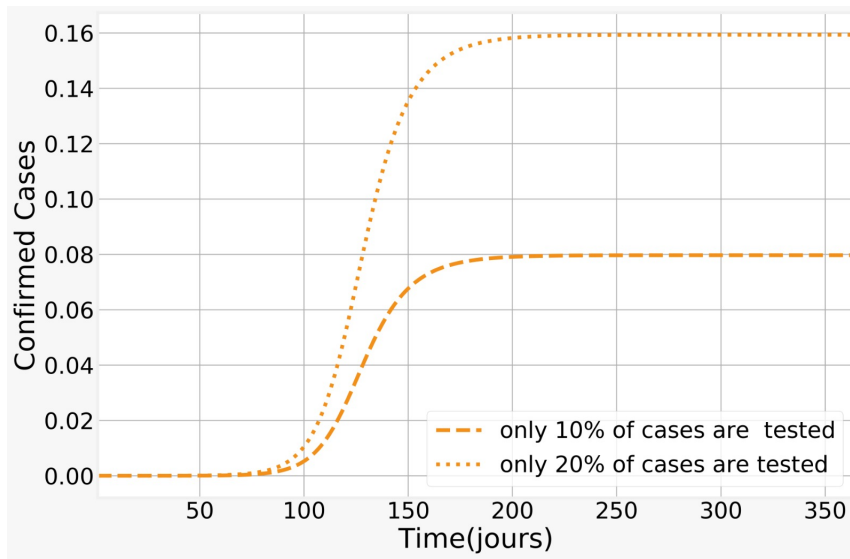


Figure 5:

6 Conclusion

L'objectif principal de cette étude était d'obtenir un aperçu de la façon dont les effets de réseau entrent en jeu en milieu urbain lors d'une épidémie. Avec des densités de population, une mobilité et une dynamique toujours croissantes, les villes deviennent de plus en plus exposées et fragiles. Et donc cette étude montre qu'il faut adopter des mécanismes de gestion de crises efficaces, ceci en jouant sur certains paramètres spécifiques à une ville et qui peuvent varier d'une ville à une autre. Par exemple, à travers la modélisation mathématique et grâce aux résultats numériques, nous avons vu qu'une subdivision compartimentale de la population dans des endroits clés, ou la prise de mesures draconiennes pour freiner la mobilité, peut être déterminante lors d'une crise sanitaire comme celle engendrée par le COVID-19. Cependant, il faut adapter les recommandations liées à la réduction de la valeur de R_0 aux réalités de la vie quotidienne de chacune des villes étudiées, et donc une question très importante qui peut se poser serait de savoir comment mettre en œuvre de telles mesures tout en minimisant les dommages et les pertes pour le fonctionnement de la ville et de son économie d'une part, mais aussi d'assurer une continuité du bien-être social dans un pays comme le Sénégal où une grande partie des emplois est générée par le secteur informel [7]?

Remerciement

M. Malick Ba, élève ingénieur en quatrième année à l'école polytechnique de Paris

M. Panongbene Jean Mohammed Sawadogo, élève ingénieur en troisième année à l'école polytechnique de Paris.

M. Cheikh Diene, étudiant en master in economics à l'Ecole polytechnique

M. Pape Faye, étudiant en sixième année de médecine à la faculté de médecine, pharmacie et d'odontologie de l'université Cheikh Anta Diop de Dakar

Mme Khady Birame Ba, étudiante en droit, économie et gestion à l'université d'Orleans
M. Serigne Sylla, Enseignant à l'école élémentaire de POUKHAM NDIÉM/Fatick
M. Amsata Niang, statisticien consultant à l'Organisation des Nations Unies pour l'Alimentation et l'Agriculture (FAO), Rome
Mme Maimouna bella Diallo, étudiante en deuxième année de Réseaux Télécom

References

- [1] JAMIE DUCHARME : World health organization declares covid-19 a 'pandemic.' here's what that means.
- [2] ALEXIS BREZET : Vaccin contre le coronavirus : quand, comment ?
- [3] Fabienne KELLER : Les nouvelles menaces des maladies infectieuses émergentes.
- [4] LISPHILAR : Covid-19 data with sir model.
- [5] François RECHENMANN : Modéliser la propagation d'une épidémie.
- [6] WHO : Situation reports.
- [7] ANSD : Parution du rapport de l'enquête régionale intégrée sur l'emploi et le secteur informel (eri-esi).
- [8] JENNIFER CIAROCHI : How covid-19 and other infectious diseases spread: Mathematical modeling.
- [9] Covid-19 dynamics with sir model.
- [10] BUSINESS : The global coronavirus fatality rate has doubled in just 2 months, according to who data.