UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DEVOIR 1

PAR
CHENGZONG JIANG (20122046)
MICHAEL PLANTE (20182677)
VANESSA THIBAULT-SOUCY (20126808)
JAYDAN ALADRO (20152077)

BACCALAURÉAT EN INFORMATIQUE
FACULTÉ DE L'ÉDUCATION PERMANENTE

TRAVAIL PRÉSENTÉ À GENA HAHN
DANS LE CADRE DU COURS IFT 2105
INTRODUCTION À L'INFORMATIQUE THÉORIQUE

25 JANVIER 2021

Question 1

$(L^*)^* = L^*$

$\forall L \in \Sigma^*$, $(L^*)^* = L^*$
Donc $\forall L \in \Sigma^*$, $(L^*)^* \subseteq L^* \iff (L^*)^* \supseteq L^*$

Par définition, on sait que $L \subseteq L^*$, car L^* est une concaténation de tous les mots d'un langage L, pour tout langage L. Cela implique donc que $(L^*)^*$ est une concaténation de L^* avec lui-même. Comme $(L^*)^*$ contient un mot w_k, où $k \geq 0$, alors $w_k \in L^*$. On peut dire que $L^* \subseteq (L^*)^*$.

Ainsi, $(L^*)^* \supseteq L^*$ est vrai.

Supposons un mot $w \in (L^*)^*$, ou $w = w_1...w_n$ pour $n \geq 0$, où chaque $w_i \in w$, avec $0 \leq i \leq n$, $w_i \in L^*$.
Nous pouvons alors réécrire chaque w_i comme $w_i = w_{i1}...w_{in}$, où chaque $w_{ij} \in w_i$, avec $0 \leq j \leq n$, $w_{ij} \in L$.
Cela montre que $w = w_{11}...w_{1n}...w_{nn} \in L$.
On peut donc voir que w est la concaténation d'un nombre fini de mots du langage L, qui est concaténer avec lui-même pour former L^*, qui est ensuite concaténé pour former $(L^*)^*$.

Ceci démontre que $(L^*)^* \subseteq L^*$ est vrai.

$\therefore$ Par preuve directe, nous avons montré que $(L^*)^* = L^*$.

Question 2

Pour un alphabet $\Sigma = \{\}$.
Si $L = \{\epsilon\}$, nous avons que $L^2 = L$. Comme $L^2 = L \cdot L = \{\epsilon\epsilon\} = \{\epsilon\}$. Ainsi, $L^2 = L$.
Si $L = \{\emptyset\}$, $L^2 = L \cdot L = \{\emptyset\emptyset\} = \{\emptyset\}$. Ainsi, $L^2 = L$.

Sachant que L^2 est la concaténation du langage L avec lui-même deux fois, il n'existe pas une infinité de langage sur un même alphabet tel que $L^2 = L$. En effet, si $L = \{a\}, L^2 = \{aa\}, L \neq L^2$.

Question 3

Montrons par induction que pour tout $k > 0$, $L^k = L$ avec $k = *$:

- Le cas de base est $k = 2$. Nous avons $L^k = L$ pour $k = 2$.
  $L^2 = L$ est vrai.

- On suppose que pour $k = *$, l'équation $L^k = L$ est vraie. Montrons alors le cas pour $k + 1$ que : $L^{k+1} = L$ est vraie.

$$\begin{aligned} L^{k+1} &= L^k \cdot L \\ &= L \cdot L \quad \text{car } L^k = L \text{ par hypothèse d'induction} \\ &= L^2 \\ &= L \qquad \text{car } L^2 = L \end{aligned}$$

- Donc $L^{k+1} = L$. On peut conclure par induction que $L^k = L$ pour $k = *$.