TP 9

#1. Trouver G tel que L(G)=L.

a) $L=\{a^n b^{2n} \mid n \geq 2\}$ sur $\Sigma=\{a,b\}$

$S \to aSbb \mid aabbbb$

b) $L=\{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \text{ est pair}\}$ sur $\Sigma=\{0,1\}$

$S \to \varepsilon \mid S1S \mid S0S0S$

ou

$S \to 1S \mid 0U0S \mid \varepsilon$

$U \to 1U \mid \varepsilon$

c) $L=\{w_1 \# w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a,b\}^*, w_1 \neq w_2^R\}$ sur $\Sigma=\{a,b,\#\}$

① $|w_1|=|w_2|$

$U_1 \to aU_1a \mid bU_1b \mid U_2$

$U_2 \to aU_3b \mid bU_3a$

$U_3 \to aU_3a \mid bU_3b \mid bU_3a \mid aU_3b \mid \#$

② $|w_1| \neq |w_2|$

$P_1 \to aP_1a \mid aP_1b \mid bP_1a \mid bP_1b \mid P_2 \mid P_3$

$P_2 \to aP_2 \mid bP_2 \mid a\# \mid b\#$

$P_3 \to P_3a \mid P_3b \mid \#a \mid \#b$

$S \to U_1 \mid P_1$

2 Prouver que $L(G)=L$

$L=\{b^n w \mid w \in \{a,b\}^*, n \geq 0, |w|<n\}$ sur $\Sigma=\{a,b\}$

$G=(V,\Sigma,R,S)$ $R=\{S \to BW$

$V=\{S,W,B\}$ $W \to bWa \mid bWb \mid \varepsilon$

$B \to bB \mid b\}$

① Le langage engendré par la variable B est $\{b^n \mid n \geq 1\}$

(1.1) Si $B \overset{k}{\Rightarrow} w$ $k \geq 1$ alors $w=b^n$ $n \geq 1$

Induction sur k possible mais c'est assez évident.

(1.2) Si $w=b^n$ $n \geq 1$ alors $B \overset{*}{\Rightarrow} w$

Induction sur n possible mais ici c'est assez évident.

② Le langage engendré par la variable W est $\{b^n w \mid w \in \{a,b\}^*, n \geq 0, |w|=n\}$

(2.1) Si $W \overset{k}{\Rightarrow} w$ $k \geq 1$ alors $w=b^n y$ où $y \in \{a,b\}^*$, $n \geq 0$, $|y|=n$

Induction sur k. (étapes)

- Cas de base: $k=1$

  Pour engendrer un mot en 1 étape, on a $W \Rightarrow \varepsilon$ comme seul choix. ε correspond à $n=0$

  $\varepsilon = b^0 \varepsilon$ $\boxed{ok}$

- Hypothèse d'induction

  Supposons que si $W \overset{t}{\Rightarrow} z$ $t \leq k$ alors $z=b^n y$ où $y \in \{a,b\}$ $n \geq 0$ $|y|=n$

- Pas d'induction

  On veut montrer que si $W \overset{k+1}{\Rightarrow} w$ alors $w=b^n y$ où $y \in \{a,b\}^*$, $n \geq 0$, $|y|=n$

Si $W \overset{k+1}{\Rightarrow} w$ alors la première application de règle est $W \Rightarrow bWa$ ou $W \to bWb$

1) $W \overset{1}{\Rightarrow} bWa$

$\overset{k}{\Rightarrow} bza = w$ ↙ par H.I où $y \in \{a,b\}^*$, $n \geq 0$, $|y| = n$

$= bb^n y a$

$= b^{n+1} x$ et $x \in \{a,b\}^*$, $|x| = n+1$ $\boxed{ok}$

2) $W \overset{1}{\Rightarrow} bWb$

$\overset{k}{\Rightarrow} bzb = w$ ↙ par H.I.

$= bb^n y b$ où $y \in \{a,b\}^*$, $n \geq 0$, $|y| = n$

$= b^{n+1} x$ et $x \in \{a,b\}^*$, $|x| = n+1$ $\boxed{ok}$

(2.2) Si $w = b^n y$ où $y \in \{a,b\}^*$, $n \geq 0$, $|y| = n$ alors $W \overset{*}{\Rightarrow} w$

Induction sur n.

- Cas de base : $n = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$ et on a la dérivation $W \overset{1}{\Rightarrow} \varepsilon$

$n = 1 \Rightarrow w = ba$ ou $w = bb$ et on a les dérivations $W \Rightarrow bWa \Rightarrow ba$ $W \Rightarrow bWb \Rightarrow bb$ $\boxed{ok}$

- Hypothèse d'induction :
  Supposons que si $z = b^t y$ où $y \in \{a,b\}^*$, $t \geq 0$, $|y| = t$ et $t \leq n$ alors $W \overset{*}{\Rightarrow} z$

- Pas d'induction :
  On veut montrer que si $w = b^{n+1} x$ où $x \in \{a,b\}^*$, $|x| = n+1$, alors $W \overset{*}{\Rightarrow} w$

  2 cas.

  1) $x = yb$ où $|y| = n$ x finit par un b

  $\Rightarrow w = b^{n+1} x$

  $= b^{n+1} yb = bb^n yb$ On a la dérivation

  $W \overset{1}{\Rightarrow} bWb$

  $\overset{*}{\Rightarrow} bb^n yb$

2) $x = ya$ où $|y| = n$ <u>x finit par un a</u>

$\Rightarrow w = b^{n+1}x$

$= b^{n+1}ya$

$= bb^{n}ya$

On a la dérivation $W \Rightarrow bWa$ ↲ par H.I.

$\overset{*}{\Rightarrow} bb^{n}ya$

$= w$ ∎

③ $L(G) = L$

③.1 $L(G) \subseteq L$ · Si $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ alors $w \in L$

Si $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ alors $S \overset{1}{\Rightarrow} BW \overset{*}{\Rightarrow} w$

Donc $S \Rightarrow BW \underbrace{\overset{*}{\Rightarrow} b^{k}W}_{\text{par ①}} \underbrace{\overset{*}{\Rightarrow} b^{k}b^{n}y}_{\text{par ②}} = b^{n+k}y = w$

où $y \in \{a, b\}^*$, $n \geq 0$, $|y| = n$.

On a que le mot est de la bonne forme et $|y| = n < n+k \Rightarrow w \in L$ ∎

③.2 $L \subseteq L(G)$: Si $w \in L$ alors $S \overset{*}{\Rightarrow} w$

$w = b^{n}y$ où $y \in \{a, b\}^*$, $n \geq 0$, $|y| < n$

alors $w = b^{n-t}b^{t}y$ où $|y| = t < n$

On a la dérivation

$S \overset{1}{\Rightarrow} BW$ ↲ par ①

$\overset{*}{\Rightarrow} b^{n-t}W$ ↲ par ②

$\overset{*}{\Rightarrow} b^{n-t}b^{t}y$

$= w$ ∎

#3 Transformer G en FNC

$G = (V, \Sigma, R, S)$ $V = \{S, A, B, C\}$ $\Sigma = \{a, b, c\}$

$R = \{ S \to ASB \mid C \mid AA$

$A \to aA \mid B \mid BabB$

$B \to A \mid bBb \mid \varepsilon$

$C \to cc \mid \varepsilon \}$

1. ajouter $S_0 \to S$

$S_0 \to S$

...

2. éliminer $A \to X_1 \ldots a\, X_n$

najouter $A \to X_1 \ldots N_a \ldots X_n$

$N_a \to a$

$S_0 \to S$

$S \to ASB \mid C \mid AA$

$A \to B \mid N_a A \mid B N_a N_b B$

$B \to A \mid N_b B N_b \mid \varepsilon$

$C \to N_c N_c \mid \varepsilon$

$N_a \to a$

$N_b \to b$

$N_c \to c$

3. éliminer les plus que 3

$S_0 \to S$

$S \to AS_1 \mid C \mid AA$

$A \to N_a A \mid B \mid BA_1$

$B \to A \mid N_b B_1 \mid \varepsilon$

$C \to N_c N_c \mid \varepsilon$

$N_a \to a$ $N_b \to b$ $N_c \to c$

$S_1 \to SB$

$A_1 \to N_a A_2$

$A_2 \to N_b B$

$B_1 \to B N_b$

4. élimine $A \to \varepsilon$

$S_0 \to S \mid \varepsilon$

$S \to AS_1 \mid C \mid AA \mid \cancel{\varepsilon} \mid S_1 \mid A$

$S_1 \to SB \mid S \mid B \mid \cancel{\varepsilon}$

$A \to N_aA \mid B \mid BA_1 \mid A_1 \mid \cancel{\varepsilon} \mid N_a$

$A_1 \to N_aA_2$

$A_2 \to N_bB \mid N_b$

$B \to A \mid N_bB_1 \mid \cancel{\varepsilon}$ $\quad B_1 \to BN_b \mid N_b$

$C \to N_cN_c \mid \cancel{\varepsilon}$

$N_a \to a \quad N_b \to b \quad N_c \to c$

1. $C \to \varepsilon$
2. $B \to \varepsilon$
3. $A \to \varepsilon$
4. $S \to \varepsilon$
5. $S_1 \to \varepsilon$

5. éliminer $A \to B$

$S_0 \to \cancel{S} \mid \varepsilon \mid AS_1 \mid AA \mid N_cN_c \mid N_aA \mid BA_1 \mid a \mid N_aA_2 \mid N_bB_1 \mid SB$

$S \to AS_1 \mid \cancel{C} \mid AA \mid \cancel{S} \mid \cancel{A} \mid N_cN_c \mid N_aA \mid BA_1 \mid a \mid N_aA_2 \mid N_bB_1 \mid SB$

$S_1 \to SB \mid \cancel{S} \mid \cancel{B} \mid N_bB_1 \mid N_aA \mid BA_1 \mid a \mid N_aA_2 \mid AS_1 \mid AA \mid N_cN_c$

$A \to N_aA \mid \cancel{B} \mid BA_1 \mid \cancel{A_1} \mid \cancel{N_a} \mid a \mid N_aA_2 \mid N_bB_1$

$A_1 \to N_aA_2$

$A_2 \to N_bB \mid \cancel{N_b} \mid b$

$B \to \cancel{A} \mid N_bB_1 \mid N_aA \mid BA_1 \mid \cancel{A_1} \mid \cancel{N_a} \mid a \mid N_aA_2$

$B_1 \to BN_b \mid \cancel{N_b} \mid b$

$C \to N_cN_c$

$N_a \to a \quad N_b \to b \quad N_c \to c$

1. $B_1 \to N_b$
2. $A_2 \to N_b$
3. $B \to A$
4. $B \to N_a$
5. $B \to A_1$
6. $A_1 \to N_a$
7. $A \to A_1$
8. $A \to B$
9. $S_1 \to B$
10. $S \to C$
11. $S \to A$
12. $S_1 \to S$
13. $S \to S_1$
14. $S_0 \to S$

Resultat final:

$S_0 \to AA \mid AS_1 \mid BA_1 \mid SB \mid N_aA \mid N_aA_2 \mid N_bB_1 \mid N_cN_c \mid a \mid \varepsilon$

$S \to AA \mid AS_1 \mid BA_1 \mid SB \mid N_aA \mid N_aA_2 \mid N_bB_1 \mid N_cN_c \mid a$

$S_1 \to AA \mid AS_1 \mid BA_1 \mid SB \mid N_aA \mid N_aA_2 \mid N_bB_1 \mid N_cN_c \mid a$

$A \to BA_1 \mid N_aA \mid N_aA_2 \mid N_bB_1 \mid a$

$A_1 \to N_a \mid A_2 \quad A_2 \to N_bB \mid b$

$B \to BA_1 \mid N_aA \mid N_aA_2 \mid N_bB_1 \mid a$

$B_1 \to BN_b \mid b$

$C \to N_cN_c$

$N_a \to a \quad N_b \to b \quad N_c \to c$