UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

$$\frac{8+1+7}{40} = \frac{16}{40} + \frac{2^{\text{latex}}}{40} = \boxed{\frac{18}{40}}$$

DEVOIR 2

PAR
CHENGZONG JIANG (20122046)
MICHAEL PLANTE (20182677)
VANESSA THIBAULT-SOUCY (20126808)
JAYDAN ALADRO (20152077)

BACCALAURÉAT EN INFORMATIQUE
FACULTÉ DE L'ÉDUCATION PERMANENTE

TRAVAIL PRÉSENTÉ À GENA HAHN
DANS LE CADRE DU COURS IFT 2105
INTRODUCTION À L'INFORMATIQUE THÉORIQUE

1 FÉVRIER 2021

Question 1

$\frac{8}{10}$

L'union de k langages réguliers, où $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, définit sur le même alphabet Σ est un langage régulier.

Preuve :

Comme le lemme vue en classe nous l'a prouvé, l'union de 2 langages réguliers est un langage régulier. Donc si L_0 et L_1 sont réguliers, le langage $L_0 \cup L_1$ est réguliers.

Considérons maintenant le cas de l'union du langage régulier $L_0 \cup L_1$ avec le langage régulier L_2. Les deux langages réguliers $L_0 \cup L_1$ et L_2 peuvent être reconnue par les automates fini déterministes $M_{0\cup 1}$ et M_2 respectivement.

Oui mais pas nécessaire

Nous pouvons maintenant écrire les équations pour $M_{0\cup 1}$ et M_2 comme $M_{0\cup 1} = (Q_{0\cup 1}, \Sigma_{0\cup 1}, \delta_{0\cup 1}, q_{0\cup 1}, F_{0\cup 1})$, et $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$.

Comme $L_{0\cup 1}$ et L_2 sont des langages réguliers, par hypothèse nous pouvons construire un automate fini déterministe $M_{L_{0\cup 1}\cup L_2}$ qui saura reconnaître le langage $L_{0\cup 1} \cup L_2$ s'il est régulier.

Nous avons donc $M_{L_{0\cup 1}\cup L_2} = (Q_{L_{0\cup 1}\cup L_2}, \Sigma, \delta_{L_{0\cup 1}\cup L_2}, q_{L_{0\cup 1}\cup L_2}, F_{L_{0\cup 1}\cup L_2})$, où :
- Nous pouvons obtenir l'ensemble fini des états $Q_{L_{0\cup 1}\cup L_2}$ en effectuant le produit cartésiens des ensembles $Q_{0\cup 1}$ et Q_2. Ainsi $Q = \{(e_{0\cup 1}, e_2) | e_{0\cup 1} \in Q_{0\cup 1} \cap e_2 \in Q_2\}$.
- L'alphabet Σ est le même que pour les AFD $M_{0\cup 1}$ et M_2 (selon l'énoncer tous les langages sont sur le même alphabet).
- La fonction de transition $\delta_{L_{0\cup 1}\cup L_2}$, qui par définition est $\delta_{L_{0\cup 1}\cup L_2} : Q_{L_{0\cup 1}\cup L_2}$ x $\Sigma \longrightarrow Q_{L_{0\cup 1}\cup L_2}$, on peut cependant réécrire cette équation en utilisant l'ensemble fini des états Q que nous avons définit plus haut. Notre onction de transition devient alors $\delta_{L_{0\cup 1}\cup L_2}((e_{0\cup 1}, e_2), a)$, ou $a \in \Sigma$, qui peut-être réécrit comme $(\delta_{0\cup 1}(e_{0\cup 1}, a), \delta_2(e_2, a))$.
- L'état initial $q_{L_{0\cup 1}\cup L_2} \in Q$ correspond donc à la paire $(q_{0\cup 1}, q_2)$.
- L'état acceptant F correspond une paire, où chacun des éléments est un états acceptant de $M_{0\cup 1}$ ou de M_2. Ce qui nous donne $F_{L_{0\cup 1}\cup L_2} = \{(e_{0\cup 1}, e_2) | e_{0\cup 1} \in F_{0\cup 1} \cup e_2 \in F_2\}$ et peut-être également écrit comme $F_{L_{0\cup 1}\cup L_2} = (F_{0\cup 1}$ x $Q_2) \cup (Q_{0\cup 1}$ x $F_2)$.

2.1

On peut donc voir que l'AFD $M_{L_{0\cup 1}\cup L_2}$ construit saura reconnaître l'union des langages réguliers $L_{0\cup 1}$ et L_2. Le langage $L_{0\cup 1} \cup L_2$ est donc régulier.

? -1

Pour l'union de k langages réguliers, où $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$:
Supposons le langage régulier $L_{k-1} = (((((L_0 \cup L_1) \cup L_2) \cup L_3)...) \cup L_{k-2}) \cup L_{k-1}$. Examinons maintenant si le langage obtenue par $L_{k-1} \cup L_k$ est réguliers.

On a prouver plus haut que nous sommes capable de construire un AFD qui reconnaît l'union de l'union de deux langages régulier et un langage régulier. Donc comme l'énoncer le précise, les k langages sont régulier alors il existe une AFD M qui reconnaît le langage $L_{k-1} \cup L_k$.
Sachant que $M = (Q, \Sigma, \delta, q_r, F)$ provient de l'union des M_{k-1} et M_k comme $M_{k-1} = (Q_{k-1}, \Sigma_{k-1}, \delta_{k-1}, q_{k-1}, F_{k-1})$, et $M_k = (Q_k, \Sigma_k, \delta_k, q_k, F_k)$. En suivant les étapes de construction de M utiliser plus haut on peut conclure que M reconnaîtra le langage $L_{k-1} \cup L_k$.

Ce qui prouve que $\bigcup_{i\in k} L_i$ est régulier, pour $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Ça ne prouve pas l'énoncé

Lire ici :

2.2

1/20

Question 2

$\delta(q_0, w_1) = \delta_1$?

Si un langage est régulier, on peut construire une AFD qui saura le reconnaître. Comme L contient un unique mot w, avec $w = w_0 w_1 w_2 ... w_i \in \Sigma$ et $i \in \mathbb{N}$, le AFD qui le reconnaîtra, aura un seul état acceptant.

$n+1$? -2

Donc $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, où $Q = q_0 q_1 q_2 ... q_i$ $\Sigma = \{w_0, w_1, w_2, ..., w_i\}$ avec $i \in \mathbb{N}$, $\delta = \delta(q_n, w_{n+1}) = q_{n+1}$ pour $n = 0, ..., i-1$, et $F = q_n$. Comme le mot w est constituer d'un nombre fini de symbole de Σ, nous aurons donc un état final F qui acceptera le mot w. Le langage L est donc régulier.

$F = \{q_n\}$ -1

$Q = \{q_0, q_1, q_2 \ldots\}$ est un ensemble !

Σ peut contenir des symboles pas dans w -1

Pourquoi est-ce que $L(M) = L$?

Preuve ? -14

7/10

Question 3

Pour prouver que tout langage fini est régulier, il faut prouver que n'importe quel langage fini peut être accepté par une machine M quelconque. Donc, qu'il est possible de construire une machine acceptante pour chaque langage fini. Avec la question 1, il est prouvé que l'union d'un nombre quelconque de langage régulier est régulier. Avec la question 2, il est prouvé qu'un langage avec un seul mot est régulier. Par définition, un langage est un ensemble de mots. Par construction, il est possible de séparer les mots d'un langage en plusieurs langages. Par exemple : $L = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_n\}$ où $n \in \mathbb{N}$. Ce langage peut être séparé en un nombre n de langage avec un seul mot.

$L = \{L_1, L_2, L_3, ..., L_n\}$ où $L_1 = \{w_1\}$, $L_2 = \{w_2\}$, ..., $L_n = \{w_n\}$

Chaque langage L_1, L_2, ..., L_n contient un seul mot. La question 2 prouve qu'un langage avec un seul mot est régulier. De plus, $\cup_{L_i \in L}$ est régulier aussi, puisque nous avons démontré que l'union de n langage régulier, où $n \in \mathbb{N}$ est régulier. Comme tous les langages qui forment L ont un seul mot, ils sont régulier et l'union de tous ces langages réguliers est aussi régulier.

Tous les langages finis sont réguliers.

Petite preuve que $L = \bigcup_i L_i$? -1

Et si $L = \emptyset$? -2

Index des commentaires

2.1 Étant donné que (L0 U L1) est régulier et que L2 est régulier, on sait que leur union l'est aussi directement par le lemme 3 vu en classe.

2.2 En relisant votre preuve, elle correspond bien à une preuve par récurrence. Cas de base, Hypothèse et Pas de récurrence y sont. Par contre, la démarche n'est pas vraiment claire. Il faut annoncer qu'on fait une preuve par récurrence, quel est le cas de base, etc..
-1 pour clarté