DOCUMENT SUPPLÉMENTAIRE AU TP 3

Fait par Rémi Ligez (remi.ligez@umontreal.ca)

Corollaire 2.11

À la page 48 des notes du chapitre 2, on dit :

> Pour tout i $\geq$ 0, il existe une fonction qui n'est pas calculable par un programme RÉPÉTER avec une profondeur de boucle i, mais qui est calculable par un programme avec une profondeur de boucle i+1.

Montrons que pour tout i $\geq$ 0, la fonction B_{i+2} n'est pas calculable par un programme RÉPÉTER avec une profondeur de boucle i, mais elle est calculable avec un programme RÉPÉTER avec une profondeur de boucle i+1.

Aux pages 33 et 34 des notes du chapitre 2, on a montré que pour tout i $\geq$ 0, la fonction B_{i+1} est calculable par un programme RÉPÉTER avec profondeur de boucle i. Ce qui montre que la fonction B_{i+2} est calculable par un programme RÉPÉTER avec profondeur de boucle i+1.

Il reste donc à montrer que B_{i+2} n'est pas calculable avec un programme RÉPÉTER avec profondeur de boucle i.

Regardons le cas i = 0. Il faut donc montrer que B_2 n'est pas calculable avec un programme RÉPÉTER avec profondeur de boucle 0. Utilisons le théorème 2.10 (page 42 des notes du chapitre 2) sur les programmes RÉPÉTER P de profondeur de boucle 0 qui ont L lignes de codes et qui prennent un seul registre en entrée.

$$\mathcal{M}(P, r_1) \leq B_1^{<L>}(r_1)$$

où $\mathcal{M}(P, r_1)$ est la valeur maximale de tous les registres après l'exécution de P.

Regardons ce qui se passe lorsqu'on donne en entrée 2L dans le registre r_1.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(P, 2L) &\leq B_1^{<L>}(2L) \\
&= 2L + 2L \qquad (1) \\
&= 2(2L) \\
&< 2(2L) + 3 \\
&= B_2(2L)
\end{aligned}
$$

(1) car $B_1(x) = x + 2$ donc on additionne L fois 2 à 2L.

On a donc :

$$\mathcal{M}(P, 2L) < B_2(2L)$$

Donc, tous les programmes RÉPÉTER P à L lignes de code avec profondeur de boucle 0 qui ont 2L en entrée ne peuvent pas produire un entier supérieur ou égal à $B_2(2L)$ dans ses registres. Donc, B_2 n'est pas calculable par un programme RÉPÉTER avec une profondeur de boucle 0.

Pour i $\geq$ 0. Il faut donc montrer que B_{i+2} n'est pas calculable avec un programme RÉPÉTER avec profondeur de boucle i. Utilisons le théorème 2.10 (page 42 des notes du chapitre 2) sur les programmes RÉPÉTER P de profondeur de boucle i qui ont L lignes de codes et qui prennent un seul registre en entrée.

$$\mathcal{M}(P, r_1) \leq B_{i+1}^{<L>}(r_1)$$

où $\mathcal{M}(P, r_1)$ est la valeur maximale de tous les registres après l'exécution de P.

Regardons ce qui se passe lorsqu'on donne en entrée 3L dans le registre r_1.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(P,3L) &\leq B_{i+1}^{<L>}(3L) \\
&\leq B_{i+1}^{<L>}(4L-2) \qquad (1) \\
&\leq B_{i+1}^{<L>}(2(2L-1)) \\
&< B_{i+1}^{<L>}(B_2^{<2L-1>}(1)) \qquad (2) \\
&\leq B_{i+1}^{<L>}(B_{i+1}^{<2L-1>}(1)) \qquad (3) \\
&= B_{i+1}^{<L+2L-1>}(1) \\
&= B_{i+1}^{<3L-1>}(1) \\
&\leq B_{i+1}^{<3L+1>}(1) \qquad (4) \\
&= B_{i+2}(3L)
\end{aligned}
$$

(1) L $\geq$ 2 parce que les programmes P avec une profondeur de boucle d'au moins 1 ont au moins 2 lignes de codes et parce que $B_i^{<k>}(x)$ est croissante en x (Fait 2 à la page 41 des notes du chapitre 2).
(2) $2k < B_2^{<k>}(1)$ (Fait 4 à la page 41 des notes du chapitre 2) donc $2(2L-1) < B_2^{<2L-1>}(1)$ et parce que $B_i^{<k>}(x)$ est (strictement) croissante en x (Fait 2 à la page 41 des notes du chapitre 2).
(3) i+1 $\geq$ 2 parce que i $\geq$ 1. On utilise aussi que $B_i^{<k>}(x)$ est croissante en x et en i (Fait 2 à la page 41 des notes du chapitre 2).
(4) $B_i^{<k>}(x)$ est croissante en k (Fait 2 à la page 41 des notes du chapitre 2).
On a donc :

$$\mathcal{M}(P,3L) < B_{i+2}(3L)$$

Donc, tous les programmes RÉPÉTER P à L lignes de code avec profondeur de boucle i qui ont 3L en entrée ne peuvent pas produire un entier supérieur ou égal à $B_{i+2}(3L)$ dans ses registres. Donc, B_{i+2} n'est pas calculable par un programme RÉPÉTER avec une profondeur de boucle i.

$\blacksquare$

On peut donc en conclure que la fonction d'Ackermann n'est pas calculable avec un programme RÉPÉTER.