TP 10

#00 Correction du devoir #3

1. a) $S \to NaN$

$N \to ANb \mid bNA \mid NN \mid a \mid \varepsilon$

$A \to aA \mid a$

c) Prouver que $L(G) = L$

① Le langage engendré par la variable A est $\{a^n \mid n \geq 1\}$

→ Évident, pas de preuve nécessaire.

② Le langage engendré par la variable N est $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \geq |w|_b\}$

(2.1) Si $N \overset{k}{\Rightarrow} w$ $k \geq 1$ alors $|w|_a \geq |w|_b$

Induction sur k

Cas de base: $k=1$

2 choix:

1) $N \overset{1}{\Rightarrow} \varepsilon$ et $|\varepsilon|_a \geq |\varepsilon|_b$ $\boxed{ok}$

2) $N \Rightarrow a$ et $|a|_a \geq |a|_b$

Hypothèse d'induction

Supposons que si $N \overset{t}{\Rightarrow} z$ $t \leq k$ alors $|z|_a \geq |z|_b$

Pas d'induction

On veut m.q. si $N \overset{k+1}{\Rightarrow} w$ alors $|w|_a \geq |w|_b$.

Si $N \overset{k+1}{\Rightarrow} w$ alors la première application est $N \to ANb$ ou $N \to NN$ ou $N \to bNA$.

3 cas:

1) $N \overset{1}{\Rightarrow} ANb$ par ①

$\overset{*}{\Rightarrow} a^nNb$ $n \geq 1$

$\overset{t}{\Rightarrow} a^nzb = w$ $t < k$

$|w|_a = n + |z|_a \geq 1 + |z|_b = |w|_b$ $\boxed{ok}$

par ① H.I.

2) $N \overset{1}{\Rightarrow} bNA$

$\hat{m}$ chose que 1)

3) $N \overset{1}{\Rightarrow} NN$ $\qquad |w|_a = |z_1|_a + |z_2|_a$ par H.I.

$\overset{t}{\Rightarrow} z_1 N$ $\qquad \geq |z_1|_b + |z_2|_b$ $\boxed{ok}$

$\overset{s}{\Rightarrow} z_1 z_2 = w \quad s,t \leq k$ $\qquad = |w|_b$

2.2) Si w est t.q. $|w|_a \geq |w|_b$ alors $N \overset{*}{\Rightarrow} w$ ■

Induction sur $n = |w|$

Cas de base: $n = 0 \quad w = \varepsilon$

On a la dérivation $N \overset{1}{\Rightarrow} \varepsilon = w$ $\boxed{ok}$

$n = 1 \quad w = a$

On a la dérivation $N \overset{1}{\Rightarrow} a = w$ $\boxed{ok}$

Hypothèse d'induction

Si $|z|_a \geq |z|_b$, $|z| \leq n$ alors $N \overset{*}{\Rightarrow} z$

Pas d'induction

On veut $|w|_a \geq |w|_b$, $|w| = n+1$ alors $N \overset{*}{\Rightarrow} w$

Soit w t.q. $|w| = n+1$ t.q. $|w|_a \geq |w|_b$

On a 3 cas:

1) $w = azb$ où $|z|_a \geq |z|_b \quad |z| = n-1$

On a la dérivation

$N \overset{1}{\Rightarrow} ANb$

$\overset{1}{\Rightarrow} aNb$ par H.I.

$\overset{*}{\Rightarrow} azb$

2) $w = bza$ même chose que 1)

3) $w = z_1 z_2$ où $|z_1|_a \geq |z_1|_b$ et $|z_2|_a \geq |z_2|_b$

On a la dérivation $\qquad 1 \leq |z_1| \leq n$

$N \Rightarrow NN$ par H.I. $\qquad 1 \leq |z_2| \leq n$

$\overset{*}{\Rightarrow} z_1 N$ par H.I.

$\overset{*}{\Rightarrow} z_1 z_2$

■

③ $L(G)=L$

(3.1) Si $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ alors $w \in L$ $(|w|_a > |w|_b)$

$L(G) \subseteq L$ Si $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ alors $S \overset{1}{\Rightarrow} NaN \overset{*}{\Rightarrow} w$

Donc $S \overset{1}{\Rightarrow} NaN$

$\overset{*}{\Rightarrow} z_1 a z_2 = w$

$|w|_a = |z_1|_a + |z_2|_a + 1$ par ②

$\geq |z_1|_b + |z_2|_b + 1$

$= 1 + |w|_b$

$> |w|_b$ ∎

(3.2) $L \subseteq L(G)$

Si $|w|_a > |w|_b$ alors $S \overset{*}{\Rightarrow} w$

Si $|w|_a > |w|_b$ alors $w = z_1 a z_2$ où $|z_1|_a \geq |z_1|_b$, $|z_2|_a \geq |z_2|_b$

On a la dérivation

$S \overset{1}{\Rightarrow} NaN$

$\overset{*}{\Rightarrow} z_1 a N$ par ②

$\overset{*}{\Rightarrow} z_1 a z_2$ par ②

∎

b) 1) $S_0 \rightarrow S$

$S \rightarrow NaN$

$N \rightarrow ANb \mid bNA \mid NN \mid a \mid \varepsilon$

$A \rightarrow aA \mid a$

2) $S_0 \rightarrow S$

$S \rightarrow N L_a N$

$N \rightarrow A N L_b \mid L_b N A \mid NN \mid a \mid \varepsilon$

$A \rightarrow L_a A \mid a$

$L_a \rightarrow a$ $L_b \rightarrow b$

3) $S_0 \rightarrow S$

$S \rightarrow NB$ $B \rightarrow L_a N$

$N \rightarrow AC \mid L_b D \mid NN \mid a \mid \varepsilon$ $C \rightarrow N L_b$ $D \rightarrow NA$

$A \rightarrow L_a A \mid a$

$L_a \rightarrow a$ $L_b \rightarrow b$

4) $S_0 \to S$
$S \to NB \mid B$
$B \to L_a N \mid L_a$
$N \to AC \mid L_b D \mid NN \mid a$
$C \to NL_b \mid L_b$
$D \to NA \mid A$
$A \to L_a A \mid a$
$L_a \to a \quad L_b \to b$

5) $S_0 \to NB \mid L_a N \mid a$
$S \to NB \mid L_a N \mid a$
$B \to L_a N \mid a$
$N \to AC \mid L_b D \mid NN \mid a$
$C \to NL_b \mid b$
$D \to NA \mid L_a A \mid a$
$A \to L_a A \mid a$
$L_a \to a \quad L_b \to b$

Réduction $L_1 \leq L_2$ "L_1 se réduit à L_2"
S'il existe une fonction <u>calculable</u> (par une MT)

$$f : \Sigma^* \to \Sigma^*$$

t.q. $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$

M.Q. $L \notin DEC$
① Th. de Rice : $L = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in S\} \notin DEC$
<u>si</u> $\exists$ MT M^* t.q. $L(M^*) \in S$
et $\exists$ MT M^+ t.q. $L(M^+) \notin S$
② $A \leq L$ où $A \notin DEC$ connu
↳ A_{MT}, $HALTE_{MT}$, $TOUT_{MT}$, REG_{MT}, ...

③ $\overline{L} \notin DEC$

④ $L \notin REC$ ou $\overline{L} \notin REC$

⑤ Preuve directe (comme la preuve $A_{MT} \notin DEC$)

M.Q. $L \notin REC$

① $A \leq L$ où $A \notin REC$ connu
↳ $\overline{A_{MT}}$

② $L \notin DEC$ et $\overline{L} \in REC$

③ Preuve directe

#1

$L = \{ \langle M \rangle \mid M$ est une MT et accepte au moins 2 mots$\}$

a) $L \notin DEC$. est-ce que $L \in DEC$?

Rice:

$S = \{ L \in REC \mid |L| \geq 2 \}$

$\Rightarrow L = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in S \}$

∃ une MT M^* t.q. $L(M^*) = \{0,1\} \in S$

∃ une MT M^+ t.q. $L(M^+) = \{0\} \notin S$

Sans perte de généralité, on peut prendre $\Sigma = \{0,1\}$

$\{0,1\} \in S$ et clairement $\{0,1\} \in REC$.

$\{0\} \notin S$ et clairement $\{0\} \in REC$

$\Rightarrow L \notin DEC$ par le th de Rice ■

b). Est-ce que $L \in REC$? oui.

Simulation en diagonale:

simuler M sur le mot 0 pendant 4 étapes (transitions)

mots en ordre lexicographique

# d'étapes / mots	1	2	3	4
ε				
0				
1				
00				

chaque mot est une simulation

MT qui reconnaît L

- Prend y en entrée.
- Vérifier que $y = \langle M \rangle$ est la description d'une MT
  ↳ Si non, rejeter le mot.
- Simuler M sur le mot w pendant k étapes/transitions où w et k sont obtenus diagonalement.
  ↳ Si M accepte, garder w en mémoire
- Continuer à simuler en diagonal.
- Lorsque deux mots ont été acceptés, on accepte le mot y $(= \langle M \rangle)$.

La MT accepte tout mot de L.
Si $y = \langle M \rangle \in L \Rightarrow$ Accepte
Elle n'accepte aucun mot de L.
Si $y \notin L$: si y n'est pas une MT → Rejette
si y est une MT → boucle
$\Rightarrow L \in REC$

c) Est-ce que $\overline{L} \in REC$?
Non pcq $L \notin DEC$ et $L \in REC$

#2 $L = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \subseteq \Sigma^* \}$

a) Peut-on utiliser le th. de Rice?
On pourrait prendre $S = \{ L \in REC \mid L \subseteq \Sigma^* \}$
$\Rightarrow L = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in S \}$
Il n'existe pas de MT M^+ t.q. $L(M^+) \notin S$
car tous les langages sont t.q. $L \subseteq \Sigma^*$.
On ne peut pas utiliser Rice.

$L(M^+) = \{\varepsilon\} \subseteq \Sigma^*$
$= \emptyset \subseteq \Sigma^*$
...

b) Est-ce que $L \in DEC$?
oui.
<u>MT qui décide L:</u>
- Prend y en entrée
- Vérifie que $y = \langle M \rangle$ est la description d'une MT.
  Si oui, accepte y
  Si non, rejette y.

#3 $TOUT_{MT} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$
a) Est-ce que $L \in DEC$?
Non, vu en cours.
(Th de Rice avec $S = \{\Sigma^*\}$)
b) Est-ce que $L \in REC$?
Non.
Montrons que $\overline{A_{MT}} \leq L$
$\overline{A_{MT}} = \{y \mid y$ n'est pas de la forme $\langle M, w \rangle$ ou $y = \langle M, w \rangle$ et M rejette/boucle sur $w\}$
On veut une $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ <u>calculable</u> t.q.
$x \in \overline{A_{MT}} \Leftrightarrow f(x) \in TOUT_{MT}$

x n'est pas $\langle M, w \rangle$ ou $x = \langle M, w \rangle$ et $w \notin L(M)$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = \langle M^* \rangle$ où $L(M^*) = \Sigma^*$

<u>f:</u>
- prend y en entrée
- si y n'est pas de la forme $\langle M, w \rangle$ alors $f(y) = \langle M_T \rangle$ (M_T est une MT qui accepte tout)
- si $y = \langle M, w \rangle$ alors $f(y) = \langle M^* \rangle$ où M^* est la MT suivante:

• Prend z en entrée
• simule M sur w pendant $|z|$ étapes
↳ si M accepte : Refuser z
sinon : accepter z.

① f est bel et bien calculable par une MT.
⚠ Ne pas simuler M sur w dans f !
(sinon f n'est plus calculable si ça boucle)

② Si $y \in \overline{A_{MT}}$

2.1 Soit y n'est pas de la forme $\langle M, w \rangle$
$\Rightarrow f(y) = \langle M_+ \rangle$ et $L(M_+) = \Sigma^*$
$\Rightarrow f(y) \in TOUT_{MT}$

2.2 Si $y = \langle M, w \rangle$ et donc $w \notin L(M)$
$\Rightarrow f(y) = \langle M^* \rangle$
La MT M n'acceptera jamais w peu importe le nombre d'étapes.
$\Rightarrow M^*$ va accepter tous les mots
$\Rightarrow L(M^*) = \Sigma^*$
$\Rightarrow f(y) \in TOUT_{MT}$

③ Si $y \notin \overline{A_{MT}}$: $y = \langle M, w \rangle$ et $w \in L(M)$
$\Rightarrow f(y) = \langle M^* \rangle$
Comme $w \in L(M)$, il existe un nombre d'étapes pour lequel M va accepter w.
$\Rightarrow$ certains mots assez longs seront refusés par M^*
$\Rightarrow L(M^*) \neq \Sigma^* \Rightarrow f(y) \notin TOUT_{MT} \Rightarrow \overline{A_{MT}} \leq TOUT_{MT}$
$\Rightarrow TOUT_{MT} \notin REC$