SOLUTIONNAIRE DEVOIR #3

Fait par Rémi Ligez (remi.ligez@umontreal.ca)

#3

$$L = \{a^i b^j c^h | \ i, j, h \in \mathbb{N} \text{ et h = max(i,j)}\}$$

Soit p $\geq$ 1 (donné par le lemme du pompiste),

Prenons w = $a^p b^p c^p$.

On a bien $w \in L$ et |w| = 3p $\geq$ p.

Soit w = uvxyz où |vy| > 0 et |vxy| $\leq$ p.

On subdivise toutes les décompositions en plusieurs cas :

$\boxed{\text{Cas 1}}$: vy contient seulement des a

$\boxed{\text{i=2}}$: $uv^2xy^2z = a^{p+|vy|}b^pc^p \notin L$ car max(p+|vy|,p) = p + |vy| $\neq$ p car |vy| > 0.

$\boxed{\text{Cas 2}}$: vy contient seulement des b

$\boxed{\text{i=2}}$: $uv^2xy^2z = a^pb^{p+|vy|}c^p \notin L$ car max(p,p+|vy|) = p + |vy| $\neq$ p car |vy| > 0.

$\boxed{\text{Cas 3}}$: vy contient seulement des c

$\boxed{\text{i=2}}$: $uv^2xy^2z = a^pb^pc^{p+|vy|} \notin L$ car max(p,p) = p $\neq$ p + |vy| car |vy| > 0.

$\boxed{\text{Cas 4}}$: vy contient des a et des b

$\boxed{\text{i=2}}$:

$|uv^2xy^2z|_a > |uvxyz|_a = p$

$|uv^2xy^2z|_b > |uvxyz|_b = p$

$|uv^2xy^2z|_c = |uvxyz|_c = p$

$\Rightarrow max(|uv^2xy^2z|_a, |uv^2xy^2z|_b) > |uv^2xy^2z|_c$

$\Rightarrow uv^2xy^2z \notin L.$

$\boxed{\text{Cas 5}}$: vy contient des b et des c

$\boxed{\text{i=0}}$:

$|uv^2xy^2z|_a = |uvxyz|_a = p$

$|uv^2xy^2z|_b < |uvxyz|_b = p$

$|uv^2xy^2z|_c < |uvxyz|_c = p$

$\Rightarrow max(|uv^2xy^2z|_a, |uv^2xy^2z|_b) = p > |uv^2xy^2z|_c$

$\Rightarrow uv^2xy^2z \notin L.$

$\Rightarrow$ L $\notin$ HC par le lemme du pompiste hors-contexte. $\blacksquare$