SOLUTIONNAIRE DEVOIR #3

Fait par Rémi Ligez (remi.ligez@umontreal.ca)

#2

$$L = \{ss^R s|\ s \in \{a,b\}^*\}$$

Soit p $\geq$ 1 (donné par le lemme du pompiste),

Prenons w = $a^p b^p b^p a^p a^p b^p$.

On a bien $w \in L$ car on peut écrire w = $ss^R s$ où s = $a^p b^p$ et |w| = 6p $\geq$ p.

Par souci de simplicité, on notera "le premier bloc de a" pour les p premières lettres du mot w, "le deuxième bloc de a" pour les $(3p + 1 - 5p)^e$ lettres du mot w, "le premier bloc de b" pour les $(p + 1 - 3p)^e$ lettres du mot w et "le deuxième bloc de b" pour les p dernières lettres de w.

Soit w = uvxyz où |vy| > 0 et |vxy| $\leq$ p.

On subdivise toutes les décompositions en plusieurs cas :

On note que comme |vxy| $\leq$ p, vy ne peut pas contenir des lettres dans plus de 2 "blocs" consécutifs.

$\boxed{\text{Cas 1}}$: vy contient seulement des a

$\boxed{\text{Cas 1.1}}$: vy est dans le premier bloc de a

$\boxed{\text{i=13}}$: $uv^{13}xy^{13}z = a^{p+12|vy|}b^p b^p a^p a^p b^p$

Comme le mot contient au moins 6p+12 = 3(2p+4) lettres et qu'il finit par $a^p b^p$, il faut que s dans $uv^{13}xy^{13}z = ss^R s$ finisse par $a^p b^p$. Ceci implique que s = $a^{p+12|vy|}b^p$.

Or, $ss^R s = a^{p+12|vy|}b^p b^p a^{p+12|vy|}a^{p+12|vy|}b^p \neq uv^{13}xy^{13}z$. Donc, $uv^{13}xy^{13}z \notin L$.

$\boxed{\text{Cas 1.2}}$: vy est dans le deuxième bloc de a

$\boxed{\text{i=13}}$: $uv^{13}xy^{13}z = a^pb^pb^pa^pa^{12|vy|}a^pb^p$

Comme le mot contient au moins 6p+12 = 3(2p+4) lettres et qu'il finit par a^pb^p, il faut que s dans $uv^{13}xy^{13}z = ss^Rs$ finisse par a^pb^p. Ceci implique que s = a^pb^p.

Or, $ss^Rs = a^pb^pb^pa^pa^pb^p \neq uv^{13}xy^{13}z$. Donc, $uv^{13}xy^{13}z \notin L$.

$\boxed{\text{Cas 2}}$: vy contient seulement des b

$\boxed{\text{Cas 2.1}}$: vy est dans le premier bloc de b

$\boxed{\text{i=10}}$: $uv^{10}xy^{10}z = a^pb^pb^{9|vy|}b^pa^pa^pb^p$

Comme le mot contient au moins 6p+9 = 3(2p+3) lettres et qu'il commence par a^pb^p, il faut que s dans $uv^{10}xy^{10}z = ss^Rs$ commence par a^pb^p. Ceci implique que s = a^pb^p.

Or, $ss^Rs = a^pb^pb^pa^pa^pb^p \neq uv^{10}xy^{10}z$. Donc, $uv^{10}xy^{10}z \notin L$.

$\boxed{\text{Cas 2.2}}$: vy est dans le deuxième bloc de b

$\boxed{\text{i=10}}$: $uv^{10}xy^{10}z = a^pb^pb^pa^pa^pb^{p+9|vy|}$

Comme le mot contient au moins 6p+9 = 3(2p+3) lettres et qu'il commence par a^pb, il faut que s dans $uv^{10}xy^{10}z = ss^Rs$ commence par a^pb. Ceci implique que s = $a^pb^{p+9|vy|}$.

Or, $ss^Rs = a^pb^{p+9|vy|}b^{p+9|vy|}a^pa^pb^{p+9|vy|} \neq uv^{10}xy^{10}z$. Donc, $uv^{10}xy^{10}z \notin L$.

$\boxed{\text{Cas 3}}$: vy contient des a et des b

$\boxed{\text{Cas 3.1}}$: vy contient des a du premier bloc de a et des b du premier bloc de b

$\boxed{\text{i=0}}$: $uv^0xy^0z = a^nb^mb^pa^pa^pb^p$ où n,m < p

Comme le mot contient 6p - |vy| ≥ 5p lettres et qu'il commence par a^nb, il faut que s dans $uv^0xy^0z = ss^Rs$ commence par a^nb. Ceci implique de s = a^nb^p.

Or, $ss^Rs = a^nb^pb^pa^na^nb^p \neq uv^0xy^0z$ car n,m < p. Donc, $uv^0xy^0z \notin L$.

$\boxed{\text{Cas 3.2}}$: vy contient des b du premier bloc de b et des a du deuxième bloc de a

$\boxed{\text{i=0}}$: $uv^0xy^0z = a^pb^pb^na^ma^pb^p$ où n,m < p

Comme le mot contient 6p - |vy| ≥ 5p lettres et qu'il finit par ab^p, il faut que s dans $uv^0xy^0z = ss^Rs$ finisse par ab^p. Ceci implique de s = a^pb^p.

Or, $ss^Rs = a^pb^pb^pa^pa^pb^p \neq uv^0xy^0z$ car n,m < p. Donc, $uv^0xy^0z \notin L$.

$\boxed{\text{Cas 3.3}}$: vy contient des a du deuxième bloc de a et des b du deuxième bloc de b

$\boxed{\text{i=0}}$: $uv^0xy^0z = a^pb^pb^pa^pa^nb^m$ où n,m < p

Comme le mot contient 6p - |vy| ≥ 5p lettres et qu'il finit par ab^m, il faut que s dans $uv^0xy^0z = ss^Rs$ finisse par ab^m. Ceci implique de s = a^pb^m.

Or, $ss^Rs = a^pb^mb^ma^pa^pb^m \neq uv^0xy^0z$ car n,m < p. Donc, $uv^0xy^0z \notin L$.

⇒ L ∉ HC par le lemme du pompiste hors-contexte. ∎