UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DEVOIR 7

PAR
CHENGZONG JIANG (20122046)
MICHAEL PLANTE (20182677)
VANESSA THIBAULT-SOUCY (20126808)
JAYDAN ALADRO (20152077)
SOUKAINA BENABID (20148642)

BACCALAURÉAT EN INFORMATIQUE
FACULTÉ DES ARTS ET SCIENCES

TRAVAIL PRÉSENTÉ À GENA HAHN
DANS LE CADRE DU COURS IFT 2105
INTRODUCTION À L'INFORMATIQUE THÉORIQUE

05 AVRIL 2021

Question 2

On veut prouver que tout langage régulier est hors contexte.

Soit L_1 un langage régulier quelconque. Par définition, on sait qu'il existe un automate $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ tel que $L(M) = L_1$.

Soit la grammaire hors contexte G tel que : $G = (V, \Sigma, R, S)$
G possedera une variable v pour chacun des états de l'automate.
On définit :
$V = \{R_i | q_i \in Q\}$
$\delta(q_i, a) = q_j$
$R_i \to aR_j$
$\forall q_i \in F, R_i \to \epsilon$
$S = R_0$

Preuve :

Soit L est régulier, cela implique qu'il existe une expression régulière er sur Σ telle que $L(er) = L$.

Trouvons maintenant une grammaire hors-contexte $G = (V, \Sigma, R, S)$ qui génère $L(er)$.

Comme la grammaire G dépend de $|er|$, nous allons donc prouver que la GHC existe en utilisant une preuve par récurrence.

Cas de base :
- $er = \varnothing$: La grammaire $G = (V, \Sigma, R, S)$ qui génère er aura comme règle $R : \varnothing$. Ainsi, $L(er) = \varnothing = L(G)$.

- $er = \epsilon$: Nous aurons la grammaire $G = (V, \Sigma, R, S)$ qui génère er aura comme règle $R : S \to \epsilon$. Ainsi, $L(er) = \epsilon = L(G)$.

- $er = a$, pour $a \in \Sigma$: La grammaire $G = (V, \Sigma, R, S)$ qui génère er aura comme règle $R : S \to a$. Ainsi, $L(er) = a = L(G)$.

Étape d'induction :

- $er = u+v$, avec $L(u)$ et $L(v)$ des langages hors contexte, comme un langage hors contexte est fermer sous l'union, nous avons que $L(er) = L(u) \cup L(v)$ ce qui implique que $L(er)$ est également un langage hors contexte. Par définition d'un langage hors contexte, il existe une grammaire hors contexte qui génère le langage $L(er)$.

- $er = uv$, avec $L(u)$ et $L(v)$ des langages hors contexte. Comme un langage qui résulte de la concaténation de langage hors contexte est lui aussi un langage hors contexte, nous avons que $L(er) = L(u)L(v)$, donc $L(er)$ est également un langage hors contexte. Par définition d'un langage hors contexte, il existe une grammaire hors contexte qui génère le langage $L(er)$.

On a prouvé alors qu'on peut définir une grammaire hors contexte pour n'importe quel langage régulier. Donc tout langage régulier est hors contexte.

Question 3

On cherche à donnez la forme normale de Chomsky de la grammaire suivante, etape par etape.

$S \rightarrow aBBBCD|BC|A|BAB$
$A \rightarrow aAa|aba|Cbb$
$B \rightarrow BB|b|\epsilon$
$C \rightarrow S|BABAB$
$E \rightarrow a|b|bb|aa$

-Étape 1 : on enlève les règles qui sont inutile.

On enlève la règle E car elle n'est jamais référer par les autre règle de la grammaire, et donc elle ne peut pas être atteinte via la variable de départ S.

$S \rightarrow aBBBCD|BC|A|BAB$
$A \rightarrow aAa|aba|Cbb$
$B \rightarrow BB|b|\epsilon$
$C \rightarrow S|BABAB$

On enlève également le mot aBBBCD car comme nous n'avons pas de règle qui définie la variable D, le mots ne peut pas être terminal.
$S \rightarrow BC|A|BAB$
$A \rightarrow aAa|aba|Cbb$
$B \rightarrow BB|b|\epsilon$
$C \rightarrow S|BABAB$

-Étape 2 : Ajouter un nouveau symbole S_0 qui devient l'axiome et de la règle associée.

$S \rightarrow BC|A|BAB$
$A \rightarrow aAa|aba|Cbb$
$B \rightarrow BB|b|\epsilon$
$C \rightarrow S|BABAB$
$S_0 \rightarrow S$

-Étape 3 : Enlever les règle de la forme $A \rightarrow \epsilon$.

- $B \rightarrow \epsilon$:

$S \rightarrow BC|A|BAB$

$A \rightarrow aAa|aba|Cbb$
$B \rightarrow BB|b$
$C \rightarrow S|BABAB$
$S_0 \rightarrow S$

- $S \rightarrow \epsilon$ par l'entremise de B :

$S \rightarrow BC|A|BAB|AB|BA|C$
$A \rightarrow aAa|aba|Cbb$
$B \rightarrow BB|b$
$C \rightarrow S|BABAB$
$S_0 \rightarrow S$

- $C \rightarrow \epsilon$ par l'entremise de B :

$S \rightarrow BC|A|BAB|AB|BA|C$
$A \rightarrow aAa|aba|Cbb$
$B \rightarrow BB|b$
$C \rightarrow S|BABAB|ABAB|BAAB|BABA|ABA|BAA|AAB|AA$
$S_0 \rightarrow S$

-Étape 4 : Enlever les règles de la forme $A \rightarrow B$

- $S \rightarrow A$:

$S \rightarrow BC|BAB|AB|BA|aAa|aba|Cbb|C|$
$A \rightarrow aAa|aba|Cbb$
$B \rightarrow BB|b$
$C \rightarrow S|BABAB|ABAB|BAAB|BABA|ABA|BAA|AAB|AA$
$S_0 \rightarrow S$

- $S \rightarrow C$:

$S \rightarrow BC|BAB|AB|BA|aAa|aba|Cbb|BABAB|ABAB|BAAB|BABA|ABA|BAA|AAB|AA$
$A \rightarrow aAa|aba|Cbb$
$B \rightarrow BB|b$
$C \rightarrow S|BABAB|ABAB|BAAB|BABA|ABA|BAA|AAB|AA$
$S_0 \rightarrow S$

- $C \rightarrow S$:

$S \rightarrow BC|BAB|AB|BA|aAa|aba|Cbb|BABAB|ABAB|BAAB|BABA|ABA|BAA|AAB|AA$
$A \rightarrow aAa|aba|Cbb$
$B \rightarrow BB|b$
$C \rightarrow BC|BAB|AB|BA|aAa|aba|Cbb|BABAB|ABAB|BAAB|BABA|ABA|BAA|AAB|AA$
$S_0 \rightarrow S$

- $S_0 \rightarrow S$:

$S \to BC|BAB|AB|BA|aAa|aba|Cbb|BABAB|ABAB|BAAB|BABA|ABA|BAA|AAB|AA$
$A \to aAa|aba|Cbb$
$B \to BB|b$
$C \to BC|BAB|AB|BA|aAa|aba|Cbb|BABAB|ABAB|BAAB|BABA|ABA|BAA|AAB|AA$
$S_0 \to BC|BAB|AB|BA|aAa|aba|Cbb|BABAB|ABAB|BAAB|BABA|ABA|BAA|AAB|AA$

- Étape 5 : Enlever les règles de la forme $A \to u_1...u_k$ pour $k > 2$.

 - $S \to u_1...u_k$ pour $k > 2$:
$S \to BC|BX_2|AB|BA|X_1X_3|X_1X_4|CX_5|BX_6|X_2X_2|X_7X_2|X_7X_7|AX_7|X_7A|AX_2|AA$
$A \to aAa|aba|Cbb$
$B \to BB|b$
$C \to BC|BAB|AB|BA|aAa|aba|Cbb|BABAB|ABAB|BAAB|BABA|ABA|BAA|AAB|AA$
$S_0 \to BC|BAB|AB|BA|aAa|aba|Cbb|BABAB|ABAB|BAAB|BABA|ABA|BAA|AAB|AA$
$X_1 \to a$
$X_2 \to AB$
$X_3 \to AX_1$
$X_4 \to ba$
$X_5 \to bb$
$X_6 \to X_2X_2$
$X_7 \to BA$

 - $A \to u_1...u_k$ pour $k > 2$:
$S \to BC|BX_2|AB|BA|X_1X_3|X_1X_4|CX_5|BX_6|X_2X_2|X_7X_2|X_7X_7|AX_7|X_7A|AX_2|AA$
$A \to X_1X_3|X_1X_4|CX_5$
$B \to BB|b$
$C \to BC|BAB|AB|BA|aAa|aba|Cbb|BABAB|ABAB|BAAB|BABA|ABA|BAA|AAB|AA$
$S_0 \to BC|BAB|AB|BA|aAa|aba|Cbb|BABAB|ABAB|BAAB|BABA|ABA|BAA|AAB|AA$
$X_1 \to a$
$X_2 \to AB$
$X_3 \to AX_1$
$X_4 \to ba$
$X_5 \to bb$
$X_6 \to X_2X_2$
$X_7 \to BA$

 - $C \to u_1...u_k$ pour $k > 2$:
$S \to BC|BX_2|AB|BA|X_1X_3|X_1X_4|CX_5|BX_6|X_2X_2|X_7X_2|X_7X_7|AX_7|X_7A|AX_2|AA$
$A \to X_1X_3|X_1X_4|CX_5$
$B \to BB|b$
$C \to BC|BX_2|AB|BA|X_1X_3|X_1X_4|CX_5|BX_6|X_2X_2|X_7X_2|X_7X_7|AX_7|X_7A|AX_2|AA$
$S_0 \to BC|BAB|AB|BA|aAa|aba|Cbb|BABAB|ABAB|BAAB|BABA|ABA|BAA|AAB|AA$
$X_1 \to a$
$X_2 \to AB$

$X_3 \to AX_1$
$X_4 \to ba$
$X_5 \to bb$
$X_6 \to X_2X_2$
$X_7 \to BA$

- $S_0 \to u_1 ... u_k$ pour $k > 2$:
$S \to BC|BX_2|AB|BA|X_1X_3|X_1X_4|CX_5|BX_6|X_2X_2|X_7X_2|X_7X_7|AX_7|X_7A|AX_2|AA$
$A \to X_1X_3|X_1X_4|CX_5$
$B \to BB|b$
$C \to BC|BX_2|AB|BA|X_1X_3|X_1X_4|CX_5|BX_6|X_2X_2|X_7X_2|X_7X_7|AX_7|X_7A|AX_2|AA$
$S_0 \to BBC|BX_2|AB|BA|X_1X_3|X_1X_4|CX_5|BX_6|X_2X_2|X_7X_2|X_7X_7|AX_7|X_7A|AX_2|AA$
$X_1 \to a$
$X_2 \to AB$
$X_3 \to AX_1$
$X_4 \to ba$
$X_5 \to bb$
$X_6 \to X_2X_2$
$X_7 \to BA$

-Étape 6 : Enlever les règles de la forme $A \to xB$, $A \to Bx$ et $A \to xy$ et ajouter des règles qui génère les variables.

Nous avons traiter tous les cas pour les regles de la forme $A \to xB$ et $A \to Bx$ lors de l'étape précédente.

Traitons maintenant les règle de la forme : $A \to xy$

- pour les règles $X_4 \to ba$ et $X_5 \to bb$:
$S \to BC|BX_2|AB|BA|X_1X_3|X_1X_4|CX_5|BX_6|X_2X_2|X_7X_2|X_7X_7|AX_7|X_7A|AX_2|AA$
$A \to X_1X_3|X_1X_4|CX_5$
$B \to BB|b$
$C \to BC|BX_2|AB|BA|X_1X_3|X_1X_4|CX_5|BX_6|X_2X_2|X_7X_2|X_7X_7|AX_7|X_7A|AX_2|AA$
$S_0 \to BBC|BX_2|AB|BA|X_1X_3|X_1X_4|CX_5|BX_6|X_2X_2|X_7X_2|X_7X_7|AX_7|X_7A|AX_2|AA$
$X_1 \to a$
$X_2 \to AB$
$X_3 \to AX_1$
$X_4 \to X'_1X_1$
$X_5 \to X'_1X'_1$
$X_6 \to X_2X_2$
$X_7 \to BA$
$X'_1 \to b$

Conclusion :

La grammaire Hors-context :
$S \rightarrow aBBBCD|BC|A|BAB$
$A \rightarrow aAa|aba|Cbb$
$B \rightarrow BB|b|\epsilon$
$C \rightarrow S|BABAB$
$E \rightarrow a|b|bb|aa$

peut se réécrire sour la forme normale de Chomsky comme :

$S \rightarrow BC|BX_2|AB|BA|X_1X_3|X_1X_4|CX_5|BX_6|X_2X_2|X_7X_2|X_7X_7|AX_7|X_7A|AX_2|AA$
$A \rightarrow X_1X_3|X_1X_4|CX_5$
$B \rightarrow BB|b$
$C \rightarrow BC|BX_2|AB|BA|X_1X_3|X_1X_4|CX_5|BX_6|X_2X_2|X_7X_2|X_7X_7|AX_7|X_7A|AX_2|AA$
$S_0 \rightarrow BBC|BX_2|AB|BA|X_1X_3|X_1X_4|CX_5|BX_6|X_2X_2|X_7X_2|X_7X_7|AX_7|X_7A|AX_2|AA$
$X_1 \rightarrow a$
$X_2 \rightarrow AB$
$X_3 \rightarrow AX_1$
$X_4 \rightarrow X_1'X_1$
$X_5 \rightarrow X_1'X_1'$
$X_6 \rightarrow X_2X_2$
$X_7 \rightarrow BA$
$X_1' \rightarrow b$