

$$\frac{36 + 30 + 30}{100} = \frac{96}{100} + \frac{10 \text{ Laks}}{100}$$

Devoir 3 IFT2105

Catherine Larivière 0955948

Dominique Vigeant 20129080

14 juillet 2021

$$= \boxed{\frac{100}{100}} \text{ 😊}$$

Tres bien

36/40

1. Considérez le langage suivant :

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a > |w|_b\}.$$

Répondez aux questions suivantes :

(a) ~~Donnez~~ une grammaire hors-contexte  $G$  pour laquelle  $L(G) = L$ .

10/10

$$G = (V, \Sigma, R, S)$$

$$V = \{S, X\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$R = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid aX \mid Xa \mid a \\ X \rightarrow aXb \mid bXa \mid XX \mid aX \mid Xa \mid a \mid \epsilon \end{array} \right\}$$

(b) Transformez votre grammaire  $G$  dans la forme normale de Chomsky.

1. (INIT) Ajouter une nouvelle variable initiale

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid aX \mid Xa \mid a$$

$$X \rightarrow aXb \mid bXa \mid XX \mid aX \mid Xa \mid a \mid \epsilon$$

2. (TERM) Éliminer les règles avec des non-terminaux non-isolés

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASB \mid BSA \mid SS \mid AX \mid XA \mid a$$

$$X \rightarrow AXB \mid BXA \mid XX \mid AX \mid XA \mid a \mid \epsilon$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

3. (BIN) Éliminer les règles à plus de deux symboles à droite

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow AM \mid BN \mid SS \mid AX \mid XA \mid a$$

$$X \rightarrow AP \mid BQ \mid XX \mid AX \mid XA \mid a \mid \epsilon$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

$$M \rightarrow SB$$

$$N \rightarrow SA$$

$$P \rightarrow XB$$

$$Q \rightarrow XA$$

4. (VIDE) Éliminer les règles  $A \rightarrow \epsilon$

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow AM \mid BN \mid SS \mid AX \mid XA \mid a \mid A$$

$$X \rightarrow AP \mid BQ \mid XX \mid AX \mid XA \mid a \mid A$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

$$M \rightarrow SB$$

$$N \rightarrow SA$$

$$P \rightarrow XB \mid B$$

$$Q \rightarrow XA \mid A$$

car  $X \rightarrow AX$  ( $x \rightarrow \epsilon$ )  
 $\rightarrow A$

5. (UNAIRE) Éliminer les règles  $A \rightarrow B$

$$S_0 \rightarrow AM \mid BN \mid SS \mid AX \mid XA \mid a \mid A$$

$$S \rightarrow AM \mid BN \mid SS \mid AX \mid XA \mid a \mid A$$

$$X \rightarrow AP \mid BQ \mid XX \mid AX \mid XA \mid a$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

$$M \rightarrow SB$$

$$N \rightarrow SA$$

$$P \rightarrow XB \mid B$$

$$Q \rightarrow XA \mid A$$

$$S_0 \rightarrow AM \mid BN \mid SS \mid AX \mid XA \mid a$$

$$S \rightarrow AM \mid BN \mid SS \mid AX \mid XA \mid a$$

$$X \rightarrow AP \mid BQ \mid XX \mid AX \mid XA \mid a$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

$$M \rightarrow SB$$

$$N \rightarrow SA$$

$$P \rightarrow XB \mid b$$

$$Q \rightarrow XA \mid a$$

$$G' = (V', \Sigma, R', S_0)$$

$$V' = \{S_0, S, X, A, B, M, N, P, Q\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$R' = \left\{ \begin{array}{l} S_0 \rightarrow AM \mid BN \mid SS \mid AX \mid XA \mid a \\ S \rightarrow AM \mid BN \mid SS \mid AX \mid XA \mid a \\ X \rightarrow AP \mid BQ \mid XX \mid AX \mid XA \mid a \\ A \rightarrow a \\ B \rightarrow b \\ M \rightarrow SB \\ N \rightarrow SA \\ P \rightarrow XB \mid b \\ Q \rightarrow XA \mid a \end{array} \right\}$$

12/15

(c) Démontrez formellement (probablement par induction) que  $L(G) = L$ .

On démontre que  $L(G) = L$  en prouvant que  $L(G) \subseteq L$  et  $L \subseteq L(G)$ .

$L(G) \subseteq L$

Soit  $w \in L(G)$ , soit  $y$  tel que  $X \xRightarrow{n} y$ . Puisque  $X$  dérive seulement vers des termes dont le nombre de  $a$  est supérieur ou égal au nombre de  $b$ ,  $|y|_a \geq |y|_b$ . On veut montrer que  $w \in L$  (donc que  $|w|_a > |w|_b$ ).

Induction sur  $n$  : ( $n$  étant le nombre d'étapes pour engendrer  $w$  à partir de  $S$ )

Cas de base :  $n = 1$

Pour engendrer un mot en 1 étape à partir de  $S$ , on a un seul choix :

$$S \xRightarrow{1} a = w \quad |w|_a = 1 > 0 = |w|_b \quad \checkmark$$

Hypothèse d'induction :

Supposons que si  $z \in L(G)$  tel que  $S \xRightarrow{n} z$  alors  $z \in L$  donc  $|z|_a > |z|_b$ .

( $n \geq 1$ )

Pas d'induction :

On veut montrer que si  $w \in L(G)$  tel que  $S \xRightarrow{n+1} w$  alors  $w \in L$  donc

$|w|_a > |w|_b$ . ( $n \geq 1$ )

Si  $S \xRightarrow{n+1} w$  alors la première règle appliquée est  $S \rightarrow aSb$  ou  $S \rightarrow bSa$

ou  $S \rightarrow SS$  ou  $S \rightarrow aX$  ou  $S \rightarrow Xa$ .

$$1. S \xRightarrow{1} aSb \xRightarrow{n} azb = w$$

$$|w|_a = |z|_a + 1 > |z|_b + 1 = |w|_b \Rightarrow w \in L.$$

$$2. S \xRightarrow{1} bSa \xRightarrow{n} bza = w$$

$$|w|_a = |z|_a + 1 > |z|_b + 1 = |w|_b \Rightarrow w \in L.$$

$$3. S \xRightarrow{1} SS \xRightarrow{n} z_1 z_2 = w$$

$$|w|_a = |z_1|_a + |z_2|_a > |z_1|_b + |z_2|_b = |w|_b \Rightarrow w \in L.$$

$$4. S \xRightarrow{1} aX \xRightarrow{n} ay = w$$

$$|w|_a = |y|_a + 1 > |y|_b = |w|_b \Rightarrow w \in L.$$

$$5. S \xRightarrow{1} Xa \xRightarrow{n} ya = w$$

$$|w|_a = |y|_a + 1 > |y|_b = |w|_b \Rightarrow w \in L.$$

QED

$$\Rightarrow L(G) \subseteq L \quad \blacksquare$$

$$\underline{L \subseteq L(G)}$$

Soit  $w \in L$  (donc  $|w|_a > |w|_b$ ). On veut montrer que  $w \in L(G)$  ( $S \xRightarrow{*} w$ ).

Induction sur  $n$  : ( $n$  étant la longueur du mot  $w$ )

Cas de base :  $n = 1 \Rightarrow w = a$

On a la dérivation  $S \xRightarrow{1} a \Rightarrow w \in L(G)$  ✓

Hypothèse d'induction :

Supposons que si  $z \in L$  tel que  $|z| \leq n$  (donc  $|z|_a > |z|_b$ ), alors  $z \in L(G)$  (donc  $S \xRightarrow{*} z$ ). ( $n \geq 1$ )

Pas d'induction :

On veut montrer que si  $w \in L$  tel que  $|w| = n + 1$  (donc  $|w|_a > |w|_b$ ), alors  $w \in L(G)$  (donc  $S \xRightarrow{*} w$ ). ( $n \geq 1$ )

Puisque  $|w| = n + 1$  et  $w \in L$ , 5 cas sont possibles :

1.  $w = azb$  pour  $|z| = n - 1$  et  $|z|_a > |z|_b$ .

On a la dérivation  $S \xRightarrow{1} aSb \xRightarrow{*} azb = w$  (par H.I.)

$$|w|_a = |z|_a + 1 > |z|_b + 1 = |w|_b \Rightarrow w \in L(G)$$

2.  $w = bza$  pour  $|z| = n - 1$  et  $|z|_a > |z|_b$ .

On a la dérivation  $S \xRightarrow{1} bSa \xRightarrow{*} bza = w$  (par H.I.)

$$|w|_a = |z|_a + 1 > |z|_b + 1 = |w|_b \Rightarrow w \in L(G)$$

3.  $w = z_1z_2$  pour  $|z_1| + |z_2| = n + 1$ ,  $|z_1| \leq n$ ,  $|z_2| \leq n$  et  $|z_1|_a > |z_1|_b$ ,  $|z_2|_a > |z_2|_b$ .

On a la dérivation  $S \xRightarrow{1} SS \xRightarrow{*} z_1z_2 = w$  (par H.I.)

$$|w|_a = |z_1|_a + |z_2|_a > |z_1|_b + |z_2|_b = |w|_b \Rightarrow w \in L(G)$$

4.  $w = az$  pour  $|z| = n$  et  $|z|_a > |z|_b$

On a la dérivation  $S \xRightarrow{1} SS \xRightarrow{*} az = w$  (par H.I.)

$$|w|_a = |z|_a + 1 > |z|_b = |w|_b \Rightarrow w \in L(G)$$

5.  $w = za$  pour  $|z| = n$  et  $|z|_a > |z|_b$

On a la dérivation  $S \xRightarrow{1} SS \xRightarrow{*} za = w$  (par H.I.)

$$|w|_a = |z|_a + 1 > |z|_b = |w|_b \Rightarrow w \in L(G)$$

$$\Rightarrow L \subseteq L(G) \quad \blacksquare$$

Puisque  $L(G) \subseteq L$  et  $L \subseteq L(G)$  alors  $L(G) = L$ .

Il faut aussi montrer  $X \xRightarrow{*} z$   $\forall z \in L$  s.t.  $|z|_a > |z|_b$

oui  
oui  
oui  
 $w = az$   
 $|z|_a > |z|_b$   
 $\nexists$

$S \xRightarrow{1} aX$

$\xRightarrow{*}$

Très bien 30/30

2. Montrez en utilisant le lemme du pompiste que  $L = \{ww^Rw \mid w \in \{a, b\}^*\} \notin HC$  où  $w^R$  désigne le mot  $w$  renversé.

Soit  $p \geq 1$  (donné par le pompiste HC). Prenons  $k = ww^Rw$  avec  $w = a^p b^p$ , et donc

$$k = ww^Rw = a^p b^{2p} a^{2p} b^p \quad k \in L \quad |k| = 6p \geq p$$

On comprend que le nombre de  $a$  dans la partie gauche ( $a^p b^{2p} a^{2p} b^p$ ) est égal à la moitié du nombre de  $a$  dans la partie droite ( $a^p b^{2p} a^{2p} b^p$ ) et que le nombre de  $b$  dans la partie droite ( $a^p b^{2p} a^{2p} b^p$ ) est égal à la moitié du nombre de  $b$  dans la partie gauche ( $a^p b^{2p} a^{2p} b^p$ ). Puisque  $|vxy| \leq p$ ,  $vxy$  couvre au maximum deux lettres [1].

Cas 1 :  $vxy$  ne contient que des  $a$  :

1.1  $a^p b^{2p} a^{2p} b^p$

$$u = a^m \quad v = a^n \quad x = a^r \quad y = a^s \quad z = a^{p-m-n-r-s} b^{2p} a^{2p} b^p \quad n+s > 0, n+r+s \leq p$$

$$\begin{aligned} i = 2 : uv^2xy^2z &= a^m a^{2n} a^r a^{2s} a^{p-m-n-r-s} b^{2p} a^{2p} b^p \\ &= a^{p+n+s} b^{2p} a^{2p} b^p \\ p+n+s &\neq p \Rightarrow uv^2xy^2z \notin L \end{aligned}$$

1.2  $a^p b^{2p} a^{2p} b^p$

$$u = a^p b^{2p} a^m \quad v = a^n \quad x = a^r \quad y = a^s \quad z = a^{2p-m-n-r-s} b^p \quad n+s > 0, n+r+s \leq p$$

$$\begin{aligned} i = 2 : uv^2xy^2z &= a^p b^{2p} a^m a^{2n} a^r a^{2s} a^{2p-m-n-r-s} b^p \\ &= a^p b^{2p} a^{2p+n+s} b^p \\ \frac{2p+n+s}{2} &\neq p \Rightarrow uv^2xy^2z \notin L \end{aligned}$$

Cas 2 :  $vxy$  ne contient que des  $b$  :

2.1  $a^p b^{2p} a^{2p} b^p$

$$u = a^p b^m \quad v = b^n \quad x = b^r \quad y = b^s \quad z = b^{2p-m-n-r-s} a^{2p} b^p \quad n+s > 0, n+r+s \leq p$$

$$\begin{aligned} i = 2 : uv^2xy^2z &= a^p b^m b^{2n} b^r b^{2s} b^{2p-m-n-r-s} a^{2p} b^p \\ &= a^p b^{2p+n+s} a^{2p} b^p \\ \frac{2p+n+s}{2} &\neq p \Rightarrow uv^2xy^2z \notin L \end{aligned}$$

2.2  $a^p b^{2p} a^{2p} b^p$

$$u = a^p b^{2p} a^{2p} b^m \quad v = b^n \quad x = b^r \quad y = b^s \quad z = b^{p-m-n-r-s} \quad n+s > 0, n+r+s \leq p$$

$$\begin{aligned} i = 2 : uv^2xy^2z &= a^p b^{2p} a^{2p} b^m b^{2n} b^r b^{2s} b^{p-m-n-r-s} \\ &= a^p b^{2p} a^{2p} b^{p+n+s} \\ p+n+s &\neq p \Rightarrow uv^2xy^2z \notin L \end{aligned}$$

Cas 3 :  $vxy$  contient des  $a$  et des  $b$  :

3.1  $v$  ne contient que des  $a$  et  $y$  ne contient que des  $b$  :

3.1.1  $a^p b^{2p} a^{2p} b^p$   $m + s > 0, m + n + r + s \leq p$

$$u = a^{p-m-n} \quad v = a^m \quad x = a^n b^r \quad y = b^s \quad z = b^{2p-r-s} a^{2p} b^p$$

$$\begin{aligned} i = 2 : uv^2 xy^2 z &= a^{p-m-n} a^{2m} a^n b^r b^{2s} b^{2p-r-s} a^{2p} b^p \\ &= a^{p+m} b^{2p+s} a^{2p} b^p \end{aligned}$$

$$p + m \neq p \text{ ou } \frac{2p+s}{2} \neq p \Rightarrow uv^2 xy^2 z \notin L$$

3.1.2  $a^p b^{2p} a^{2p} b^p$   $m + s > 0, m + n + r + s \leq p$

$$u = a^p b^{2p} a^{2p-m-n} \quad v = a^m \quad x = a^n b^r \quad y = b^s \quad z = b^{p-r-s}$$

$$\begin{aligned} i = 2 : uv^2 xy^2 z &= a^p b^{2p} a^{2p-m-n} a^{2m} a^n b^r b^{2s} b^{p-r-s} \\ &= a^p b^{2p} a^{2p+m} b^{p+s} \end{aligned}$$

$$p + s \neq p \text{ ou } \frac{2p+m}{2} \neq p \Rightarrow uv^2 xy^2 z \notin L$$

3.2  $v$  ne contient que des  $b$  et  $y$  ne contient que des  $a$  :

3.2.1  $a^p b^{2p} a^{2p} b^p$   $m + s > 0, m + n + r + s \leq p$

$$u = a^p b^{2p-m-n} \quad v = b^m \quad x = b^n a^r \quad y = a^s \quad z = a^{2p-r-s} b^p$$

$$\begin{aligned} i = 2 : uv^2 xy^2 z &= a^p b^{2p-m-n} b^{2m} b^n a^r a^{2s} a^{2p-r-s} b^p \\ &= a^p b^{2p+m} a^{2p+s} b^p \end{aligned}$$

$$\frac{2p+m}{2} \neq p \text{ ou } \frac{2p+s}{2} \neq p \Rightarrow uv^2 xy^2 z \notin L$$

3.3  $v$  ne contient que des  $a$  et  $y$  contient des  $a$  et des  $b$  :

3.3.1  $a^p b^{2p} a^{2p} b^p$   $m + r + s > 0, m + n + r + s \leq p$

$$u = a^{p-m-n-r} \quad v = a^m \quad x = a^n \quad y = a^r b^s \quad z = b^{2p-s} a^{2p} b^p$$

$$\begin{aligned} i = 0 : uv^0 xy^0 z &= a^{p-m-n-r} a^n b^{2p-s} a^{2p} b^p \\ &= a^{p-m-r} b^{2p-s} a^{2p} b^p \end{aligned}$$

$$p - m - r \neq p \text{ ou } \frac{2p-s}{2} \neq p \Rightarrow uv^0 xy^0 z \notin L$$

3.3.2  $a^p b^{2p} a^{2p} b^p$   $m + r + s > 0, m + n + r + s \leq p$

$$u = a^p b^{2p} a^{2p-m-n-r} \quad v = a^m \quad x = a^n \quad y = a^r b^s \quad z = b^{p-s}$$

$$\begin{aligned} i = 0 : uv^0 xy^0 z &= a^p b^{2p} a^{2p-m-n-r} a^n b^{p-s} \\ &= a^p b^{2p} a^{2p-m-r} b^{p-s} \end{aligned}$$

$$p - s \neq p \text{ ou } \frac{2p-m-r}{2} \neq p \Rightarrow uv^0 xy^0 z \notin L$$



3.4  $v$  contient des  $a$  et des  $b$  et  $y$  ne contient que des  $b$  :

$$3.4.1 \quad a^p b^{2p} a^{2p} b^p \quad m+n+s > 0, \quad m+n+r+s \leq p$$

$$u = a^{p-m} \quad v = a^m b^n \quad x = b^r \quad y = b^s \quad z = b^{2p-n-r-s} a^{2p} b^p$$

$$\begin{aligned} i = 0 : uv^0 xy^0 z &= a^{p-m} b^r b^{2p-n-r-s} a^{2p} b^p \\ &= a^{p-m} b^{2p-n-s} a^{2p} b^p \end{aligned}$$

$$p-m \neq p \text{ ou } \frac{2p-n-s}{2} \neq p \Rightarrow uv^0 xy^0 z \notin L$$

$$3.4.2 \quad a^p b^{2p} a^{2p} b^p \quad m+n+s > 0, \quad m+n+r+s \leq p$$

$$u = a^p b^{2p} a^{2p-m} \quad v = a^m b^n \quad x = b^r \quad y = b^s \quad z = b^{p-n-r-s}$$

$$\begin{aligned} i = 0 : uv^0 xy^0 z &= a^p b^{2p} a^{2p-m} b^r b^{p-n-r-s} \\ &= a^p b^{2p} a^{2p-m} b^{p-n-s} \end{aligned}$$

$$p-n-s \neq p \text{ ou } \frac{2p-m}{2} \neq p \Rightarrow uv^0 xy^0 z \notin L$$

3.5 Le cas " $v$  ne contient que des  $b$  et  $y$  contient des  $a$  et des  $b$ " n'est pas représenté puisqu'il mènerait à  $vxy > p$ . Il en est de même pour le cas " $v$  contient des  $a$  et des  $b$  et  $y$  ne contient que des  $a$ ".

(30/30) Très bien

3. Est-ce que  $L = \{a^i b^j c^h \mid i, j, h \in \mathbb{N} \text{ et } h = \max(i, j)\} \in HC$ ? Prouvez votre réponse

Soit  $p \geq 1$  (donné par le pompiste HC). Prenons  $w = a^p b^p c^p$ , et donc

$$w = a^p b^p c^p \quad w \in L \quad |w| = 3p \geq p$$

Puisque  $|vxy| \leq p$ ,  $vxy$  couvre au maximum deux lettres.

Cas 1 :  $vxy$  ne contient que des  $a$  ( $a^p b^p c^p$ )

$$u = a^m \quad v = a^n \quad x = a^r \quad y = a^s \quad z = a^{p-m-n-r-s} b^p c^p \quad n+s > 0, \quad n+r+s \leq p$$

$$i = 2 : uv^2 xy^2 z = a^m a^{2n} a^r a^{2s} a^{p-m-n-r-s} b^p c^p \\ = a^{p+n+s} b^p c^p$$

$$|w|_a > |w|_b \text{ et } |w|_a \neq |w|_c \Rightarrow uv^2 xy^2 z \notin L$$

Cas 2 :  $vxy$  ne contient que des  $b$  ( $a^p b^p c^p$ )

$$u = a^p b^m \quad v = b^n \quad x = b^r \quad y = b^s \quad z = b^{p-m-n-r-s} c^p \quad n+s > 0, \quad n+r+s \leq p$$

$$i = 2 : uv^2 xy^2 z = a^p b^m b^{2n} b^r b^{2s} b^{p-m-n-r-s} c^p \\ = a^p b^{p+n+s} c^p$$

$$|w|_a < |w|_b \text{ et } |w|_b \neq |w|_c \Rightarrow uv^2 xy^2 z \notin L$$

Cas 3 :  $vxy$  ne contient que des  $c$  ( $a^p b^p c^p$ )

$$u = a^p b^p c^m \quad v = c^n \quad x = c^r \quad y = c^s \quad z = c^{p-m-n-r-s} \quad n+s > 0, \quad n+r+s \leq p$$

$$i = 2 : uv^2 xy^2 z = a^p b^p c^m c^{2n} c^r c^{2s} c^{p-m-n-r-s} \\ = a^p b^p c^{p+n+s}$$

$$|w|_a \neq |w|_c \text{ et } |w|_b \neq |w|_c \Rightarrow uv^2 xy^2 z \notin L$$

Cas 4 :  $vxy$  contient des  $a$  et des  $b$  ( $a^p b^p c^p$ )

4.1  $v$  ne contient que des  $a$  et  $y$  ne contient que des  $b$

$$u = a^{p-m-n} \quad v = a^m \quad x = a^n b^r \quad y = b^s \quad z = b^{p-r-s} c^p \quad m+s > 0, \quad m+n+r+s \leq p$$

$$i = 2 : uv^2 xy^2 z = a^{p-m-n} a^{2m} a^n b^r b^{2s} b^{p-r-s} c^p \\ = a^{p+m} b^{p+s} c^p$$

$$|w|_c \neq \max(|w|_a, |w|_b) \Rightarrow uv^2 xy^2 z \notin L$$

4.2  $v$  contient des  $a$  et des  $b$  et  $y$  ne contient que des  $b$

$$u = a^{p-m} \quad v = a^m b^n \quad x = b^r \quad y = b^s \quad z = b^{p-n-r-s} c^p \quad m+n+s > 0, \quad m+n+r+s \leq p$$

$$i = 2 : uv^2 xy^2 z = a^{p-m} (a^m b^n)^2 b^r b^{2s} b^{p-n-r-s} c^p \\ = a^p b^n a^m b^{p+s} c^p \\ \Rightarrow uv^2 xy^2 z \notin L$$

4.3  $v$  ne contient que des  $a$  et  $y$  contient des  $a$  et  $b$

$$u = a^{p-m-n-r} \quad v = a^m \quad x = a^n \quad y = a^r b^s \quad z = b^{p-s} c^p \quad m+r+s > 0, m+n+r+s \leq p$$

$$\begin{aligned} i = 2 : uv^2 xy^2 z &= a^{p-m-n-r} a^{2m} a^n (a^r b^s)^2 b^{p-s} c^p \\ &= a^{p+m} b^s a^r b^p c^p \\ &\Rightarrow uv^2 xy^2 z \notin L \end{aligned}$$

Cas 5 :  $vxy$  contient des  $b$  et des  $c$  ( $a^p b^p c^p$ )

5.1  $v$  ne contient que des  $b$  et  $y$  ne contient que des  $c$

$$u = a^p b^{p-m-n} \quad v = b^m \quad x = b^n c^r \quad y = c^s \quad z = c^{p-r-s} \quad m+s > 0, m+n+r+s \leq p$$

$$\begin{aligned} i = 0 : uv^0 xy^0 z &= a^p b^{p-m-n} b^n c^r c^{p-r-s} \\ &= a^p b^{p-m} c^{p-s} \\ |w|_c &\neq \max(|w|_a, |w|_b) \Rightarrow uv^0 xy^0 z \notin L \end{aligned}$$

5.2  $v$  contient des  $b$  et des  $c$  et  $y$  ne contient que des  $c$

$$u = a^p b^{p-m} \quad v = b^m c^n \quad x = c^r \quad y = c^s \quad z = c^{p-n-r-s} \quad m+n+s > 0, m+n+r+s \leq p$$

$$\begin{aligned} i = 2 : uv^2 xy^2 z &= a^p b^{p-m} (b^m c^n)^2 c^r c^{2s} c^{p-n-r-s} \\ &= a^p b^p c^n b^m c^{p+s} \\ &\Rightarrow uv^2 xy^2 z \notin L \end{aligned}$$

5.3  $v$  ne contient que des  $b$  et  $y$  contient des  $b$  et  $c$

$$u = a^p b^{p-m-n-r} \quad v = b^m \quad x = b^n \quad y = b^r c^s \quad z = c^{p-s} \quad m+r+s > 0, m+n+r+s \leq p$$

$$\begin{aligned} i = 2 : uv^2 xy^2 z &= a^p b^{p-m-n-r} b^{2m} b^n (b^r c^s)^2 c^{p-s} \\ &= a^p b^{p+m} c^s b^r c^p \\ &\Rightarrow uv^2 xy^2 z \notin L \end{aligned}$$

Donc  $L \notin HC$  par le lemme du pompiste HC. ■

## Références

- [1] ANONYME. *CSE 2001 : Introduction to the theory of computation, Assignment 3 Solutions*. URL : [https://www.eecs.yorku.ca/course\\_archive/2012-13/F/2001/SOL/2001a3sol.pdf](https://www.eecs.yorku.ca/course_archive/2012-13/F/2001/SOL/2001a3sol.pdf).