Devoir 4 IFT2105

Catherine Larivière 0955948

Dominique Vigeant 20129080

23 juillet 2021

1. Montrez que

$$L_{\overline{DEC}} = \{\langle M \rangle | L(M) \notin DEC\}$$

est indécidable.

Par le théorème 6.1, L est décidable s'il existe une MT M telle que $\forall w \in L,\ M$ accepte w et $\forall\, w \notin L,\ M$ rejette w. Or, $L(M) \notin DEC$ donc il n'y a pas de MT qui décide $L(M)$, donc $L_{\overline{DEC}}$ est indécidable.

2. Est-ce que

$$L_{\overline{REC}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \notin REC\}$$

est décidable ? Prouvez votre réponse.

Par le théorème 6.8, puisque $L(M) \notin REC$, alors $L(M) \notin DEC$. Par le théorème 6.6, il n'existe pas de MT qui décide $L(M)$, alors $L_{\overline{REC}}$ est indécidable.

3. Pouvez-vous utiliser le théorème de Rice pour montrer que

$$L_{13} = \{\langle M \rangle \mid (\exists \text{MT } M')[L(M') = L(M) \text{ et } M' \text{ possède exactement 13 états}]\}$$

est indécidable ? Si oui alors faites-le et sinon montrez pourquoi.

Oui, il est possible d'utiliser le Théorème de Rice.

$$S = \{L \mid \exists \text{MT } M' \text{ telle que } L = L(M') \text{ et } M' \text{ possède exactement 13 états}\}$$

$$\Rightarrow L_{13} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in S\}$$

Soit la MT M^* à 13 états suivante telle que $L(M^*) = \{1111111111111\}$:
Cette machine n'a qu'à lire 13 fois le symbole 1 puis s'arrêter. Clairement que M^* est reconnaissable et qu'il existe une machine M' à 13 états telle que $L(M^*) = L(M')$ (il suffit de prendre la même machine).

Soit la MT $M^\dagger$ telle que $L(M^\dagger) = A_{\text{MT}}$. Comme vu en classe, $A_{\text{MT}} \in REC$ alors $L(M^\dagger) \in REC$. Il est aussi clair qu'il n'existe pas de machine M' à 13 états telle que $L(M^\dagger) = L(M')$.

Par le théorème de Rice, $L_{13} \notin DEC$.

4. Montrez que le langage

$$L_\cap = \{\langle M, M'\rangle \mid \text{les MTs } M \text{ et } M' \text{ sont telles que } L(M) \cap L(M') = \emptyset\}$$

n'est pas reconnaissable.

Montrons que $\overline{A_{MT}} \leq L_\cap$

Soit la fonction calculable

$$f \;:\; \Sigma^* \to \Sigma^*$$

- si y n'est pas de la forme $\langle M, w\rangle$, alors $f(y) = \langle M, M^*\rangle$ telle que M n'accepte rien, M^* n'accepte rien ;
- si y est de la forme $\langle M, w\rangle$ alors $f(y) = \langle M, M^*\rangle$,
  où M^* est la MT suivante :
  Prend w en entrée ;
  Simule M sur w ;
  Accepte si M accepte ;
  Accepte si M rejette ;

1. Si $y \in \overline{A_{MT}}$

   1.1 y n'est pas de la forme $\langle M, w\rangle$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow f(y) = \langle M, M^*\rangle\\ &\Rightarrow L(M) = \emptyset \text{ et } L(M^*) = \emptyset\\ &\Rightarrow L(M) \cap L(M^*) = \emptyset\\ &\Rightarrow \langle M, M^*\rangle \in L_\cap\\ &\Rightarrow f(y) \in L_\cap\end{aligned}$$

   1.2 y est de la forme $\langle M, w\rangle$ et $w \notin L(M)$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow f(y) = \langle M, M^*\rangle\\ &\Rightarrow M \text{ rejette } w\\ &\Rightarrow M^* \text{ accepte } w\\ &\Rightarrow L(M) \cap L(M^*) = \emptyset\\ &\Rightarrow \langle M, M^*\rangle \in L_\cap\\ &\Rightarrow f(\langle M, w\rangle) \in L_\cap\end{aligned}$$

2. Si $y \notin \overline{A_{MT}}$ alors y est de la forme $\langle M, w\rangle$ et $w \in L(M)$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow f(y) = \langle M, M^*\rangle\\ &\Rightarrow M \text{ accepte } w\\ &\Rightarrow M^* \text{ accepte } w\\ &\Rightarrow L(M) \cap L(M^*) \neq \emptyset\\ &\Rightarrow \langle M, M^*\rangle \notin L_\cap\\ &\Rightarrow f(\langle M, w\rangle) \notin L_\cap\end{aligned}$$

$\Rightarrow \overline{A_{MT}} \leq L_\cap$
$\Rightarrow L_\cap \notin REC$

■

5. Montrez que le langage

$$L_{\neq} = \{\langle M, M', x\rangle \mid \text{les MTs } M \text{ et } M' \text{ sont telles que } (M \text{ accepte } x \text{ et } M' \text{ rejette } x) \text{ ou } (M \text{ rejette } x \text{ et } M' \text{ accepte } x)\}$$

est indécidable. Est-ce que le $L_{\neq}$ est reconnaissable ? Prouvez votre réponse.

Montrons que $A_{\text{MT}} \leq L_{\neq}$.

Soit la fonction calculable

$$f \; : \; \Sigma^* \to \Sigma^*$$

- si y n'est pas de la forme $\langle M, w\rangle$, alors $f(y) = \epsilon$;
- si $y = \langle M, w\rangle$ alors $f(y) = \langle M, M', w\rangle$,
  où M' est la MT suivante :

  Prend un mot w ;
  Rejette w.

On a :

$$\begin{aligned}\langle M, w\rangle \in A_{\text{MT}} &\Rightarrow M \text{ accepte } w \text{ et } M' \text{ rejette } w\\ &\Rightarrow \langle M, M', w\rangle \in L_{\neq}\\ &\Rightarrow f(\langle M, w\rangle) \in L_{\neq}\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\langle M, w\rangle \notin A_{\text{MT}} &\Rightarrow M \text{ rejette } w \text{ et } M' \text{ rejette } w\\ &\Rightarrow \langle M, M', w\rangle \notin L_{\neq}\\ &\Rightarrow f(\langle M, w\rangle) \notin L_{\neq}\end{aligned}$$

■

$L_{\neq}$ est reconnaissable par la MT suivante :

Prend un mot x en entrée ;
Vérifie que x est de la forme $\langle M, M', w\rangle$;
Simule M sur w ;
Simule M' sur w ;
Accepte si M accepte et M' rejette ;
Accepte si M rejette et M' accepte ;
Rejette si M accepte et M' accepte ;
Rejette si M rejette et M' rejette.

■

6. Considérez le langage suivant :

$$INCL_{GHC} = \{\langle G_1, G_2\rangle \mid G_1 \text{ et } G_2 \text{ sont des GHCs avec } L(G_1) \subset L(G_2)\}.$$

Montrez que $INCL_{\text{GHC}} \notin DEC$ en exhibant la réduction $TOUT_{\text{GHC}} \leq INCL_{\text{GHC}}$.

Montrons que $TOUT_{\text{GHC}} \leq INCL_{\text{GHC}}$.

Soit G', une GHC telle que $L(G') = \Sigma^* - \{\epsilon\}$.

Soit la fonction calculable

$$f \ : \ \Sigma^* \to \Sigma^*$$

— si y n'est pas de la forme $\langle G\rangle$, alors $f(y) = \epsilon$;

— si $y = \langle G\rangle$ alors $f(y) = \langle G', G\rangle$.

Si $\langle G\rangle \in TOUT_{\text{GHC}}$ alors $L(G) = \Sigma^*$. Puisque $L(G') = \Sigma^* - \{\epsilon\}$ alors $L(G') \subset L(G)$.
Si $\langle G\rangle \notin TOUT_{\text{GHC}}$ alors $L(G) \neq \Sigma^*$. Puisque $L(G') = \Sigma^* - \{\epsilon\}$ alors $|L(G')| \geq |L(G)| \Rightarrow L(G') \not\subset L(G)$.
$\Rightarrow TOUT_{\text{GHC}} \leq INCL_{\text{GHC}}$
$\Rightarrow INCL_{\text{GHC}} \notin DEC$

■