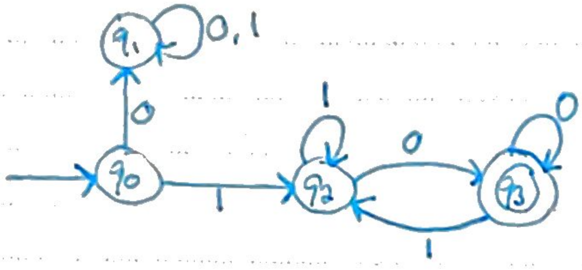
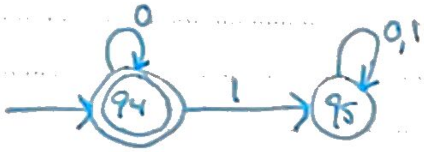
##TP 5##

#1 : AFD pour l'union de deux langages réguliers



$M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$



$M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_4, F_2)$

qui reconnaissent respectivement

$L_1 = \{1x0 \mid x \in \Sigma^*\}$

sur $\Sigma = \{0, 1\}$

$L_2 = \{0^k \mid k \in \mathbb{N}\}$

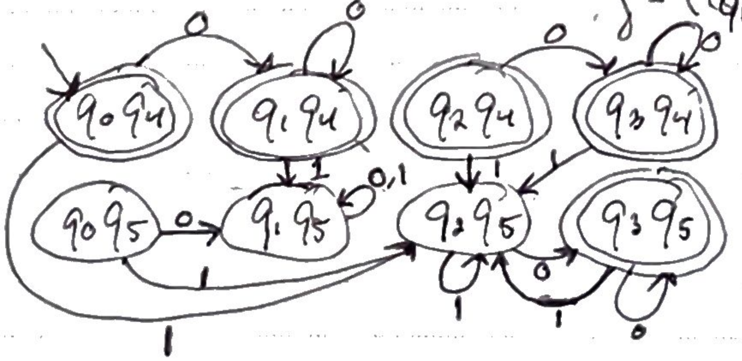
Donner l'AFD qui reconnaît $L_1 \cup L_2$:

$M = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ où $Q = Q_1 \times Q_2$

$q = (q_0, q_4)$

$F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$

$\delta = ((q_1, q_2), x) = (\delta_1(q_1, x), \delta_2(q_2, x))$

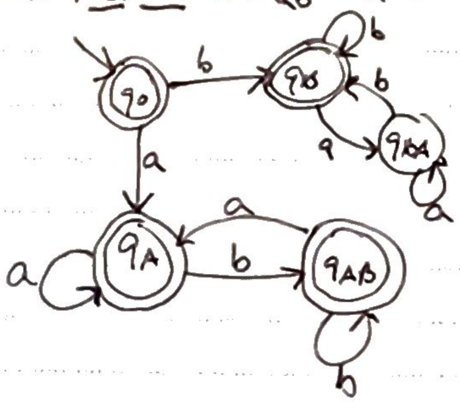


états acceptant $q_3 \cup q_4$

#2: Langage régulier

m.q. $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_{ab} = |w|_{ba}\}$ sur $\Sigma = \{a,b\}$ est régulier.

ex: $|ababaa|_{ab} = 2$ $|ababaa|_{ba} = 2$ ✓



$|\varepsilon|_{ab} = |\varepsilon|_{ba} = 0$

$|a|_{ab} = |a|_{ba} = 0$

$|aaa|_{ab} = |aaa|_{ba} = 0$

$|aaab|_{ab} = 1 \neq |aaab|_{ba} = 0$

$|aaabb|_{ab} = 1 \neq |aaabb|_{ba} = 0$

$|aaabbaa|_{ab} = |aaabbaa|_{ba} = 1$

#3: Langage non-régulier

MQ. $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_{ab} = |w|_{ba}\}$ sur $\Sigma = \{a,b,c\}$ pas régulier

Lemme du pompiste:

Soit L un langage sur Σ

$\neg(L \in REG) \overset{\Leftarrow}{\Rightarrow} \neg(\exists p \geq 1$ t.q. $\forall w \in L$ où $|w| > p$
$\exists$ décomposition $w = xyz$ où
1) $|y| > 0$
2) $|xy| \leq p$
3) $\forall i \geq 0 \; xy^iz \in L)$

Rappel:
$A \Rightarrow B$ équivalent à
$\neg B \Rightarrow \neg A$

$\forall p \geq 1 \; \exists w \in L$ où $|w| \geq p$ t.q. $\forall$ décomposition $w = xyz$ t.q.
1) $|y| > 0$
2) $|xy| \leq p$
3) $\exists i \in \mathbb{N}$ t.q. $xy^iz \notin L$

$\Rightarrow L \notin REG$

Preuve: Soit $p \geq 1$ (donné par le lemme du pompiste)
Soit $w = \underbrace{(abc)}_{3\times p}{}^p \underbrace{(bac)}_{3\times p}{}^p$
$= abcabc \ldots abcbacbac \ldots bac$ $|w|_{ab} = p$ $w \in L$ $\boxed{ok}$
$|w|_{ba} = p$
$|w| = 6p \geq p$ $\boxed{ok}$

ex.:
si $p=1$: $w = abcbac$
si $p=3$: $w = abcabcabcbacbacbac$

On veut regarder TOUTES les décompositions possibles de $w = xyz$ où $|y| > 0$, $|xy| \leq p$

(Pour toutes ces décompositions, il faut montrer qu'il existe un i t.q $xy^iz \notin L$.)

Regardons tous les cas possibles.
Comme $|xy| \leq p \Rightarrow xy$ est un préfixe de $(abc)^p$

① $x = (abc)^n$ $n \geq 0$ * x finit par un c*

(1.1) $y = (abc)^m$ $m \geq 1$ * y finit par un c*
$\Rightarrow z = (abc)^{p-n-m}(bac)^p$
$i=0$. $xy^0z = \underbrace{(abc)^n}_{x} \underbrace{(abc)^{p-n-m}(bac)^p}_{z} \notin L$
$|xy^0z|_{ab} = n+p-n-m = p-m$
$|xy^0z|_{ba} = p \neq$

on a trouvé un i pour lequel le mot n'est pas dans le langage.

(1.2) $y = (abc)^m a$ $m \geq 0$ * y finit par un a*
$i=0$: $xy^0z = \underbrace{(abc)^n}_{x} \underbrace{bc(abc)^{p-n-m-1}(bac)^p}_{z} \notin L$
$|xy^0z|_{ab} = n+p-n-m-1 = p-m-1$
$|xy^0z|_{ba} = p \neq$

on a trouvé un i pour lequel le mot n'est pas dans le langage.

(1.3) $y = (abc)^m ab \quad m \geq 0$ *y finit par un b*

$i=0: xy^0z = (abc)^n c(abc)^{p-n-m-1}(bac)^p \notin L$

$|xy^0z|_{ab} = n + p - n - m - 1 = p - m - 1$

$|xy^0z|_{ba} = p \longleftarrow \neq \longrightarrow$

2. $x = (abc)^n a \quad n \geq 0$ *x finit par un a*

(2.1) $y = b \rightarrow i=0 \leftarrow$ pcq $|y|>0$

(2.2) $y = bc(abc)^m \quad m \geq 0 \quad i=0$ *y finit par un c* $\rightarrow i=0$

(2.3) $y = bc(abc)^m a \quad m \geq 0$ *y finit par un a* $\rightarrow i=0$

(2.4) $y = bc(abc)^m ab \quad m \geq 0$ *y finit par un b* $\rightarrow i=0$

3. $x = (abc)^n ab \quad n \geq 0$ *x finit par un b* $y=c$ est couvert par 3.1

(3.1) $y = c(abc)^m \quad m \geq 0$ *y finit par un c* $\rightarrow i=0$

(3.2) $y = c(abc)^m a \quad m \geq 0$ *y finit par un a* $\rightarrow i=0$

(3.3) $y = c(abc)^m ab \quad m \geq 0$ *y finit par un b* $\rightarrow i=0$

Donc, $\forall$ décomposition $w = xyz$ où $|xy| \leq p$, $|y| > 0$

$\exists i \in \mathbb{N}$ t.q. $xy^iz \notin L \Rightarrow L \notin REG$ ■

#4 : Langage non-régulier

M.Q. $\{1^p \mid p$ est premier$\}$ sur $\Sigma = \{1\}$ pas REG.

ex.: $11 \in L \quad 111 \in L \quad 1111 \notin L \quad 1111111 \in L$

Preuve:

Soit $p \geq 1$ (donné par le pompiste)

Soit $w = 1^k$ où k est le premier nombre premier $\geq p$. (et > 3) $\quad w \in L$ ✓ $\quad |w| = k \geq p$ ✓

On sait que ce premier existe car il existe une infinité de nombres premiers.

On veut regarder toutes les décompositions $w=xyz$ où $|y|>0$ et $|xy|\leq p$

$\Rightarrow x=1^n \quad y=1^m \quad z=1^{k-n-m}$

$0\leq n\leq p-1\leq k-1 \qquad 1\leq m\leq p\leq k \quad 1\leq n+m\leq p\leq k$

Regardons $xy^iz=1^n(1^m)^i1^{k-n-m}$
$=1^n1^{i\cdot m}1^{k-n-m}$
$=1^{n+i\cdot m+k-n-m}$
$=1^{k+(i-1)m}$

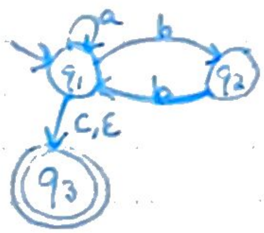
Prenons $i=k+1$: $xy^iz=1^{k+(k+1-1)m}$
$=1^{k+km}$
$=1^{k(m+1)}\notin L$

et $k(1+m)$ n'est pas premier car il est le produit de $k\neq 1$ et $(m+1)\neq 1$.

$\Rightarrow L\notin REG$

#5 : Construction de l'AFD qui reconnait le langage d'un AFN

AFN:



$M=(Q,\Sigma,\delta,q_1,F)$ $Q=\{q_1,q_2,q_3\}$
$\Sigma=\{a,b,c\}$
$F=\{q_3\}$

AFD $M'=(Q',\Sigma,\delta',q_0',F')$
$Q'=2^Q=P(Q)=$ Partition de Q
$q_0'=\{$états pouvant être accessibles depuis $q_1\}$
$F'=\{$états contenant un état acceptant$\}$
$\delta'(q',x)=\{q\in Q\mid q$ est atteignable en 1 étape depuis $q'\}$.

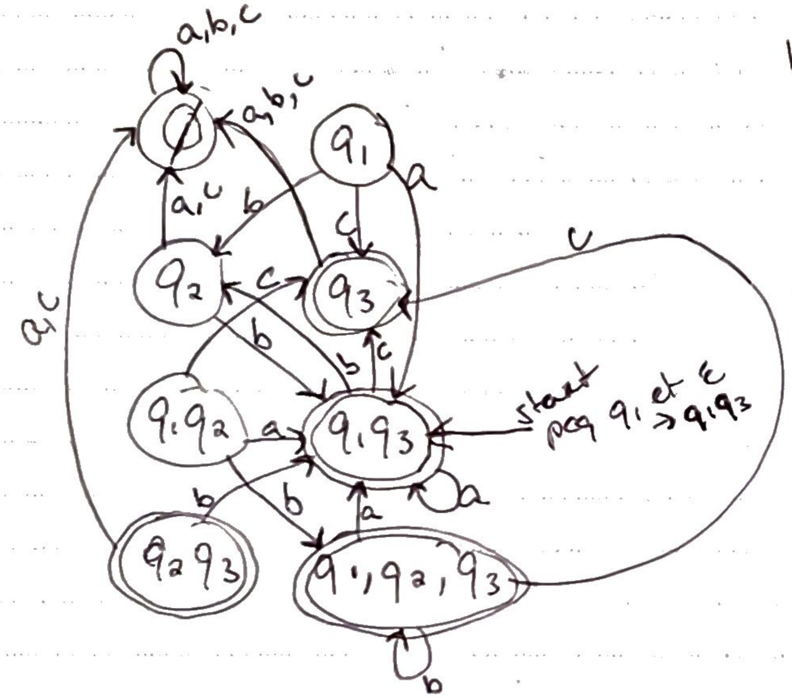
Informellement, $Q'=$"L'ensemble de toutes les possibilités d'états".

Donc si Q a n états, Q' a 2^n états

q_0' = "L'état de départ de l'AFN plus les transitions gratuites"

F' = "Tout ceux qui contiennent des états acceptants"

Transitions = "Je regarde (voir enreg.)



Notes: Les états q_1, q_1q_2, q_2q_3, $q_1q_2q_3$ sont inutiles. (ils ne sont pas accessibles