TP 2

1. Codage de Gödel

1.1 [3, 5, 0, 7, 0, 0, ...] $p_1 = 2 \quad p_2 = 3 \quad p_3 = 5 \quad p_4 = 7, \ldots$

$$2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0 \cdot 7^7 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdots$$
$$= 1\,600\,967\,592$$

1.2 31 188 612 *trouver la décomposition en nombres premiers

$$= 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^5 \cdot 17^0 \cdots$$

[2, 1, 0, 1, 0, 5, 0

2. Produit des éléments d'un tableau

Écrire programme RÉPÉTER PRODTABLEAU(r_1, r_2)

r_1 = tableau de taille r_2

Retourne le produit de tous les éléments du tab.

$r_2 = n \quad r_1 = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdots p_n^{a_n}$

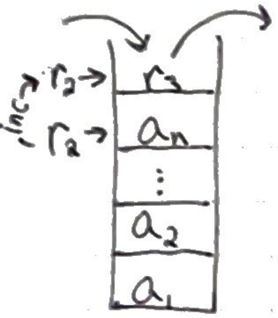
$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$

```
PRODTABLEAU(r1, r2):
    inc(r0)   R0=1                        TABLVAL(r0, r4)
    inc(r3)   r3=1                        r.
    répéter r2 fois {
        r4 ← TABLVAL(r1, r3) ← élément du tab r1 qui est
        r0 ← MULT(r0, r4)                 à la pos r3
        inc(r3)   r3=r3+1
    }
```

Pourquoi pas de récursion?

Pcq pas de stack.

3. Pile avec programme RÉPÉTER



$r_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$

$\updownarrow$

$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$

$r_2 = n$

EMPILER(r_1, r_2, r_3) := Empiler r_3 sur la pile r_1 de hauteur r_2

inc(r_2)

$r_1 \leftarrow$ TABLASS(r_1, r_2, r_3) $\leftarrow r_1 \cdot p_{r_2}^{r_3}$

DEPILER(r_1, r_2) := Dépile la pile r_1 de hauteur r_2 (Ne fait rien si la pile est vide)

$r_3 \leftarrow$ PG?(r_2, r_3) $\leftarrow$ est-ce que $r_2 > 0$ (hauteur > 0) ?

si r_3 alors

$r_0 \leftarrow$ TABLVAL(r_1, r_2) $\leftarrow$ prendre la valeur à la pos r_2 du tab r_1.

$r_1 \leftarrow$ TABLASS(r_1, r_2, r_4) $r_4 \leftarrow 0$

$r_2 \leftarrow$ DEC(r_2)

4. Fonction B et flèche de Knuth

$B_0(x) = x+1$

$B_1(x) = B_0^{\langle x+1 \rangle}(1)$

$= \underbrace{B_0(B_0(B_0 \dots (B_0(1)) \dots))}_{x+1 \text{ applications de } B_0}$

$= (x+1) \cdot 1 + 1 = x+2$

ex: $B_1(2) = B_0^{\langle 3 \rangle}(1)$

$= B_0(B_0(B_0(1)))$

$= B_0(B_0(2))$

$= B_0(3)$

$= 4$

$B_2(x) = B_1^{\langle x+1 \rangle}(1)$ $\qquad$ $B_1(x) = x+2$

$$= \underbrace{B_1(B_1(\dots(B_1(1))\dots))}_{x+1 \text{ applications de } B_1}$$

$$= (x+1)\cdot 2 + 1 \quad = 2x+3$$

4.1 $2\uparrow^3 2 = 2\uparrow^2 2 = 2\uparrow^1 2 = 2\uparrow^0 2 = 2\cdot 2 = 4$

4.2 $2\uparrow^3 3 = 2\uparrow^2 2\uparrow^2 2 = 2\uparrow^2 2\uparrow^1 2 = 2\uparrow^2 2\uparrow^0 2 = 2\uparrow^2 4$

$$= 2\uparrow^1 2\uparrow^1 2\uparrow^1 2 = 2\uparrow^1 2\uparrow^1 2\uparrow^0 2 = 2\uparrow^1 2\uparrow^1 4$$

$$= 2\uparrow^1 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2 = 2\uparrow^1 2\uparrow^0 2\uparrow^0 4 = 2\uparrow^1 2\uparrow^0 8$$

$$= 2\uparrow^1 16 = 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2$$

$$= 2^{16} = 65\ 536$$

4.3 $B_3(x) = (2\uparrow^1(x+3)) - 3$ $\qquad$ Th: $B_i(x) = (2\uparrow^{i-2}(x+3)) - 3$

$B_0(x) = x+1$

$B_1(x) = x+2 = 2 + (x+3) - 3$

$B_2(x) = 2x+3 = 2(x+3) - 3 = 2\uparrow^0(x+3) - 3$

$B_3(x) = B_2^{\langle x+1 \rangle}(1)$

$$= \underbrace{B_2(B_2\dots(B_2(1))\dots)}_{x+1 \text{ fois}}$$

$2\cdot 1 + 3 = 5 = 2\cdot(1+3) - 3$

$B_2 = 2\cdot 2 + 3 = 7$

$2\cdot(2+3) - 3$

$2\cdot(x+3) - 3$

$= 2x + 6 - 3$

$= 2x+3$

$B_2(1) = 2\uparrow^0(1+3) - 3 = 2\uparrow^0 4 - 3 = 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2 - 3$

trois 2

$B_2(B_2(1)) = 2\uparrow^0(B_2(1) + 3) - 3$

$$= 2\uparrow^0(2\uparrow^0 2\uparrow^0 2 \cancel{-3} \cancel{+3}) - 3$$

$$= 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2 - 3$$

quatre 2

$B_2(B_2(B_2(1))) = 2\uparrow^0(B_2(B_2(1))+3)-3$
$= 2\uparrow^0(2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2 \cancel{-3}\cancel{+3})-3$
$= 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2\uparrow^0 2-3$

$$\underbrace{B_2(B_2\ldots(B_2(1))\ldots)}_{x+1 \text{ fois}} = \underbrace{2\uparrow^0 2\uparrow^0\ldots\uparrow^0 2}_{x+3 \text{ copies de } 2} - 3$$

$= 2\uparrow^1(x+1+2)-3$
$= 2\uparrow^1(x+3)-3$

5. Propriétés de la fonction B

5.1 $\forall i \in \mathbb{N}, B_i(x) \geq x+1$ ← Induction sur i:

Le pas d'induction sur i:
Induction sur

à faire

5.2 $B_i^{\langle k\rangle}(x)$ est croissante en i, x et k → a) croissant en k

b) croissant en x:
induc sur k
c) croissant en i:
induc sur k
Base i=1:
induc sur x
à chaque étape on prend en compte que la précédente est vraie

$B_i^{\langle k\rangle}(x) \leq B_{i+1}^{\langle k\rangle}(x)$
$B_i^{\langle k\rangle}(x) \leq B_i^{\langle k\rangle}(x+1)$
$B_i^{\langle k\rangle}(x) \leq B_i^{\langle k+1\rangle}(x)$

5.3 $2^s x \le B_i^{\langle s\rangle}(x)$ pour $i \geq 2$ et $s \geq 0$

Induction sur s:

<u>Base:</u> $s=0$: $2^0 x = x = B_i^{\langle 0\rangle}(x)$

<u>Hypothèse d'induction:</u> On suppose que $2^s x \le B_i^{\langle s\rangle}(x)$

<u>Pas d'induction:</u> On veut: $2^{s+1} x \le B_i^{\langle s+1\rangle}(x)$

$$
\begin{aligned}
B_i^{\langle s+1\rangle}(x) &= B_i(B_i^{\langle s\rangle}(x)) && \text{par h.i. et "croissance en } x\text{"} \\
&\geq B_i(2^s x) && \text{"croissance en } i\text{" et } i \geq 2 \\
&\geq B_2(2^s x) \\
&= 2(2^s x) + 3 \\
&= 2^{s+1}x + 3 \geq 2^{s+1} x \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

5.4 $\forall k \in \mathbb{N}\ B_2^k(1) > 2k$

Induction sur k:

<u>Base:</u> $k=0$: $B_2^0(1) = 1 > 0 = 2 \cdot 0$ <u>OK</u>

<u>H.i.:</u> On suppose que $B_2^{\langle k\rangle}(1) > 2k$

<u>Pas d'induc:</u> On veut: $B_2^{\langle k+1\rangle}(1) > \underset{\uparrow\, 2k+2}{2(k+1)}$

$$
\begin{aligned}
B_2^{\langle k+1\rangle}(1) &= B_2(B_2^{\langle k\rangle}(1)) \\
&= 2 \cdot \underline{B_2^{\langle k\rangle}(1)} + 3 \\
&> 2 \cdot 2k + 3 \\
&= 4k + 3 \\
&> 2k + 2 = 2(k+1)
\end{aligned}
$$