TP 8

#1: GHC

$\Sigma = \{a,b\}$ $\quad$ $L = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}$

a) Donnez une GHC G pour laquelle $L(G) = L$.

$G = (V, \Sigma, R, S)$

$S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon \mid a \mid b$ $\quad$ $R = \{S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon \mid a \mid b\}$

$V = \{S\}$ $\quad$ $\Sigma = \{a,b\}$

b) Démontrez formellement que $L(G) = L$.

<u>$L(G) \subseteq L$</u> (Si j'ai un mot qui est engendré par ma grammaire alors il est dans le langage)

Soit $w \in L(G)$ (donc $S \overset{n}{\Rightarrow} w$ pour un certain $n \geq 1$).
On veut m.q. $w \in L$ (donc $w = w^R$).

<u>Induction sur n</u> (le nombre d'étapes pour engendrer w à partir de S).

<u>Cas de base:</u> $n = 1$
Pour engendrer un mot en une étape à partir de S, on a 3 choix:

1) $S \overset{1}{\Rightarrow} \varepsilon$ $\quad$ $\varepsilon = \varepsilon^R \Rightarrow \varepsilon \in L$
2) $S \overset{1}{\Rightarrow} a$ $\quad$ $a = a^R \Rightarrow a \in L$
3) $S \overset{1}{\Rightarrow} b$ $\quad$ $b = b^R \Rightarrow b \in L$ $\quad$ $\boxed{OK}$

<u>Hypothèse d'induction:</u>
Supposons que $z \in L(G)$ t.q. $S \overset{n}{\Rightarrow} z$ alors $z \in L$ donc $z = z^R$ ($n \geq 1$)

<u>Pas d'induction:</u>
On veut montrer que si $w \in L(G)$ t.q. $S \overset{n+1}{\Rightarrow} w$ alors $w \in L$ donc $w = w^R$ ($n \geq 1$).

Si $S \overset{n+1}{\Rightarrow} w$ alors la première règle appliquée est $S \to aSa$ ou $S \to bSb$.

1) $S \overset{1}{\Rightarrow} aSa$
$\overset{n}{\Rightarrow} aza = w$

$w^R = (aza)^R = az^Ra = aza = w \Rightarrow w \in L$

H.I. pcq z a été produit en n étapes donc selon l'H.I....

2) $S \overset{1}{\Rightarrow} bSb$
$\overset{n}{\Rightarrow} bzb = w$

$w^R = (bzb)^R = bz^Rb = bzb = w \Rightarrow w \in L$

H.I.

■

$\Rightarrow L(G) \subseteq L$

<u>$L \subseteq L(G)$</u> (m.q. tous les palindromes peuvent être engendrés par notre grammaire)

Soit $w \in L$ (donc $w = w^R$). On veut m.q. $w \in L(G)$ ($S \overset{*}{\Rightarrow} w$)

<u>Induction sur n</u> (la longueur du mot)

<u>Cas de base:</u> $n=0 \Rightarrow w = \varepsilon$
On a la dérivation $S \Rightarrow \varepsilon \Rightarrow w \in L(G)$

$n=1 \Rightarrow w=a$, $w=b$
On a les dérivations $S \Rightarrow a$ et $S \Rightarrow b \Rightarrow w \in L(G)$.

<u>Hypothèse d'induction:</u> Supposons que si $z \in L$ t.q. $|z| \leq n$ (donc $z = z^R$), alors $z \in L(G)$ (donc $S \overset{*}{\Rightarrow} z$) ($n \geq 1$)

Pas d'induction: On veut m.q. si $w \in L$ t.q. $|w| = n+1$ (donc $w = w^R$) alors $w \in L(G)$ (donc $S \overset{*}{\Rightarrow} w$) $(n \geq 1)$

Comme $w = w^R$, la 1ère lettre et la dernière lettre de w doivent être identiques.

2 cas:

1) $w = aza$ pour $|z| = n-1$ et $z = z^R$

On a la dérivation:

$$S \overset{1}{\Rightarrow} aSa \underbrace{\overset{*}{\Rightarrow}}_{H.I.} aza = w \quad \Rightarrow w \in L(G)$$

2) $w = bza$ pour $|z| = n-1$ et $z = z^R$

On a la dérivation:

$$S \Rightarrow bSb \underbrace{\overset{*}{\Rightarrow}}_{H.I.} bzb = w \quad \Rightarrow w \in L(G)$$

c) Transformez G en forme normale de Chomsky

$S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon \mid a \mid b$

1. $S_0 \to S$
   $S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon \mid a \mid b$

2. $S_0 \to S$
   $S \to ASA \mid BSB \mid \varepsilon \mid a \mid b$
   $A \to a$
   $B \to b$

3. $S_0 \to S$
   $S \to \varepsilon \mid a \mid b \mid AM \mid BN$
   $A \to a$ $\quad$ $M \to SA$
   $B \to b$ $\quad$ $N \to SB$

4. $S_0 \to S \mid \varepsilon$

$S \to a \mid b \mid AM \mid BN$

$A \to a$

$B \to b$

$M \to SA \mid A$

$N \to SB \mid B$

5. $S_0 \to \varepsilon \mid a \mid b \mid AM \mid BN$

$S \to a \mid b \mid AM \mid BN$

$A \to a$

$B \to b$

$M \to SA \mid A$

$N \to SB \mid B$

$\to$ $R' = \{ S_0 \to \varepsilon \mid a \mid b \mid AM \mid BN$

$S \to a \mid b \mid AM \mid BN$

$A \to a$

$B \to b$

$M \to SA \mid a$

$N \to SB \mid b \}$

$G' = (V', \Sigma, R', S_0)$ $V' = \{S_0, S, A, B, M, N\}$ $\Sigma = \{a, b\}$

#2 : Lemme du pompiste

$\Sigma = \{a, b, c, d\}$ $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \geq 0\}$ M.Q. $L \notin HC$

On doit considérer TOUTES les décompositions

Soit $p \geq 1$ (donné par le pompiste HC)

Prenons $w = a^p b^p c^p d^p$ $w \in L$ ✓ $|w| = 4p \geq p$ ✓

$w = aa\ldots aabb\ldots bbcc\ldots ccdd\ldots dd$

Comme $|vxy| \leq p$, alors vxy peut contenir au plus 2 lettres différentes.

Cas 1: vxy contient seulement des a.

$\Rightarrow v = a^n$ $y = a^m$ $1 \leq n+m \leq p$

$\boxed{i=2}$ $uv^2xy^2z = \underbrace{a^{p+n+m}}_{p+n+m > p} b^p c^p d^p \notin L$

Cas 2 : vxy contient des a et des b.

$\Rightarrow$ v contient des a ou y contient des b.

$\boxed{i=2}$ $|uv^2xy^2z|_a \geq |uvxyz|_a + |v|_a$ ou $|uv^2xy^2z|_a > |uvxyz|_a = |uvxyz|_c = |uv^2xy^2z|_c$

$|uv^2xy^2z|_b \geq |uvxyz|_b + |y|_b$ $\quad |uv^2xy^2z|_b > |uvxyz|_b = |uvxyz|_d = |uv^2xy^2z|_d$

$$\Rightarrow uv^2xy^2z \notin L$$

Cas 3 : vxy contient seulement des b.

$\Rightarrow v = b^n \quad y = b^m \quad 1 \leq n+m \leq p$

$\boxed{i=2}$ $uv^2xy^2z = a^p \underbrace{b^{p+n+m}}_{p+n+m>p} c^p d^p \notin L$

Cas 4 : vxy contient des b et des c. $\quad i=2$

Cas 5 : vxy contient seulement des c. $\quad i=2$

Cas 6 : vxy contient des c et des d. $\quad i=2$

Cas 7 : vxy contient seulement des d. $\quad i=2$.

$\Rightarrow L \notin HC$ par le lemme du pompiste HC.