E21 - IFT2105 - TP1

Fait par Rémi Ligez (remi.ligez@umontreal.ca)

1 : |V| = |E| + 1

Prouver, par induction structurelle, que le nombre de sommets (|V|) d'un arbre binaire non-vide est égal au nombre d'arêtes (|E|) + 1.

Note : On verra au TP comment définir un arbre binaire non-vide de façon récursive.

2 : |V| $\leq 2^{h+1}$ - 1

Prouver, par induction structurelle, qu'un arbre binaire non-vide de hauteur h a au plus 2^{h+1} - 1 sommets (|V|).

#3 : Ensemble S

Soit l'ensemble S contenant des éléments de $\mathbb{Z}^2$:

$$
\begin{aligned}
\text{Base : } & (0,0) \in S \\
\text{Règle : } & (a,b) \in S \implies (a,b+1) \in S \quad \wedge \\
& \qquad (a+1,b+1) \in S \quad \wedge \\
& \qquad (a+2,b+1) \in S
\end{aligned}
$$

Prouver, par induction structurelle, que $\forall$ (a,b) $\in S$, a $\leq$ 2b.

#4 : Multiples de 3

Soit l'ensemble S contenant des éléments de $\mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
\text{Base : } & 3 \in S \\
\text{Règle : } & (x \in S) \wedge (y \in S) \implies (x+y) \in S
\end{aligned}
$$

Prouver que S = $\{3n : n \in \mathbb{N}^*\}$, l'ensemble des multiples de 3 positifs.

#5 : Un langage défini récursivement

Soit $\Sigma = \{a,b\}$, un alphabet.

Soit $\mathcal{L}$, un langage :

$$\text{Base : } \varepsilon \in \mathcal{L}$$

$$\text{Règle : } x \in \mathcal{L} \implies (axa \in \mathcal{L}) \wedge (bxb \in \mathcal{L})$$

Prouver que $\forall$ mot w $\in \mathcal{L}$, la longueur du mot w (|w|) est paire.

Note : On verra au TP ce qu'est un alphabet, un mot et un langage.