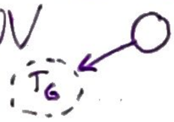
TP 1

1. $|V| = |E| + 1$

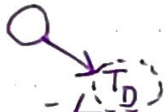
<u>Arbre binaire non-vide:</u>

Base: Un noeud unique sans arêtes est un ABNV (arbre binaire non vide) noeud

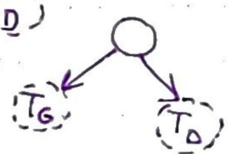
Règles: R_1: Un noeud qui pointe vers un ABNV à gauche est un ABNV



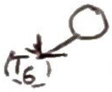
R_2: Même chose à droite



R_3: Même chose à gauche et à droite

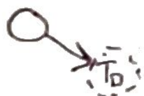


<u>Preuve:</u>

- Cas de base:  $|V| = 1 \quad |E| = 0 \Rightarrow |V| = |E| + 1$ ok
- Règle R_1: 

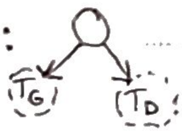
On suppose que $|V_G| = |E_G| + 1$

$$|V| = 1 + |V_G|$$
$$= 1 + \underbrace{|E_G| + 1}_{|E|}$$
$$= |E| + 1$$

- Règle R_2: 

On suppose que $|V_D| = |E_D| + 1$

$$|V| = 1 + |V_D|$$
$$= 1 + \underbrace{|E_D| + 1}_{|E|}$$
$$= |E| + 1$$

- Règle R_3: 

On suppose que $|V_D| = |E_D| + 1$ et $|V_G| = |E_G| + 1$

$$|V| = 1 + |V_G| + |V_D|$$
$$= 1 + \underbrace{|E_G| + 1 + |E_D| + 1}_{|E|}$$
$$= |E| + 1$$

$\Rightarrow |V| = |E| + 1$ pour tous les arbres binaires non-vides

2. $|V| \leq 2^{h(T)+1}-1$ $\quad h(T)=$ hauteur

<u>Hauteur de $h(T)$:</u>

Par l'arbre "de base": Un noeud unique sans arêtes

$$h(T)=0$$

Par R_1: $h(T)=1+h(T_G)$

Par R_2: $h(T)=1+h(T_D)$

Par R_3: $h(T)=1+\max\{h(T_G), h(T_D)\}$

<u>Preuve:</u>

- Cas de base: O $\quad h(T)=0 \quad |V|=1 \quad |V|=1 \leq 2^{h(T)+1}-1=1$
- Règles: R_1: $\dfrac{|V_G| \leq 2^{h(T_G)+1}-1}{}$

$$\begin{aligned}
|V| &= 1+|V_G| \\
&\leq 1+2^{h(T_G)+1}-1 \\
&= 2^{h(T)} \\
&\leq 2^{h(T)}+(2^{h(T)}-1) \\
&= 2^{h(T)+1}-1
\end{aligned}$$

ajoute ça pour pouvoir arriver à ça

et ça marche pcq $h(T)>0 \Rightarrow 2^{h(T)}-1>0$

R_2: Même chose que R_1

R_3: $\dfrac{\begin{array}{c}|V_G| \leq 2^{h(T_G)+1}-1 \\ |V_D| \leq 2^{h(T_D)+1}-1\end{array}}{}$

$a,b \leq \max\{a,b\}$

$$\begin{aligned}
|V| &= 1+|V_G|+|V_D| \\
&\leq \cancel{1}+2^{h(T_G)+1}-\cancel{1}+2^{h(T_D)+1}-1 \\
&= 2^{h(T_G)+1}+2^{h(T_D)+1}-1 \\
&\leq 2^{\max\{h(T_G),h(T_D)\}+1}+2^{\max\{h(T_G),h(T_D)\}+1}-1 \\
&= 2^{h(T)}+2^{h(T)}-1 \\
&= 2^{h(T)+1}-1 \quad \text{ok} \checkmark
\end{aligned}$$

$\Rightarrow |V| \leq 2^{h(T)+1}-1$ pour tous les ABNV $\checkmark$

3. S contenant des éléments de $\mathbb{Z}^2$.

Base: $(0,0) \in S$

Règle: $(a,b) \in S \Rightarrow (a, b+1) \in S$
$\wedge\ (a+1, b+1) \in S$
$\wedge\ (a+2, b+1) \in S$

Prouver que $\forall (a,b) \in S,\ a \leq 2b$

Preuve:

- Cas de base: $(0,0)$ $0 \leq 2 \cdot 0$ ✓
- Règles: On suppose que $a \leq 2b$

$$(a,b) \nearrow \begin{matrix} (a, b+1) & ① \\ (a+1, b+1) & ② \\ (a+2, b+1) & ③ \end{matrix}$$

① $a \leq 2b$
$\Rightarrow a \leq 2b+2$
$\Rightarrow a \leq 2(b+1)$

② $a \leq 2b$
$\Rightarrow a \leq 2b+1$
$\Leftrightarrow a+1 \leq 2b+2$
$\Rightarrow a+1 \leq 2(b+1)$

③ $a \leq 2b$
$\Rightarrow a+2 \leq 2b+2$
$\Rightarrow a+2 \leq 2(b+1)$

$\Rightarrow a \leq 2b \ \forall (a,b) \in S$

4. S contenant des éléments de $\mathbb{N}$

Base: $3 \in S$

Règle: $(x \in S) \wedge (y \in S) \Rightarrow (x+y) \in S$

Prouver que $S = \{3n : n \in \mathbb{N}^*\}$

$3 \in S$, $3+3 = 6 \in S$ $\quad S = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$
$3+6 = 9 \in S$
$6+3 = 9 \in S$
$6+6 = 12 \in S$
$\vdots$

Pour prouver que $A = B$, deux ensembles
On peut prouver $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$
$(x \in A \Rightarrow x \in B)$ et
$(x \in B \Rightarrow x \in A)$

Preuve:

① $\{3n : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq S$

On veut montrer que si $x \in \{3n : n \in \mathbb{N}^*\}$ alors $x \in S$

= On veut montrer que $3n \in S \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Preuve par induction sur n.
Cas de base: $n=1$ $3n = 3\cdot 1 = 3 \in S$ car c'est le cas de base pour S

Hypothèse d'induction: On suppose que $3n \in S$
Pas d'induction: On veut montrer que $3(n+1) \in S$

$3(n+1) = 3n+3$ On sait que $\underset{\text{cas de base}}{3 \in S}$, $\underset{\text{hypo d'induc}}{3n \in S} \Rightarrow \underset{\text{règle pour } S}{3n+3 \in S}$

$\Rightarrow 3n \in S \ \forall n \in \mathbb{N}^*$
$\Rightarrow \{3n : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq S$ OK

② $S \subseteq \{3n : n \in \mathbb{N}^*\}$
Récurrence structurelle
Base: $3 = 3\cdot 1 \Rightarrow 3 \in \{3n : n \in \mathbb{N}^*\}$
Règle: On suppose $x, y \in S$ t.q. $x, y \in \{3n : n \in \mathbb{N}^*\}$ donc
$x = 3n$, $y = 3m$ pour $n, m \in \mathbb{N}^*$

$$x+y = 3n + 3m = 3(n+m) \in \{3n : n \in \mathbb{N}^*\}$$

$\Rightarrow \forall x \in S,\ x \in \{3n : n \in \mathbb{N}^*\}$
$\Rightarrow S \subseteq \{3n : n \in \mathbb{N}^*\}$ OK

$$\Rightarrow S = \{3n : n \in \mathbb{N}^*\}$$

5. $\Sigma = \{a, b\}$

L, langage: Base: $\varepsilon \in L$

Règle: $x \in L \Rightarrow (axa \in L) \wedge (bxb \in L)$

Prouver que $\forall$ mot $w \in L$, la longueur du mot w ($|w|$) est paire.

<u>Théorie des langages:</u>

Alphabet: Ensemble fini et non vide de symboles/lettres

Mot: Suite finie, possiblement vide, de symboles qui appartiennent à un alphabet.
Le mot vide qui contient 0 symboles est noté par ε.

Langage: Un ensemble de mots appartenant à un même alphabet.

<u>Exemple</u>

$\Sigma = \{0, 1\}$ est un alphabet (binaire)

- 0, 10, ε, 0110 sont des mots sur cet alphabet
- $\{0, 10, 110\}$ est un langage sur cet alphabet.

ε

$a\varepsilon a = aa$ $\quad$ $b\varepsilon b = bb$

aaaa $\quad$ baab $\quad$ abba $\quad$ bbbb $\quad$ $L = \{\varepsilon, aa, bb, aaaa, baab, \ldots\}$

<u>Preuve:</u>

Base: $\varepsilon \Rightarrow |\varepsilon| = 0$ est pair.

Règle: On suppose que $x \in L$ t.q. $|x|$ est pair $\Rightarrow |x| = 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$

axa: $|axa| = 1 + |x| + 1$
$= 1 + 2n + 1$
$= 2n + 2$
$= 2(n+1)$ est pair

$\Rightarrow$ Tous les mots dans L sont de longueur paire.