TP 4

λ-Calcul

- Variables : $x, y, z, \dots$
- Abstractions : $\lambda x. M$ représente la fonction $x \mapsto M$
  "comme" $f(x) = M$ mais on laisse la fonction anonyme.
- Applications : MN c'est M appliqué sur N
  "comme" $M(N)$
- α-réduction : Renommage
  $$\lambda x. M \equiv \lambda y. M[x := y]$$
  ex. : $\lambda x. x\,x \equiv \lambda y. y\,y$
- β-réduction : $((\lambda x. M) N) \equiv M[x := N]$
  "comme" si $f(x) = M$ et on évalue $f(N)$.
  ex. : $(\lambda x. \underbrace{\lambda x. f x y}_{M}) z = \lambda z. f z y$

  β-reduction

- Notation/convention :
  - $MNR = (MN)R$
  - $\lambda xy. M = \lambda x. \lambda y. M$
  - $\lambda x. MN = \lambda x. (MN)$

→ Encodage des booléens : VRAI et FAUX

VRAI : $\lambda xy. x$ $\quad (x, y) \mapsto x$

FAUX : $\lambda xy. y$ $\quad (x, y) \mapsto y$

#1 λ-Calcul   VRAI $\wedge$ FAUX

$ET := \lambda pq . pqp \quad (p,q) \mapsto pqp$ p, q vont être des fonctions

Façon rapide:

$$
\begin{aligned}
& ET \ VRAI \ FAUX \\
&= (\lambda pq . pqp)(VRAI)(FAUX) \\
&= (VRAI)(FAUX)(VRAI) \\
&= (\lambda xy . x)(FAUX)(VRAI) \\
&= FAUX
\end{aligned}
$$

Façon longue:

$$
\begin{aligned}
& ET \ VRAI \ FAUX \\
&= (\lambda pq . pqp)(\lambda xy . x)(\lambda xy . y) \quad \downarrow \alpha\text{-redux} \\
&= \big((\lambda p . \lambda q . pqp)\underbrace{(\lambda xy . x)}_{\beta\text{-redux}}\big)(\lambda wz . z) \\
&= (\lambda q . (\lambda xy . x) q (\lambda xy . x))\underbrace{(\lambda wz . z)}_{\beta\text{-redux}} \\
&= (\lambda xy . x)(\lambda wz . z)(\lambda xy . x) \quad \searrow \alpha\text{-redux} \\
&= \big((\lambda x . \lambda y . x)\underbrace{(\lambda w . \lambda z . z)}_{\beta\text{-redux}}\big)(\lambda pq . p) \\
&= (\lambda y . (\lambda w . \lambda z . z))\underbrace{(\lambda pq . p)}_{\beta\text{-redux}} \\
&= (\lambda w . \lambda z . z) \\
&= FAUX
\end{aligned}
$$

Encodage de Church

$0 := \lambda f.\lambda x.x$ "$f \mapsto (x \mapsto x)$"

$1 := \lambda f.\lambda x.\underbrace{fx}_{f(x)}$ "$f \mapsto (x \mapsto f(x))$"

$2 := \lambda f.\lambda x.\underbrace{f(fx)}_{f(f(x))}$ "$f \mapsto (x \mapsto f(f(x)))$"

$\vdots$

$n := \lambda f.\lambda x.\underbrace{f(f\ldots(fx))}_{f^{<n>}(x)}$ "$f \mapsto (x \mapsto f^{<n>}(x))$"

#2 λ-Calcul

$2 \cdot 3$ $\quad$ $MULT := \lambda MN.\lambda f.M(nf)$

$MULT\ 2\ 3$

$= (\lambda mn.\lambda f.m(nf))(\lambda f.\lambda x.f(fx))(\lambda f.\lambda x.f(f(fx)))$

$= ((\lambda m.\lambda n.\lambda f.m(nf))(\lambda g.\overset{\alpha-r}{\lambda x}.g(gx)))(\lambda h.\overset{\alpha-r}{\lambda y}.h(h(hy)))$

β-redux

$= (\lambda n.\lambda f.((\lambda g.\lambda x.g(gx))(nf)))(\lambda h.\lambda y.h(h(hy)))$

β-redux

$= (\lambda f.((\lambda g.\lambda x.g(gx))((\lambda h.\lambda y.h(h(hy)))f)))$

β-r

$= \lambda f.((\lambda g.\lambda x.g(gx))(\lambda y.f(f(fy))))$

β-redux

$= \lambda f.(\lambda x.(\lambda y.f(f(fy)))((\lambda y.f(f(fy)))x))$

β-r

$= \lambda f.(\lambda x.(\lambda y.f(f(fy)))(f(f(fx))))$

β-r

$= \lambda f.(\lambda x.(f(f(f(f(f(fx)))))))$

$= \lambda f.\lambda x.f(f(f(f(f(fx)))))$

$= 6$ selon l'encodage de Church