

Travail pratique #3

IFT-2035

June 7, 2021

⏏ Dû le 24 juin à minuit !!

1 Survol

Ce TP a pour but de vous familiariser avec le langage Prolog tout en révisant les règles de typage.

Comme pour les TP précédents, les étapes sont les suivantes:

1. Parfaire sa connaissance de Prolog.
2. Lire et comprendre cette donnée.
3. Lire, et comprendre le code fourni.
4. Compléter le code fourni.
5. Écrire un rapport. Il doit décrire votre expérience pendant les 4 points précédents: problèmes rencontrés, surprises, choix que vous avez dû faire, options que vous avez sciemment rejetées, etc... Le rapport ne doit pas excéder 5 pages.

Ce travail est à faire en groupes de 2 étudiants. Le rapport, au format L^AT_EX exclusivement (compilable sur `ens.iro`) et le code sont à remettre par remise électronique avant la date indiquée. Aucun retard ne sera accepté. Indiquez clairement votre nom au début de chaque fichier.

Si un étudiant préfère travailler seul, libre à lui, mais l'évaluation de son travail n'en tiendra pas compte. Des groupes de 3 ou plus sont **exclus**.

2 Le langage μPTS

Vous allez écrire un programme Prolog qui va manipuler des expressions d'un arbre de syntaxe abstraite pour un petit λ -calcul dénommé μPTS (le nom vient du fait qu'il s'agit d'une sorte de *Pure Type System*, proche de *System U*). La particularité de μPTS est de mélanger les expressions normales et les types. Donc dans ce langage, les types sont des valeurs "normales" (on dit aussi "des

valeurs de première classe”) qu’on peut passer en argument, renvoyer comme résultat d’une fonction, ou stocker dans des structures de données. Une manière de représenter ce fait est de dire “**type:type**”; de même que **int** est le type des nombres entiers, **type** est le type des types, donc $42 : \text{int}$ et $\text{int} : \text{type}$, et vu que **type** est lui-même un type, on a $\text{type} : \text{type}$.

La syntaxe du langage ne distingue donc pas le sous-langage des types: les deux sont mis en commun. Plus précisément, le cœur du langage a la syntaxe suivante, valide autant pour les types que pour les expressions “normales”:

$$e ::= c \mid x \mid \lambda x : e_1. e_2 \mid e_1 e_2 \mid \Pi x : e_1. e_2 \mid \text{let } x : e_1 = e_2 \text{ in } e_3$$

où:

- c représente n’importe quelle constante prédéfinie, cela inclut les nombres entiers, les types prédéfinis (**int**, **list**, **type**, ...) et les opérations prédéfinies (**cons**, **nil**, **+**, **-**, ...);
- x est référence à une variable;
- $\lambda x : e_1. e_2$ est une fonction d’un argument x de type e_1 et de corps e_2 ;
- $e_1 e_2$ est un appel à la fonction e_1 avec argument actuel e_2 ;
- $\Pi x : e_1. e_2$ est le type d’une fonction prenant un argument de type e_1 et qui renvoie des valeurs de type e_2 . La portée de x est bien sûr l’expression e_2 . Cette forme est une généralisation de $\forall x. e_2$ et de $e_1 \rightarrow e_2$: si x n’apparaît pas dans e_2 , alors on peut utiliser $e_1 \rightarrow e_2$ comme du sucre syntaxique pour écrire $\Pi x : e_1. e_2$, et $\Pi x : \text{type}. e_2$ est équivalent au type polymorphe $\forall x. e_2$.
- $\text{let } x : e_1 = e_2 \text{ in } e_3$ est une déclaration locale d’une variable x de type e_1 et de valeur e_2 dont la portée est e_2 et e_3 (cette déclaration permet la récursion).

Par exemple, le type de la fonction identité de Haskell $\text{identity} = \lambda x \rightarrow x$ est généralement noté $\text{identity} :: \alpha \rightarrow \alpha$, ce qui signifie vraiment $\forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha$. Dans notre langage cela s’écrit à la place $\Pi \alpha : \text{type}. \Pi x : \alpha. \alpha$, ce qui signifie que la fonction identité prend en réalité deux arguments, le premier (α , de type **type**) étant le type du deuxième (x de type α). Donc un appel pourrait ressembler à $\text{identity int } 5$, qui correspond à prendre la fonction *identity*, puis à la spécialiser pour le cas des nombres entiers et finalement lui passer le paramètre 5.

Les règles d’évaluation sont les règles habituelles du λ -calcul:

$$\begin{array}{lll} (\lambda x : e_1. e_2) e_3 & \rightsquigarrow & e_2[e_3/x] \\ n_1 + n_2 & \rightsquigarrow & n_3 \quad \text{where } n_3 = n_1 + n_2 \\ n_1 - n_2 & \rightsquigarrow & n_3 \quad \text{where } n_3 = n_1 - n_2 \\ \dots & & \end{array}$$

Ces règles correspondent à un seul pas d'exécution; elles sont donc répétées aussi longtemps de nécessaire, en les appliquant partout où cela est possible. Les constantes prédéfinies ont les types suivants:

```

type  : type
int   : type
float : type
n     : int
+     :  $\Pi x_1 : \text{int} . \Pi x_2 : \text{int} . \text{int}$ 
-     :  $\Pi x_1 : \text{int} . \Pi x_2 : \text{int} . \text{int}$ 

list  :  $\Pi t : \text{type} . \Pi n : \text{int} . \text{type}$ 
nil   :  $\Pi t : \text{type} . \text{list } t \ 0$ 
cons  :  $\Pi t : \text{type} . \Pi x : t . \Pi n : \text{int} . \Pi y : \text{list } t \ n . \text{list } t \ (n + 1)$ 

```

Les entiers sont sans surprises, surtout si l'on utilise la notation \rightarrow pour le type de $+$ et $-$: $\text{int} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int}$.

La partie plus intéressante est celle des listes: les listes prédéfinies ont type $\text{list } t \ n$ où t est le type de chaque élément et n est la taille de la liste. Donc le constructeur de type `list` prend deux arguments (le premier est un type, le second est un entier) et le résultat est un type. Aussi `nil` prend un argument t qui est le type des éléments de la liste et renvoie une liste vide du type approprié. Dans ce cas, le Π est utilisé pour le polymorphisme paramétrique, et le type peut se lire $\forall t . \text{list } t \ 0$. Finalement, `cons` prend quatre arguments: le type des éléments de la liste, l'élément à ajouter, la longueur de la queue de la liste, et la queue de la liste, et il renvoie une liste de même type, sauf que la longueur est augmentée de 1. Parmi ces quatre Π , le premier correspond à du polymorphisme paramétrique, le deuxième et le dernier correspondent à des fonctions normales (et pourraient s'écrire avec la notation $\tau_1 \rightarrow \tau_2$), et le troisième correspond à ce que l'on appelle le *typage dépendant*, où un paramètre qui est une valeur plutôt qu'un type (n dans notre cas), apparaît dans les types.

La Figure 1 montre les règles de typage. Le jugement principal est de la forme $\Gamma \vdash e_1 : e_2$ et signifie que e_1 a type e_2 dans le contexte Γ qui est une liste donnant le type de chaque variable connue. Les règles correspondantes doivent s'assurer que le jugement n'est vrai que si l'expression est syntaxiquement valide, qu'elle ne fait référence qu'à des variables existantes, et qu'elle est exempte d'erreurs de typage.

La première règle dit simplement qu'une expression qui n'est qu'une référence à une variable a comme type celui associé à cette variable dans le contexte Γ , ce qui implique bien sûr que la variable doit être présente dans Γ . La règle de typage de λ est identique à la règle classique vue au cours, mis à part l'usage de $\Pi x : e_1 . e_3$ au lieu de $e_1 \rightarrow e_3$, et mis à part qu'elle s'assure aussi que e_1 est elle-même une expression de type valide. De même la règle de typage de $\Pi x : e_1 . e_2$ vérifie simplement que e_1 et e_2 sont tous deux des types bien formés. La règle pour l'appel de fonction est un peu plus délicate. La règle habituelle

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma(x) = e}{\Gamma \vdash x : e} \\[10pt]
\frac{\Gamma \vdash e_1 : \text{type} \quad \Gamma, x:e_1 \vdash e_2 : e_3}{\Gamma \vdash \lambda x:e_1.e_2 : \Pi x:e_1.e_3} \\[10pt]
\frac{\Gamma \vdash e_1 : \text{type} \quad \Gamma, x:e_1 \vdash e_2 : \text{type}}{\Gamma \vdash \Pi x:e_1.e_2 : \text{type}} \\[10pt]
\frac{\Gamma \vdash e_1 : \Pi x:e_4.e_5 \quad \Gamma \vdash e_2 : e_4}{\Gamma \vdash e_1 \ e_2 : e_5[e_2/x]} \\[10pt]
\frac{\Gamma \vdash e_1 : \text{type} \quad \Gamma, x:e_1 \vdash e_2 : e_1 \quad \Gamma, x:e_1 \vdash e_3 : e_4}{\Gamma \vdash \text{let } x : e_1 = e_2 \text{ in } e_3 : e_4} \\[10pt]
\frac{\Gamma \vdash e_1 : e_2 \quad e_2 \simeq e_3}{\Gamma \vdash e_1 : e_3} \\[10pt]
e_1 \simeq e_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists e_3. e_1 \rightsquigarrow^* e_3 \wedge e_2 \rightsquigarrow^* e_3
\end{array}$$

Figure 1: Règles de typage de μPTS .

dit seulement:

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : e_4 \rightarrow e_5 \quad \Gamma \vdash e_2 : e_4}{\Gamma \vdash e_1 \ e_2 : e_5}$$

Donc il y a 2 différences:

- l'usage de Π , bien sûr.
- la substitution de $[e_2/x]$ dans e_5 : c'est là que le x de $\Pi x:\dots$ est utilisé. Si x n'apparaît pas dans e_5 (et donc $\Pi x:e_4.e_5$ peut s'écrire $e_4 \rightarrow e_5$), alors la substitution ne fait aucune différence, mais si le x y apparaît, comme dans $\Pi t:\text{type.list } t \ 0$, alors le type du résultat doit bien sûr refléter l'argument qui a été passé.

La règle $e_1 \simeq e_2$ indique que e_1 et e_2 sont équivalentes dans le sens que les deux expressions se réduisent au même résultat. Donc une manière de vérifier cette relation est d'appliquer les règles de réduction sur e_1 et e_2 autant que nécessaire jusqu'à ce que l'on obtienne soit le même résultat, soit qu'il n'y ait plus rien à réduire. Remarquez que la réduction se fait ici dans un contexte non vide, contrairement à l'évaluation classique: il y aura peut-être des variables non instanciées. Par exemple, il faut pouvoir découvrir que $\Pi x : \text{type.list } x \ (\text{plus } 3 \ 4) \simeq \Pi y : \text{type.list } y \ 7$ malgré que x et y ne sont pas connus. Le langage étant pur, l'ordre d'évaluation n'a pas d'importance. De plus, le *renommage- α* est implicite donc par exemple $\lambda x : t.x$ et $\lambda y : t.y$ sont considérées comme deux expressions identiques.

Dans le code fourni, les expressions μPTS sont représentées par les termes Prolog suivants:

x	X
$\lambda x : e_1 . e_2$	<code>fun(X, E1, E2)</code>
$\Pi x : e_1 . e_2$	<code>arw(X, E1, E2)</code>
$e_1 \ e_2$	<code>app(E1, E2)</code>
$\text{let } x : e_1 = e_2 \text{ in } e_3$	<code>let(X, E1, E2, E3)</code>

3 Votre travail

Pour ce travail, vous allez directement manipuler la syntaxe abstraite en Prolog, sans avoir une représentation externe lue par un analyseur lexical et syntaxique, parce que la syntaxe de Prolog est suffisamment flexible pour être tolérable.

Le langage μPTS est un peu trop minimaliste et verbeux en pratique, donc on aimerait pouvoir l'utiliser sans avoir à écrire tous ces types. Pour cela, vous allez implanter un système d'inférence de types, c'est à dire un système similaire à celui utilisé pour Haskell. Cependant, puisque μPTS est un langage à typage dépendant, la vérification (et l'inférence par la même occasion) de type est sensiblement plus délicate, par exemple, elle peut nécessiter de faire un peu d'évaluation.

L'implantation de μPTS va être faite en deux parties: une partie qui utilise le μPTS présenté ci-dessus (qu'on appellera *langage interne*), et une partie qui utilise une extension de ce langage (qu'on appellera *langage surface*), qui amène diverses facilités pour le programmeur.

Le code fourni implémente déjà les éléments utiles de manipulation du langage interne jusqu'ici: l'opération `subst` de substitution d'une variable par un terme, la règle de normalisation, ainsi que la vérification des types selon les règles de la Figure 1.

Votre code sera donc en charge de gérer les ajouts du langage surface, telles que les fonctionnalités suivantes:

- On peut omettre une annotation de type dans les définitions locales et écrire seulement `let(X, E2, E3)` lorsque le type de E_2 peut être facilement inféré.
- On peut écrire $E_1 \rightarrow E_2$ au lieu de `arw(X, E1, E2)` lorsque X n'est pas utilisé. Note: on utilise ici le sucre syntaxique de Prolog qui interprète automatiquement $E_1 \rightarrow E_2$ comme si on avait écrit `->(E1, E2)`.
- On peut ajouter des annotations de type explicites, de la forme $E_1 : E_2$ qui signifie que E_1 doit avoir type E_2 . Là aussi, $E_1 : E_2$ est en fait lu par Prolog comme si on avait écrit `:(E1, E2)`.
- On peut omettre l'annotation de type sur l'argument formel des fonctions (et écrire donc `fun(X, E2)`) si le *contexte* de cette expression nous indique déjà quel devrait être son type. Par exemple on peut utiliser

`fun(x,x) : (int -> int)`, vu que l'annotation de type nous donne déjà le type de x .

- Plutôt que d'écrire les appels de fonction `app(X, E)` on peut écrire `X(E)`, et c'est même possible d'utiliser cette notation pour n'importe quel nombre d'arguments dans les appels curriés: e.g., `app(app(app(X, E1), E2), E3)` peut s'écrire `X(E1, E2, E3)`. Ainsi au lieu de `app(app(+, E1), E2)`, on peut écrire `+(E1, E2)`, que Prolog nous permet d'écrire `E1 + E2`.
- On peut écrire une séquence de déclarations locales, `let(Decls, E)`, où `Decls` est une liste de déclarations de la forme `X = E`. De plus la partie `X` peut avoir la forme d'un appel de fonction avec des annotations de type:

```
let([add(x : int, y : int) = x + y,
    div(x : float, y : float) = x / y],
    ...)
```

qui correspond à

```
let(add, fun(x, int, fun(y, int, x + y)),
    let(div, fun(x, float, fun(y, float, x / y)),
        ...))
```

3.1 Arguments implicites

En plus des ajouts syntaxiques ci-dessus, le plus gros changement dans le langage surface est que les arguments peuvent être *implicites*. Pour cela, on ajoute le type `forall(X, E1, E2)` (que l'on peut abrégé `forall(X, E2)` si `E1` peut être inféré) qui est identique à `arw(X, E1, E2)` sauf qu'il indique que l'argument est implicite. Par exemple, on peut écrire:

```
let([identity : forall(t, (t -> t))
    = fun(x, x)],
    identity(3))
```

que l'on peut aussi écrire:

```
let([identity(x) : forall(t, (t -> t))
    = x],
    identity(3))
```

Où les parenthèses autour de `(t -> t)` sont nécessaires parce sinon Prolog va penser qu'on a écrit `forall((t, t) -> t)`. Dans le langage interne, cela va correspondre à:

```
let(identity, arw(t, type, arw(x, t, t)),
    fun(t, type, fun (x, t, x)),
    app(app(identity, int), 3))
```

Contrairement à Haskell qui découvre ce polymorphisme automatiquement (ce qu'on appelle le *let-polymorphisme*, qui est l'élément clé de l'inférence de type à la *Hindley-Milner*), en μPTS c'est au programmeur d'écrire les **forall** là où ils s'appliquent.

3.2 Élaboration

Le lien entre le langage surface et le langage interne se fait par la conversion du premier dans le second, que l'on appelle l'*élaboration*, une phase qui combine l'élimination du sucre syntaxique avec l'inférence des types.

Cette conversion se base principalement sur les règles de typage du langage surface. Celles-ci sont clairement basées sur celles du langage interne, sauf qu'elles sont *bidirectionnelles* pour aider à la propagation de l'information. Plus spécifiquement il y a deux règles mutuellement récursives, chacune ne couvrant que certains cas: $\Gamma \vdash e_1 \Rightarrow e_2$ qui, à partir de e_1 et de l'environnement Γ , vérifie que e_1 est correctement typé et calcule son type (e_2), et $\Gamma \vdash e_1 \Leftarrow e_2$ qui reçoit non seulement e_1 et l'environnement Γ mais aussi son type e_2 et doit alors vérifier que e_1 est correctement typé et qu'il a effectivement le type e_2 .

La Figure 2 montre les règles en question. Votre travail sera d'implanter l'élaboration en suivant ces règles. La différence principale est que l'élaboration ne vérifie pas seulement le type, mais renvoie aussi la forme élaborée du code surface, i.e. une version équivalente mais dans le langage interne, avec toutes les annotations de types et sans sucre syntaxique. Par exemple, si la vérification du code surface a dû utiliser la règle "coercion **int_to_bool**", le code renvoyé devrait appeler explicitement la fonction **int_to_bool** pur faire cette conversion. De même si la règle "coercion du \forall " vous a permis d'inférer que **nil** a non seulement type **forall(t, type, list(t, 0))** mais aussi type **list(int, 0)**, alors il faut renvoyer le code **app(nil, int)** pour explicitement instancier l'argument implicite **t**.

Pour faciliter le travail, les opérations que je vous fournis qui opèrent sur langage interne (e.g. **subst**, **normalize**) acceptent en fait les termes de la forme **forall(X, E₁, E₂)** et les considèrent comme équivalents à **arw(X, E₁, E₂)**. De cette manière on peu utiliser les même types pendant l'élaboration (où la distinction entre **forall** et **arw** est importante) et après (où la distinction n'existe plus).

3.3 Vérification

L'élaboration est une phase qui peut être complexe et il est tentant d'y ajouter toujours plus de bébelles, donc pour se protéger des erreurs dans cette phase, le résultat de l'élaboration est *vérifié*, ainsi la sécurité du système de type ne dépend pas de l'élaboration. Plus précisément, le code du langage interne renvoyé par l'élaboration est passé à **verify** qui implémente les règles de type du langage interne pour vérifier que le code élaboré est correctement typé.

Cette partie du code vous est aussi fournie et vous permettra donc de vous assurer que votre code fonctionne correctement.

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma(x) = e}{\Gamma \vdash x \Rightarrow e} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash e_1 \Leftarrow \text{type} \quad \Gamma, x:e_1 \vdash e_2 \Rightarrow e_3}{\Gamma \vdash \text{fun}(x, e_1, e_2) \Rightarrow \text{arw}(x, e_1, e_3)} \\
\\
\frac{\Gamma, x:e_1 \vdash e_2 \Leftarrow e_3}{\Gamma \vdash \text{fun}(x, e_2) \Leftarrow \text{arw}(x, e_1, e_3)} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash e_1 \Leftarrow \text{type} \quad \Gamma, x:e_1 \vdash e_2 \Leftarrow \text{type}}{\Gamma \vdash \text{arw}(x, e_1, e_2) \Rightarrow \text{type}} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash e_1 \Leftarrow \text{type} \quad \Gamma, x:e_1 \vdash e_2 \Leftarrow \text{type}}{\Gamma \vdash \text{forall}(x, e_1, e_2) \Rightarrow \text{type}} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash e_1 \Rightarrow \text{arw}(x, e_4, e_5) \quad \Gamma \vdash e_2 \Leftarrow e_4}{\Gamma \vdash \text{app}(e_1, e_2) \Rightarrow e_5[e_2/x]} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash e_1 \Leftarrow \text{type} \quad \Gamma, x:e_1 \vdash e_2 \Leftarrow e_1 \quad \Gamma, x:e_1 \vdash e_3 \Rightarrow e_4}{\Gamma \vdash \text{let}(x, e_1, e_2, e_3) \Rightarrow e_4} \\
\\
\frac{\Gamma, x:e_1 \vdash e_2 \Rightarrow e_1 \quad \Gamma, x:e_1 \vdash e_3 \Rightarrow e_4}{\Gamma \vdash \text{let}(x, e_2, e_3) \Rightarrow e_4} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash e_2 \Leftarrow \text{type} \quad \Gamma \vdash e_1 \Leftarrow e_2}{\Gamma \vdash e_1 : e_2 \Rightarrow e_2} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash e_1 \Rightarrow e_2 \quad e_2 \simeq e_3}{\Gamma \vdash e_1 \Leftarrow e_3} \\
\\
\frac{\Gamma, x:e_2 \vdash e_1 \Leftarrow e_3}{\Gamma \vdash e_1 \Leftarrow \text{forall}(x, e_2, e_3)} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash e_1 \Rightarrow \text{forall}(x, e_2, e_3)}{\Gamma \vdash e_1 \Rightarrow e_3[e_4/x]} \text{(coercion du } \forall \text{)} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash e_1 \Rightarrow \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 \Rightarrow \text{float}} \text{(coercion int_to_float)} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash e_1 \Rightarrow \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 \Rightarrow \text{bool}} \text{(coercion int_to_bool)}
\end{array}$$

Figure 2: Règles de typage bidirectionnelles du langage surface

4 Remise

Vous devez remettre deux fichiers: `upts.prolog` et `rapport.tex`.

5 Détails

- Tout usage de matériel (code ou texte) emprunté à quelqu'un d'autre (trouvé sur le web, ...) doit être dûment mentionné, sans quoi cela sera considéré comme du plagiat.
- Vous pouvez bien sûr définir autant de nouvelles relations que vous désirez, mais vous ne devriez pas modifier les relations fournies autres que celles mentionnées. Si toutefois il vous paraît nécessaire de les modifier, décrivez et justifiez la modification dans le rapport.
- Le code ne doit en aucun cas dépasser 80 colonnes.
- Vérifiez la page web du cours et le groupe de discussions, pour d'éventuels errata, et d'autres indications supplémentaires.
- Ce travail est à faire en groupes de 2, mais il ne se prête pas vraiment à une division du travail: le principal du travail n'est pas tant le codage mais la compréhension de ce qu'il faut faire. Je recommande donc plutôt de faire de la "programmation en binôme". Je recommande aussi d'utiliser les exemples fournis pour diriger votre travail, qui vous fera faire avancer dans toutes les fonctions à la fois en commençant par un langage très simple et en y ajoutant de plus en plus de fonctionnalités. Finalement, vu qu'il est difficile d'accélérer la compréhension (qui au contraire a tendance à bénéficier d'une bonne nuit de sommeil), il vaut la peine de commencer le travail dès que possible.
- La note sera basée d'une part sur des tests automatiques, d'autre part sur la lecture du code, ainsi que sur le rapport. Le critère le plus important, et que votre code doit se comporter de manière correcte. Ensuite, vient la qualité du code: plus c'est simple, mieux c'est. S'il y a beaucoup de commentaires, c'est généralement un symptôme que le code n'est pas clair; mais bien sûr, sans commentaires le code (même simple) est souvent incompréhensible. L'efficacité de votre code est généralement sans importance, sauf si votre code utilise un algorithme vraiment particulièrement ridiculement inefficace.