**תרגיל 1 – למידת מכונה**

**1.1**

נתון לנו שיש מסווג (נסמן אותו ב- ) שהוא מסווג באופן וודאי את הנקודות. כלומר, בהינתן נקודה מחזיר האם היא חיובית או שלא. באופן פורמלי נתונים מספרים , ובהינתן השאלה האם הנקודה נמצאת בין טווח המספרים אזי אם התשובה חיובית מחזיר 1 (נקודה חיובית), ואחרת 0.

התשובה מתייחסת לנתון בשאלה כי המלבן מיושר לצירים.

**טענה: האלגוריתם מחזיר את המלבן הקטן ביותר שמכיל את כל הנקודות החיוביות בסט האימון, ואינו מכיל אף נקודה שלילית.**

ולמה?

נניח כי המלבן ש- מחזיר מוגדר כך: בין ל- ובין ל- . ונניח בשלילה שהוא מכיל נקודה שלילית. כלומר קיימת נקודה שלילית כך שמתקיים:

אם המלבן ש- החזיר הוא הקטן ביותר המכיל את כל הנקודות החיוביות אזי לא קיימת נקודה חיובית בטווח שבין חוץ המלבן הקטן ביותר לבין הגבול של המלבן של המסווג . באופן פורמלי:

לא קיימת נקודה חיובית כך ש-

ולכן המלבן הקטן ביותר מוכל במלבן של המסווג שאנו מניחים שמסווג נכון.

ולכן אם במלבן הקטן ביותר המוחזר מ- יש נקודה שלילית, אזי גם היא תהיה בתוך המלבן של המסווג הנכון. **זוהי סתירה להנחה** שבמסווג הנכון אין נקודות שליליות בטווח:

ולכן הוא הוא *. כלומר, אלגוריתם מביא למינימום את הטעות (ה- ) על סט האימון.*

**1.2**

נרצה להוכיח כי:

לפי הנתון מתקיים כי:

כעת נכניס את התוחלת לתוך הביטוי בסיגמא (מלינאריות התוחלת):

*נשים לב שכעת התוחלת זוהי למעשה התוחלת של כלשהו מתוך ההתפלגות . ומזה נקבל כי:*

*בנוסף, אנו יודעים מ"הסתברות" שהתוחלת של היא ההסתברות עצמה, כלומר נקבל כי:*

*ולכן נקבל כי:*

*נשים לב שהביטוי הוא סכימה של אותה הסתברות פעמים ואז לחלק ב- , ולכן נקבל כי:*

*ולסיום נקבל כי:*

*כנדרש.*

ההיגיון בהוכחה הוא: הביטוי זוהי תוחלת - על קבוצות אימון בגודל מתוך התפלגות - של ה- . בוחרים שוב ושוב קבוצות אימון מתוך התפלגות באופן אין סופי. מה שיקרה לבסוף הוא שהתוחלת על ה- תהיה שווה ל- .