

# ElephantDrinking 解题报告

## 【题目大意】

见原题

## 【题目关键字】

动态规划

## 【算法讨论】

首先处理两个较简单的子问题，地图只有在左方和上方有大象，地图只有上方和下方有大象。

对于第一种情况，不难发现，被上方大象饮用的水井和被左方大象的水井之间，可以用一条随着  $x$  坐标增加， $y$  坐标单调不减的线段分开。

因此可以预处理  $up[i][j]$  示  $(i,j)$  及其上方权值最大的水井， $left[i][j]$  示  $(i,j)$  及其左方权值最大的水井。

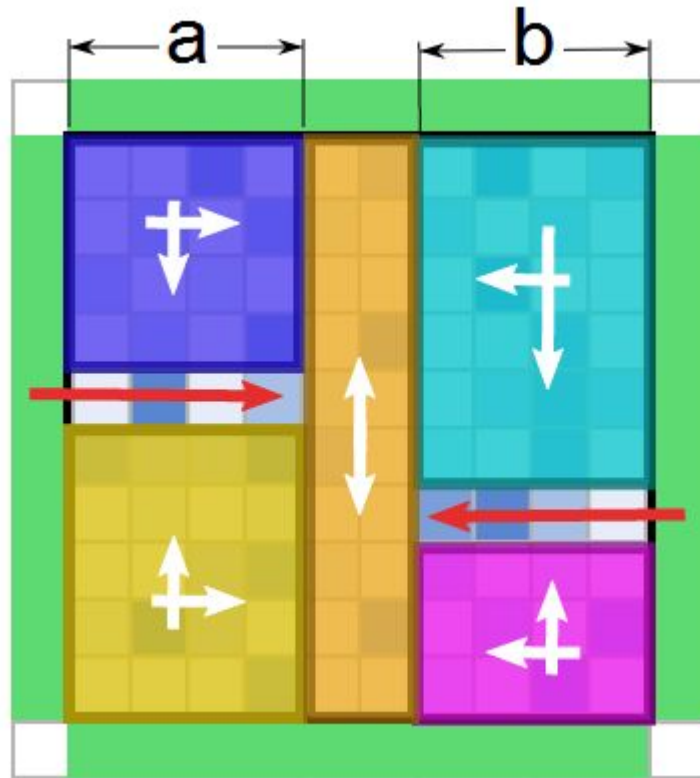
令  $upleft[i][j]$  表示前  $i$  行，前  $j$  列的水井，只有上方和左方大象饮用的情况下，最多可以饮用的水量。显然，有  $upleft[i][j] = \max(upleft[i-1][j] + left[i][j], upleft[i][j-1] + up[i][j])$

对于地图只有上方和下方有大象，只需要每列选择两个权值最大的水井即可。

回到原问题，令左方大象伸出的象鼻最大长度为  $a$ ，右方大象伸出的象鼻最大长度为  $b$ ，上方大象伸出的象鼻最大长度为  $c$ ，下方大象伸出的象鼻最大长度为  $d$ 。根据  $a$  和  $b$ ， $c$  和  $d$  之间的大小关系，分两种情况讨论。

1,  $a < b$  或  $c < d$ 。

如图，对于  $a < b$  的情况，枚举长度为  $a, b$  的象鼻所在位置，可以简单的将整个图形分成 5 个区域。且每个区域都可以通过转化成之前所处理的两种较简单的子问题，预处理后即可  $O(1)$  计算答案。



枚举  $a, b$  是  $O(n^2)$  的,  $a, b$  的位置分开枚举是  $O(n)$  的, 查询预处理的子问题答案为  $O(1)$ , 预处理所有子问题的时间复杂度为  $O(n^2)$ , 因此处理  $a < b$  的最优值的时间复杂度为  $O(n^3)$ 。

2,  $a > b$  且  $c > d$ 。

这种情况比较复杂, 可以枚举方向由左向右的长度为  $a$  的象鼻所在位置来确定。

1,  $a$  落在倒数第  $c$  行到正数第  $d$  行之间。

这种情况显然是无解的。可以自行画图验证。

2,  $a$  落在倒数第  $c$  行之前。

经过验证, 我们最终可以将整个图形分解成如下 5 个区域, 除了中间的区域不能被任何大象饮用, 每个区域转化后的子问题如下:

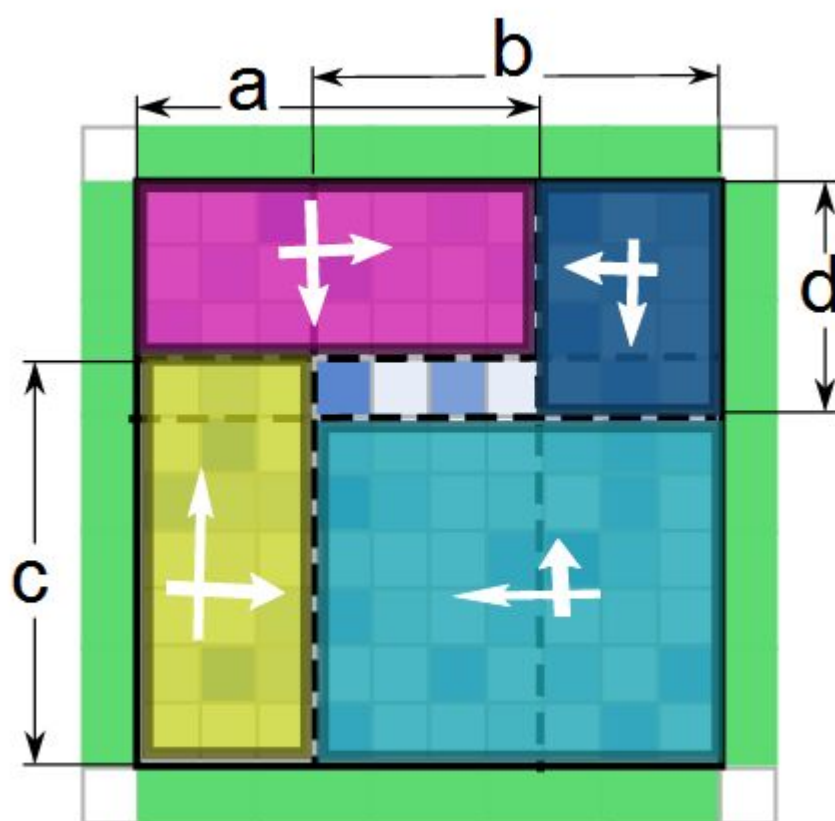
1, 前  $n-c$  行, 前  $a$  列的水井, 只能被上方和左方的大象饮用。

2, 前  $d$  行, 后  $n-a$  列的水井, 只能被上方和右方的大象饮用。

3, 后  $c$  行, 前  $n-b$  列的水井, 只能被下方和左方的大象饮用。

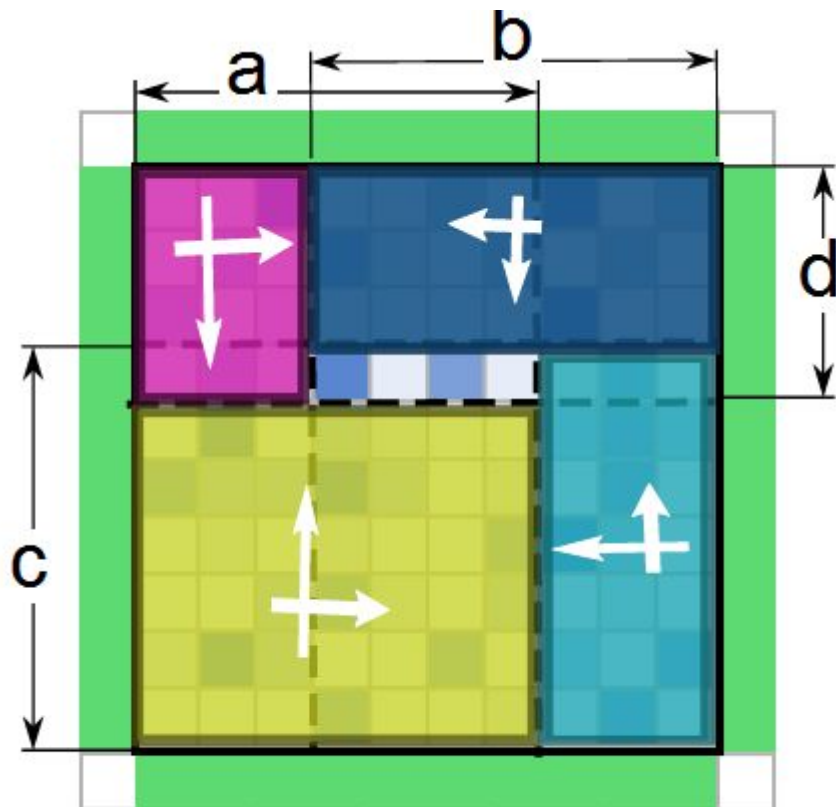
4, 后  $n-d$  行, 后  $b$  列的水井, 只能被下方及右方的大象饮用。

不难发现这些都是之前预处理的子问题,  $a, b, c, d$  确定后可以在  $O(1)$  内回答。



3,  $a$  落在第  $d$  行之后。

经过验证，我们最终可以将整个图形分解成如下 5 个区域。



不难发现，这种情况旋转后即可转化为  $a$  落在倒数第  $c$  行之前的情况不需要额外处理。

最后这个问题总的时间复杂度为  $O(n^4)$ ，空间复杂度为  $O(n^2)$ ，对于  $n \leq 50$ ，数据组数  $\leq 17$  可以轻松通过本题。

**【时空复杂度】**

时间复杂度：  $O(n^4)$

空间复杂度：  $O(n^2)$