#### DP 中的优化

VloleT

多知识

000 036

m 14 m 7 700 44

斜率优化

# DP 中的优化

V!oleT

2019年7月3日

### Outline

#### DP 中的优化

VIoleT

#### 预备知识

CDO 分泌

15世末年代

斜塞优化

- 1 预备知识
  - ■凸包
  - CDQ 分治
- 2 四边形不等式
- 3 斜率优化

## 凸包

#### DP 中的优化

VloleT

### Graham 扫描法

备知识

凸包

-- ~ .....

四边形个寺式

极角序 (atan2)or 水平序。

对所有点排序,用栈维护凸包,依次将点加入凸包中,用叉积判断方向( $p \times q$  如果小于零则说明 p 在 q 的逆时针方向)。

极角序:这么做足以求出凸包。

水平序: 只能求出下凸壳,如果要求上凸壳还需要反 着再扫一遍。

## 凸包

#### DP 由的优化

VIole<sup>-</sup>

备知识

凸包

斜率优·

### 动态凸包

理性愉悦。

一般推荐极角序的动态凸包。水平序的动态凸包需要 同时维护上下两个凸壳。感兴趣者自行尝试。

大概做法是以极角序为键值用平衡树维护凸包上的点,每次插入的时候找到插入点的前驱后继,用叉积判断是否在内部,如果不在就插入,插入之后不断的判断插入后前驱是否在凸包内和后继是否在凸包内,并且不断的删除直至不能删除为止。因为只需要支持插入,删除,求前驱,求后继,所以直接用 set 就可以维护了。

## 凸包

#### DP 中的优化

VloleT

### 细节包括但不限于

- 一开始取的基准点必须要在凸包内部,因为只支持插入所以凸包可能变大,所以找一开始三个点的内部就可以了。
- ■排序的时候极角序相同按到基准点的长度排序。
- 凸包是环状的,所以前驱和后继也是环状的,判一下 就可以了。

#### DF THYILK

V!ole

### 预备知识

CDQ 分治

四边形不等式

会を生化

## CDQ 分治

#### DP 中的优化

VloleT

预备知识

CDQ 分治

边形不等式

CDQ 分治的基本思想十分简单,合理应用 CDQ 分治有降维的作用。

- 1 我们要解决一系列问题,这些问题一般包含修改和查询操作,可以把这些问题排成一个序列,用一个区间 [*L*, *R*] 表示。
- ② 递归处理左边区间 [L, M] 和右边区间 [M+1, R] 的问题。
- **3** 合并两个子问题,同时考虑到 [L, M] 内的修改对 [M+1, R] 内的查询产生的影响。即,用左边的子问题帮助解决右边的子问题。

#### DP 中的优化

VloleT

备知识

CDQ 分治

]边形不等式

斜率优化

### 二维偏序问题

给定 N 个有序对 (a, b), 求对于每个 (a, b), 满足 a' < a 且 b' < b 的有序对 (a', b') 有多少个。

#### 二维偏序问题

CDQ 分治

回忆一下归并排序求逆序对的过程,我们在合并两个 子区间的时候, 要考虑到左边区间的对右边区间的影响。 我们每次从右边区间的有序序列中取出一个元素的时 候,要把"以这个元素结尾的逆序对的个数"加上"左边 区间有多少个元素比他大"。这是一个典型的 CDQ 分治 的过程。

#### DP 中的优化

VIoloT

备知识

凸包

四边形个寺式

斜率优化

### 二维偏序问题

那么对于二维偏序问题,我们在拿到所有有序对 (a,b) 的时候,先把 a 元素从小到大排序。因为 a 元素已 经有序,可以忽略 a 元素带来的影响,和"求逆序对"的问题是一样的。

DP 中的优化

VloleT

各知识

......

CDQ 分治

四边形不等式

三维偏序问题。 $1 \le N \le 100,000, 1 \le K \le 200,000$ 

#### DP 中的优化

VloleT

\_\_\_\_

CDQ 分涉

四边形不等式

维护一个  $W \times W$  的矩阵,初始值均为 S. 每次操作可以增加某格子的权值,或询问某子矩阵的总权值. 修改操作数  $M \leq 160000$ ,询问数  $Q \times 10000$ , $W \times 2000000$ .

#### DP 中的优化

VloleT

预备知识

凸包 CDQ 分治

. . . . . .

在平面直角坐标系中,Wayne 需要你完成 n 次操作,操作只有两种:

- 1. 在坐标系中加入一个以 (x, y) 为圆心且过原点的 圆。
- 2. 询问点 (x, y) 是否在所有已加入的圆的内部含圆周。

保证圆心严格在 x 轴上方 (纵坐标为正),且横坐标 非零。

 $n \le 500000$ .

### Outline

#### DP 中的优化

VloleT

各知识

.....

CDQ 分治

#### 四边形不等式

- 1 预备知识
- 2 四边形不等式
- 3 斜率优化

#### DP 中的优化

VloleT

各知识

\_ .

CDQ 分治

四边形不等式

对于形如  $f(i) = min\{f(j) + w[i][j]\}$  的状态转移方程,且 w[i][j] 满足这样一个凸不等式:

$$w[a][c]+w[b][d] \leq w[a][d]+w[b][c] (a \leq b \leq c \leq d)$$

则 f 的转移满足决策单调性。

#### DP 中的优化

VIoleT

各知识

凸包

CDQ 分治

四边形不等式

对于满足决策单调性的状态转移方程:用 k(x) 表示状态 x 的最优决策,对任意  $i \le j$ ,有  $k(i) \le k(j)$ 。 决策单调性有两种实现方式:栈或分治。

DP 中的优化

VloleT

**あ**备知识

凸包

CDQ 分治

四边形不等式

会会はル

#### 栈

据说又叫决策二分栈。

由决策单调,对于栈中的任意相邻两个决策点,我们都可以通过二分找到一个临界值 k,使得序列中在 k 之前的时候,其中一个作为决策转移到 k 之前更优,而 k 以后另一个更优。

四边形不等式

分治

二分栈有一个局限性,那就是必须能快速计算 w[i][j]。 既然转移过程是单调并且离线的,我们考虑分治。假 设当前我们求解一段区间 [l, r], 而所有  $f(l), f(l+1), \dots, f(r)$  的最优决策点在 [L, R] 之间。对于 [l, r] 的中点 mid,我们可以暴力扫一遍 [L, R],找到它的 最优决策点 k。因为决策单调,所以  $f(l), \dots, f(mid-1)$  的 决策落在 [L,k] 上,而  $f(mid+1),\cdots,f(r)$  的决策落在 [k, R] 上, 变成了两个规模减半的小问题。

DP 中的优化

VloleT

各知识

CDQ 分治

四边形不等式

ᅅᅲᄮᄱ

### 诗人小 G

给出长度为 n 的数组 A,你需要把这个数组分成若干段,设第 i 段的和为  $sum_i$ ,最小化  $\sum (sum_i - L)^k$ 。  $n < 10^5$ 

DP 中的优化

VloleT

**ある知识** 

CDQ 分治

四边形不等式

斜率优化

### 诗人小 G

由决策单调性。每一个位置作为最优决策点的一定是一个连续区间。

用栈维护每个决策会更新的区间。新加入决策时二分它的区间。

DP 中的优化

VloleT

各知识

CDQ 分治

加油形不역书

四边形不等式

. . .. ..

已知一个长度为 n 的序列  $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 。 对于每个  $1 \le i \le n$ ,找到最小的非负整数  $p_i$  满足对于任意的  $j, a_i \le a_i + p_i - \sqrt{|i-j|}$ 

四边形不等式

有绝对值怎么办? 拆开讨论两边就行。

$$p_i = \max_{j=1}^{i} \{a_j + \sqrt{i-j}\} - a_i$$

显然满足决策单调性。

### Outline

#### DP 中的优化

VIoloT

5夕50

....

-- - ....

m ) + m/ -- /// //

斜率优化

- 1 预备知识
- 2 四边形不等式
- 3 斜率优化

# 斜率优化

#### DP 中的优化

V!ole7

7 km2m

CDQ 分治

动形不等式

斜率优化

对于形如:

$$\mathit{f}[\mathit{i}] = \min\{\mathit{A}[\mathit{i}] \times \mathit{X}[\mathit{j}] + \mathit{B}[\mathit{i}] \times \mathit{Y}[\mathit{j}](\mathit{j} < \mathit{i})\}$$

这样的状态转移方程,进行变形:

$$Y\![j] = -\frac{A\!\left[i\right]}{B\!\left[i\right]} \times X\![j] + \frac{f\![i]}{B\!\left[i\right]}$$

问题转化为求一个点 (X[j], Y[j]),过该点作斜率为  $-\frac{A[i]}{B[i]}$  的直线,使得纵截距最小。

维护一个凸包???

DP 中的优化

VloleT

#### HNOI2008 玩具装箱

**预备知识** 

CDO 分流

かれてなる

. . . . . . . .

斜率优化

有 n 个玩具,要将它们分为若干组进行打包,每个玩具有一个长度 len[x]。每一组必须是连续的一组玩具。如果将第 x 到第 y 个玩具打包到一组,所需的代价等于  $(y-x+\sum len[k]-L)^2, x \leq K \leq y$ 。问将所有玩具打包的最小代价是多少。注意到每组玩具个数并没有限制。  $n \leq 5 \times 10^4$ 。

#### DP 中的优化

VloleT

#### HN0

. . .

凸包

斜率优化

#### HNOI2008 玩具装箱

设 
$$t[i] = sum[i] + i$$
,  $g[i] = t[i] + 1 + L$ , 则变形得到:

$$f[j] + g(j)^2 = f[i] - t(i)^2 + 2t(i)g(j)$$

将  $(g(j) f(j) + g(j)^2)$  看成平面上的一个点。 我们发现,转移过程中斜率 2t(i) 是单调的。 单调队列优化!

#### DP 中的优化

VIalaT

预备知识

CDQ 分治

9边形不等式

斜率优化

机器上有 N 个需要处理的任务,它们构成了一个序 列。这些任务被标号为 1 到 N,因此序列的排列为 1,2,3...N。这 N 个任务被分成若干批,每批包含相邻的若 干仟条。从时刻 0 开始,这些任务被分批加工,第 i 个任 务单独完成所需的时间是 Ti。在每批任务开始前,机器需 要启动时间 S,而完成这批任务所需的时间是各个任务需 要时间的总和。注意,同一批任务将在同一时刻完成。每 个任务的费用是它的完成时刻乘以一个费用系数 Fi。请确 定一个分组方案, 使得总费用最小。

 $0 < N \le 100000, 0 \le S \le 2^8, -2^8 \le Ti \le 2^8, 0 \le Fi \le 2^8$ 

DP 中的优化

VloleT

各知识

CDQ 分治

四边形不等式

斜率优化

sum - sy[j] 单调,可以用栈维护凸包。

但是斜率 sx[i] 不一定单调,就不能用单调队列优化

了。

二分斜率卡凸包?

DP 中的优化

VloleT

5备知识

CDO 分泌

1. 计整不研记

斜率优化

https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1492

#### DP 中的优化

VloleT

预备知识

CDQ 分治

m + m/ 7-46-

H.210 1 032

斜率优化

首先分析一下题目,对于任意一天,一定是贪心地买 入所有货币或者卖出所有货币是最优的,因为有便宜我们 就要尽量去占,有亏损就一点也不去碰。

$$y[j] = \frac{f[i]}{b[i]} - x[j] \times \frac{a[i]}{b[i]}$$

问题来了, $\frac{-a[i]}{b[i]}$  和 (x[j], y[j]) 都不是单调的。 平衡树维护凸包?

DP 中的优化

VIoleT

冬知识

CDO 分溢

9边形不等式

斜率优化

写一棵平衡树显然是不划算的。 动态变静态? CDQ 分治?

## 斜率优化

DP 中的优化

VloleT

各知识

CDO ANA

III WINTER

斜率优化

### 简单小结

- 斜率单调移指针
- 斜率不单调二分
- x 坐标单调开单调队列
- x 坐标不单调开平衡树或 cdq 分治