NOIP 模拟赛 题解

Cmd2001 2019.02.14

关于题目

- 这次的题目太水了，以至于我懒得写题目背景了，直接一句话题意。
- (话说为什么题目这么水呢？还不是因为上次……)
- 因为题目非常水，我懒得写详细题解，所以题解较为简单，意会即可。
- 题目名称什么东西？其实就是每个单词取前三个字母啦。
- 关于解压密码"Amagi"(天城)，我知道本意是日本古国名，但是这里指的某歌手(天城 あくる，Akuru Amagi)，你如果搜到IJN Amagi那与我无关……~~(话说怎么还真有人拿二战军舰做名字的，军国复辟可还行，想到《EVA》里的凌波丽)~~
- 关于这次课件的画风？只是图用完了2333。

T1：阶乘

- 求$(n-1)!\ mod\ n$。
- 输入包含多组数据，每组数据一行一个整数 n 。
- 对每组数据输出一行，表示答案的值。
- **每五组数据输出一个空行。**

- 对于20%的数据，$n \le 10^6$；
- 对于40%的数据，$n \le 10^9$；
- 对于60%的数据，$n \le 10^{14}$；
- 对于100%的数据，$n \le 10^{15}$；
- 保证数据组数不超过10。

T1：阶乘

- 题意不能再简化了……
- 相信一定有没有输出空行的同学……要仔细看题……
- 打表找规律，我们会发现：n为质数则输出$n-1$，否则输出0。
- 特判$n=4$。
- 好的，我们实现一个判断素数的算法就好了。
- 我们可以把$\le\sqrt{10^{15}}$的素数先暴力筛出来，然后再用这些素数去试除，复杂度为$O(\frac{T\sqrt{10^{15}}}{\log 10^{15}})$。

T1：阶乘

- 正确性证明？
- 首先考虑n为质数的情况。
- $n = 2$的情况平凡。下面考虑n为奇质数的情况。
- 显然$< n$的正整数共有$n - 1$个，其中除了1以外每个数有且只有一个逆元，而$n - 1$的逆元为$n - 1$。
- 所以我们能把$2, \ldots, n - 2$这$n - 3$个数，两两配对，其乘积为1。最后只剩下1和$n - 1$，故答案为$n - 1$。

T1：阶乘

- 接着考虑n为和数的情况。
- 首先我们对n进行质因数分解，即$n=\prod_{i=1}^{t} p_i^{k_i}$，其中$p_i$为质数，$k_i$为正整数，$t$为$n$的质因子个数。
- 只要对于任意i，$(n-1)! \equiv 0 \; mod \; p_i^{k_i}$，即$(n-1)!$中$p_i$的次数更大，则答案为0。
- 当$t>1$时，对于任意i，有$n>p_i*k_i$。(显然$p_i^{k_i} \geq p_i*k_i$(当$k_i=1$或$p_i=k_i=2$时取等)，而n有其他质因子)
- 当$t=1$时，$n=p^k$，显然$k>1$，当且仅当$p=k=2$时$n=p*k$，其余情况均有$n>p*k$。(二元函数求偏导可证)
- 故有且仅有一个反例为$n=4$。

T2：路径

- 我们有一个n个点m条边组成的图。
- 现在我们要从1号点到n号点，但是不能同时通过从1到n任意一条最短路上的k条边(无向边必须按照最短路上的方向)，求满足条件的最短路径。如果不存在(无论如何无法在要求下抵达)，输出-1。

- 对于 30% 的数据， $n \leq 100, m \leq 10'000, k \leq 5$；
- 对于另外20%的数据，图上的边均为无向边；
- 对于100%的数据，$n \leq 100'000, m \leq 500'000, k \leq 10$。
- 保证对于所有边，$0 < l \leq 1'000'000'000$。

T2： 路径

- 怎么说呢？拆点最短路板子题……
- 首先建立正向图和反向图，两遍最短路求出从1号点到每个点和从每个点到n号点的最短路。
- 遍历每一条边，判断它是否在最短路上。
- 拆点，$f[i][j]$表示从i号点到j号点，当前已经连续走了j条最短路上的边，最短距离。
- 暴力DP即可。
- 注意不要写$SPFA$，复杂度不对(某些选手$NOI2018Day1T1$被出题人卡爆了)。建议写$Dijkstra$。
- 别忘了开$long\ long$，别忘了判-1。

T3：超球

- 在k维空间里有n个关键点。
- 现在给你两个球心p_1, p_2，和两个代价参数v_1, v_2。
- 我们要构建两个半径分别为r_1, r_2的k维超球使得尽可能多的关键点被这两个球包括(重复包含仅计算一次)，同时使得$v_1 * r_1^2 + v_2 * r_2^2 \le v$。($v$为阈值)
- 半径可以为0，此时超球退化成点。

- 对于10%的数据，$n \le 10$；
- 对于30%的数据，$n \le 5'000$；
- 对于70%的数据，$n \le 500'000$；
- 对于100%的数据，$n \le 1'000'000, k \le 10, x_i \le 10^5, v_1, v_2 \le 10^6, v \le 2 * 10^{18}, n * k \le 2'500'000$。

T3：超球

- 首先n^2暴力大家都会写吧……
- 先计算出每个点到两个圆心的距离，按照到圆心1距离递增排序，枚举圆1最远包含到哪个点，剩下的权值全给圆2。再次遍历序列计算总共包含多少个点即可。
- 考虑优化？按照到圆心1的距离递增排序，对所有没有被圆1的点到圆心2的距离建立权值线段树，圆2能包含多少点在线段树上查询即可。
- 想到线段树的同学，恭喜你数据结构学傻了。
- 等等，n的范围是10^6诶，$nlogn$真的能过？
- 当然不能，所以我们需要：线性时间复杂度算法。

T3：超球

- 考虑我们把距离序列复制两份。
- 考虑我们把距离序列复制两份，分别按照到圆心1和圆心2的距离升序排序。降序枚举圆1的半径，圆2能包含的点一定是按照到圆心2升序排序的序列的一个从头开始的区间。
- 当圆1放弃到一个点时，如果这个点已经能被圆2包含，则直接将它标记为被圆2包含；否则将它标记为未被包含。调整圆2区间的大小，当指针扫过一个未被包含的点时，将其标记为被圆2包含。
- 主算法复杂度$O(n)$，排序因为都是整数，所以可以用基数排序，复杂度为$\mathrm{O}(n\log_n 10^{18})$。
- 读入数据量巨大，记得写读入优化。

国际惯例的

谢谢大家