普及组

pj

出题人：jhr

吐槽时间

题解：subtask(?)1

- 暴力，显然每个数字必然是x的约数，按顺序依次搜索每一个格子所填数字即可

- 期望得分：10分

题解：subtask(?)2

- $x = 1$
- 发现每个格子只会填正负1
- 而只需要将前$n-1$行$n-1$列随意填写，最后一行一列的数值也就确定了下来
- 所以答案就是$2^{(n-1)^2}$

- 期望得分：15分

题解：subtask(?)3

- 显然答案对于符号和x的每一个质因子是独立的
- 发现部分测试点x的质因子次数最高为1
- 数字相乘等价于指数相加
- 对于每个质因子，我们就转化为：给一个$n*n$的矩阵每个位置填入一个非负整数，使得每行每列的和为1
- 相当于选择一种行和列的匹配方案，答案就是$n!$

- 期望得分：15分

题解：subtask(?)4

- 发现所有点测试x的质因子次数最高为2
- 我们所求即为：给一个$n * n$的矩阵每个位置填入一个非负整数，使得每行每列的和为2
- 可以dp, $f[i][j][k][l]$表示已经确定前i列目前有j行没有数字，k行和为1，l行和为2，转移考虑当前行填入属于哪一类即可。
- 复杂度单次$O(n^4)$

题解：subtask(?)5

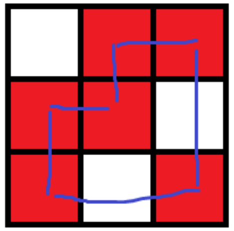
- 发现 $j + k + l = n$
- 发现 $k + l * 2 = i * 2$
- 所以可与省去两维状态
- 复杂度单次$O(n^2)$

- 期望得分 : 30分

题解：subtask(?)5

- 我们枚举有矩阵中多少个2，设为x
- 设$F[i]$为$i*i$的矩阵只填入0/1行列和都为2的方案数
- $Ans[n]=C_n^{x^2}*x!*F[n-x]$
- 若求得F，则可以用卷积NTT来求得Ans

题解：subtask(?)5

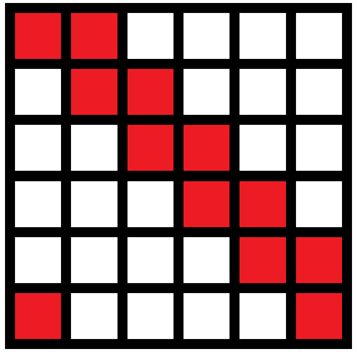


- 为求$F[i]$，我们再定义一个$A[i]$
- 设我们把同一行，同一列的两个1设为点，并连边

- $A[i]$为$i*i$的矩阵如上连边以后连成一个大环的方案数
- 显然可以推到
- $F[i]=\sum_{j=1}^{i}C_{i-1}^{j-1}*C_i^j*A[j]*F[i-j]$
- 若能求得A，我们可以通过分治NTT来求得F

题解：subtask(?)5

- 那A怎么求呢
- 我们发现A的每一个合法方案都可以由下图通过交换行列变换而来



- 显然交换第一行是没有意义的，交换第一行两个1所在列也是没有意义的，因为它们都可以用其它的行列变换的组合代替。
- 所以$A[i]=\frac{i!(i-1)!}{2}$ （$i\neq 1|A[1]=0$）

题解：subtask(?)5

- 这样我们就有了一个$O(nlog^2n)$的做法
- 这样就完了吗？
- 不，我们把A带入F中去，再把组合数展开
- $F[i]=\sum_{\mathrm{j}=1}^{i}\mathrm{C}_{i-1}^{j-1}*C_i^j*A[j]*F[i-j]$
- $F[i]=\sum_{\mathrm{j}=2}^{i}\frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!}*\frac{i!}{j!(i-j)!}*\frac{j!*(j-1)!}{2}*F[i-j]$
- $F[i]=\sum_{\mathrm{j}=2}^{i}\frac{F[i-j]}{2(i-j)!^2}*(i-1)!\,i!$
- $F[i]=(i-1)!\,i!*\sum_{j=0}^{i-2}G[j]$
- 总复杂度就变为了$O(nlogn)$
- 期望得分：50+分 结合sub2,3可得80+分

题解：subtask(?)6

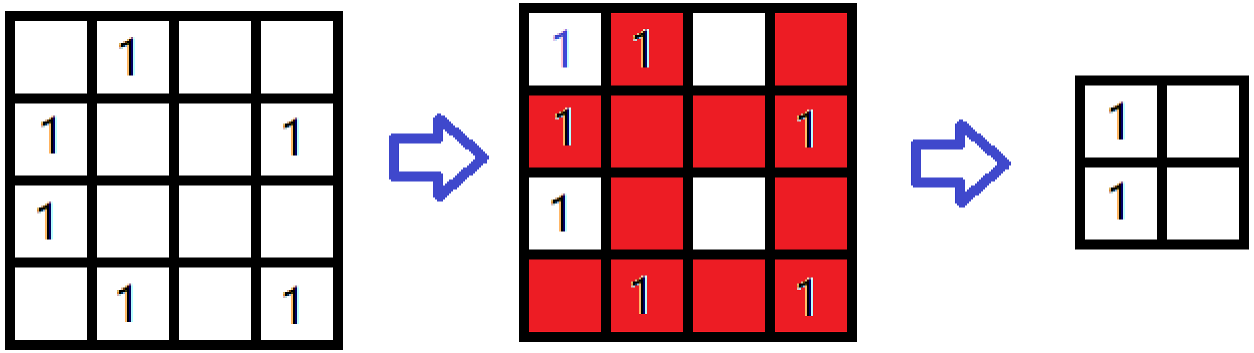
- 什么？$NOIP$考NTT
- 不存在的，良心的出题人怎么可能把这个作为标解

题解：subtask(?)6

- 若枚举2的个数，很难绕开j和$i-j$同时存在
- 我们直接DP答案
- 设$F[i]$表示$i*i$矩阵的答案
- 我们来分类讨论最后一列的情况
- 若最后一列是一个2则我们可以把这一个2所在行和最后一列一起删去，变成一个$(i-1)*(i-1)$的状态
- 即$F[i] += F[i-1]*i$

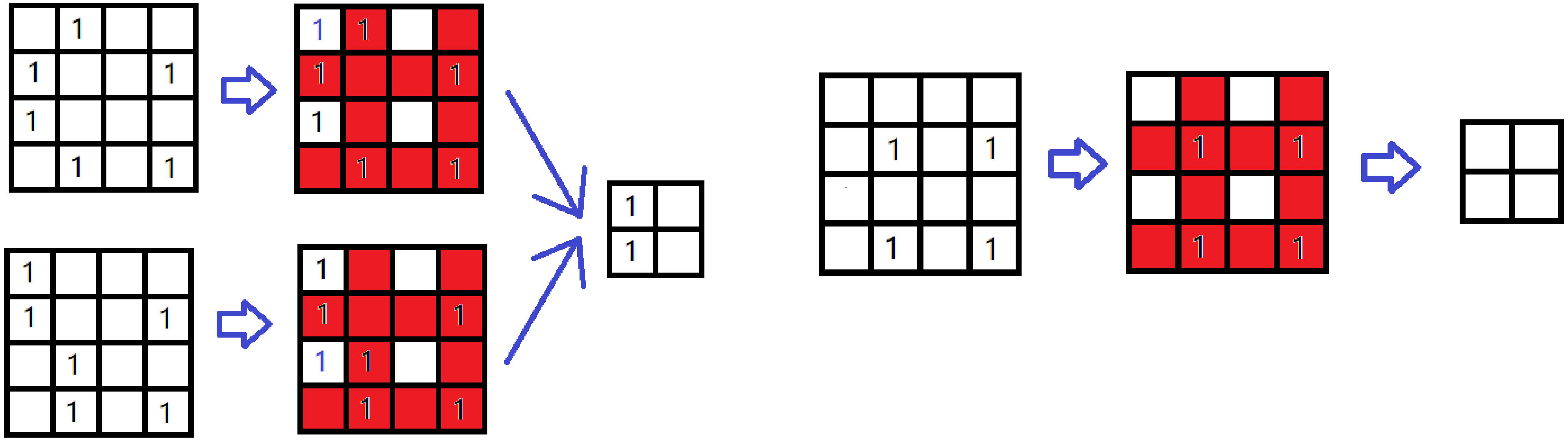
题解：subtask(?)6

- 若最后一列是两个1，我们考虑这两个1所在行的另外两个1所在列，把这两列合并，再删除两个1所在行和最后一列，就可以变为一个$(i-2)*(i-2)$的状态



题解：subtask(?)6

- 看上去好像没什么问题了，但跑出来的答案与暴力就是拍不上
- 为什么呢？
- 我们考虑这样一种情况，左边的对应了两种情况，右边只对应一种

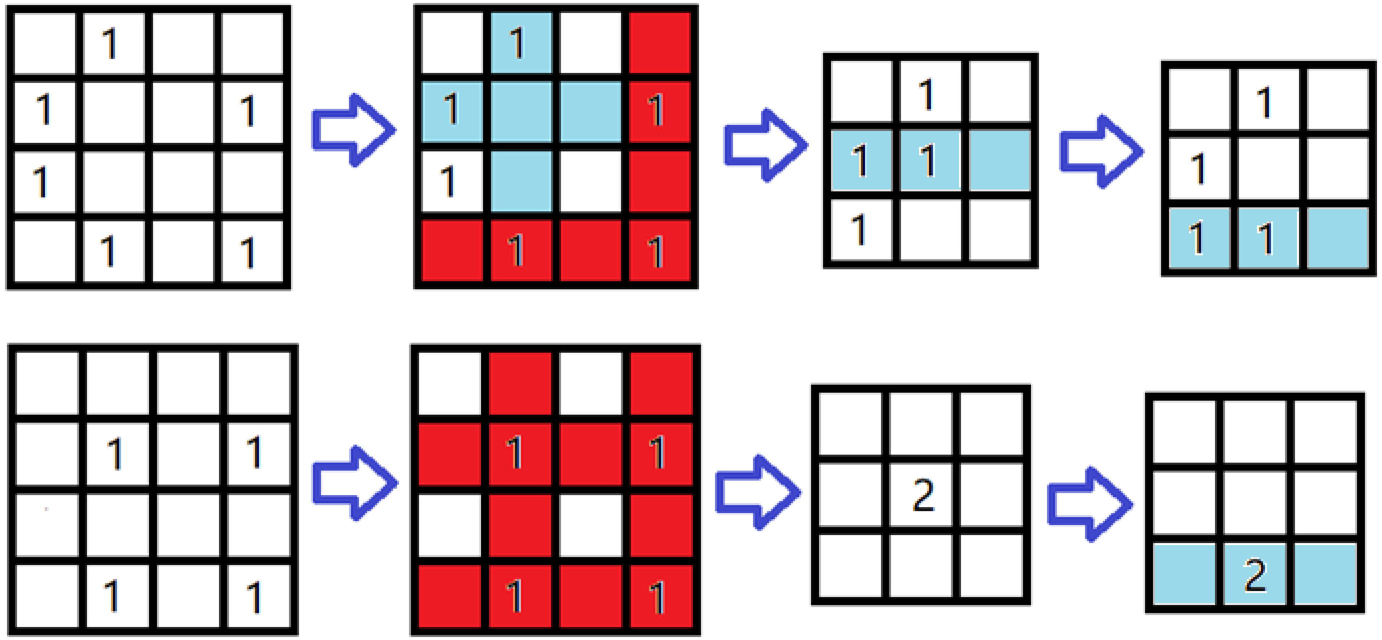


题解：subtask(?)6

- 怎么解决呢？
- 我们改变一下设法
- $F[i]$表示$i * i$矩阵最后一列是两个1的答案
- $G[i]$表示$i * i$矩阵最后一列是一个2的答案
- 则$G[i] = (F[i-1] + G[i-1]) * i$
- 那F呢？

题解：subtask(?)6

- 我们考虑还是只删除一行一列



题解：subtask(?)6

- 那么出现区别的两种情况就分别被归为了F和G
- 这样我们就可以得到转移式
- $F[i] += C_i^2 * (2F[i-1] + G[i-1])$
- 这样$F[i] + G[i]$就是我们要求的答案。

- 复杂度$O(n)$
- 期望得分：100分

提高组

tg

出题人：zzy

吐槽时间

题解：subtask1

- 请使用任意一种打开输出文件的方法

- 期望得分：3分

题解：subtask2

- 暴力枚举所有$(\mathrm{n}-1)!$种可能的排列，暴力判断是否满足条件3
- 枚举可以用std::next_permutation

- 期望得分：10分

题解：subtask3

- 可以注意到，对于一个数，要么满足前面所有数都比它小，要么满足比它小的数都在它前面
- 因为如果都不满足，那么前面会有一个比它大的，后面会有一个比它小的，这个下降子序列长度为3，不满足条件
- 可以状压dp，$F[i][S]$表示考虑到第i个位置、用了S集合中的数，转移直接枚举第i个位置放什么
- 单次询问时间复杂度是$O(2^n n)$或$O(2^n n^2)$

- 期望得分：20分

题解：subtask4

- 留给潜在的$O(n^3)$做法
- 出题人并不会

题解：subtask5

- 针对第三个限制，不难想到这么一个dp：考虑一个从大到小把数插入到排列中的过程。如果一个数没有被插入到当前排列的最前面，那么它之前就出现了比它大的数，为了不产生长度为3的下降子序列，比它小的数都要插入在其之前，也就是产生了一个必须插入在一个前缀中的限制
- $F[i][j]$表示从大到小插入到i，可以插入在前j个数之后的方案数
- 转移1：插入在序列的最前面，$F[i][j] \rightarrow F[i-1][j+1]$
- 转移2：插入在某一个数的后面，$F[i][j] \rightarrow F[i-1][k](1 \leq k \leq j)$

题解：subtask5

- 考虑$A[x] = y$的限制，等价于去掉该位置后满足条件，加上该位置后不存在：x之前有大于y的，x之后有小于y的。分情况讨论：
- $x = y$，序列以x为分割点，分成两部分。前面都比y小、后面都比y大，分别合法即可
- $y < x$，可以发现一定有比y大的数在x之前，那么需要满足比y小的数都在x之前。因为x之后都是比y大的数，所以dp到插入y时转移是固定的。
- $y > x$，与前一种情况类似
- 直接dp即可，单次询问时间复杂度是$O(n^2)$
- 期望得分：50分

题解：subtask6

- 考虑dp的组合意义，实际上是在计数有多少个长度为$n+1$的正整数序列P，满足$P[i+1] \le P[i]+1$，同时$P[1]=P[n+1]=1$
- 设$B[i]=P[i]-i$，那么对B的限制就是$B[i+1] \le B[i]$，同时$B[i] > -i$。放到平面上可以用翻折法计数
- 那么枚举走到y时的值就是在枚举走到了平面上哪个点，两边分别计数乘起来即可
- 单次询问时间复杂度是$O(n)$

- 期望得分：70分

题解：subtask7

- 满足最长下降子序列不超过2的排列，一定与一种前缀max序列一一对应
- 因为考虑把前缀max序列中有用的值（就是单调栈中的值，也就是每一个连续段的开头）插入进序列时，为了使得最长下降子序列不超过2，就会产生从此处开始小于该数的所有数一定递增排列的限制
- 那么可以观察到，序列是这么一个形状：所有在前缀max上产生贡献的点形成了一个递增序列，剩下的数也形成了一个递增序列
- 显然一个最长下降子序列不超过2的排列一定对应了其本身的前缀max序列
- 而一个前缀max序列没有对前缀max产生贡献的位置填的数也是确定的，唯一对应了一个最长下降子序列不超过2的排列

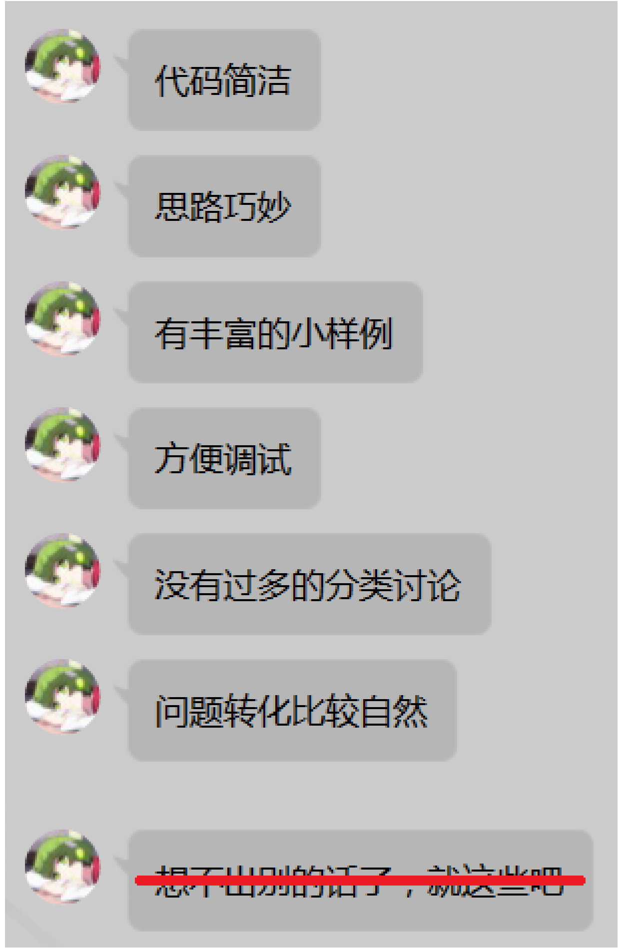
题解：subtask7

- 分情况讨论：
- $y \geq x$，那么该点一定在前缀max上。考虑反证，若其没有对前缀max产生贡献，那么x前面一定有一个大于y的数，同时x后面没有小于y的数，否则存在长度为3的下降子序列，也就是所有小于y的数都在x之前，那么至少需要$1 + (y - 1) = y$个位置，而$y \geq x > x - 1$，x前面的位置不够，矛盾
- $y < x$，那么该点一定不对前缀max产生贡献。这是显然的
- 对于$y < x$的情况，考虑A的逆置换$A^{-1}\left[A[i]\right] = i$，可以转换成另一种情况，也就是说只要考虑$y \geq x$的情况

题解：subtask7

- 考虑一个合法的前缀max序列满足的条件：
- （1）$1 \le \max[i] \le n \quad \max[n] = n$
- （2）$\max[i] \le \max[i+1]$
- （3）$i \le \max[i]$
- 同样放到平面上考虑。固定$A[x] = y$等价于确定了一部分路径，两边分别计数即可。计数也是用翻折法
- 那么预处理复杂度是$O(n)$，单次询问复杂度是$O(1)$
- 期望得分：100分

网友评价



祝大家NOIP顺利
谢谢大家