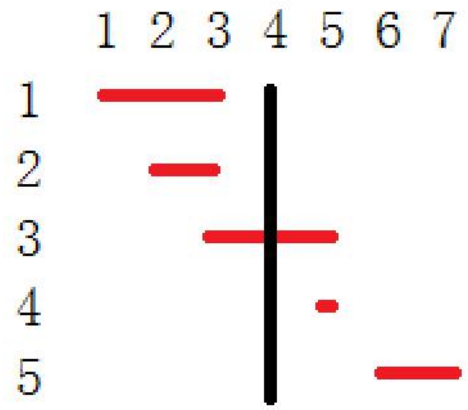
多段线性函数题解

By Worldwide_D

首先考虑题目定义的“局部最小值 fmin(y0)”，如何对于一个 y0，求出对应的 xi 的取值方案

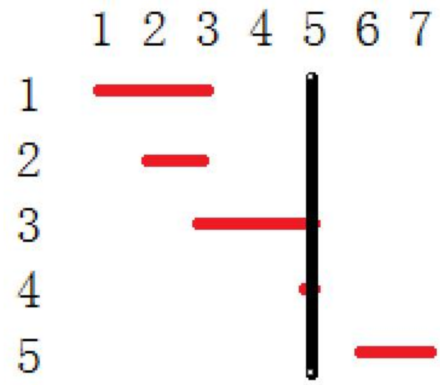


如上图，以样例为例，红色的线段表示 x 的取值范围，黑线表示 y0 的值，当前 y0=4。

每条线段互不影响，所以可以分开考虑。对于第 1、2 个区间，要使答案最小，显然 x=3，第 3 个区间覆盖了 4，所以 x3=4，同理，x4=4，x5=5，那么 fmin(4)=(4-3)+(4-3)+(4-4)+(5-4)+(6-4)=5

也就是说，对于一个确定的 y0，如果一个 xi 的取值范围覆盖了 y0，对答案的贡献为 0，如果在左边，贡献为 y0-ri，在右边贡献为 li-y0

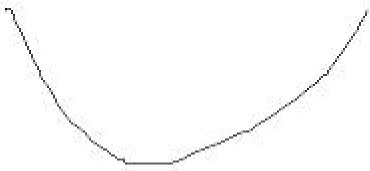
接下来考虑“全局最小值 fmin”。如果把上图的直线 y0=4 右移一格，得到下图：



显然答案没有变化，如果移到 6，fmin(6)就会等于 8（图不配了自己画）。

我们会发现：对于当前的 y0，设有 p 个区间满足(ri≤y0)，q 个区间在满足(y0<li)，顺序枚举 y0，当直线 y0 右移一位（即+1，由于 l,r 都是整数，中间的小数部分可以无视）后，fmin(y0+1)=fmin(y0)+p-q，因为有 p 个区间和直线的距离加 1，有 q 个区间和直线的距离减 1。

接下来考虑怎样找最小值，初始的时候 p=n，q=0，而且 p 是不上升，q 是不下降的，即 p-q 一开始为-n，不断上升到 n，那么函数 fmin(y)可以大致看成这样的：



这是一个非严格单峰函数，有一段最小值。

枚举 y0 并每次统计就可以得到 20 分。如果对于区间[li,ri]，我们在 li 处挂一个加一标记，在 ri 处挂一个减一标记，在顺序枚举 y0 的时候，当前的位置上给 p 加上加一标记的数量，q 减去减一标记的数量，可以拿下第 5 个点。

然而 100%的数据，l,r 是 10^9 规模的。但是我们可以发现，如果两个相邻的标记之间没有标记，p,q 的值是不变的。所以可以考虑离散化：给所有 li，ri 排序，然后顺序枚举 y0。考虑到它是单峰函数，且上面提到 fmin(y0+1)=fmin(y0)+p-q 的转移，那么可以得到：如果当前的 p=q，即 p-q=0，fmin(y0)取到了最小值，因为此后的 fmin 函数值不会再减。

这样就可以 O(n)得到答案区间[L,R]了。