Chef and Churu 解题报告

石家庄市第二中学 张若天

1. 题目来源

Codechef Nov 14

2. 题目大意

给你一个含 N 个数字的数组 A，元素标号 1 到 N，同时有 N 个函数，也标号 1 到 N。第 i 个函数会返回数组中标号 L[i]和 R[i]之间的元素的和。有以下两种询问：

1 x y 将数组的第 x 个元素修改为 y。

2 m n 询问标号在 m 和 n 之间的函数的值的和。

数据范围：$1 \leq N \leq 10^5, 1 \leq A[i], y \leq 10^9, 1 \leq Q \leq 10^5$

3. 算法讨论

3.1. 问题分析

题目要求维护一个数列，修改某个元素，查询函数编号连续一段的函数值的和。函数指的是数列的一个固定区间的元素和。

发现查询与修改之间隔了两层的区间和，需要处理好查询与修改之间的关系。

3.2. 算法一

用一个数组维护每个函数的取值。修改一个元素时需要修改数组中对应包含该元素项的函数值。查询时把查询区间的函数值加和。

修改复杂度$O(n)$，查询复杂度$O(N)$，总复杂度$O(N*Q)$，空间复杂度$O(N)$。

3.3. 算法二

用树状数组维护原数组的前缀和。修改一个元素的同时维护树状数组。查询时枚举区间内的函数，用树状数组求每个函数值加和。

修改复杂度$O(\log(N))$，查询复杂度$O((R-L)*\log(N))$，总复杂度$O(Q*\max(R-L)*\log(N))$，空间复杂度$O(N)$。

3.4. 算法三

注意到上一个算法对于 R-L 较大的询问复杂度较高，而单次修改的复杂度却很优，我们尝试利用分块算法去平衡这两个操作的复杂度。

考虑对函数按照编号进行分块，设块大小为 B。首先预处理出初始状况每块内函数值的和。

我们如果预处理出原数组每个元素在每块内的出现次数，就可以在修改一个元素时每块用$O(1)$的复杂度计算出新的函数值的和。修改操作的复杂度就可以做到$O(\frac{N}{B})$。

预处理每块内每个元素出现次数可以枚举块内的函数，每个函数都对应着一段连续的区间的元素出现次数+1，我们可以通过差分来变成关于两个元素的修改。枚举完一块内的所有函数之后统一求一个前缀和就可以得到块内每个元素的出现次数。复杂度$O\left(N*\frac{N}{B}\right)$。

对于查询操作，覆盖整块的可以直接用块上记录的答案加和，不是整块的可以像上一个算法一样维护一个树状数组，用来查询单个函数的函数值。这样就可以完美的平衡两种操作的复杂度。

修改复杂度$O(Blog(N)+\frac{N}{B})$，查询复杂度$O\left(\frac{N}{B}+B\right)$。当$B=\sqrt{N/\log(N)}$时，总复杂度为$O(N*\sqrt{N*\log(N)})$。

4. 考察内容

数据结构，分块