

动态规划 +

石家庄二中集训 高一

张若天 me@zrt.io

2019 年 2 月 16 日

清华大学 交叉信息研究院

大家好！

- 大家好！
- 我是张若天，石家庄二中 2016 届。
- NOI2015 一等奖, NOIP2014 一等奖，现在在清华大学交叉信息学院读大三。
- 上课有问题可以随时提问。

整数划分

整数划分

两个整数 n 和 k 。

求：

- 将 n 划分成 k 个正整数之和的划分数。
- 将 n 划分成若干正整数之和的划分数。
- 将 n 划分成最大数不超过 k 的划分数。
- 将 n 划分成若干奇正整数之和的划分数。
- 将 n 划分成若干不同整数之和的划分数。

整数划分

两个整数 n 和 k 。

求：

- 将 n 划分成 k 个正整数之和的划分数。
- 将 n 划分成若干正整数之和的划分数。
- 将 n 划分成最大数不超过 k 的划分数。
- 将 n 划分成若干奇正整数之和的划分数。
- 将 n 划分成若干不同整数之和的划分数。

HEOI 平衡

扩展：状态压缩动态规划

Corn Fields

给定一张 $N \times M$ 的地图，每个点是 0 或者 1，如果是 1 的话可以放置一头奶牛，相邻的两个位置上不能都放置奶牛，求总的方案数。

poj3254

铺地砖

在一个 $N \times M$ 的格子里，我们现在有两种类型的砖块， 1×2 和 2×1 ，问一共有多少种方案，可以将整个 $N \times M$ 的空间都填满。

$$M \leq 5$$

hiho1048

练习: Bugs Integrated, Inc.

现在给你一个 $N \times M$ 的矩阵, 然后矩阵有 K 个坏了的格子, 矩阵中黑格子表示坏的格子, 要你在所有好的格子中选出尽量多的 2×3 (或 3×2) 小矩阵, 问你最多能选多少个这样的小矩阵.

$$M \leq 10$$

poj1038

扩展：数位 DP

数字计数

给定两个正整数 a 和 b ，求在 $[a,b]$ 中的所有整数中，每个数码 (digit) 各出现了多少次。

bzoj1833

数字计数

给定两个正整数 a 和 b ，求在 $[a,b]$ 中的所有整数中，每个数码 (digit) 各出现了多少次。

bzoj1833

K 进制？

数字计数 2

给定两个整数 a 和 b ，求在 $[a,b]$ 中的所有整数中，11 出现的次数。

比如在 111 中 11 出现两次。

扩展：斜率优化

形如 $f[j] = \min/\max(a[i] * x[j] + b[i] * y[j])$ ($1 \leq j < i$) 的方程，可采用斜率优化的方式。

将 $g[j] = a[i] * x[j] + b[i] * y[j]$ 化成 $y[j] = a[i] * x[j]/b[i] + g[j]/b[i]$ 的形式。

对于一个 i 来说， $a[i], b[i]$ 都是定值，要最大化的是 $g[j]$ 。

也就是要最大化这条直线与 y 轴交点的纵坐标最值。

所有的直线斜率都是 $-a[i]/b[i]$ ，所以只需求出 $(x[j], y[j])$ 组成的凸包与这个斜率相切的切线。

设转化后方程为 $y[j] = k[i] * x[j] + b[i]$, 其中 $b[i]$ 是要最大化的值。

- x 或 y 单调, k 单调, 单调队列维护凸壳。
- x 或 y 单调, k 不单调, 栈维护凸壳, 查询最值在栈内二分。
- x, y, k 都不单调, 动态维护凸壳。

前两种情况都不复杂, 对于新插入的点, 只需比较队列/栈首最后两个点与新插入点即可。每个点最多入队/栈一次, 出队/栈一次, 复杂度 $O(N)$ 。

凸壳上的两点间斜率是单调的。可以二分。

要输出 N 个数字 a_1, a_2, \dots, a_n ，输出的时候可以连续连续的输出，每连续输出一串，它的费用是“这串数字和的平方加上一个常数 M ”。

$$N \leq 500000$$

要输出 N 个数字 a_1, a_2, \dots, a_n ，输出的时候可以连续连续的输出，每连续输出一串，它的费用是“这串数字和的平方加上一个常数 M ”。

$$N \leq 500000$$

$$dp[i] = dp[j] + M + (sum[i] - sum[j])^2$$

BZOJ 1010 玩具装箱 toy

P 教授要去看奥运，但是他舍不得他的玩具，于是他决定把所有的玩具运到北京。他使用自己的压缩器进行压缩，其可以将任意物品变成一堆，再放到一种特殊的一维容器中。P 教授有编号为 $1 \dots N$ 的 N 件玩具，第 i 件玩具经过压缩后变成一维长度为 C_i 。为了方便整理，P 教授要求在一个一维容器中的玩具编号是连续的。同时如果一个一维容器中有多个玩具，那么两件玩具之间要加入一个单位长度的填充物，形式地说如果将第 i 件玩具到第 j 个玩具放到一个容器中，那么容器的长度将为 $x = j - i + \sum_{k=i}^j C_k$ 。制作容器的费用与容器的长度有关，根据教授研究，如果容器长度为 x ，其制作费用为 $(x - L)^2$ 。其中 L 是一个常量。P 教授不关心容器的数目，他可以制作出任意长度的容器，甚至超过 L 。但他希望费用最小。

$$1 \leq N \leq 50000, 1 \leq L, C_i \leq 10^7$$

令 $S[i] = \sum_{1 \leq j \leq i} A[j]$

则 $W[i, j] = S[i] - S[j]$

转移方程可以写成 $f[i] = \min_{j < i} \{ f[j] + (S[i] - S[j] - L)^2 \}$

将没有 j 的项看做常量 b ，将只有 j 的项看做 y ，将 i 和 j 相乘的项中的 i 看做 k ， j 看做 x 。

注意到交叉相乘的项是 $2S[i]S[j]$ ， $k=2S[i]$ ， $x=S[j]$ 。

$A[i] \geq 1$ ，注意到 x 以及 k 都是单调的，所以采用单调队列维护凸包即询问即可。

给定长度为 N 的序列 $A[1 \dots N]$ ，把序列分成若干段，某一段的战斗
力为 $x = \text{sigma}(A[i])$ 。修正后的战斗力为 $x' = ax^2 + bx + c$ 。

a, b, c 为给定常数，求修正后的战斗力之和的最大值。

$N \leq 100w, -5 \leq a \leq -1, |b| \leq 10^7, |c| \leq 10^7, 1 \leq A_i \leq 100$

令 $S[i]=A[1]+\dots+A[i]$

$$f[i] = f[j] + a * (S[i] - S[j])^2 + b * (S[i] - S[j]) + c$$

排列 perm

给一个数字串 s 和正整数 d , 统计 s 有多少种不同的排列能被 d 整除 (可以有前导 0)。例如 123434 有 90 种排列能被 2 整除, 其中末位为 2 的有 30 种, 末位为 4 的有 60 种。

s 的长度不超过 10, $1 \leq d \leq 1000$, $1 \leq T \leq 15$

bzoj1072

Questions?

谢谢大家！

感谢石家庄二中的培养。

Email: me@zrt.io

QQ: 401794301

Telegram: @Ruotian

<https://zrt.io>



L^AT_EX