DP 中的优化

V!oleT

2019 年 7 月 3 日

Outline

凸包

Graham 扫描法

极角序 (atan2)or 水平序。

对所有点排序，用栈维护凸包，依次将点加入凸包中，用叉积判断方向（$p \times q$ 如果小于零则说明 p 在 q 的逆时针方向）。

极角序：这么做足以求出凸包。

水平序：只能求出下凸壳，如果要求上凸壳还需要反着再扫一遍。

凸包

动态凸包

理性愉悦。

一般推荐极角序的动态凸包。水平序的动态凸包需要同时维护上下两个凸壳。感兴趣者自行尝试。

大概做法是以极角序为键值用平衡树维护凸包上的点，每次插入的时候找到插入点的前驱后继，用叉积判断是否在内部，如果不在就插入，插入之后不断的判断插入后前驱是否在凸包内和后继是否在凸包内，并且不断的删除直至不能删除为止。因为只需要支持插入，删除，求前驱，求后继，所以直接用 set 就可以维护了。

凸包

细节包括但不限于

- 一开始取的基准点必须要在凸包内部，因为只支持插入所以凸包可能变大，所以找一开始三个点的内部就可以了。
- 排序的时候极角序相同按到基准点的长度排序。
- 凸包是环状的，所以前驱和后继也是环状的，判一下就可以了。

CDQ 分治

CDQ 分治的基本思想十分简单，合理应用 CDQ 分治有降维的作用。

1. 我们要解决一系列问题，这些问题一般包含修改和查询操作，可以把这些问题排成一个序列，用一个区间 $[L, R]$ 表示。
2. 递归处理左边区间 $[L, M]$ 和右边区间 $[M+1, R]$ 的问题。
3. 合并两个子问题，同时考虑到 $[L, M]$ 内的修改对 $[M+1, R]$ 内的查询产生的影响。即，用左边的子问题帮助解决右边的子问题。

一些题目

二维偏序问题

给定 N 个有序对 (a, b)，求对于每个 (a, b)，满足 $a' < a$ 且 $b' < b$ 的有序对 (a', b') 有多少个。

一些题目

二维偏序问题

回忆一下归并排序求逆序对的过程，我们在合并两个子区间的时候，要考虑到左边区间的对右边区间的影响。即，我们每次从右边区间的有序序列中取出一个元素的时候，要把“以这个元素结尾的逆序对的个数”加上“左边区间有多少个元素比他大”。这是一个典型的 CDQ 分治的过程。

一些题目

二维偏序问题

那么对于二维偏序问题，我们在拿到所有有序对 (a, b) 的时候，先把 a 元素从小到大排序。因为 a 元素已经有序，可以忽略 a 元素带来的影响，和“求逆序对”的问题是一样的。

一些题目

三维偏序问题。$1 \leq N \leq 100,000, 1 \leq K \leq 200,000$

一些题目

维护一个 $W\times W$ 的矩阵，初始值均为 S. 每次操作可以增加某格子的权值，或询问某子矩阵的总权值. 修改操作数 $M\le 160000$, 询问数 $Q\times 10000, W\times 2000000$.

一些题目

在平面直角坐标系中，Wayne 需要你完成 n 次操作，操作只有两种：

1. 在坐标系中加入一个以 (x, y) 为圆心且过原点的圆。

2. 询问点 (x, y) 是否在所有已加入的圆的内部含圆周。

保证圆心严格在 x 轴上方（纵坐标为正），且横坐标非零。

$n \leq 500000$。

Outline

四边形不等式

对于形如 $f(i) = min\{f(j) + w[i][j]\}$ 的状态转移方程，且 $w[i][j]$ 满足这样一个凸不等式：

$$w[a][c] + w[b][d] \leq w[a][d] + w[b][c](a \leq b \leq c \leq d)$$

则 f 的转移满足决策单调性。

四边形不等式

对于满足决策单调性的状态转移方程：用 $k(x)$ 表示状态 x 的最优决策，对任意 $i \le j$, 有 $k(i) \le k(j)$。

决策单调性有两种实现方式：栈或分治。

四边形不等式

栈

据说又叫决策二分栈。

由决策单调，对于栈中的任意相邻两个决策点，我们都可以通过二分找到一个临界值 k，使得序列中在 k 之前的时候，其中一个作为决策转移到 k 之前更优，而 k 以后另一个更优。

四边形不等式

分治

二分栈有一个局限性，那就是必须能快速计算 $w[i][j]$。

既然转移过程是单调并且离线的，我们考虑分治。假设当前我们求解一段区间 $[l,r]$，而所有 $f(l),f(l+1),\cdots,f(r)$ 的最优决策点在 $[L,R]$ 之间。对于 $[l,r]$ 的中点 mid，我们可以暴力扫一遍 $[L,R]$，找到它的最优决策点 k。因为决策单调，所以 $f(l),\cdots,f(mid-1)$ 的决策落在 $[L,k]$ 上，而 $f(mid+1),\cdots,f(r)$ 的决策落在 $[k,R]$ 上，变成了两个规模减半的小问题。

一些题目

诗人小 G

给出长度为 n 的数组 A，你需要把这个数组分成若干段，设第 i 段的和为 sum_i，最小化 $\sum(sum_i - L)^k$。

$n \leq 10^5$

一些题目

诗人小 G

由决策单调性。每一个位置作为最优决策点的一定是一个连续区间。

用栈维护每个决策会更新的区间。新加入决策时二分它的区间。

一些题目

已知一个长度为 n 的序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。

对于每个 $1 \le i \le n$，找到最小的非负整数 p_i 满足对于任意的 j，$a_j \le a_i + p_i - \sqrt{|i-j|}$

一些题目

有绝对值怎么办？拆开讨论两边就行。

$$p_i = \max_{j=1}^{i}\{a_j + \sqrt{i-j}\} - a_i$$

显然满足决策单调性。

Outline

斜率优化

对于形如：

$$f[i] = min\{A[i] \times X[j] + B[i] \times Y[j] (j < i)\}$$

这样的状态转移方程，进行变形：

$$Y[j] = -\frac{A[i]}{B[i]} \times X[j] + \frac{f[i]}{B[i]}$$

问题转化为求一个点 $(X[j], Y[j])$，过该点作斜率为 $-\frac{A[i]}{B[i]}$ 的直线，使得纵截距最小。

维护一个凸包???

一些题目

HNOI2008 玩具装箱

有 n 个玩具，要将它们分为若干组进行打包，每个玩具有一个长度 $len[x]$。每一组必须是连续的一组玩具。如果将第 x 到第 y 个玩具打包到一组，所需的代价等于 $(y-x+\sum len[k]-L)^2, x \le K \le y$。问将所有玩具打包的最小代价是多少。注意到每组玩具个数并没有限制。

$n \le 5 \times 10^4$。

一些题目

HNOI2008 玩具装箱

设 $t[i] = sum[i] + i$，$g[i] = t[i] + 1 + L$，则变形得到：

$$f[j] + g(j)^2 = f[i] - t(i)^2 + 2t(i)g(j)$$

将 $(g(j)\ f[j] + g(j)^2)$ 看成平面上的一个点。

我们发现，转移过程中斜率 $2t(i)$ 是单调的。

单调队列优化!

一些题目

机器上有 N 个需要处理的任务，它们构成了一个序列。这些任务被标号为 1 到 N，因此序列的排列为 $1,2,3...N$。这 N 个任务被分成若干批，每批包含相邻的若干任务。从时刻 0 开始，这些任务被分批加工，第 i 个任务单独完成所需的时间是 Ti。在每批任务开始前，机器需要启动时间 S，而完成这批任务所需的时间是各个任务需要时间的总和。注意，同一批任务将在同一时刻完成。每个任务的费用是它的完成时刻乘以一个费用系数 Fi。请确定一个分组方案，使得总费用最小。

$0 < N \leq 100000, 0 \leq S \leq 2^8, -2^8 \leq Ti \leq 2^8, 0 \leq Fi \leq 2^8$

一些题目

$sum - sy[j]$ 单调，可以用栈维护凸包。

但是斜率 $sx[i]$ 不一定单调，就不能用单调队列优化了。

二分斜率卡凸包?

一些题目

https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1492

一些题目

首先分析一下题目，对于任意一天，一定是贪心地买入所有货币或者卖出所有货币是最优的，因为有便宜我们就要尽量去占，有亏损就一点也不去碰。

$$y[j] = \frac{f[i]}{b[i]} - x[j] \times \frac{a[i]}{b[i]}$$

问题来了，$\frac{-a[i]}{b[i]}$ 和 $(x[j], y[j])$ 都不是单调的。

平衡树维护凸包？

一些题目

写一棵平衡树显然是不划算的。

动态变静态？CDQ 分治？

斜率优化

简单小结

- 斜率单调移指针
- 斜率不单调二分
- x 坐标单调开单调队列
- x 坐标不单调开平衡树或 cdq 分治