

数据结构

北京大学 洪华敦

线段树基本操作

- 1. 单点修改, 区间询问
- 2. 区间修改, 单点询问
- 3. 区间修改, 区间询问

线段树例题1

- 给定序列 $a[1\dots n]$ ， Q 次询问，每次询问 l, r, k 表示从 $a[l\dots r]$ 中选出 k 个互不相交的子区间，最大的和是多少
- ——> 区间取反，区间求最大子段和
- $n, Q \leq 10^5$ ， $k \leq 20$

线段树例题2

- 给定序列 $a[1\dots n]$ ，支持单点修改，每次求区间单调栈大小
- $n, Q \leq 100000$

线段树例题3

- 有一个序列 $a[1\dots n]$ ，每个 $a[i]$ 是 (c,x,y) ，表示颜色和坐标
- 现在支持单点修改以及区间询问：颜色不同的曼哈顿距离最大的一对点的距离
- $N, Q \leq 100000$

线段树例题4

- 给定 $a[1\dots n]$ 要求支持：
 1. 区间加
 2. 区间变成 $\max(a[i]+v, 0)$, v 可以是正数也可以是负数
 3. 求单点当前值
 4. 求单点历史最大值
 5. 区间覆盖
- $n, Q \leq 100000$

线段树例题5

- 给定序列 $a[1\dots n]$ ，要求支持区间和以及让 $a[L\dots R]$ 对 x 取 \min
- $n, Q \leq 100000$

线段树例题6

- 给定 $a[1\dots n]$ ，要求支持单点修改，以及区间询问 $a[L\dots R]$ 不能组成的最小的数
- $n, Q \leq 200000$

线段树例题7

- 给定序列 $a[1\dots n]$ 以及 k, d ，求一个最长的区间，使得最多加入 k 个数后sort后是一个公差为 d 的等差数列
- $n \leq 200000$

线段树例题8

- 给定序列 $a[1\dots n]$, Q 次询问 $a[l\dots r]$ 中相差最小的两个数的差
- $n, Q \leq 200000$

线段树例题9

- 给定 n ，定义 $\text{work}(x,y)$ 等于在 $[1,n]$ 的线段树上对 $[x,y]$ 进行区间询问后访问到的点的个数
- 给定 L,R ，求 $\text{work}(i, j)$ 的和，其中 $L \leq i \leq j \leq R$
- $n, Q \leq 100000$

线段树例题10

- 有 Q 次操作，每次给定 L, R, K, B ：对于 $L \leq i \leq R$ 令 $a[i] = \max(a[i], K * i + B)$
- $n, Q \leq 100000$

线段树例题11

- 定义 Min-Max 树是一棵二叉树，每个叶子节点有一个权值
- 现在定义每个非叶子的权值为：有 p 的概率是两个儿子的权值的 \max ，有 $1-p$ 的概率是两个儿子的权值的 \min
- 对于所有可能的 i ，输出根节点权值为 i 的概率
- $n \leq 500000$

线段树例题12

- 给一棵 n 个点的树，点有颜色，每次询问点 x 子树内距离 x 不超过 d 的点有多少种不同的颜色
- $n \leq 100000$

线段树例题13

- 给定数组 $a[1\dots n]$ ，一开始都为1，要求支持以下3种操作：
- 1. 给定 L, R ，对于 $L \leq i \leq R$ ，令 $a[i] = \text{phi}(a[i])$
- 2. 给定 L, R, x ，对于 $L \leq i \leq R$ ，令 $a[i] = x$
- 3. 求区间和

线段树例题14

- 给定 n 个区间，以及每个点的价值 $val[1...M]$ ，对于每个区间可以选择里面的一个点 i ，获得价值 $val[i]$ ，每个点最多只能被选一次，求最大价值
- $n, M \leq 5000$

线段树例题15

- 有 n 个点，需要支持两种操作：
- 1. 添加一条边，保证加完后还是森林
- 2. 给定 (u,v) ，保证 (u,v) 是一条存在的边，求有多少点对 (x,y) 经过了边 (u,v)

Treap介绍

- $\text{treap} = \text{tree} + \text{heap}$, 利用 heap 的性质来维护树高的性质
- 当合并两棵 treap S, T 时, 可以根据 $\text{size}[S]$ 和 $\text{size}[T]$ 来随机决定谁做父亲

Treap合并

```
Treap *Merge(Treap *A, Treap *B){//合并操作
    if(!A) return B;
    if(!B) return A;
    if(A->fix < B->fix){
        A->r = Merge(A->r, B);
        A->update();
        return A;
    } else{
        B->l = Merge(A, B->l);
        B->update();
        return B;
    }
}
```

Treap分裂

```
Droot Split(Treap *x, int k){//拆分操作
    if(!x) return Droot(NULL, NULL);
    Droot y;
    if(Size(x->l) >= k){
        y = Split(x->l, k);
        x->l = y.second;
        x->update();
        y.second = x;
    } else {
        y = Split(x->r, k - Size(x->l) - 1);
        x->r = y.first;
        x->update();
        y.first = x;
    }
    return y;
}
```

Treap其他操作

- 插入：先找到是第几大，然后先分裂再合并，或者直接讨论出一个插入的算法
- 删除：分裂成三部分，然后再合并
- 寻找第 k 大，与 split 类似
- 区间操作：先分裂成三部分把区间提取出来，然后操作
- 可持久化：因为treap没有父亲，所以很简单就能可持久化

平衡树例题1

- 给定一张拓扑图，每条边上都有一个数，且这些数互不相同
- 现在有 Q 次询问，每次给定 x, k ，求从 x 出发的字典序第 k 小的路径的长度
- $n, Q \leq 10^5$, $k \leq 10^9$

平衡树例题2

- 给定一个字符串数组 $s[1\dots n]$ ，要求支持以下操作：
- 1. 给定 L, R, T ，对于 $L \leq i \leq R$ ， $s[i] = T + s[i]$
- 2. 给定 L, R ，求 $\text{lcp}(S[L\dots R])$ 的长度
- $n, Q \leq 50000$ ， $\text{sum}(|T|) \leq 100000$

平衡树例题3

- 有 n 个区间 $[l_i, r_i]$ ，求一个长为 n 的序列，满足 $l_i \leq x_i \leq r_i$ ，且最长上升子序列长度最长

树例题1

- 链加，子树询问，链询问

树例题2

- 给定一棵树，有 Q 次操作：
- 1. 给定 v, d ，等概率随机一个点 r ，对于所有满足路径 (r, u) 包含 v 的点 u ，令 $a[u] += d$
- 2. 询问 $a[u]$ 的期望值
- $n, Q \leq 200000$

树例题3

- 给定一棵带点权的有根树，要求支持单点修改以及求以 x 为根的子树的最大连通子块和

树例题4

- 给定一棵 n 个点的带点权的树，要求支持以下操作：
- 1. 求一条链上的点权的 gcd
- 2. 链加
- $n, Q \leq 50000$

长链剖分

- 每次重儿子选最深的那个
- 应用： $O(n \log n + Q)$ 求出点 x 的第 k 个祖先

动态最小生成树

- 每次加边，要求维护最小生成树
- 对于加的边，强行加进去后会形成一个环，那么我们肯定删掉环上最大的边
- 可以用 LCT 维护

LCT 例题1

- 给定一棵 n 个点的有根树，每个点一开始都有一个互不相同的权值，要求支持以下操作：
 1. 把 i 到根路径上的所有节点的权值变成一种全新的权值
 2. 询问 i 子树中所有节点到根路径上不同权值个数的平均值
- $n, Q \leq 200000$

杂题1

- 给定一棵 n 个点的树，每个点有颜色，要求支持修改单点颜色和询问某个颜色的虚树大小
- $n, Q \leq 100000$

杂题2

- 给定一个排列 $p[1\dots n]$ ，每次操作可以交换相邻两个数，求最少操作几次可以让这个排列变成山峰型排列
- $n \leq 100000$

杂题3

- 给定一堆点，你需要用一些不相交的底边在 x 轴上的矩形覆盖它们
- 一个 $w \times h$ 的矩形的代价是 $(w+k)*h$ ，求覆盖所有点的最小代价
- $n \leq 10^5$