

简单的点分治

V!oleT

2019 年 6 月 19 日

点分治

- 点分治是用来解决树上路径问题的一种方法。
- 在解决树上路径问题时，我们可以选取一点为根，将树转化为有根树，然后考虑经过根的所有路径。统计完这些路径的答案后，将根节点标记为删除，对剩下的若干棵树进行同样的操作。
- 这就是点分治的主要思路了。

先来一道题

Description

给定一棵 n 个结点的带权树，求树上是否存在长度为 k 的路径。

$n \leq 5 \times 10^5, k \leq 10^9$

- 按照上面的思路不难得出算法。
- 然而复杂度最坏情况下达到 $O(n^2)$ 。
- 优化？
- 可以证明，我们每次选择无根树的重心作为根，这样的复杂度就是 $O(n \log n)$ 了。

Theorem

以重心为根，任意一棵子树的大小都不超过整棵树大小的一半。

Proof.

从树上任取一点，以它为根，如果最大的一棵子树大小不超过整棵树大小的一半，则它为重心。否则选择最大子树的根节点，继续这个过程，最终会得到一个点，它满足重心的性质。 □

如果在点分治时每次使用重心为根，则最大的子树大小不会超过原树的二分之一，若每个节点需要常数时间，最坏情况下根据主定理有

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) = O(n \log n)$$

一些题目

BZOJ 1468

给定一棵带权树。问有多少对点满足它们间的距离小于等于 k 。

一些题目

BZOJ 2152

给定一棵带权树，求树上随机选择两个有序点（可以相同），两点距离为 3 的倍数的概率。

一些题目

BZOJ 2599

给一棵带权树。求一条简单路径，权值和等于 K ，且边的数量最小。

一些题目

BZOJ 3697

采药人的药田是一个树状结构，每条路径上都种植着同种药材。采药人每种药材进行了分类。大致分为两类，一种是阴性的，一种是阳性的。

采药人每天都要进行采药活动。他走的一定是两种药材数目相等的路径。他希望他选出的路径中有一个可以作为休息站的节点（不包括起点和终点），满足起点到休息站和休息站到终点的路径也是两种药材数目相等的。他想知道他一共可以选择多少种不同的路径。

一些题目

BZOJ 1758

给定一棵边上带权的树，求一个平均价值最大的简单路径，包含 $[L, R]$ 条边。路径的平均价值定义为路径的带权长度与不带权长度的比值。

一些题目

BZOJ 4016

给一个包含 n 个点， m 条边的无向连通图。从顶点 1 出发，往其余所有点分别走一次并返回。

往某一个点走时，选择总长度最短的路径走。若有多条长度最短的路径，则选择经过的顶点序列字典序最小的那条路径。

可以知道，经过的边会构成一棵最短路径树。请问，在这棵最短路径树上，最长的包含 K 个点的简单路径长度为多长？长度为该最长长度的不同路径有多少条？

这里的简单路径是指：对于一个点最多只经过一次的路径。不同路径是指路径两端端点至少有一个不同，点 A 到点 B 的路径和点 B 到点 A 视为同一条路径。

一些题目

BZOJ 3648

求基环树上节点数不小于 K 的路径数。

一些题目

BZOJ 4182

树上 n 个节点每个节点都有一种物品，每种物品有其价值，价格，数量，只能买一个连通块中的物品，求 m 元能买到物品价值的最大值。

$n \leq 500, \leq 4000, T \leq 5, c_i \leq m$

一些题目

BZOJ 4598

给出 n 个结点的树结构 T ，其中每一个结点上有一个字符，这里我们所说的字符只考虑大写字母 A 到 Z ，再给出长度为 m 的模式串 s ，其中每一位仍然是 A 到 Z 的大写字母。Alice 希望知道，有多少对结点 $\langle u, v \rangle$ 满足 T 上从 u 到 v 的最短路径形成的字符串可以由模式串 S 重复若干次得到？这里结点对 $\langle u, v \rangle$ 是有序的，也就是说 $\langle u, v \rangle$ 和 $\langle v, u \rangle$ 需要被区分。所谓模式串的重复，是将若干个模式串 S 依次相接（不能重叠）。例如当 $S = PLUS$ 的时候，重复两次会得到 $PLUSPLUS$ ，重复三次会得到 $PLUSPLUSPLUS$ ，同时要注意，重复必须是整数次的。例如当 $S = XYXY$ 时，因为必须重复整数次，所以 $XYXYXY$ 不能看作是 S 重复若干次得到的。