אוניברסיטת
אריאל
בשומרון

מבני נתונים

תרגול 4 – עצים

צבי מינץ – zvimints@gmail.com

אוניברסיטת
אריאל
בשומרון

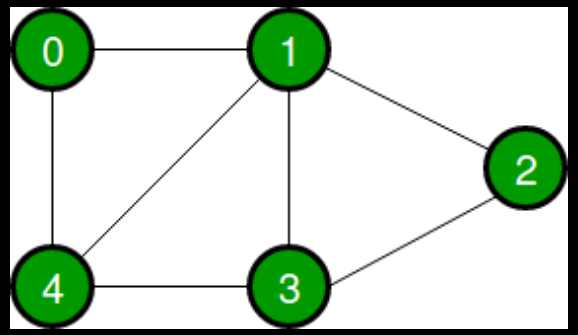
היום

- עצים
- עצים בינאריים
- עץ חיפוש בינארי
- תכונות
- מימוש
- פתרון תרגילים

גרף

גרף Graph (G) – אוסף של כל הקודקודים וצלעות המחברים זוגות של קודקודים

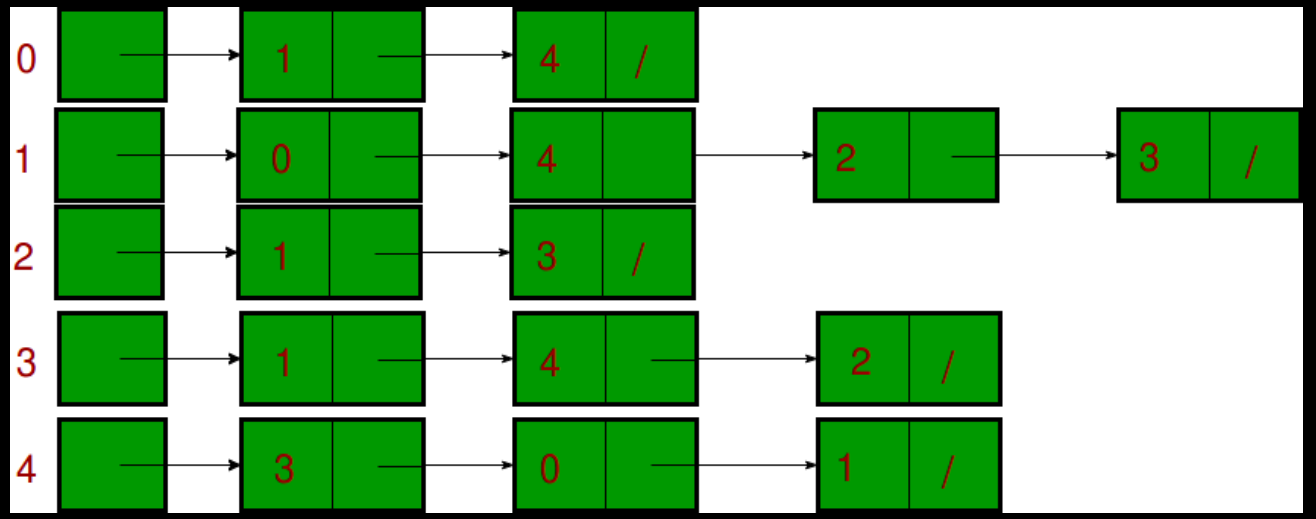
מיוצג במחשב בד"כ ע"י **Adjacency** Matrix או **Adjacency** List



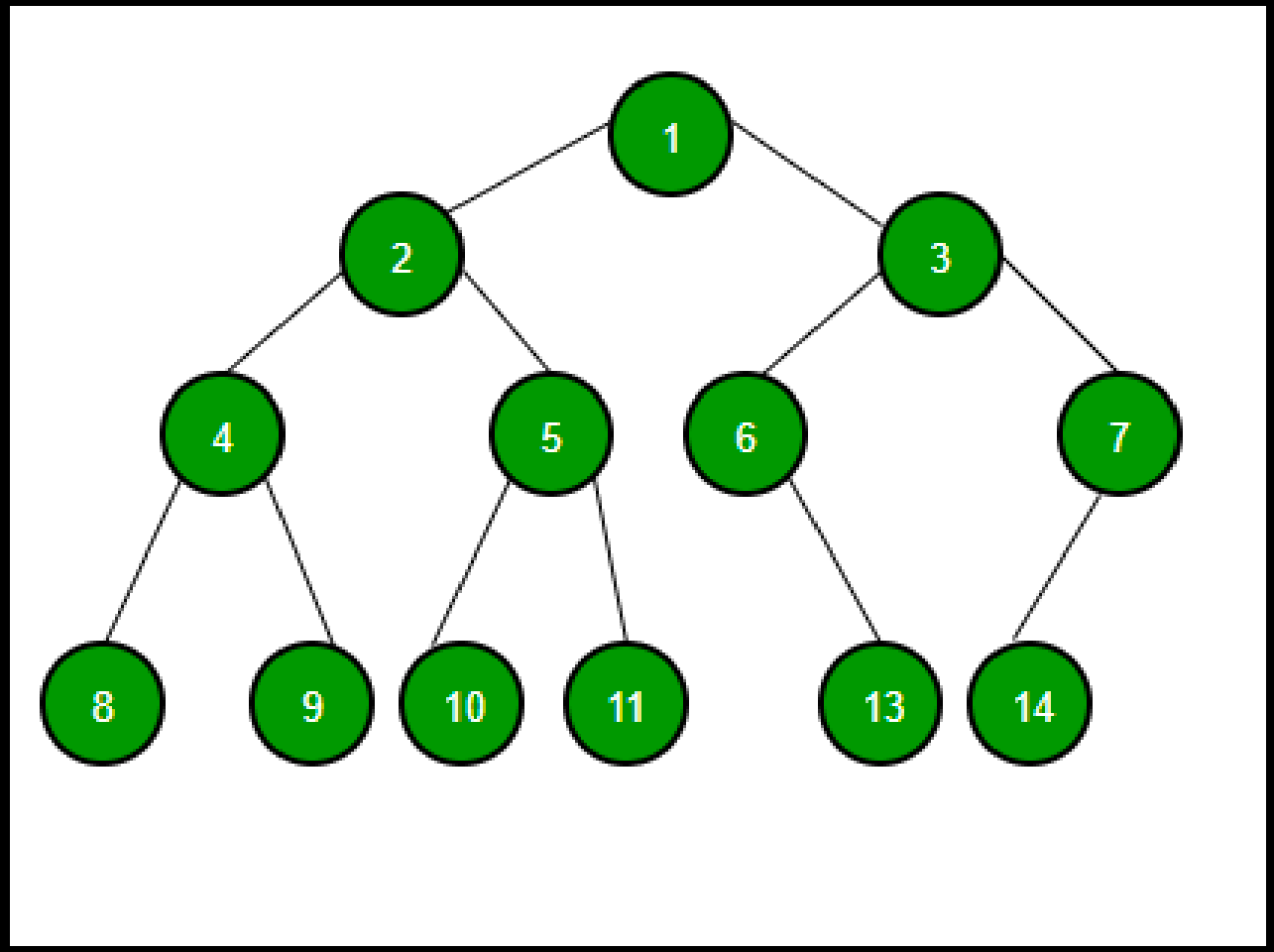
Adjacency Matrix

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	1
4	1	1	0	1	0

Adjacency List



עץ

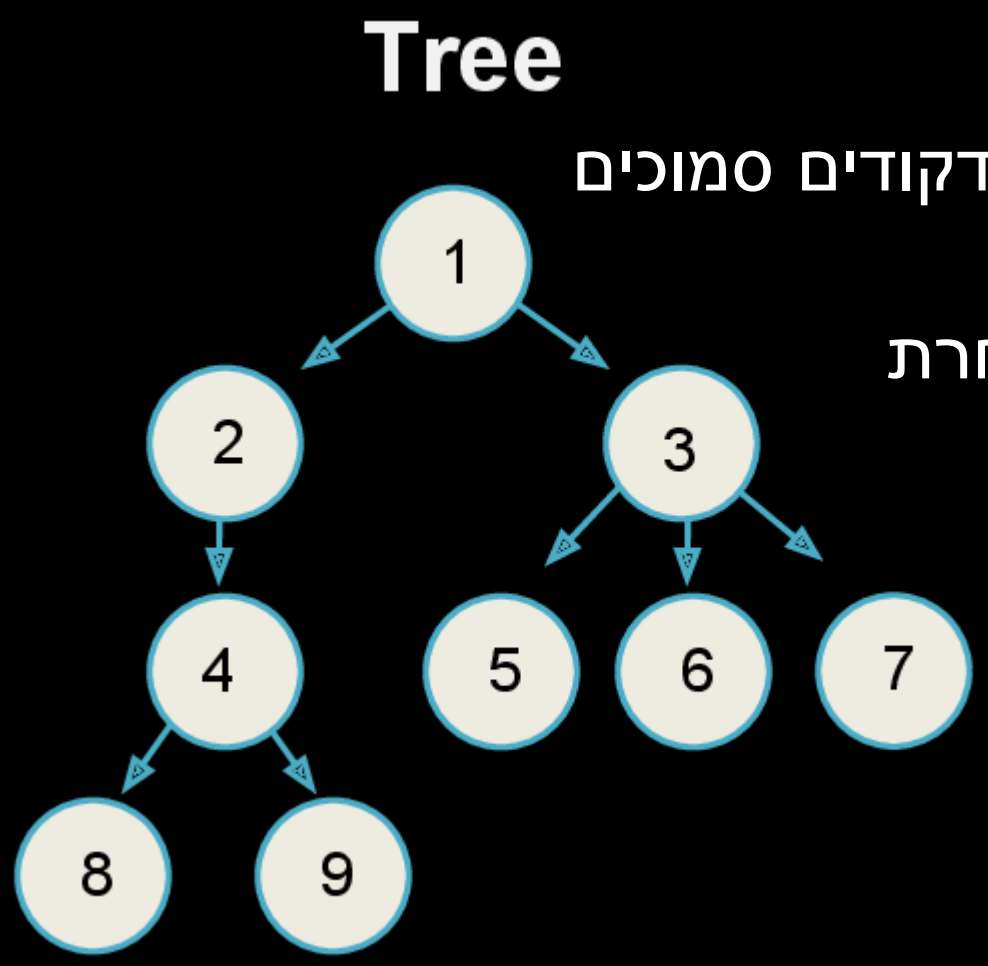


עץ Tree (T) – עץ הוא גרף **חסר מעגלים**

יהי G גרף עם n קודקודים, אז G הוא עץ אם קיימים שניים מבין התנאים הבאים:

1. G קשיר
2. G חסר מעגלים
3. G מכיל $n-1$ צלעות

הגדרות



צומת (Node) – איבר בתוך העץ

מסלול (Path) – סדרת קודקוד בגרף בה כל שני קודקודים סמוכים מחוברים ע"י צלע

אב (Parent) – צומת שיוצאת ממנה צלע לצומת אחרת

בן (Child) – צומת שיש לו אב

- Left Child
- Right Child

שורש (Root) – צומת יחיד בעץ שאין לו אב

עלה (Leaf) – צומת שאין לו בנים

הגדרות

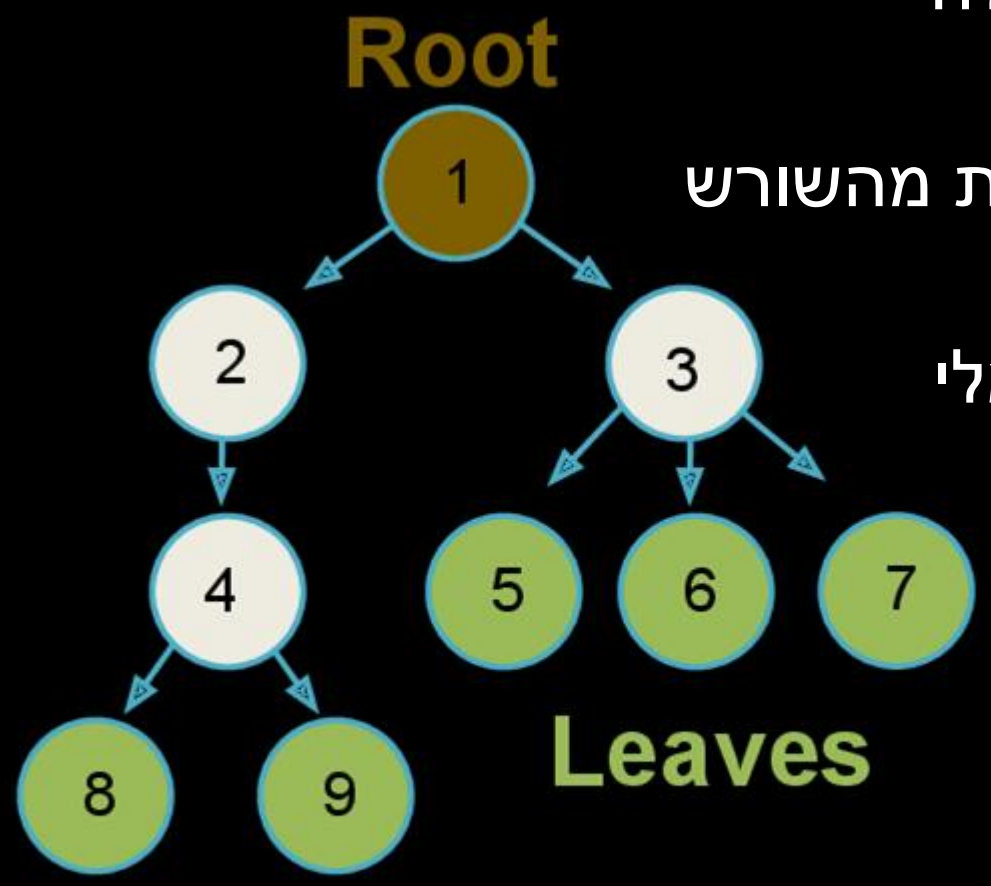
צומת פנימי (Internal Node) – צומת אשר אינו עלה

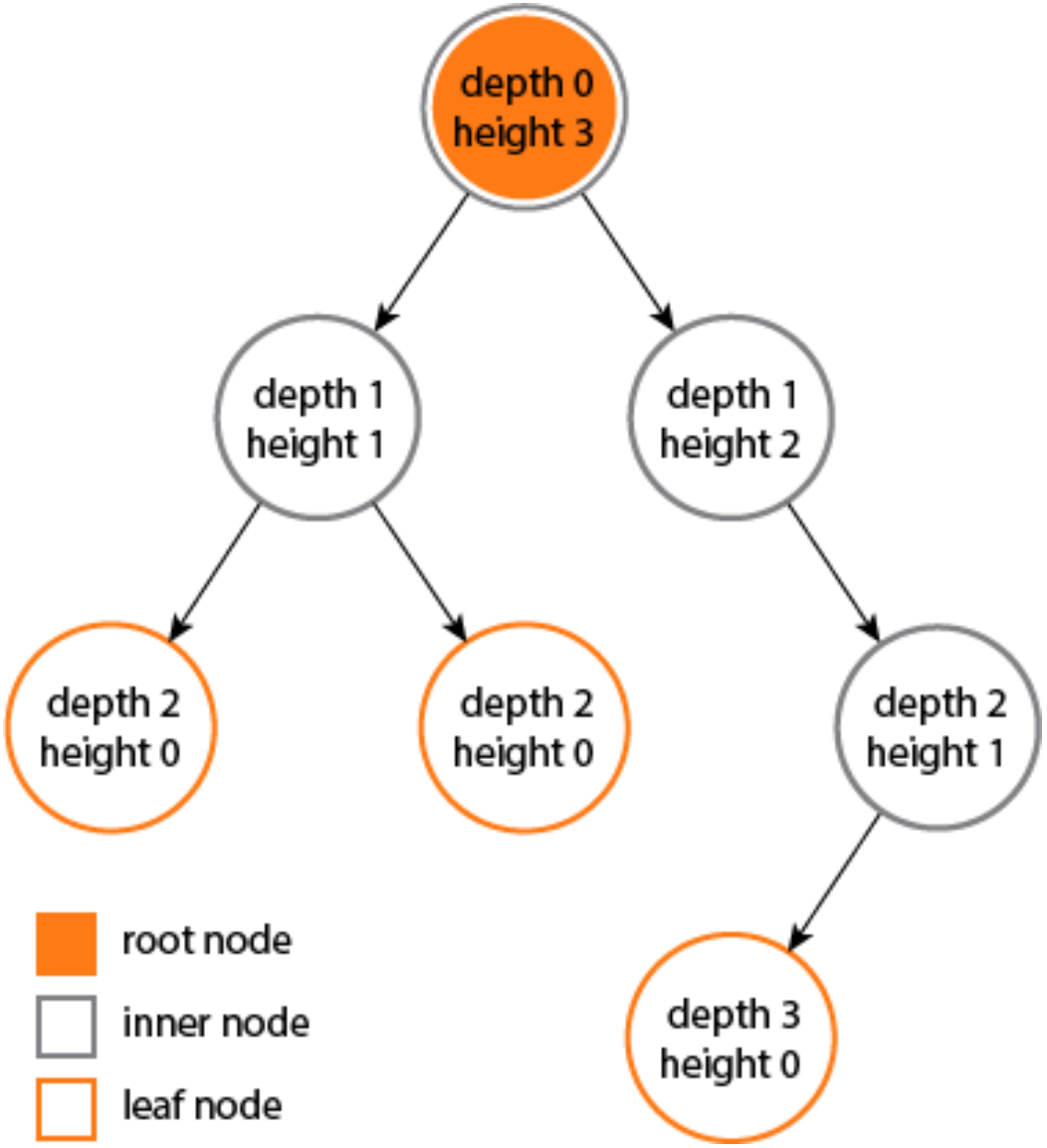
עומק צומת (Depth) – מרחק (מספר צלעות) הצומת מהשורש

גובה (Height) – המרחק (מספר צלעות) המקסימאלי של צומת מעלה (בתת עץ שלו)

גובה העץ (Tree Height) –המרחק המקסימאלי מהשורש עד עלה (נסמן בד"כ ע"י h)

אחים/שכנים (Siblings) – צומת שיש להם אותו אב




depth 0
height 3
depth 1
height 1
depth 1
height 2
depth 2
height 0
depth 2
height 0
depth 2
height 1
depth 3
height 0
root node
inner node
leaf node

שימוש בעצים

משתמשים בעצים על מנת לאחסן מידע **היררכי**.

מע"ה משתמשת בעצים בשביל תיקיות Files and Folders

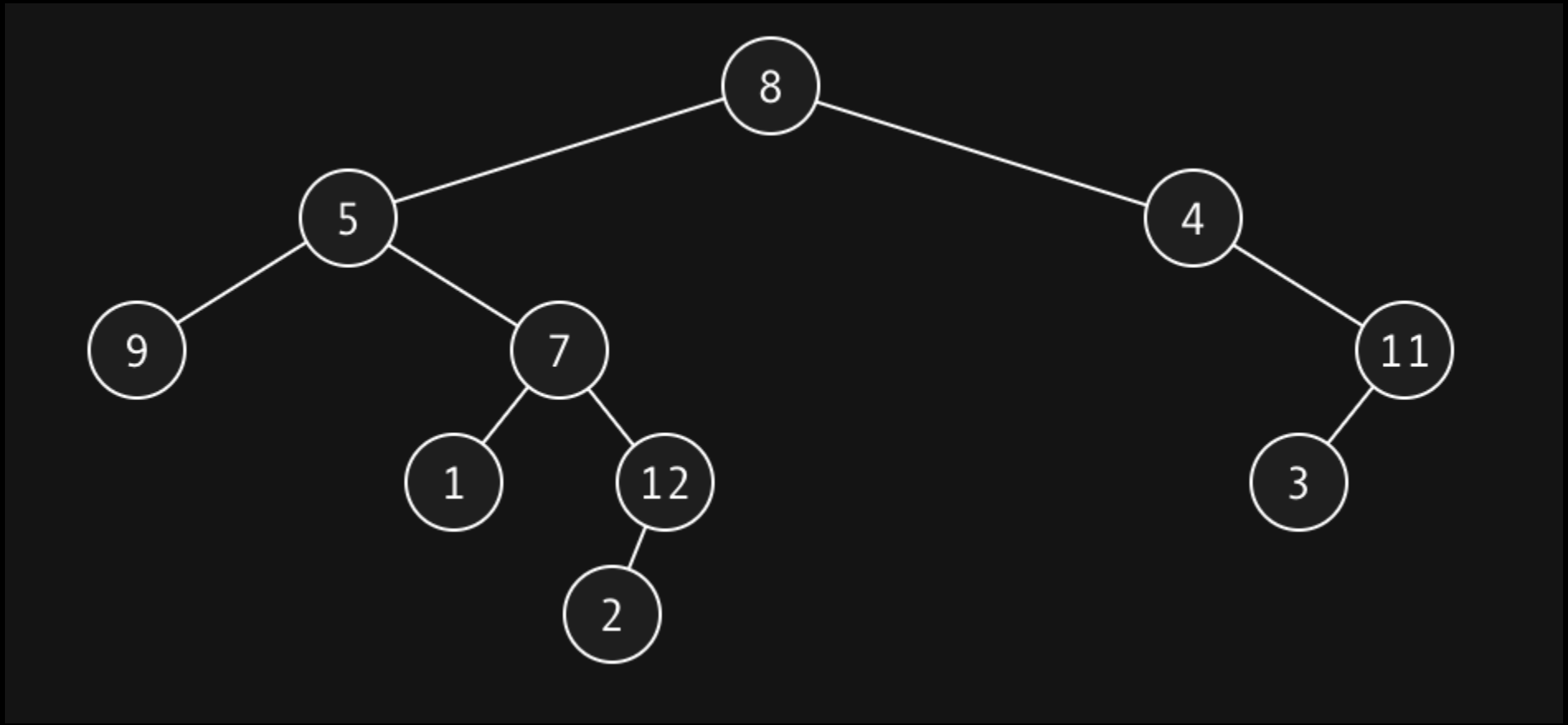
מבנה נתונים **דינאמי** – קל להוסיף ולמחוק קודקודים (מידע)

בעץ בעל **סדר** קל לבצע חיפוש, מיון ואלגורתמי סיור בעץ (Tree traversal algorithms)

...

עץ בינארי

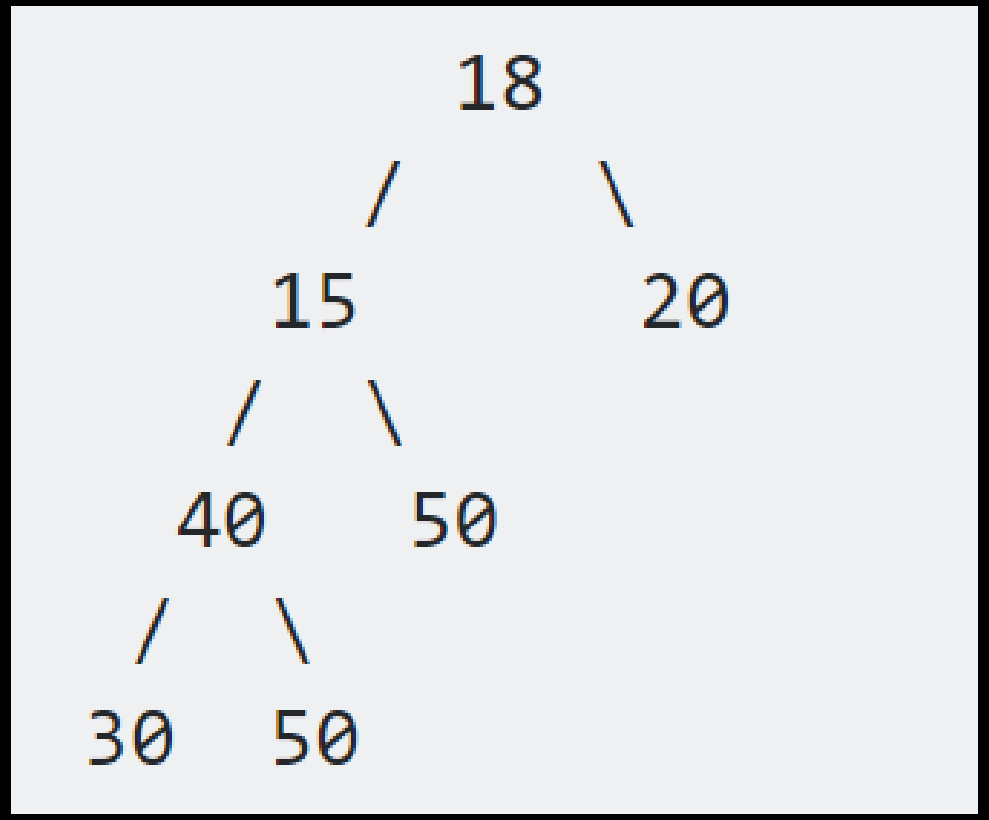
עץ בינארי (Binary Tree) – עץ אשר לכל קודקוד יש לכל **<u>היותר</u>** 2 בנים



עץ בינארי מלא

עץ בינארי מלא (Full Binary Tree)

עץ בינארי הוא מלא אם כל לכל קודקוד יש 0 או 2 ילדים



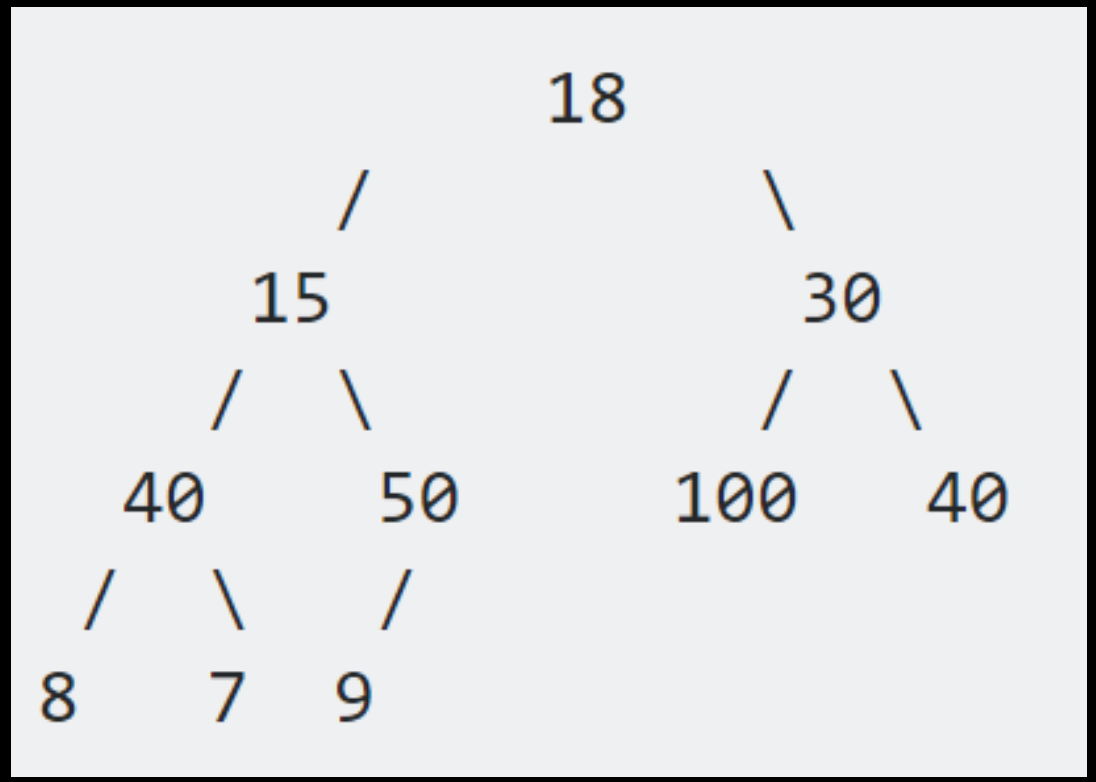
https://cs.stackexchange.com/questions/32397/is-there-a-difference-between-perfect-full-and-complete-tree

עץ בינארי שלם

עץ בינארי שלם (Complete Binary Tree)

עץ בינארי הוא עץ בינארי שלם אם כל הרמות מלאים בעלים חוץ מהרמה האחרונה

כאשר כל העלים ברמה האחרונה הם מצד שמאל ככל היותר

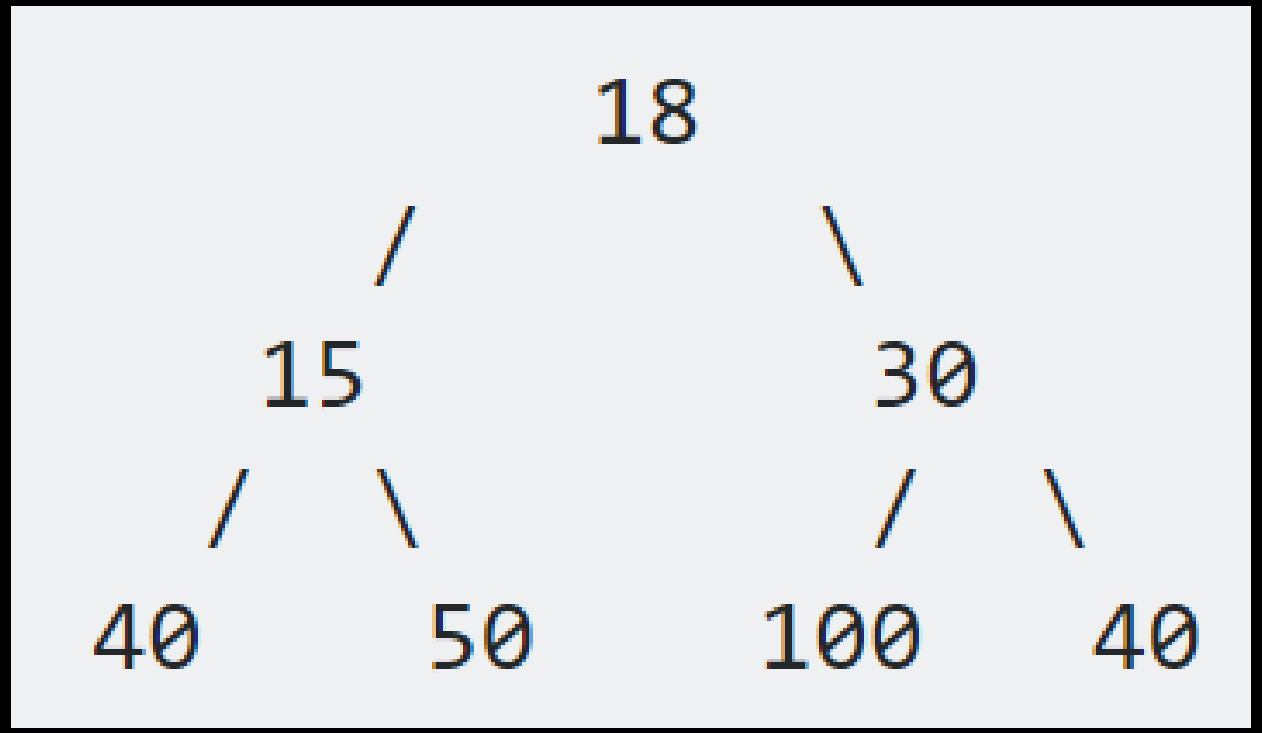


https://cs.stackexchange.com/questions/32397/is-there-a-difference-between-perfect-full-and-complete-tree

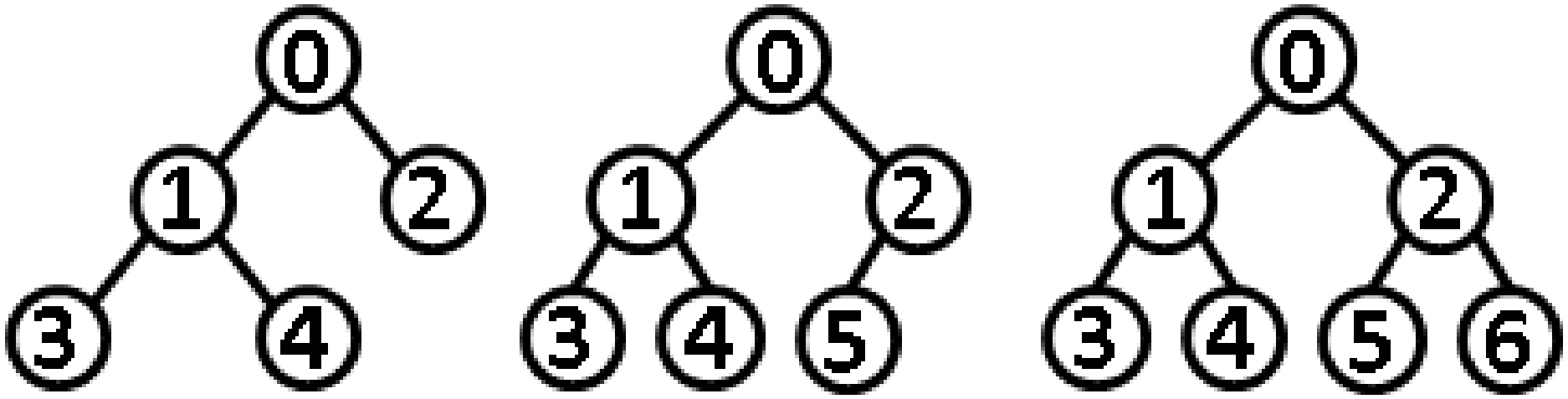
עץ בינארי מושלם

עץ בינארי מושלם (Perfect Binary Tree)

עץ בינארי מושלם הוא עץ בינארי כך שכל העלים נמצאים באותו מרחק מהשורש וכל הקודקודים הפנמיים בעלי 2 ילדים



https://cs.stackexchange.com/questions/32397/is-there-a-difference-between-perfect-full-and-complete-tree



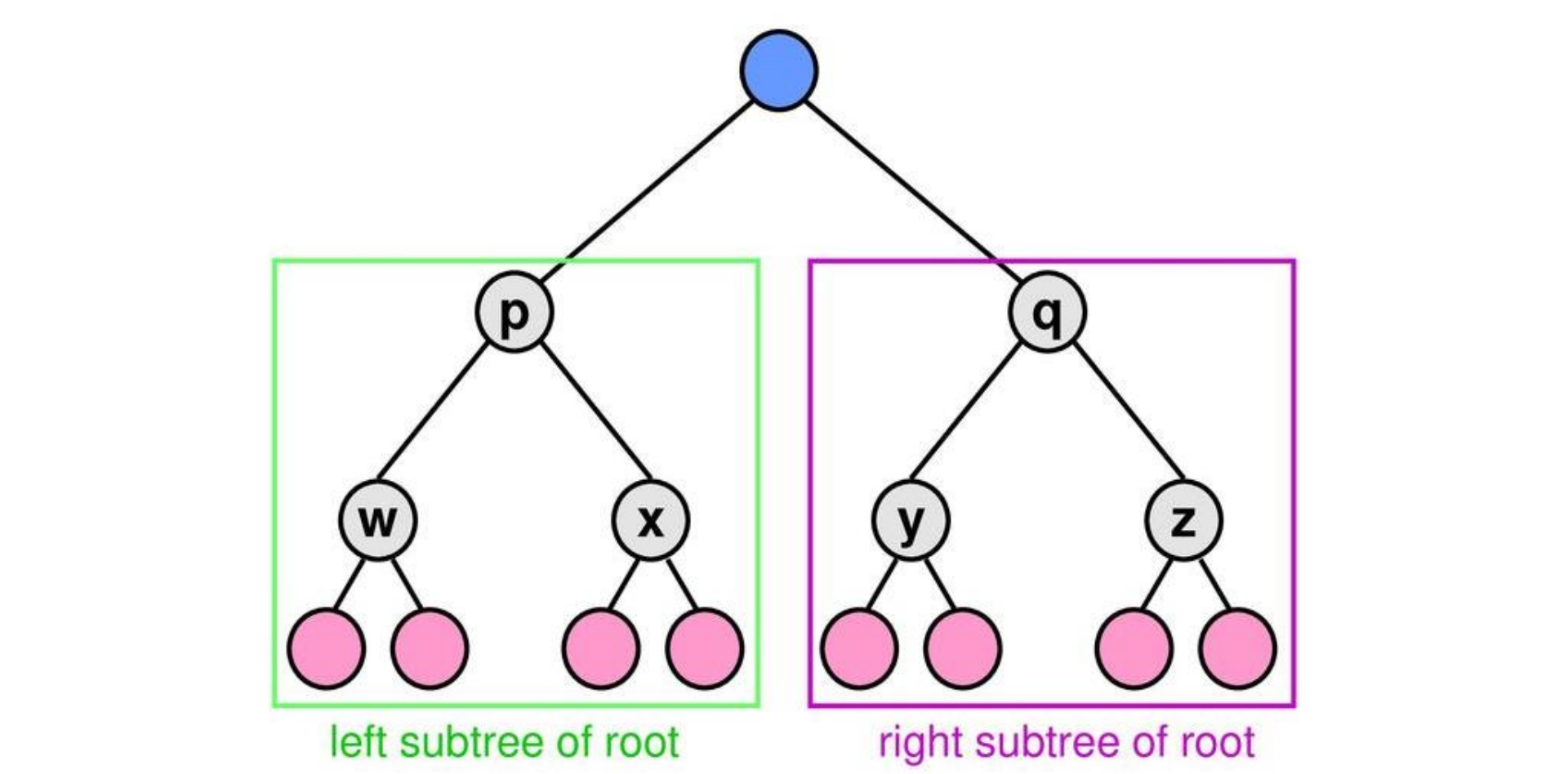
full binary tree

complete binary tree

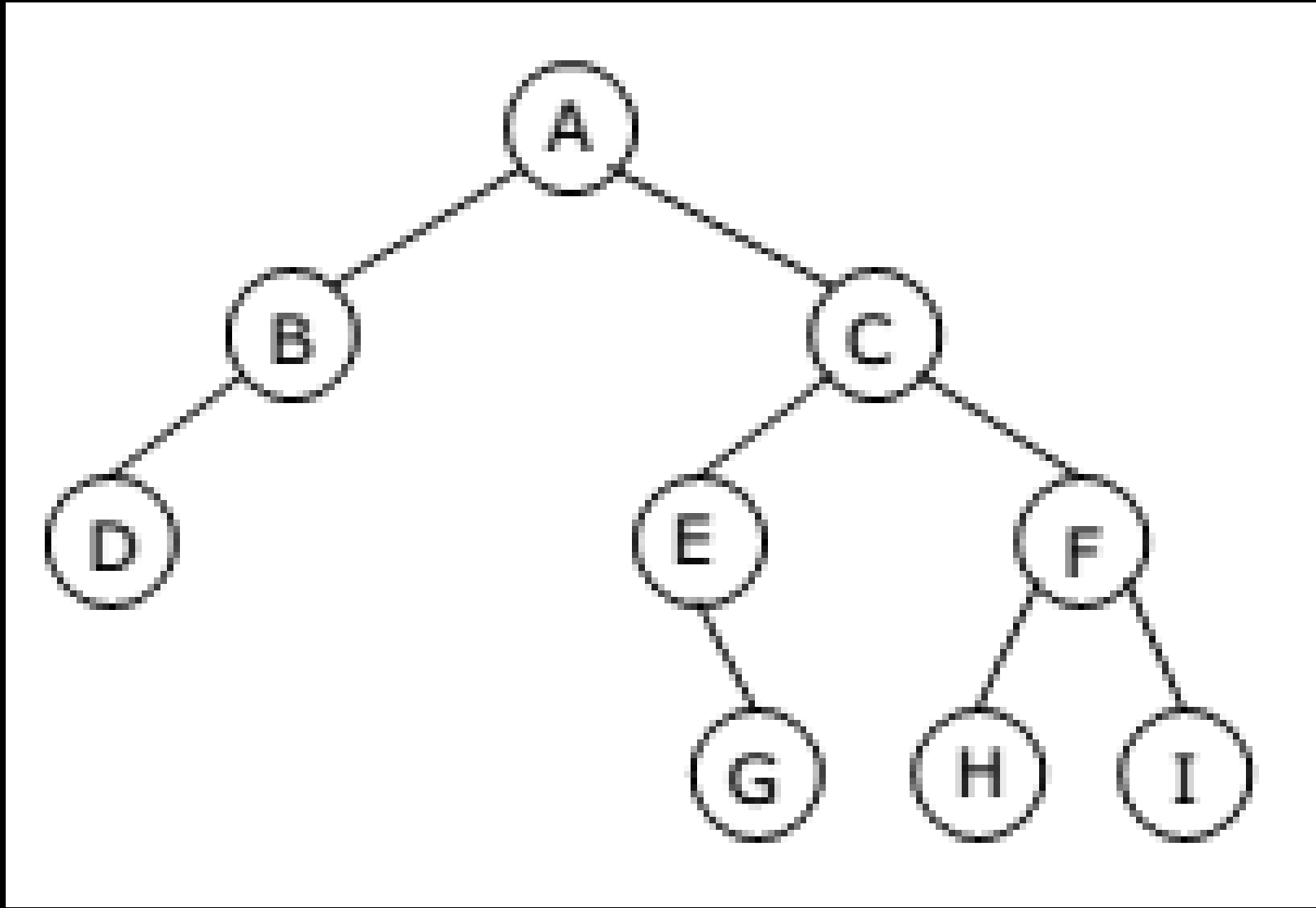
perfect binary tree

עץ בינארי

כל עץ ניתן לפרוק **לשורש**, תת-עץ **שמאלי** ותת-עץ **ימני**



שיטות מעבר על עץ בינארי tree traversal



שיטות מעבר על עץ בינארי tree traversal

- Preorder

עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את ערכו, לאחר מכן לעבור לבנו השמאלי ולבסוף לבן הימני.

preorder tree traversal

```
public void PreOrder() // (V,L,R)
{
    PreOrder(root);
}
```

```
public void PreOrder(Node current) {
    if(current != null)
    {
        System.out.print(current.data + " " );
        PreOrder(current.left);
        PreOrder(current.right);
    }
}
```

שיטות מעבר על עץ בינארי tree traversal

- Preorder

עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את ערכו, לאחר מכן לעבור לבנו השמאלי ולבסוף לבן הימני.

- Inorder

עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את בן השמאלי, לאחר מכן לעבור לערכו שלו ואז הבן הימני

Inorder tree traversal

```
public void InOrder() // (L,V,R)
{
    InOrder(root);
}
```

```
public void InOrder(Node current) {
    if(current != null)
    {
        InOrder(current.left);
        System.out.print(current.data + " " );
        InOrder(current.right);
    }
}
```

שיטות מעבר על עץ בינארי tree traversal

- Preorder

עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את ערכו, לאחר מכן לעבור לבנו השמאלי ולבסוף לבן הימני.

- Inorder

עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את בן השמאלי, לאחר מכן לעבור לערכו שלו ואז הבן הימני

- Postorder

עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את בנו **השמאלי**, אחר כך את בנו הימני ולבסוף

PostOrder tree traversal

```
public void PostOrder() // (L,R,V)
{
    PostOrder(root);
}
```

```
public void PostOrder(Node current) {
    if(current != null)
    {
        PostOrder(current.left);
        PostOrder(current.right);
        System.out.print(current.data + " " );
    }
}
```

שיטות מעבר על עץ בינארי tree traversal

- Preorder

עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את ערכו, לאחר מכן לעבור לבנו השמאלי ולבסוף לבן הימני.

- Inorder

עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את בן השמאלי, לאחר מכן לעבור לערכו שלו ואז הבן הימני

- Postorder

עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את בנו **השמאלי**, אחר כך את בנו הימני ולבסוף

...

שיטות מעבר על עץ בינארי tree traversal

- Preorder

עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את ערכו, לאחר מכן לעבור לבנו השמאלי ולבסוף לבן הימני.

- Inorder

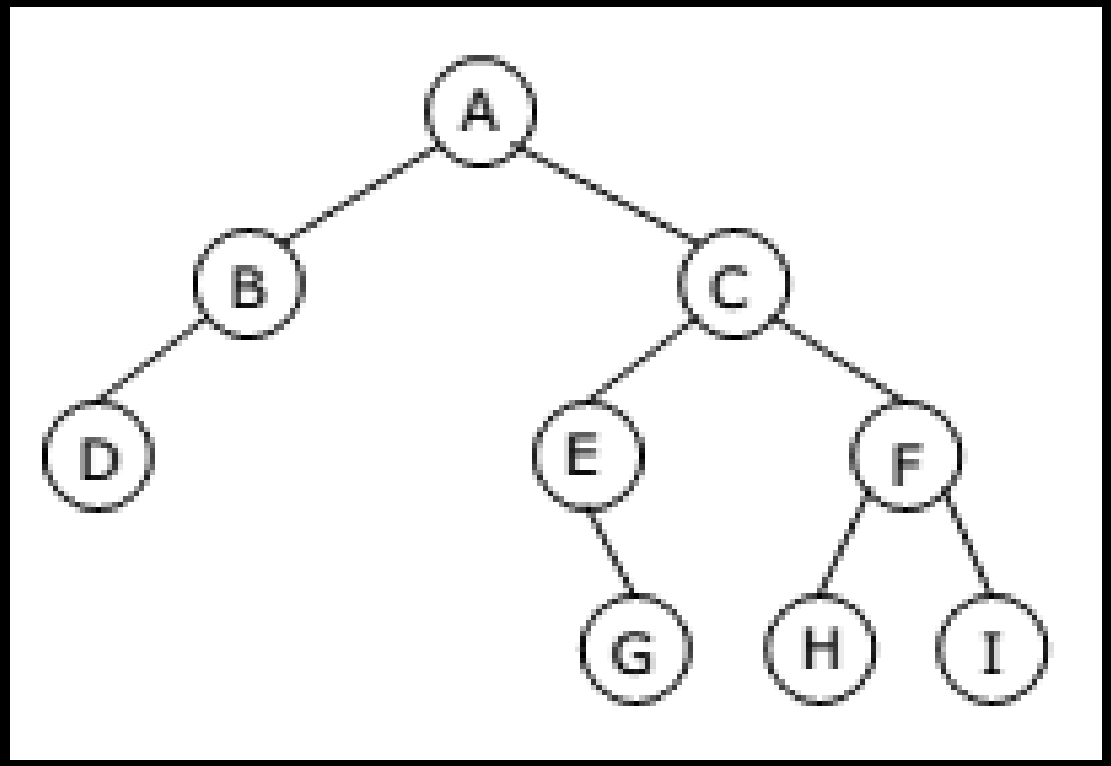
עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את בן השמאלי, לאחר מכן לעבור לערכו שלו ואז הבן הימני

- Postorder

עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את בנו **השמאלי**, אחר כך את בנו הימני ולבסוף

...

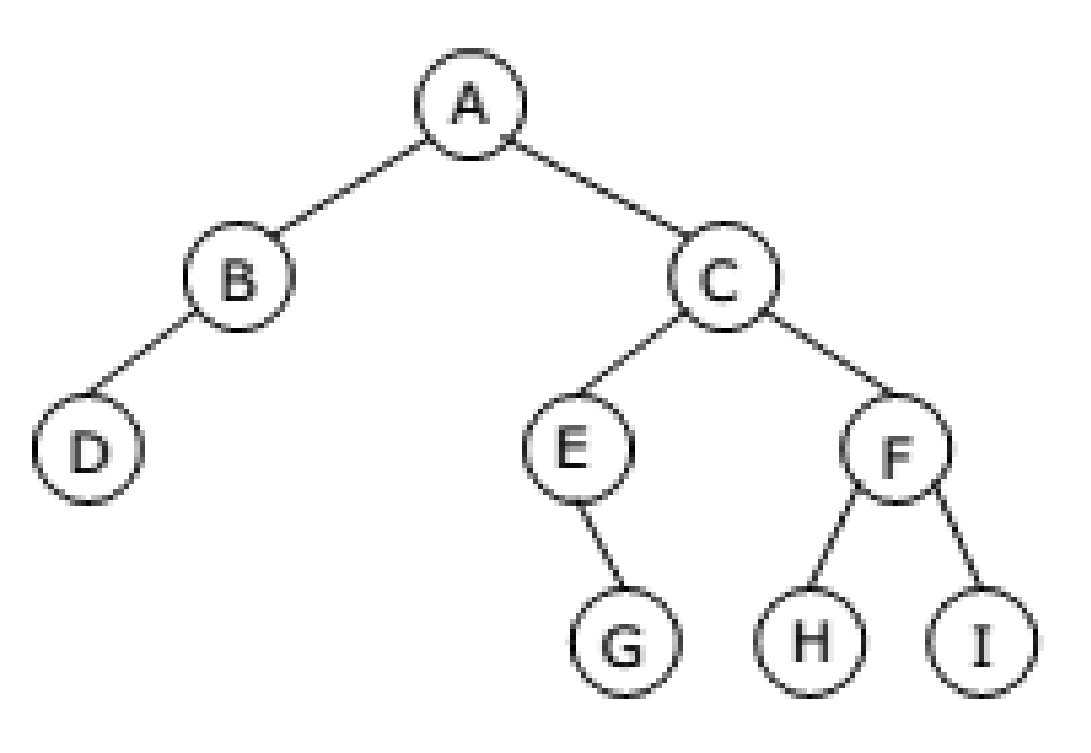
PreOrder



- Preorder traversal yields:
  A, B, D, C, E, G, F, H, I

```
public void PreOrder(Node current) {
    if(current != null)
    {
        System.out.print(current.data + " " );
        PreOrder(current.left);
        PreOrder(current.right);
    }
}
```

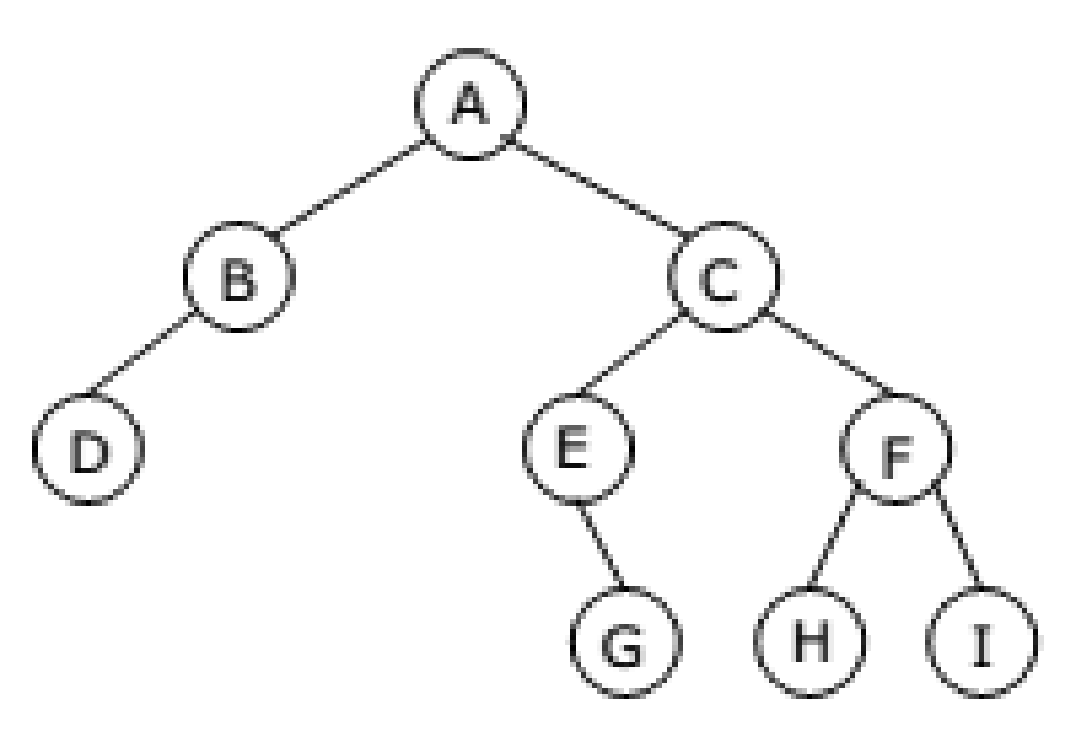
PostOrder



- Preorder traversal yields:
  A, B, D, C, E, G, F, H, I
- Postorder traversal yields:
  D, B, G, E, H, I, F, C, A

```
public void PostOrder(Node current) {
    if(current != null)
    {
        PostOrder(current.left);
        PostOrder(current.right);
        System.out.print(current.data + " " );
    }
}
```

InOrder



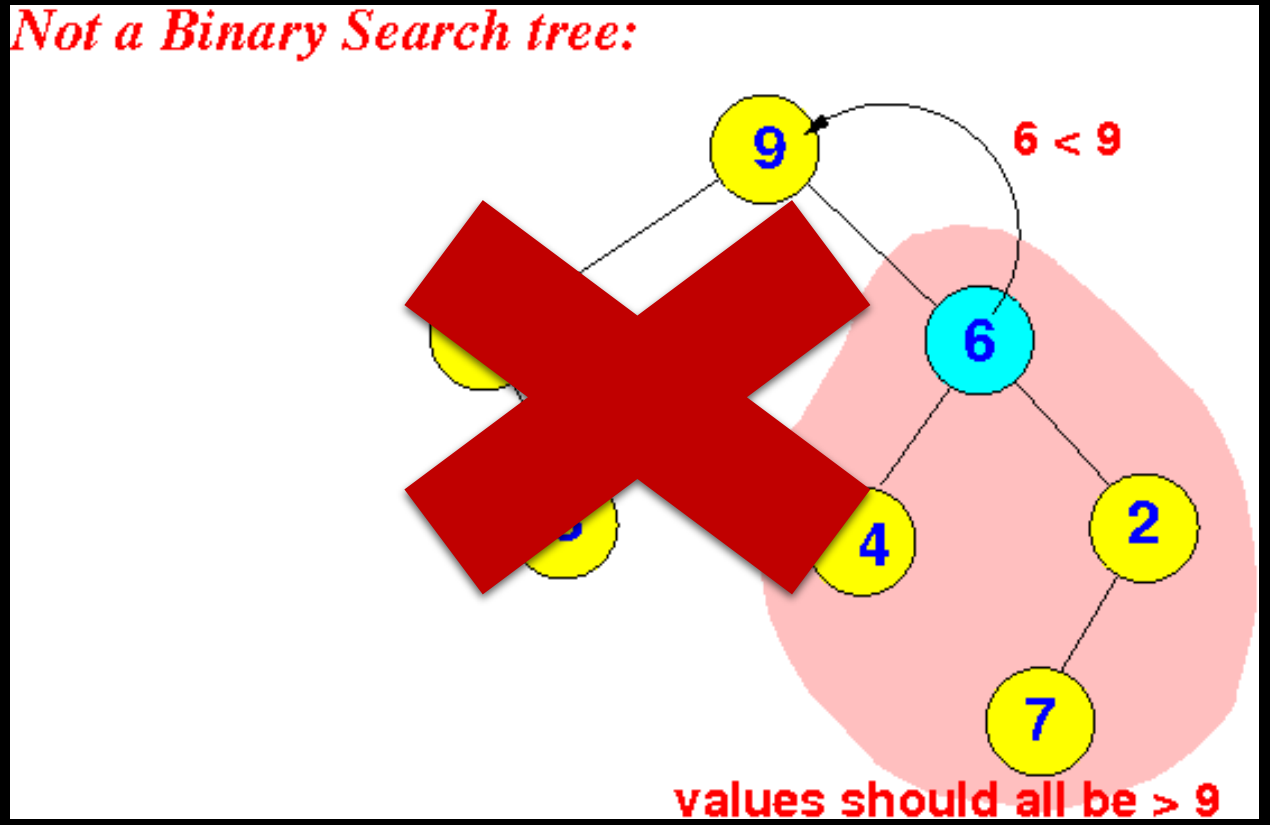
- Preorder traversal yields:
  A, B, D, C, E, G, F, H, I
- Postorder traversal yields:
  D, B, G, E, H, I, F, C, A
- Inorder traversal yields:
  D, B, A, E, G, C, H, F, I

```
public void InOrder(Node current) {
    if(current != null)
    {
        InOrder(current.left);
        System.out.print(current.data + " " );
        InOrder(current.right);
    }
}
```

עץ חיפוש בינארי Binary Search Tree (BST)

עץ חיפוש בינארי הוא עץ בינארי כך שעבור כל קודקוד x מתקיים כי :

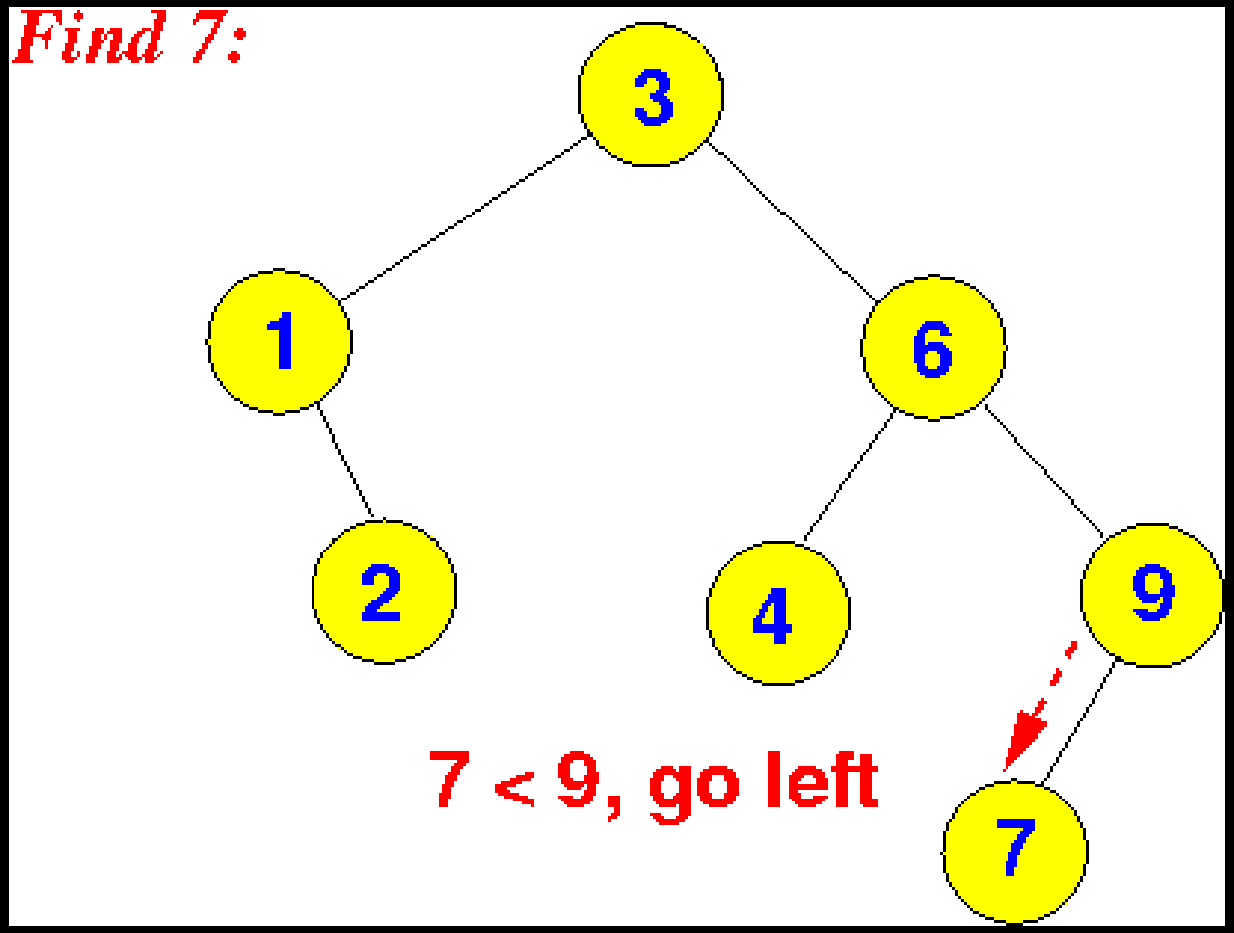
- הערכים של כל הקודקודים בתת עץ השמאלי של x קטנים ממש מ-x
- הערכים של כל הקודקודים בתת עץ הימני של x גדולים ממש מ-x



http://www.mathcs.emory.edu/~cheung/Courses/171/Syllabus/9-BinTree/BST-intro.html

חיפוש Search

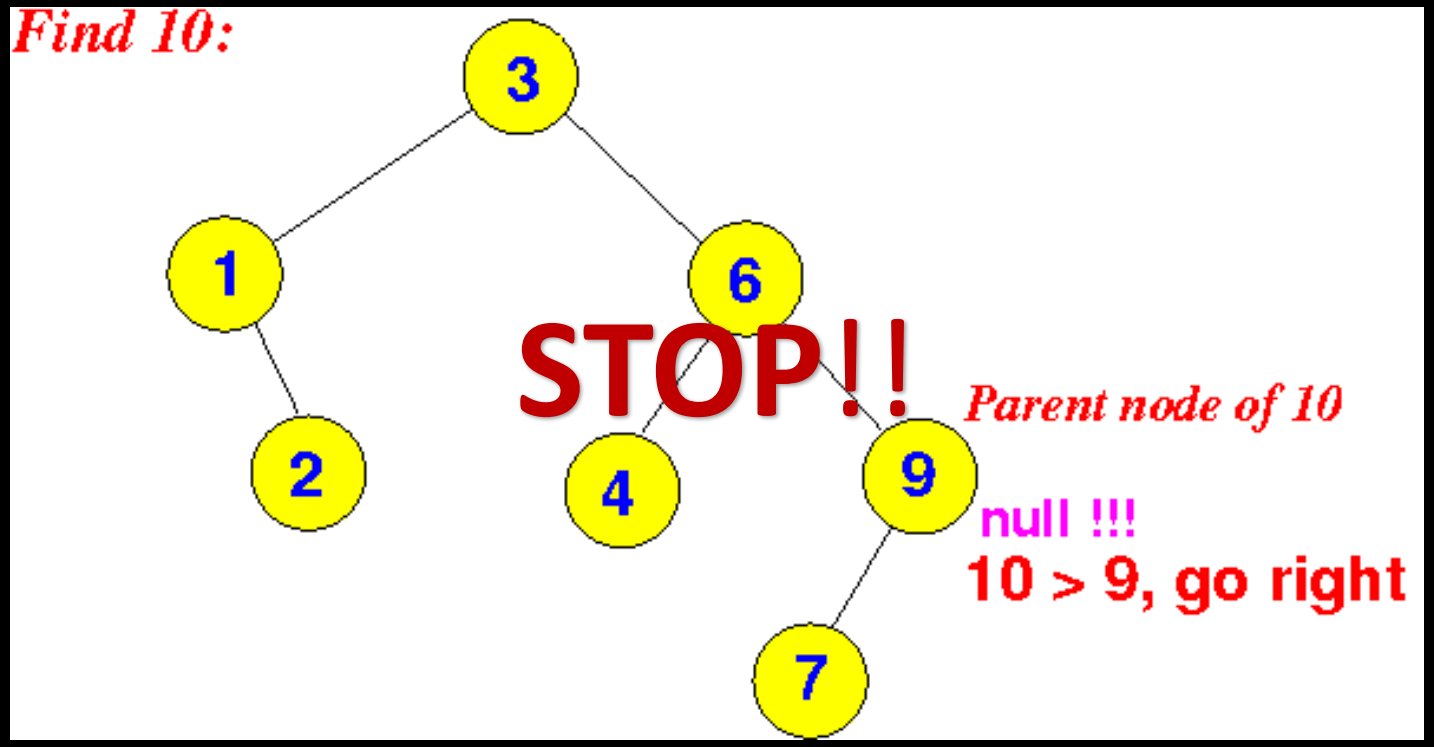
נרצה לחפש את 7 בעץ חיפוש בינארי



http://www.mathcs.emory.edu/~cheung/Courses/171/Syllabus/9-BinTree/BST-intro.html

חיפוש Search

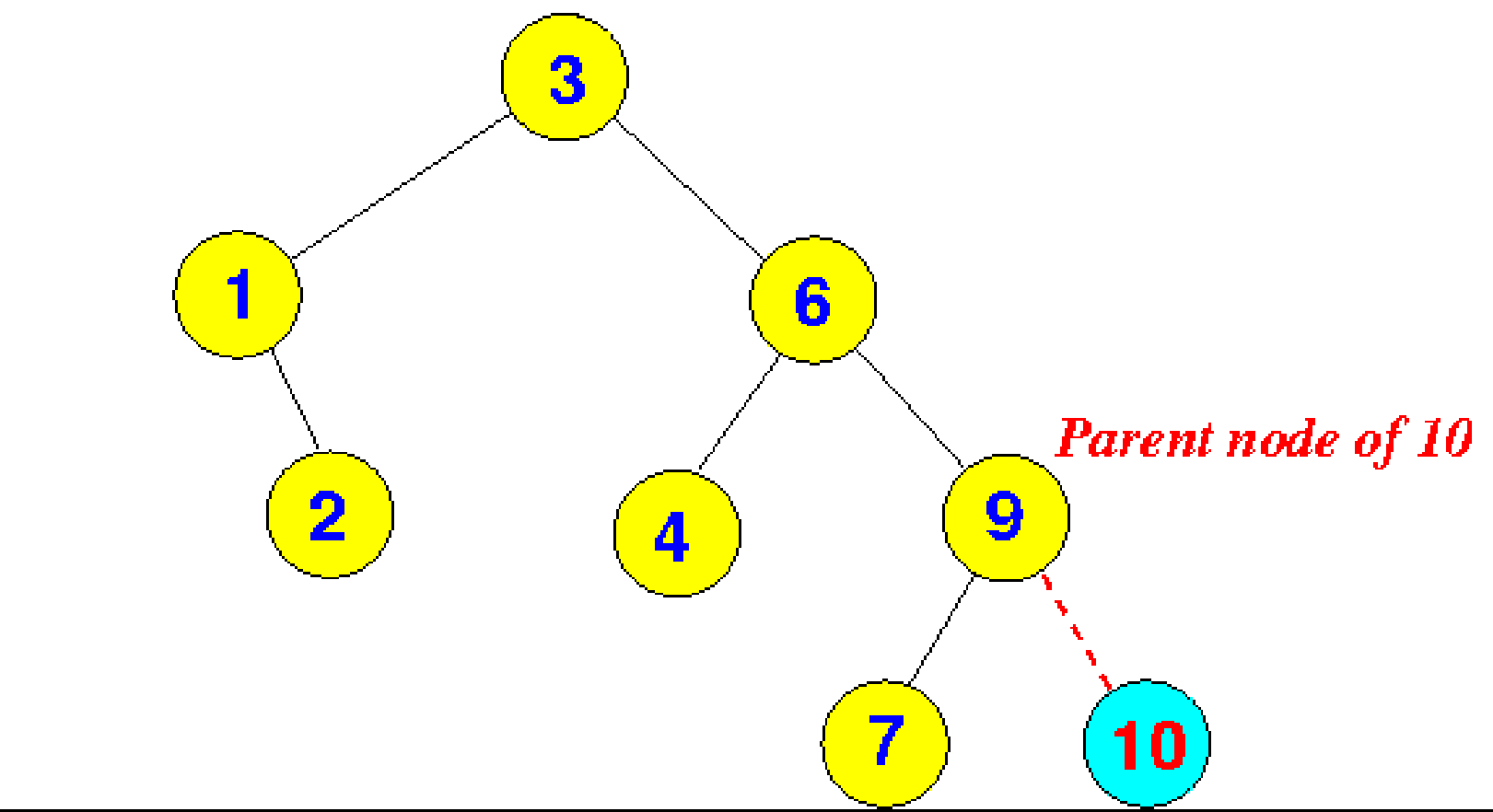
נרצה לחפש את 10 בעץ חיפוש בינארי



http://www.mathcs.emory.edu/~cheung/Courses/171/Syllabus/9-BinTree/BST-intro.html

הכנסה Insert

נרצה להכניס את 10 בעץ חיפוש בינארי

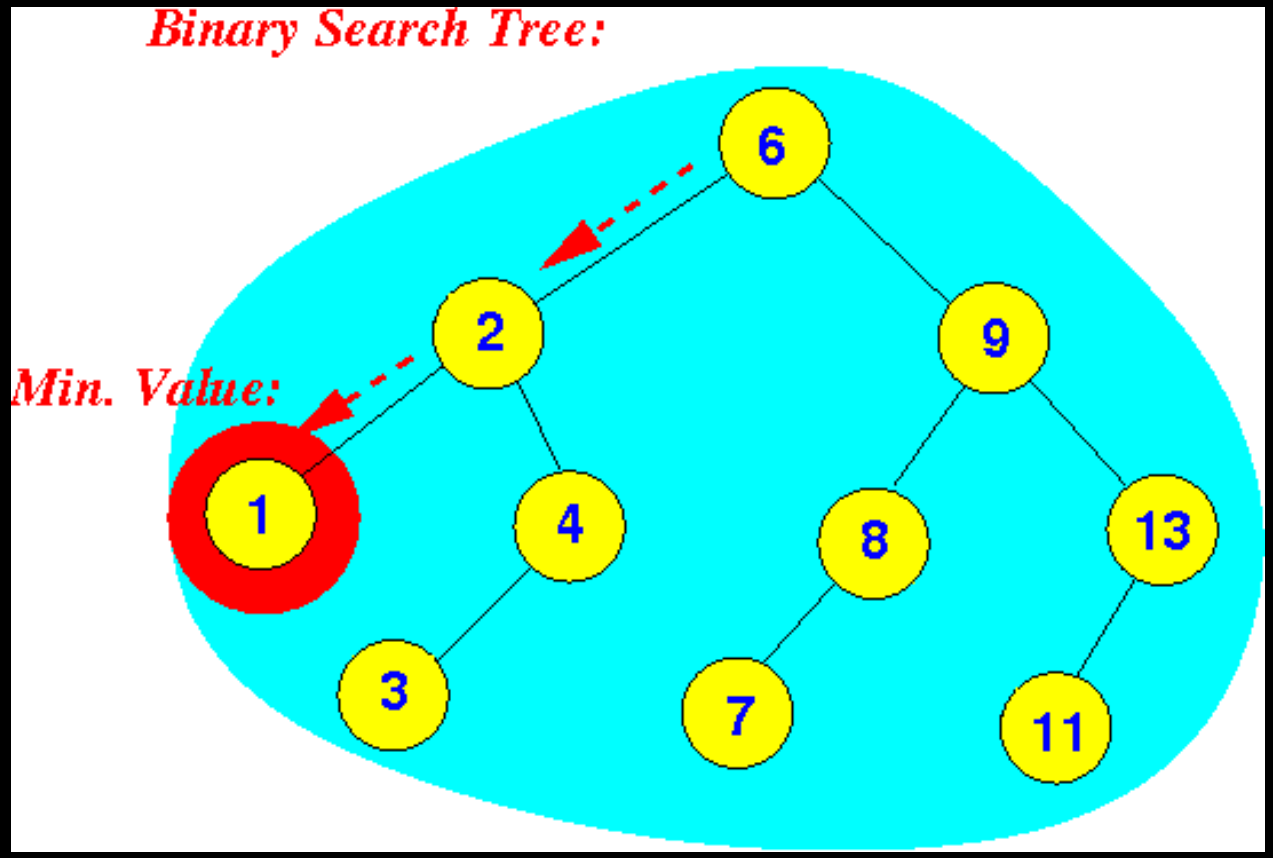


http://www.mathcs.emory.edu/~cheung/Courses/171/Syllabus/9-BinTree/BST-intro.html

הכנסה Insert

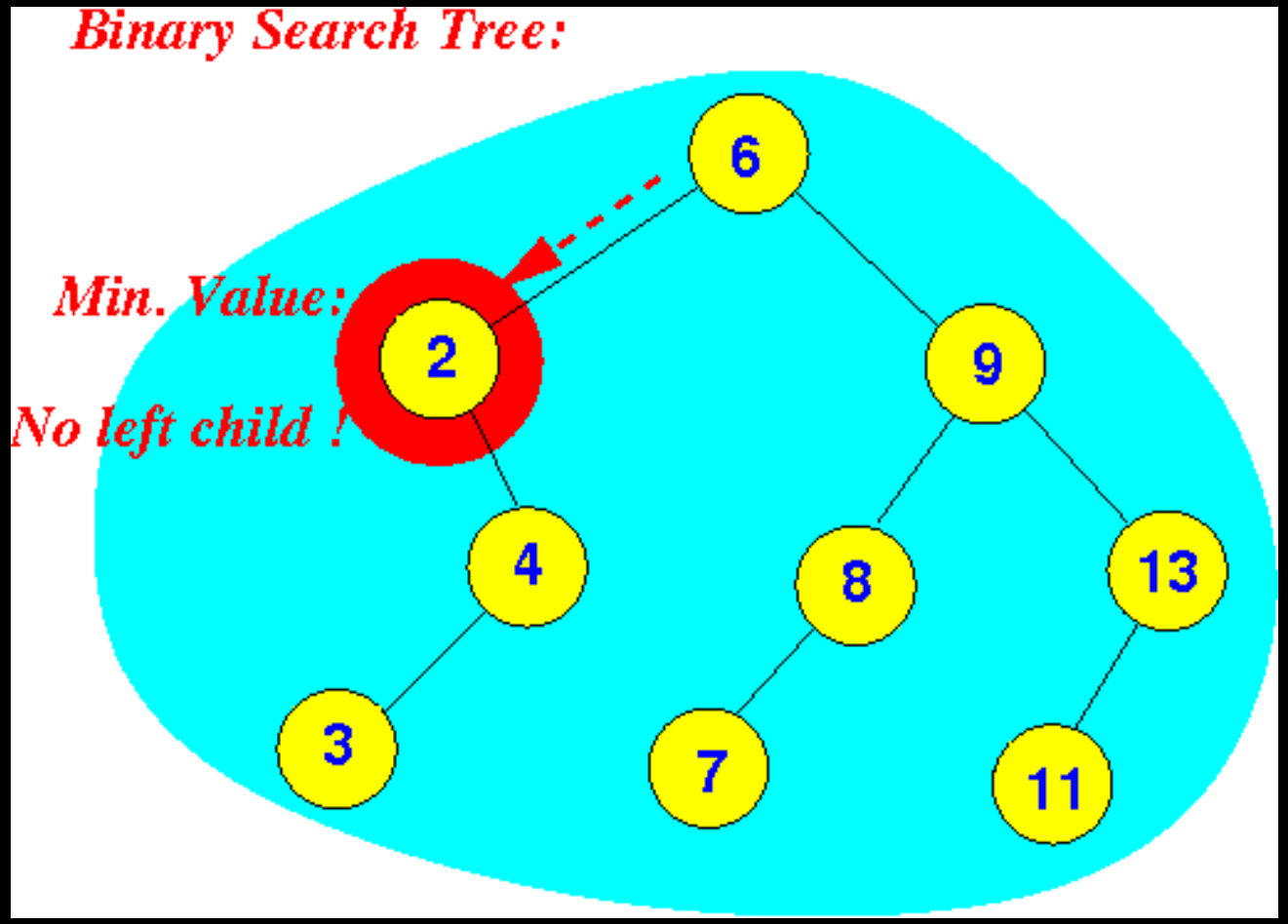
www.mathwarehouse.com

איבר מינמלי



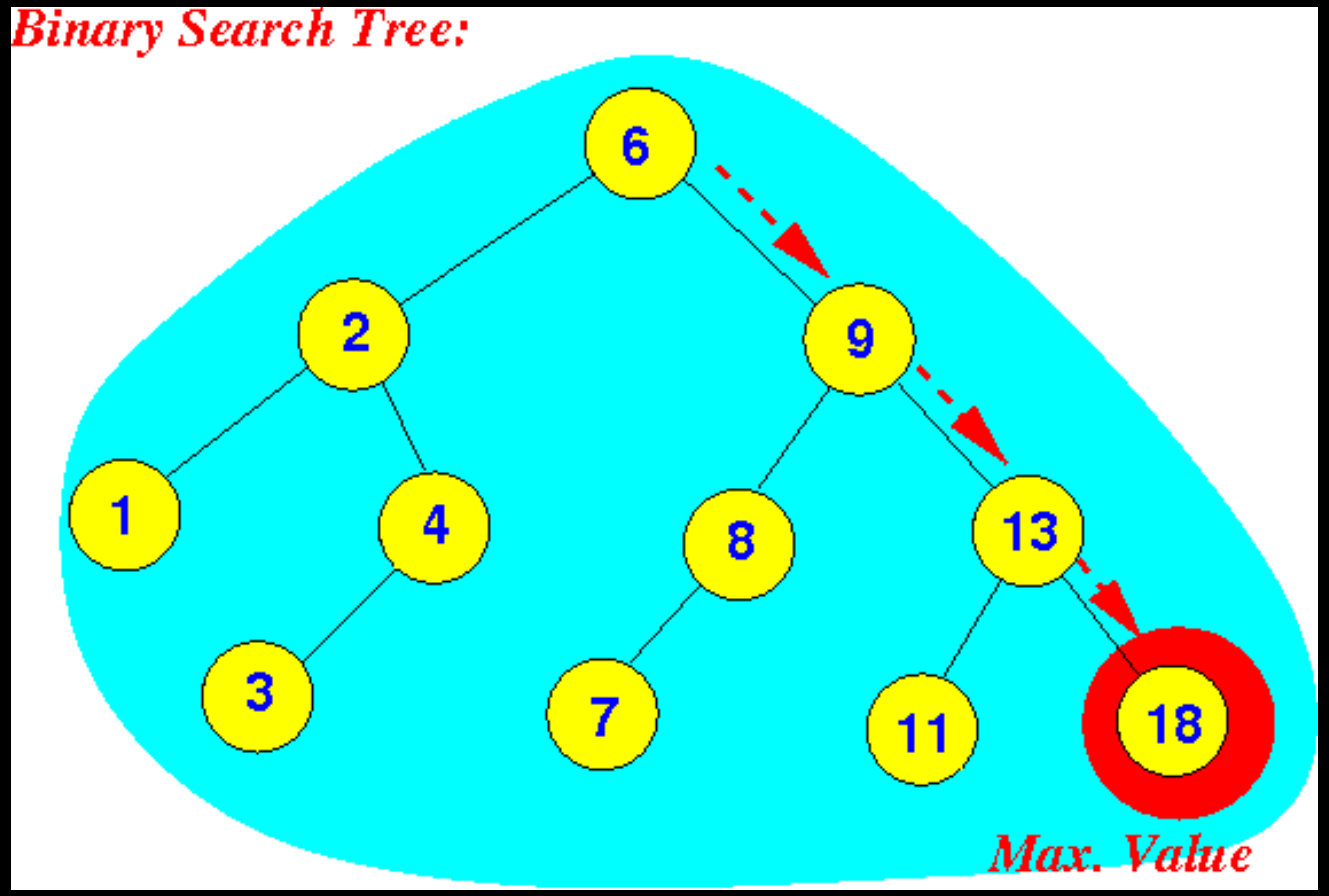
http://www.mathcs.emory.edu/~cheung/Courses/171/Syllabus/9-BinTree/BST-intro.html

איבר מינמלי



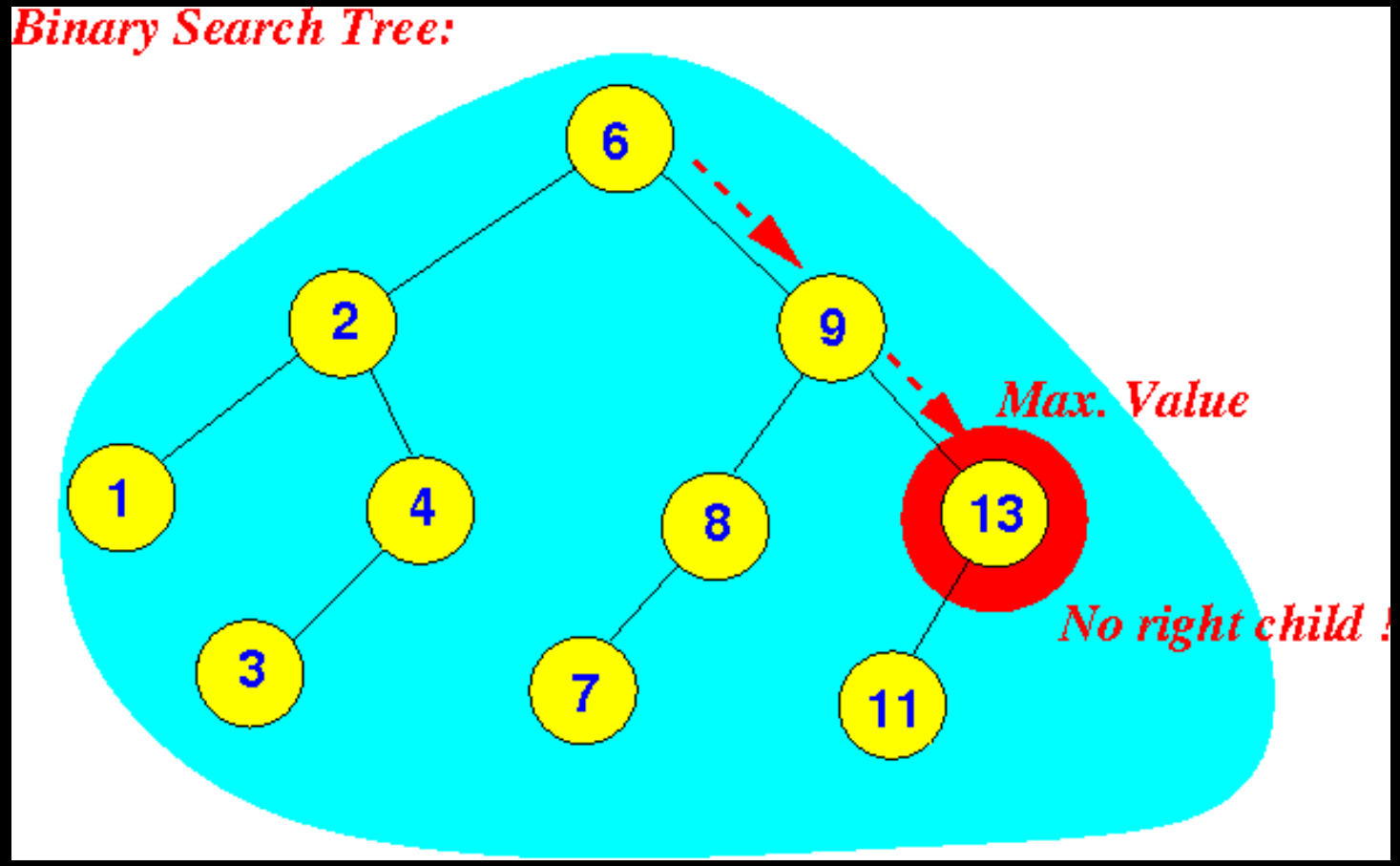
http://www.mathcs.emory.edu/~cheung/Courses/171/Syllabus/9-BinTree/BST-intro.html

איבר מקסמלי



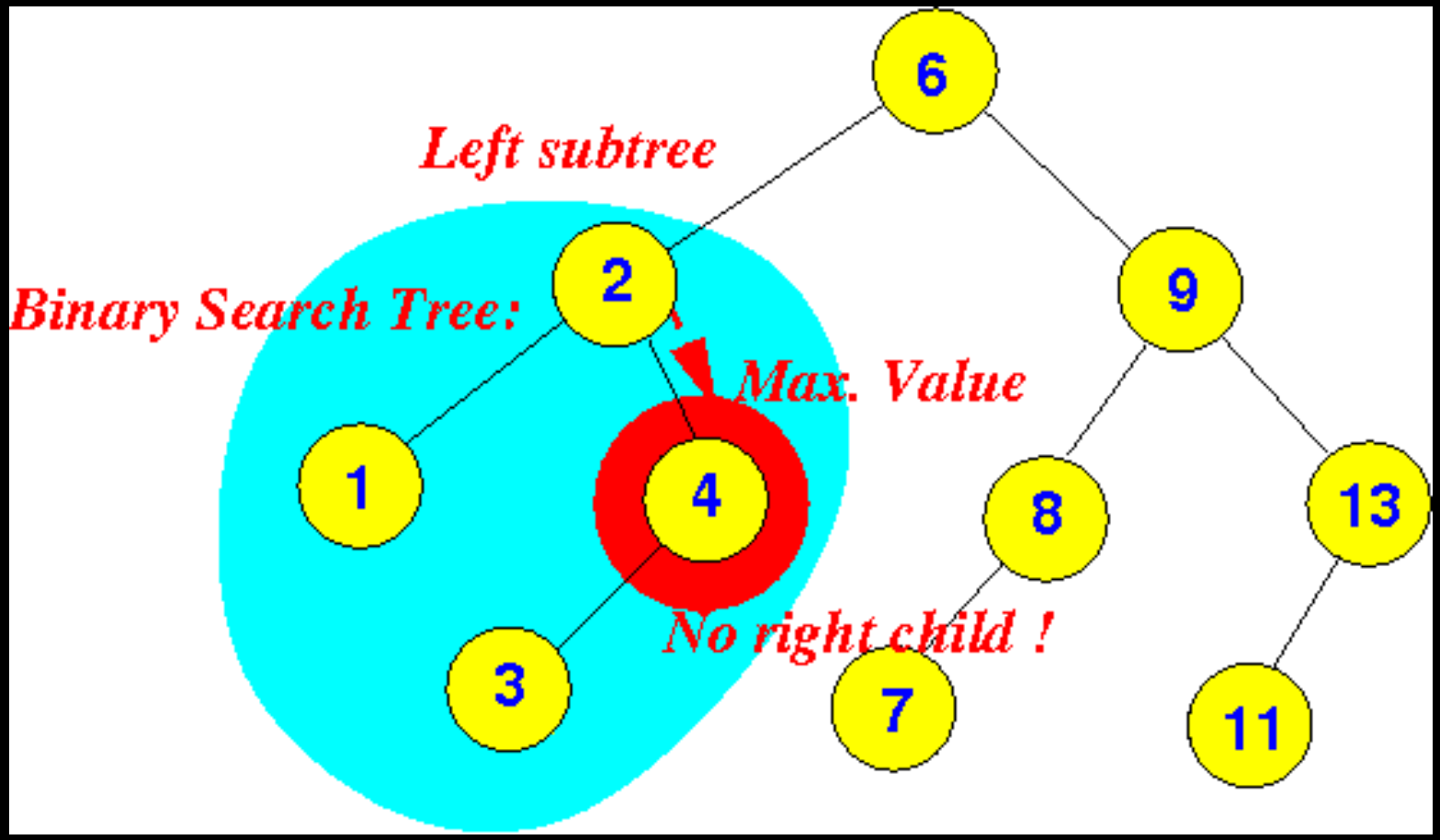
http://www.mathcs.emory.edu/~cheung/Courses/171/Syllabus/9-BinTree/BST-intro.html

איבר מקסמלי



http://www.mathcs.emory.edu/~cheung/Courses/171/Syllabus/9-BinTree/BST-intro.html

איבר מקסמלי בתת עץ



http://www.mathcs.emory.edu/~cheung/Courses/171/Syllabus/9-BinTree/BST-intro.html

מחיקה remove

מקרה 1: לקודקוד **אין** בנים

```
          50                                    50
       /      \          delete(20)          /    \
     30        70        ---------->       30      70
    /  \      /  \                          \     /  \
  20    40  60    80                        40   60    80
```

https://www.geeksforgeeks.org/binary-search-tree-set-2-delete/

מחיקה remove

מקרה 2: לקודקוד בעל בן יחיד

```
        50                                  50
     /     \          delete(30)         /    \
   30       70       ---------->      40       70
     \     /  \                              /  \
     40   60   80                           60   80
```

https://www.geeksforgeeks.org/binary-search-tree-set-2-delete/

מחיקה remove

מקרה 3: לקודקוד 2 בנים

```
        50                                  60
     /     \          delete(50)         /    \
   40       70       ---------->      40      70
            /  \                                 \
          60    80                                 80
```

https://www.geeksforgeeks.org/binary-search-tree-set-2-delete/

תכונות של עץ חיפוש בינארי

תכונות של עץ חיפוש בינארי

מספר **הכולל** של הקודקודים בעץ בינארי מושלם הינו $n = 2^{h+1} - 1$

כאשר h הוא גובה העץ

```
                18

        /   \           /   \

      40     50       100    40
```

$$n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots 2^h = \frac{1\left(2^{h+1} - 1\right)}{2 - 1} = 2^{h+1} - 1$$

תכונות של עץ חיפוש בינארי

מספר **העלים** בעץ בינארי מושלם (Perfect) הינו 2^h

```
          18
        /    \
     15        30
    /  \      /  \
  40    50  100    40
```

תכונות של עץ חיפוש בינארי

מספר **הצמתים הפנמיים** בעץ בינארי מושלם (Perfect) הינו $2^h - 1$

```
          18
        /    \
      15      30
     /  \     /  \
   40    50 100    40
```

תכונות של עץ חיפוש בינארי

מספר **הצמתים הכולל** n בעץ בינארי שלם (Complete)

הוא בין 2^h לבין $2^{h+1} - 1$

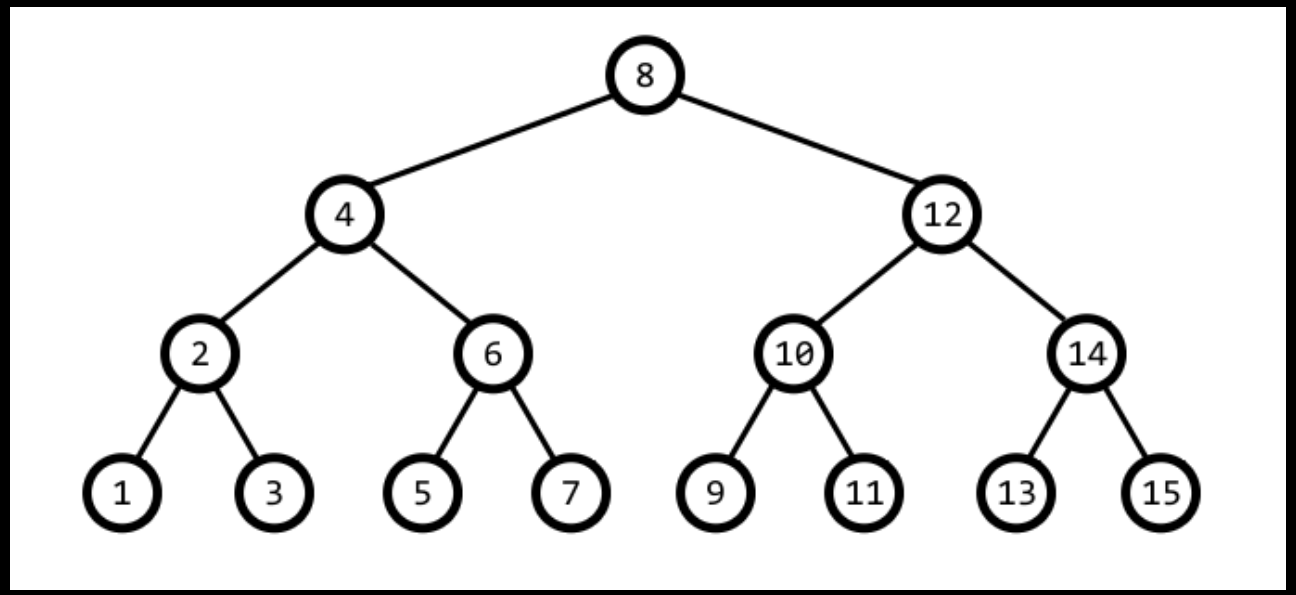
$h - 1$

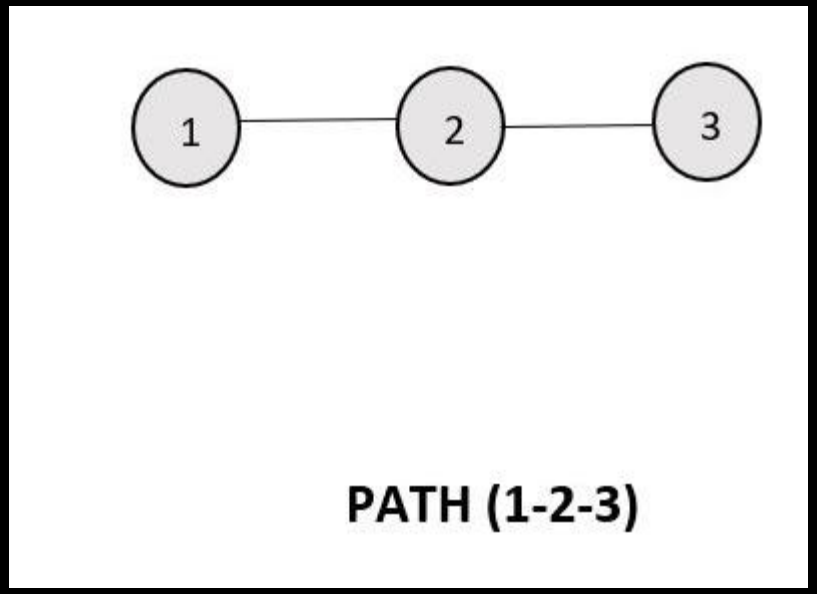
```
              18
          /          \
       15              30
      /  \            /  \
   40     50       100    40
  /  \   /
 8    7  9
```

תכונות של עץ חיפוש בינארי

גובה של עץ חיפוש בינארי הינו במקרה הטוב $O(log_2(n))$

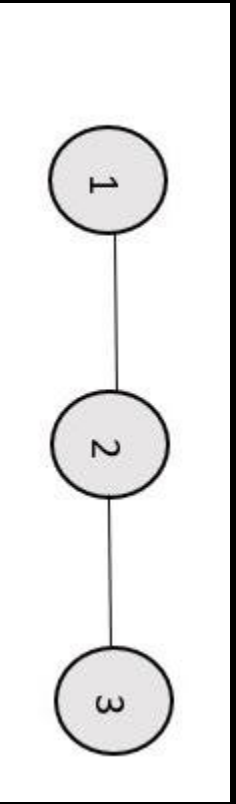
ובמקרה הרע $O(n)$





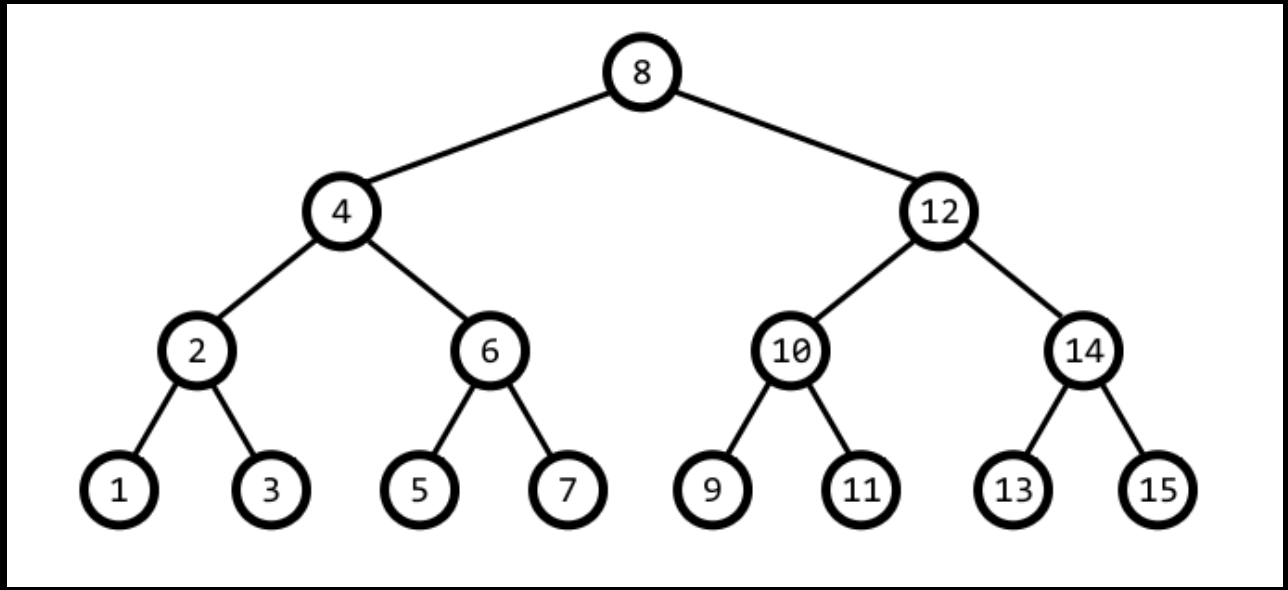
תכונות של עץ חיפוש בינארי

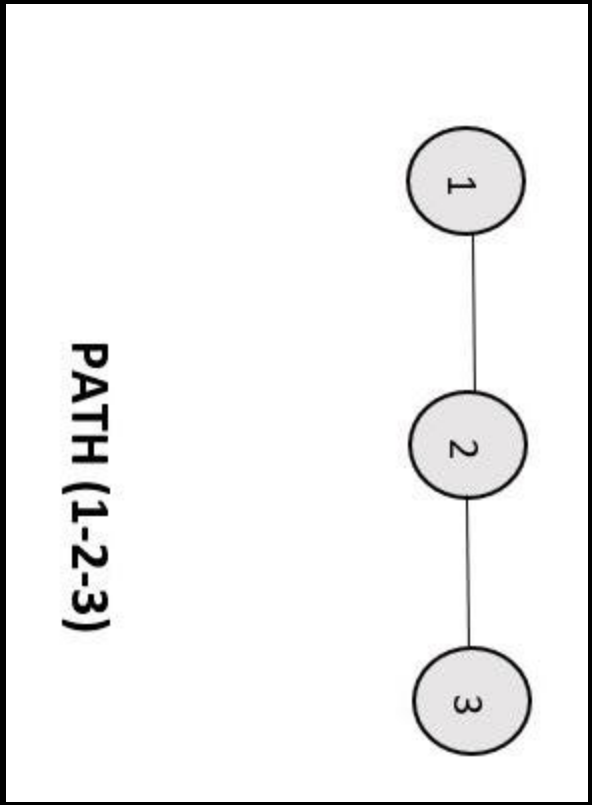
מספר הקודקודים המינמלי בעץ בינארי עם גובה h הינו $h+1$



תכונות של עץ חיפוש בינארי

כמות הצמתים הפנמיים בעץ בינארי בקטע $[h, 2^h - 1]$



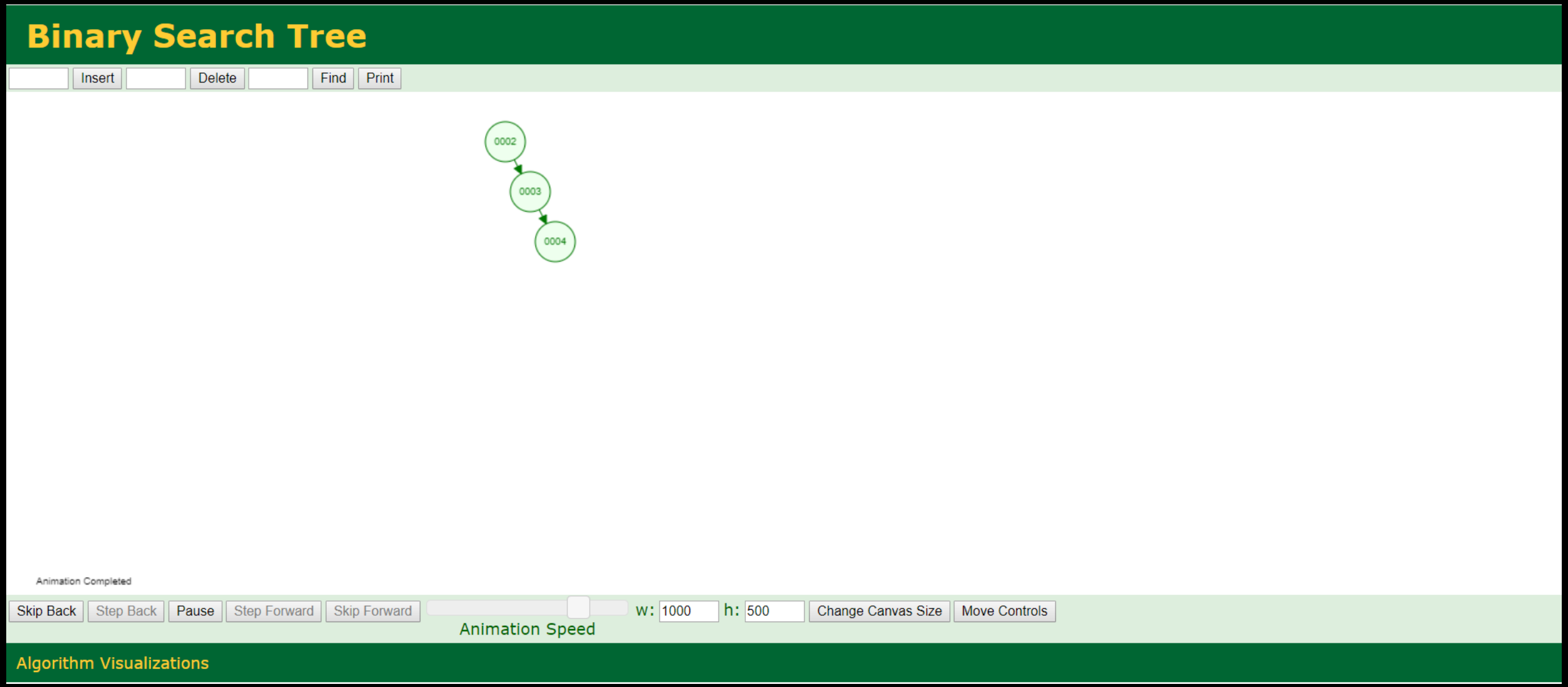


סיבוכיות BST

Data structure	Access /peek	Search	Insert /push	Delete /pop	Traverse
Linear					
Array	O(1)	O(n)	O(1)	O(n)	O(n)
Ordered array	O(1)	O(logn)	O(n)	O(n)	O(n)
Linked list	O(n)	O(n)	O(1)	O(n)	O(n)
Ordered linked list	O(n)	O(n)	O(n)	O(n)	O(n)
Matrix	O(1)	O(n^2)	O(1)	O(n^2)	O(n^2)
Stack	O(1)	O(n)	O(1)	O(1)	O(n)
Queue	O(1)	O(n)	O(1)	O(1)	O(n)
Non-Linear					
Tree (worst case)	O(n)	O(n)	O(n)	O(n)	O(n)
Tree (balanced)	O(logn)	O(logn)	O(logn)	O(logn)	O(n)

Improving a BST can be done by making it balanced - like AVL or red-black-trees.

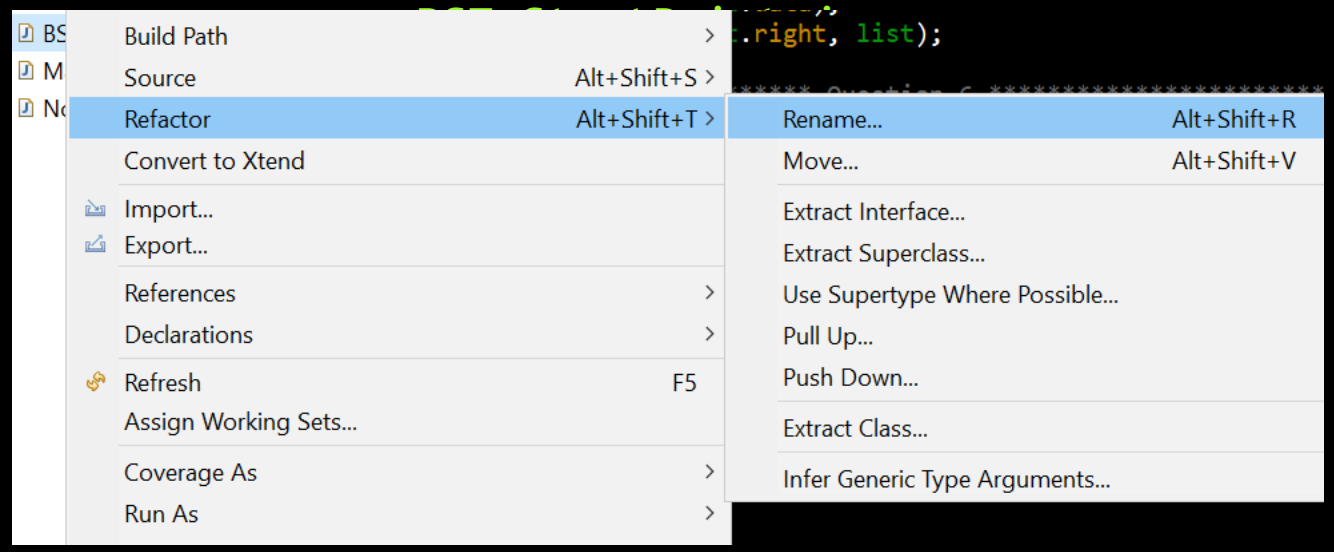
visualization



https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BST.html

צבי מינץ

מימוש BST


.right, list);
Build Path
Source Alt+Shift+S
Refactor Alt+Shift+T
Convert to Xtend
Import...
Export...
References
Declarations
Refresh F5
Assign Working Sets...
Coverage As
Run As
Rename... Alt+Shift+R
Move... Alt+Shift+V
Extract Interface...
Extract Superclass...
Use Supertype Where Possible...
Pull Up...
Push Down...
Extract Class...
Infer Generic Type Arguments...

מימוש Node.java

```
/* Class containing left and right
child of current node and key value*/
public class Node {
   int data;
   Node right;
   Node left;
   public Node(int data) {
      this.data = data;
      left = right = null;
   }
}
```

מימוש Main.java

```
public class Main {
    public static void main(String[] args) {
```

```
 /----- 9
5
 \----- 4
          |        /----- 2
          \----- 1
```

```
    }
}
```

תרגילים מהמודל

תרגיל 10 לעבודה עצמית עץ חיפוש בינארי

שאלה 6

הוסיפו למחלקת BinarySearchTree שיטה **רקורסיבית** המחשבת מספר צמתי העץ:

```
public int size(){. . . }
```

שאלה 7

כתוב פונקציה שמקבלת נתון הנמצא בצומת ומחזירה את מספר הבניו:

```
public int numOfChilds(Object data){ . . . }
```

שאלה 8

כתוב פונקציה toString() שמחזירה מחרוזת המכילה את כל איברי העץ:

```
public String toString(){ . . . }
```

שאלה 9

כתוב פונקציה numOfLeaves () שמחזירה מספר עלים בעץ:

```
public int numOfLeaves(){ . . . }
```

שאלה 10

כתוב פונקציה numOfParents () שמחזירה מספר צמתים שיש להם לפחות בן אחד:

```
public int numOfParents (){ . . . }
```

שאלה 11

כתוב בנאי מעתיק לעץ חיפוש בינארי

```
public BinarySearchTree (BinarySearchTree bst){ . . . }
```

תרגיל 9 לעבודה עצמית עצים בינאריים

שאלה 2

הוסיפו למחלקת BinaryTree שיטה שמדפיסה צמתי העץ בצורת **Inorder**

```
public void printInorder(){. . . }
```

שאלה 3

הוסיפו למחלקת BinaryTree שיטה שמדפיסה צמתי העץ בצורת **Postorder**

```
public void printPostorder (){. . . }
```

שאלה 4

הוסיפו למחלקת BinaryTree שיטה המחשבת מספר צמתי העץ:

```
public int size(){. . . }
```

https://moodlearn.ariel.ac.il/course/view.php?id=70393

מימוש BST.java

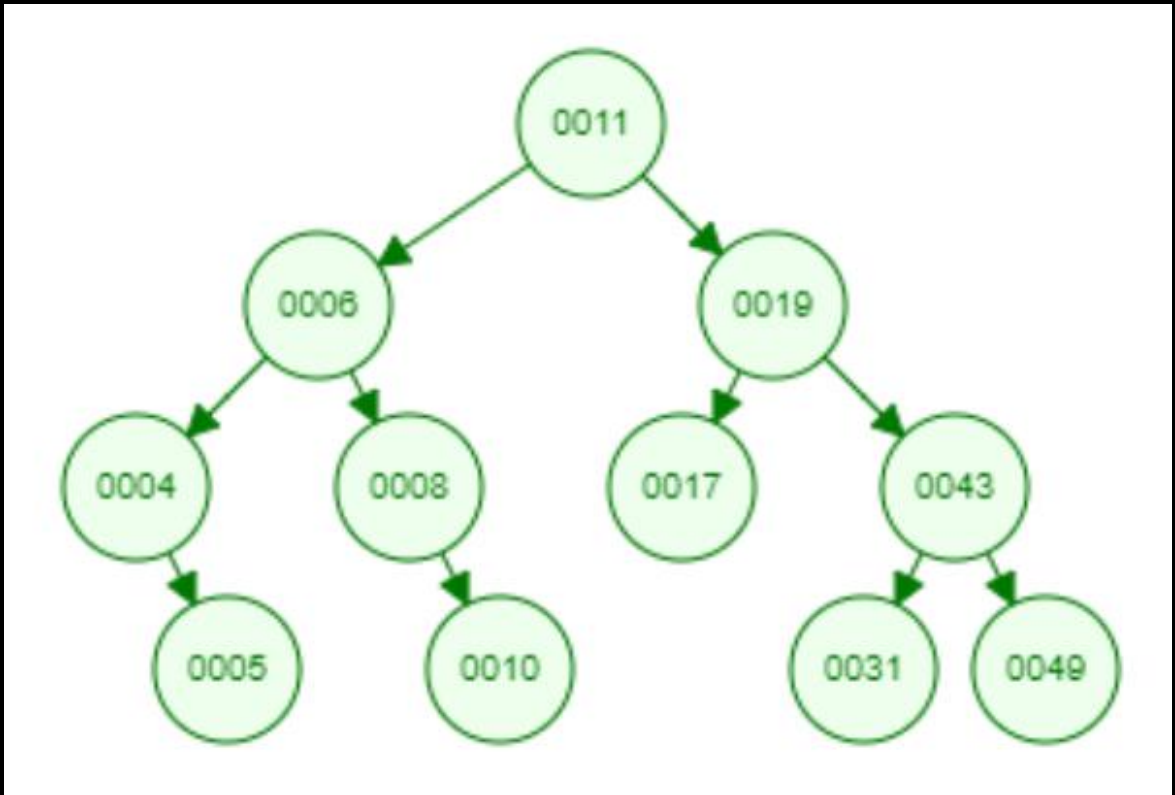
```
public class BST
{

    ...
}
```

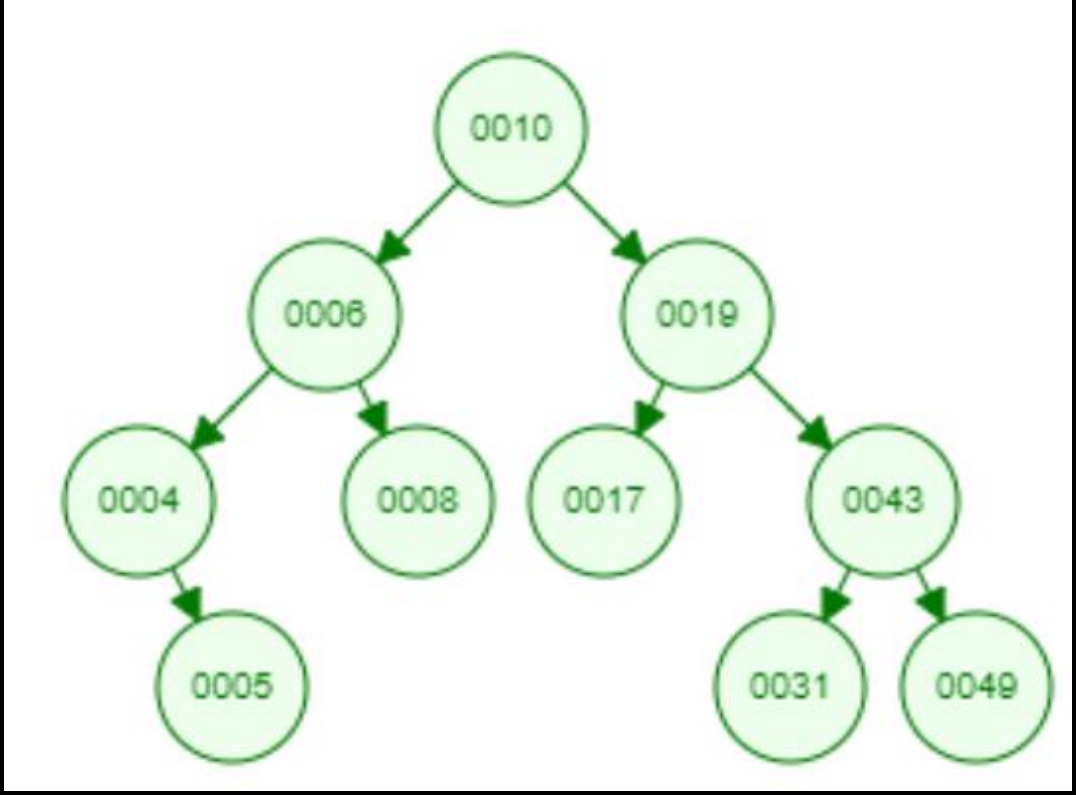
שאלות

תרגיל 10 לעבודה עצמית עץ חיפוש בינארי

שאלה 5

נתונה סדרת המספרים: 11, 6, 8, 19, 4, 10, 5, 17, 43, 49, 31. צייר עץ חיפוש בינארי כתוצאה של הוספת המספרים לעץ חיפוש בינארי ריק. צייר שני עצים כתוצאת המחיקה של מספר 11.



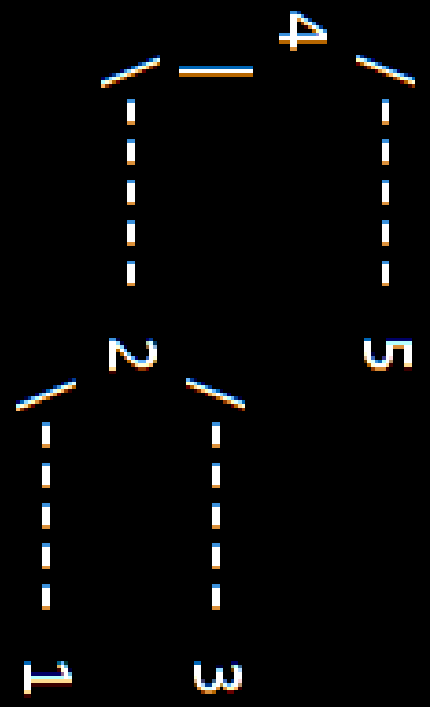


https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BST.html

כתבו תוכנית אשר בודקת אם עץ בינארי הוא BST או לא

```
boolean b = tree.isBST();
```

```
public static void main(String[] args) {
        BST tree = new BST();
        tree.root = new Node(4);
        tree.root.left = new Node(2);
        tree.root.right = new Node(5);
        tree.root.left.left = new Node(1);
        tree.root.left.right = new Node(3);
```



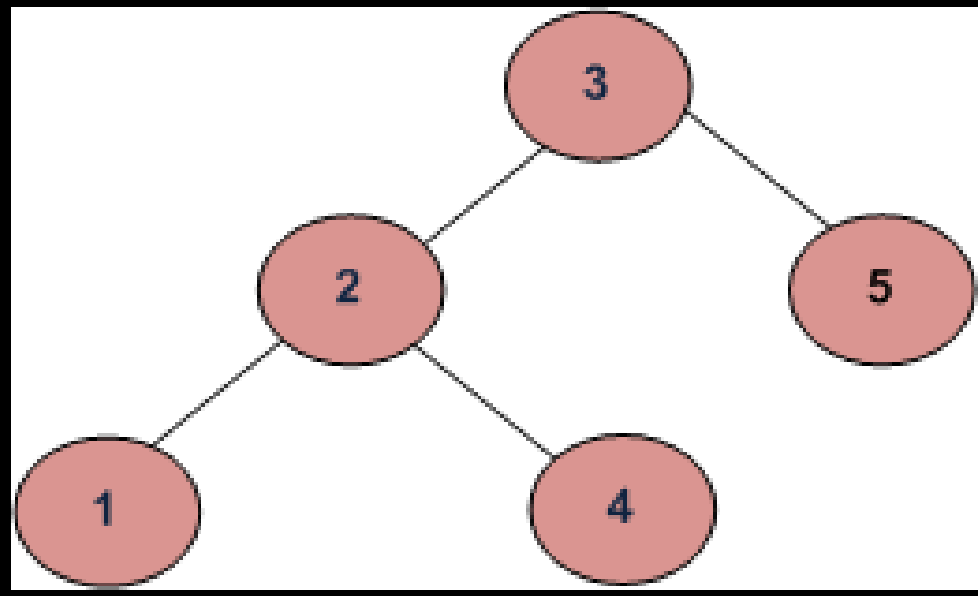

```
        boolean b = tree.isBST();
        System.out.println( (b == true) ? "V" : "X" );
}
```

כתבו תוכנית אשר בודקת אם עץ בינארי הוא BST או לא

הצעה:

```
public boolean isBST() {
    return isBST(root);
}

private boolean isBST(Node curr) {
    if ( curr == null ) return true;

    /* false if left is > than node */
    if(curr.left != null && curr.left.data > curr.data)
    return false;

    /* false if right is < than node */
    if(curr.right != null && curr.right.data < curr.data)
    return false;


      /* false if, recursively, the left or right is not a BST */
    if(!isBST(curr.left) || !isBST(curr.right)) return false;
    else return true;
}
```

wrong



https://www.geeksforgeeks.org/a-program-to-check-if-a-binary-tree-is-bst-or-not/

כתבו תוכנית אשר בודקת אם עץ בינארי הוא BST או לא

הצעה 2:

```
public boolean isBST() {
    return isBST(root);
}

private boolean isBST(Node curr) {
    if ( curr == null ) return true;

    /* false if left is > than node */
    if(curr.left != null && maxValue(curr.left) > curr.data)
    return false;

    /* false if right is < than node */
    if(curr.right != null && minValue(curr.right) < curr.data)
    return false;


      /* false if, recursively, the left or right is not a BST */
    if(!isBST(curr.left) || !isBST(curr.right)) return false;
    else return true;
}
```

Correct but not efficient

```
// Find minimum value function in Binary Tree:
public static int minValue(Node current) {
      if(current == null) return Integer.MAX_VALUE;
      int data = current.data;
      int rdata = minValue(current.right);
      int ldata = minValue(current.left);
      if(rdata < data) data = rdata;
      if(ldata < data) data = ldata;
      return data;
}
```

https://www.geeksforgeeks.org/a-program-to-check-if-a-binary-tree-is-bst-or-not/

כתבו תוכנית אשר בודקת אם עץ בינארי הוא BST או לא

הצעה 3:

```
public boolean isBST() {
    return isBST(root,Integer.MIN_VALUE, Integer.MAX_VALUE);
}
private boolean isBST(Node curr, int min, int max) {
        /* an empty tree is BST */
        if (curr == null)
            return true;

        /* false if this node violates the min/max constraints */
        if (curr.data < min || curr.data > max)
            return false;

        /* otherwise check the subtrees recursively
        tightening the min/max constraints */
        // Allow only distinct values
        return (isBST(curr.left, min, curr.data-1) &&
        isBST(curr.right, curr.data+1, max));
}
```

Correct and Efficient

Time Complexity: O(n)
Auxiliary Space : O(1)
if Function Call Stack size is not considered, otherwise O(n)

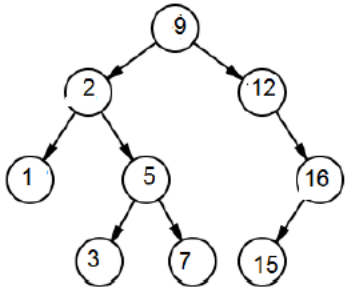
https://www.geeksforgeeks.org/a-program-to-check-if-a-binary-tree-is-bst-or-not/

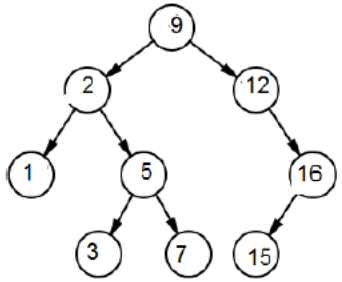
כתבו תוכנית שבודקת אם שני עצים בינאריים <u>זהים</u>

שאלה 4 (20 נקודות)

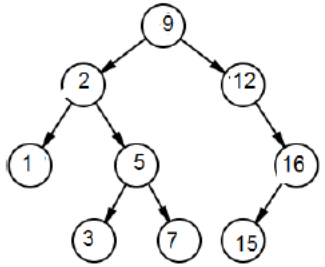
שני עצים חיפוש בינאריים הם שווים (equals) אם רק ערכי המפתח שלהם שווים ויש להם אותה הצורה בדיוק.

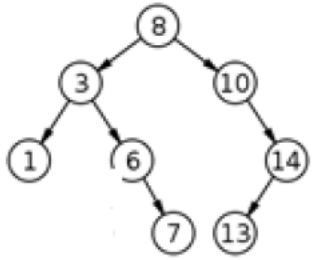
דוגמא 1: שני עצים חיפוש בינאריים הבאים שווים :





דוגמא 2 : שני עצים חיפוש בינאריים הבאים שונים :





כתוב אלגוריתם (קוד) שמקבלת שני עצים חיפוש בינאריים ומחזיר true אם הם שווים, אחרת הוא מחזיר false

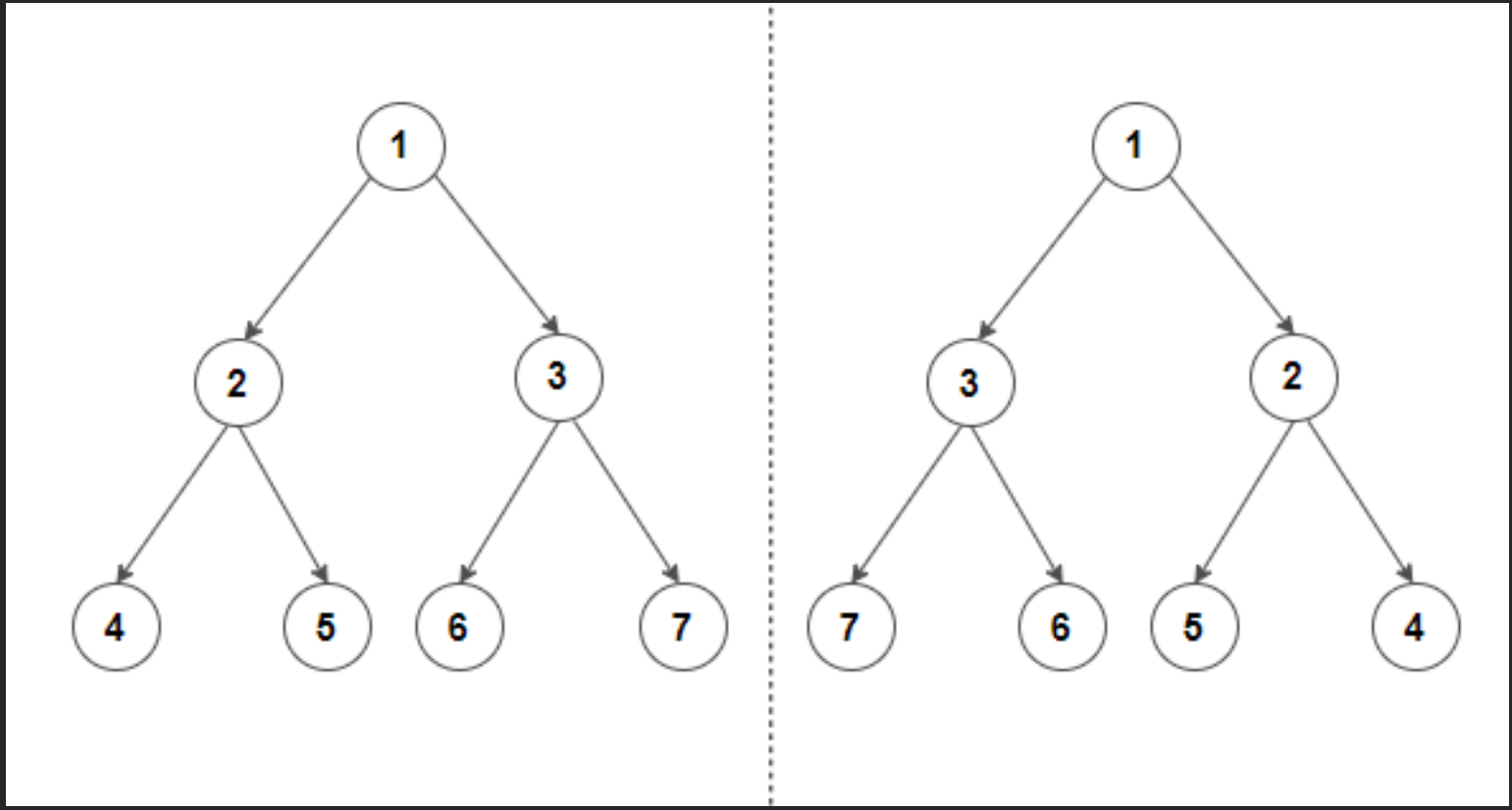
עבודה עצמית (10 דקות)

כתבו תוכנית שבודקת אם שני עצים בינאריים זהים

```
// ******************* Question 2 ********************************** //
public static boolean isIdentical(Node x, Node y) {
/*1. both empty */
        if (x == null && y == null)
            return true;

        /* 2. both non-empty -> compare them */
        if (x != null && y != null)
            return (x.data == y.data
                    && isIdentical(x.left, y.left)
                    && isIdentical(x.right, y.right));

        /* 3. one empty, one not -> false */
        return false;
}
```

```
System.out.println(BST.isIdentical(tree.root, tree2.root));
```

כתבו תוכנית אשר בהינתן עץ בינארי תהפוך אותו לעץ בינארי מראה



עבודה עצמית (10 דקות)

https://www.techiedelight.com/convert-binary-tree-to-its-mirror/

כתבו תוכנית אשר בהינתן עץ בינארי תהפוך אותו לעץ בינארי מראה

```
// ******************* Question 3 ********************************
// Utility function to swap left subtree with right subtree
public static void swap(Node root) {
    if (root == null) { return; }
    Node temp = root.left;
    root.left =  root.right;
    root.right = temp;
}
// Function to convert given binary Tree to its mirror
public static void convertToMirror(Node root)
{
    // base case: if tree is empty
    if (root == null) { return; }
    // convert left subtree
    convertToMirror(root.left);
    // convert right subtree
    convertToMirror(root.right);
    // swap left subtree with right subtree
    swap(root);
}
```

https://www.techiedelight.com/convert-binary-tree-to-its-mirror/

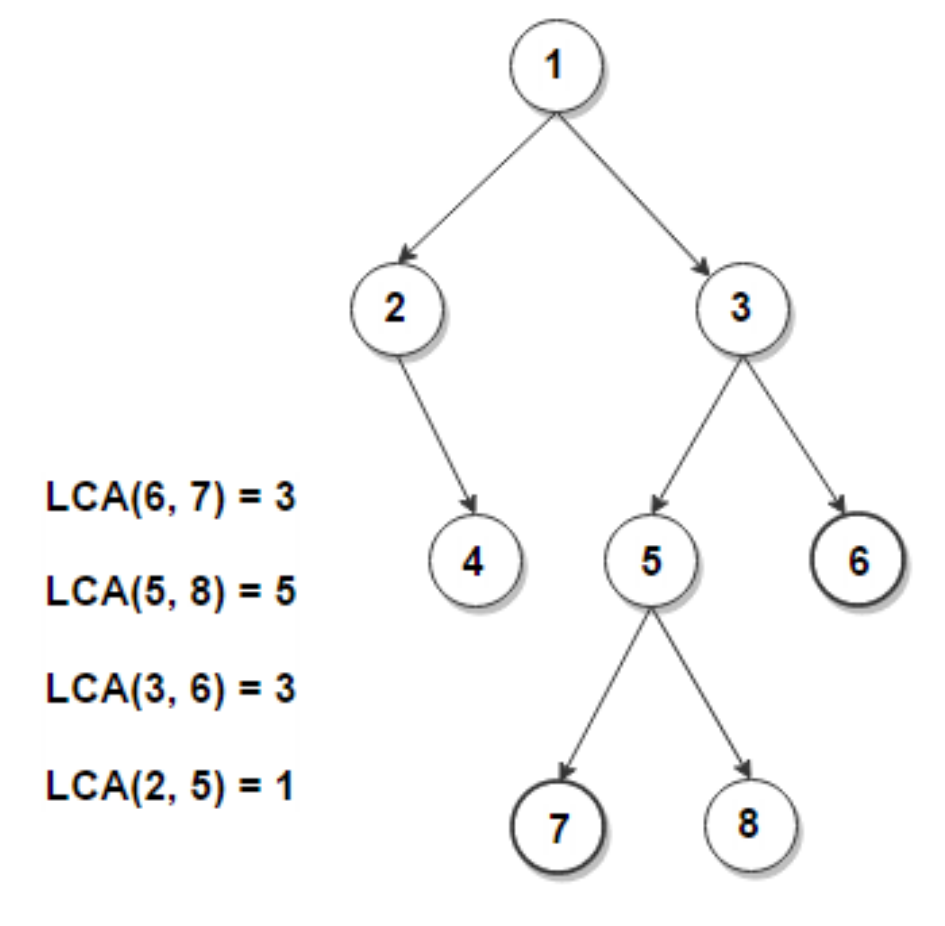
כתבו תוכנית אשר מוצאת ערך בעץ בינארי

```
// ******************** Question EXTRA ********************************** //
public Node returnNodeInBinaryTree(Node current,int key) {
    if(current == null) return null;
    if(current.data == key) return current;
    Node r = returnNodeInBinaryTree(current.right,key);
    Node l = returnNodeInBinaryTree(current.left,key);
    if(r != null) return r;
    if(l != null) return l;
    return null;
}
```

כתבו תוכנית אשר מחזירה את ה-(LCA) Lowest Common Ancestor של שני קודקודים בעץ בינארי

בהינתן עץ בינארי ו-2 קודקודים x ו-y

כתבו תוכנית אשר מוצאת את האב המשותף הנמוך ביותר של x ו-y בעץ חיפוש בינארי



פתרון 1:

Method 1 (By Storing root to n1 and root to n2 paths):

1) Find path from root to n1 and store it in a vector or array.

2) Find path from root to n2 and store it in another vector or array.

3) Traverse both paths till the values in arrays are same.
Return the common element just before the mismatch.

כתבו תוכנית אשר מחזירה את ה-Lowest Common Ancestor (LCA) של שני קודקודים בעץ בינארי

פתרון 1:

```
// ******************* Question 4 ********************************** //
public int findLCA(int n1, int n2) {
    if(search(n1) && search(n2)) {
        List<Node> path1 = findPath(n1);
        List<Node> path2 = findPath(n2);
        int i = 0;
        for(i=0; i<path1.size() && i<path2.size(); i++) {
            if(path1.get(i) != path2.get(i)) break;
        }
        return path1.get(i-1).data;
    }
    return Integer.MIN_VALUE;
}
```

```
private List<Node> findPath(int key) {
    List<Node> path = new ArrayList<Node>();
    return findPath(root, key,path);
}
```

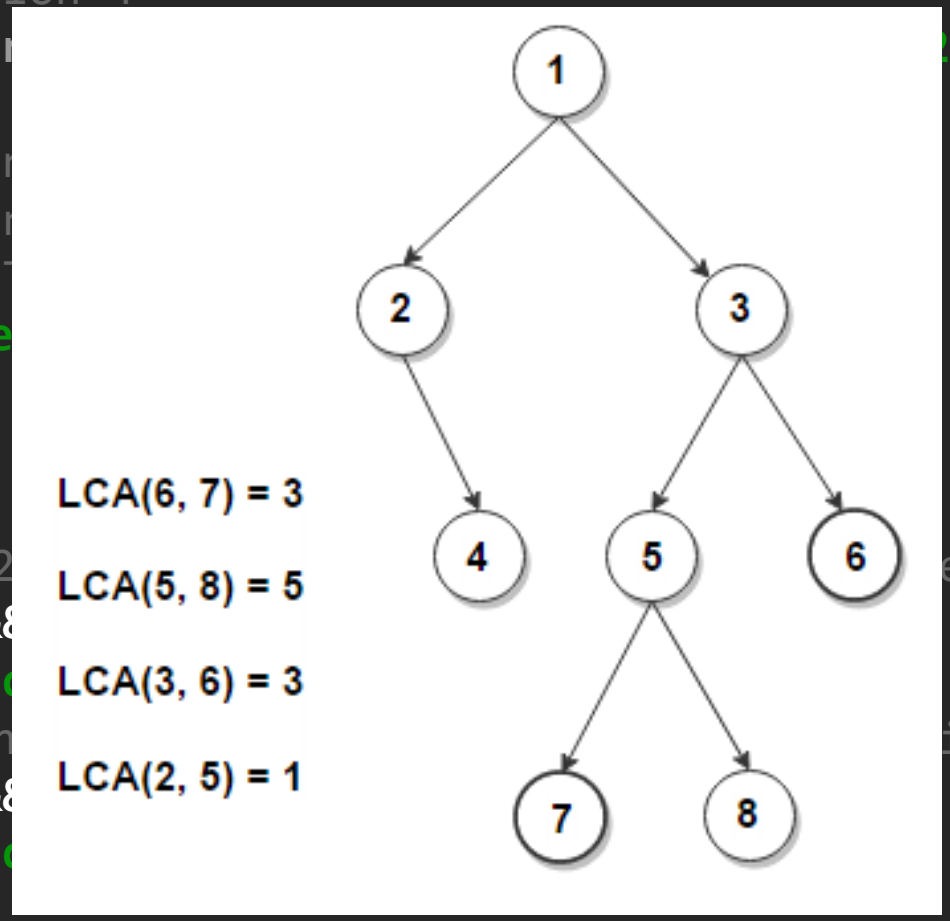
```
private List<Node> findPath(Node curr, int key, List<Node> path) {
    if(curr == null ) return path;
    path.add(curr);
    if(curr.data < key)
        findPath(curr.right,key,path);
    else
        findPath(curr.left,key,path);
    return path; // curr.data == key
}
```

plus extra spaces

כתבו תוכנית אשר מחזירה את ה-Lowest Common Ancestor (LCA) של שני קודקודים בעץ חיפוש בינארי

הצעה: לעבור בעץ עד שמגיעים לפיצול – עבודה עצמית (10 דקות)

```
// ******************* Question 4 ********************************** //
public int findLCA(int n1, i                                    ).data;  }

// This function returns poi
// values n1 and n2. This fu
// n2 are present in Binary T
public Node findLCA(Node node
{
        if (node == null)
            return null;
         // If both n1 and n2                                    es in left
         if (node.data > n1 &&
            return findLCA(no
          // If both n1 and n                                    ies in right
         if (node.data < n1 &&
            return findLCA(no
          return node;
}
```

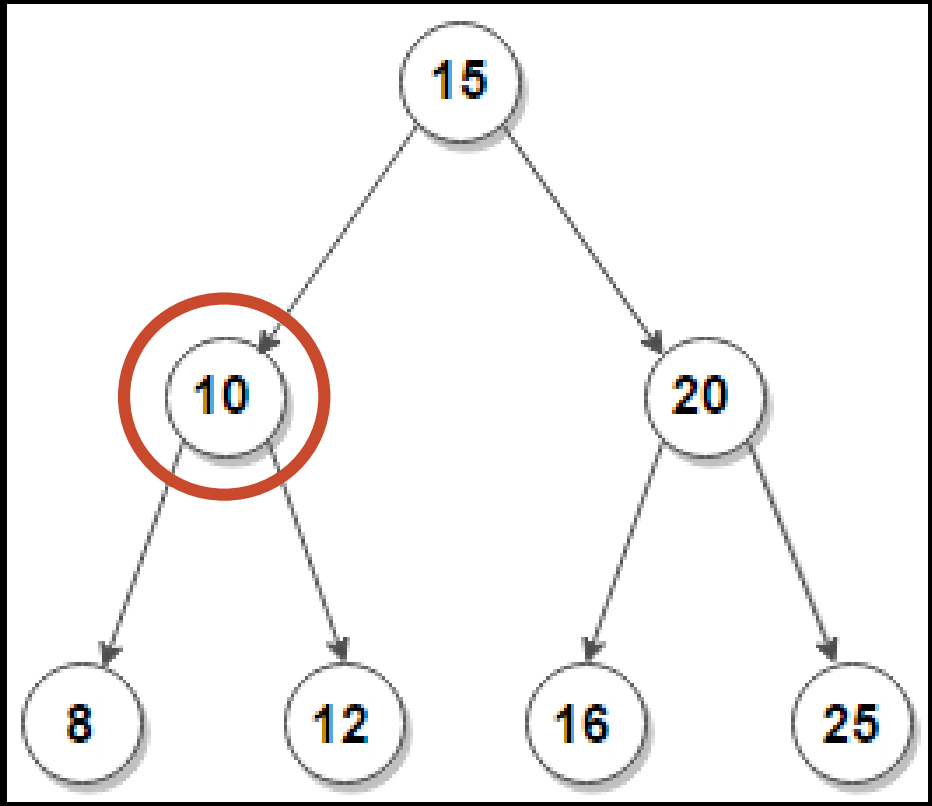


כתבו תוכנית אשר מחזירה את ה-(LCA) Lowest Common Ancestor של שני קודקודים בעץ בינארי

https://www.geeksforgeeks.org/lowest-common-ancestor-binary-tree-set-1/

כתבו תוכנית אשר מוצאת את האיבר ה- K הקטן ביותר בעץ חיפוש בינארי

K=2



https://www.techiedelight.com/find-kth-smallest-largest-element-bst/

כתבו תוכנית אשר מוצאת את האיבר ה- K הקטן ביותר בעץ חיפוש בינארי

פתרון:

ידוע כי In-Order traversal של עץ בינארי מחזיר את האיברים בסדר עולה
ולכן על מנת למצוא את האיבר ה- k בגודלו נבצע InOrder() ונאחסן את התוצאות במערך,
לאחר מכן נחזיר את האיבר ה- k בגודלו.

```
public int kthSmallest(Node root, int k) {
        if( k > size() ) return Integer.MAX_VALUE;
        List<Integer> list = new ArrayList<>();
        InOrder(root, list);
        return list.get(k - 1);
}
    private void InOrder(Node root, List<Integer> list) {
        if (root == null) return;
        InOrder(root.left, list);
        list.add(root.data);
        InOrder(root.right, list);
}
```

פתרון זה לא יעיל מבחינת מקום

ניתן לשמור את כמות הקריאות הרקורסיביות במשתנה עד שמגיעים ל-k (תרגיל בית)

https://stackoverflow.com/questions/2329171/find-kth-smallest-element-in-a-binary-search-tree-in-optimum-way?page=1&tab=active#tab-top

שאלה 6

כתוב פונקציה שמקבלת נתון הנמצא בצומת ובודקת אם הצומת הוא עלה. הפונקציה מחזירה מחרוזת:

אם הנתון אינו נמצא באחת מהצמתים הפונקציה מחזירה מחרוזת "not a vertex".

אם הצומת הוא אינו עלה הפונקציה מחזירה מחרוזת " not a leaf ".

אם הצומת הוא עלה הפונקציה מחזירה מחרוזת " a leaf ".

```
public String isLeaf( int data){ . . . }
```

תרגיל 9 לעבודה עצמית עצים בינאריים

עבודה עצמית (10 דקות)

```java
// ******************* Question 6 ********************************** //
public String isLeaf(int data){
    Node current = root;
    while(current != null) {
        if( data == current.data)
            break;
        else if( data > current.data )
            current = current.right;
        else
            current = current.left;
    }

    if(current == null) return "not a vertex";
    else if ( current.right != null || current.left != null )
     return "not a leaf";
    else
     return "leaf";
}
```

שאלה 1 (20 נקודות)

נתון עץ חיפוש בינארי **T**, וצומת בודד **z** כמתואר בציור. נניח כי אנו שומרים לכל צומת ב- **T** את הערך שלו **data**, מצביע לבן השמאלי שלו **left**, מצביע לבן הימני של **right**, ומספר הצמתים בתת העץ שהוא מהווה שורש שלו – **num**. בצומת **z** קיים ערך **data**, **num=1** ו- **left(z)=right(z)=null**.

א. כתוב אלגוריתם (פסאודו קוד) **add(node,z)** להוספת צומת **z** לעץ בינרי **T** בעל שורש **root** ע"י הקריאה הראשונה **add(root ,z)**, כך שלאחר ההוספה, כל צומת ב- **T** שומר את מספר הצמתים בתת העץ שלו. זמן הריצה הדרוש O(L) כש-L הוא מספר הרמות ב- **T** .

ב. כתוב אלגוריתם (פסאודו קוד) **less(node, x)** כך שבהינתן מספר **x**, ו- **node=root(T)**, השורש של **T**, מחזיר כמה איברים ב- **T** קטנים ממש מ-**x**. זמן ריצה יהיה O(L) כש-L הוא מספר הרמות ב-**T**.

עבודה עצמית (20 דקות)

מבחן לדוגמא 2016

```
public class Node {
    int data;
    Node right;
    Node left;
    public int num;
    public Node(int data)
    {
        this.data = data;
        left = right = null;
        num = 1;
    }
}
```

נתון עץ חיפוש בינארי T, וצומת בודד z כמתואר בציור. נניח כי אנו שומרים לכל צומת ב- T את הערך שלו data, מצביע לבן השמאלי שלו left, מצביע לבן הימני של right, ומספר הצמתים בתת העץ שהוא מהווה שורש שלו – num. בצומת z קיים ערך data, num=1 ו- left(z)=right(z)=null.

מבחן לדוגמא 2016

```java
public void add (Node node, Node z) {
    if(node == null)
        root = z;
    else {
        boolean exit = false;
        while(!exit) {
            if(z.data < node.data) {
                if(node.left == null)
                {
                    // Put Here
                    node.num ++ ;
                    node.left = z;
                    exit = true;
                }
                else {
                    node.num ++ ;
                    node = node.left;
                }
            }
            else { // z.data < node.data

                ... Symmetric

            }
        }
    } // End Else
}
```

א. כתוב אלגוריתם (פסאודו קוד) **add(node,z)** להוספת צומת **z** לעץ בינרי **T** בעל שורש **root** ע"י הקריאה הראשונה **add(root ,z)**, כך שלאחר ההוספה, כל צומת ב- **T** שומר את מספר הצמתים בתת העץ שלו. זמן הריצה הדרוש O(L) כש-L הוא מספר הרמות ב- **T**.

מבחן לדוגמא 2016

```java
public static void main(String[] args) {
    BST tree = new BST();
    int[] keys = {8,3,1,6,4,7,10,14,13};
    for(int i : keys)
        tree.add(tree.root,new Node(i));

    tree.printTree();
    System.out.println(tree.root.num);
    System.out.println(tree.root.right.num);
    System.out.println(tree.root.left.left.num);

}
```

```
 /----- 10
8
 |               /----- 7
 |       /----- 6
 |       |       \----- 4
 \----- 3
         \----- 1
9
3
1
```

מבחן לדוגמא 2016

ב. כתוב אלגוריתם (פסאודו קוד) `less(node, x)` כך שבהינתן מספר **x**, ו-**node=root(T)**, השורש של **T**, מחזיר כמה איברים ב- **T** קטנים ממש מ-**x**. זמן ריצה יהיה O(L) כש-L הוא מספר הרמות ב-**T**.

```
// B:
public int less(Node node, int x) {
    // Base Case:
    if ( node == null ) return 0;

    else if ( x == node.data ) {
        if(node.left != null)
            return node.left.num;
        else
            return 0;
        }
        else if( x > node.data ) {
            if(node.left != null)
                return node.left.num + 1 + less(node.right,x);
            else
                return 1 + less(node.right,x);
    }
    else // x < node.data
        return less(node.left,x);
}
```

```
                /----- 14
                |       \----- 13
        /----- 10
8
        |               /----- 7
        |       /----- 6
        |       |       \----- 4
        \----- 3
                \----- 1
```

מבחן לדוגמא 2016

שאלה 2 (35 נק') הדפסת עץ חיפוש בינארי לפי רמות.

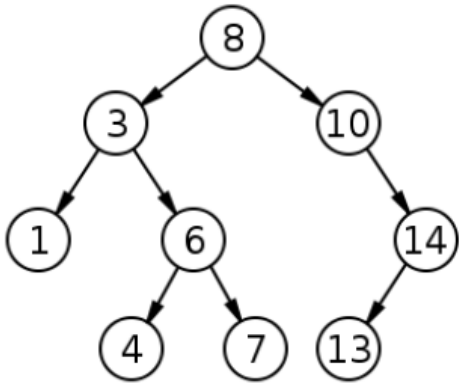
יש לכתוב מחלקה בשם **Question2**.

בתוך המחלקה יש לכתוב פונקציה סטטית שמקבלת עץ חיפוש בינארי ומדפיסה את הקדקודים שלו לפי רמות.

הקוד שמממש עץ חיפוש בינארי מצורף למבחן.

```
public static void printTreeByLevels(BST tree)
```

דוגמה : קלט :



פלט :

```
8
3 10
1,6,14
4,7,13
```

מבנה נתונים מבחן קיץ 2015 מועד ב

עבודה עצמית (10 דקות)

```java
// ******************* Question 8 ********************************** //
public static void printTreeByLevels(BST tree) {
    // Base Case
    if(tree.root == null)
         return;
    // Create an empty queue for level order tarversal
    Queue<Node> q = new LinkedList<Node>();
    // Enqueue Root and initialize height
    q.add(tree.root);
    while(!q.isEmpty()) {
        int NumberOfNodesAtCurrentLevel = q.size();
        while(NumberOfNodesAtCurrentLevel > 0 ) {
            Node top = q.poll();
            System.out.print(top.data + " ");
            if(top.left != null)
                q.add(top.left);
            if(top.right != null)
                q.add(top.right);
            NumberOfNodesAtCurrentLevel--;
        }
     System.out.println();
    }
}
```

כתבו פונקציה שמקבלת עץ בינארי ומחזירה אמת אם הוא עץ שלם.

עבודה עצמית (10 דקות)

```
// ******************* Question 9 ********************************** //
public boolean isFullTree(Node node) {
        // if empty tree
         if(node == null)
         return true;

         // if leaf node
         if(node.left == null && node.right == null )
             return true;

         // if both left and right subtrees are not null
         // Return Recur on Left subtree and right Subtree
         if((node.left != null) && (node.right != null))
             return (isFullTree(node.left) && isFullTree(node.right));

         // if none work
         return false;
}
```