1 namų darbas (2 užd.). Atsiskaityti iki kovo 3 d.

Uždavinys 1 (0.2 balo). (a) Pasinaudodami aritmetinės progresijos $a_k, a_{k+1}, \dots, a_l$ (kur $a_i = a_k + (i-k)\cdot d$, $i = k+1, \dots, l$) sumos formule

$$\sum_{j=k}^{l} a_j = \frac{a_k + a_l}{2}(l-k+1),$$

geometrinės progresijos $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ (kur $b_i = b_1 \cdot q^{i-1}$, $i = 2, \dots, k$, ir $q \neq 1$) sumos formule

$$\sum_{i=1}^{k} b_i = b_1 \frac{1-q^k}{1-q}$$

bei nesunkiai matematine indukcija įrodoma formule

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

apskaičiuokite baigtinę sumą $f(n) = \sum_{k=u(n)}^{v(n)} g(k)$.

(b) Raskite $f(n)$ asimptotiką, t.y. konstantas a ir b tokias, kad $f(n) \sim an^b$, kai $n \to \infty$. Jei $f(n)$ auga eksponentiškai, tada raskite konstantas a ir b tokias, kad $f(n) \sim ab^n$.

Nurodymas. $f(n) \sim g(n)$ ("f yra asimptotiškai lygi g"), jei

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Variantai

1. $f(n) = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2$;
2. $f(n) = \sum_{k=2}^{n-1} k^2 - (\sum_{k=3}^{n} k)^2$;
3. $f(n) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + (n-1)\cdot n$;
4. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2$;
5. $f(n) = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2$, kai n — nelyginis;
6. $f(n) = \sum_{k=1}^{[n/2]} k^2$, kur $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis;
7. $f(n) = 1^2 - 1 + 2^2 + 2 + 3^2 - 3 + \cdots + n^2 + (-1)^n n$;
8. $f(n) = \sum_{k=-n}^{n} (k^2 + k)$;
9. $f(n) = 1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + \cdots + (n-2) + (n-1) - n$, kai n dalinasi iš 3;
10. $f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)$;

11. $f(n) = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \cdots + \frac{n}{n/2} + 1$, kur $n = 2^k$;

12. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} (3^k - k^2)$;

13. $f(n) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + (n-2) \cdot n$, kur $n \geq 3$;

14. $f(n) = 1 + 2^1 + 2 + 2^2 + 3 + 2^3 + \cdots + n + 2^n$;

15. $f(n) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$;

16. $f(n) = 2 - 1 + 2^2 - 2 + 2^3 - 3 + \cdots + 2^n - n$;

17. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} (k^2 - 2k)$;

18. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} (2^k + k^2)$;

19. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 1}{3^{k-1}}$;

20. $f(n) = n - \frac{n}{2} + \frac{n}{4} - \frac{n}{8} + \cdots + (-1)^k \frac{n}{2^k}$, kur $n = 2^k$;

21. $f(n) = \sum_{k=-n}^{n} (2^k - k^2)$;

22. $f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{2^{k+1}}{3^k} + 1)$;

23. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+1)$;

24. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} [\frac{k}{2}]$, kur $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis;

25. $f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k + 1}{3^{k+1}}$;

26. $f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - k - 1)$;

27. $f(n) = 3 - 2 + 3^2 - 2^2 + \cdots + (3^n - 2^n)$;

28. $f(n) = \sum_{k=0}^{n/2} (2^k + k)$, kur n — lyginis;

29. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} [\frac{k^2}{2}]$, kur $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis, o n — lyginis;

30. $f(n) = \sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^k 2^k$, kur $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis.

Uždavinys 2 (0.3 balo). Duotas programos fragmentas su parametru n.

(a) Raskite tikslų žingsnių skaičių $L(n)$, laikant, kad bet kurios operacijos (priskyrimo, aritmetinės, palyginimo ir kt.) svoris yra 1. Žingsnių skaičius skaičiuojamas "blogiausiu atveju", t.y. maksimalus galimas "blogiausiems duomenims".

(b) Raskite $L(n)$ asimptotiką, t.y. konstantas a ir b tokias, kad $L(n) \sim an^b$, kai $n \to \infty$.

(c) Duota nedidelė konstanta c. Nurodykite duomenis, kuriems programa atliks lygiai $L(c)$ žingsnių ir išvardinkite tuos žingsnius.

(d) Raskite programos vykdymo laiko $T(n)$ eilę, t.y. konstantą d tokią, kad $T(n) = \Theta(n^d)$, kai $n \to \infty$. Skaičiuojant laiką $T(n)$, laikome, kad skirtingų operacijų (pvz. priskyrimo, aritmetinės, palyginimo) laikas yra skirtingas: operacija i reikalauja c_i laiko.

Nurodymai

1. $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$ (arba $f(n) \preccurlyeq g(n)$) (sakome, kad "f asimptotiškai yra ne aukštesnės eilės dydis kaip g"), jei $\exists N \in \mathbb{N}$ ir $\exists c > 0$: $f(n) \leqslant cg(n)$ $\forall n \geq N$;

2. $f(n) = \Theta(g(n))$ (arba $f(n) \asymp g(n)$) (sakome, kad "f ir g asimptotiškai yra tokios pat eilės dydžiai"), jei $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$ ir $g(n) = \mathrm{O}(f(n))$.

3. Skaičiuojant žingsnius laikome, kad priskyrimo ir aritmetinė operacija yra 1 žingsnis, t.y. komanda $a := 1$ yra 1 žingsnis, komanda $a := b+c$ irgi yra vienas žingsnis, bet komanda $a := b + c - d$ yra 2 žingsniai. Komanda $A[i + j] := b + c$ taip pat reikalauna 2 žingsnių: (1) apskaičiuojame indekso reikšmę $k = i + j$, (2) masyvo elementui $A[k]$ priskiriame reikšmę $b + c$.

4. Ciklo **for** ilgio k "palaikymas", t.y. komanda **for** $i := 1$ **to** k **do**, reikalauja $2(k+1)$ žingsnių, nes kiekvieną kartą yra vykdoma sudėtis $i := i+1$ ir palyginimas $i \leq k$?. Baigiant ciklą bus atlikta sudėtis $i := k + 1$ bei palyginimas $k + 1 \leq k$?, po kurių ciklo k¯unas jau nebus vykdomas.

Variantai

1. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1 : n]$; $c = 2$.

   for $i := 1$ **to** n **do**

       $B[i] := 0$

       for $j := i$ **to** n **do**

           $B[i] := B[i] + A[j]$

       if $B[i] < A[i]$ **then** $B[i] := 0$

2. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$; $c = 2$.

   for $j := 1$ **to** n **do**

   $C[j] := 0$

   $i := n$

   while $i \geq j$ **do**

   $C[j] := C[j] + A[i]$

   $i := i - 1$

   if $C[j] < 0$ **then** $C[j] := 0$

3. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$; $c = 2$.

   for $j := 1$ **to** n **do**

   $C[j] := 0$

   for $i := j + 1$ **to** n **do**

   $C[j] := C[j] + A[i]$

   if $C[j] < 0$ **then** $C[j] := -C[j]$

4. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$; $c = 2$.

   for $j := 1$ **to** n **do**

   $B[j] := 0$

   $k := j - 1$

   for $i := 1$ **to** k **do**

   $B[j] := B[j] + A[i]$

   if $B[j] < 0$ **then** $B[j] := 0$

5. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$ (kur n — lyginis); $c = 2$.

   for $j := 1$ **to** n **do**

   $C[j] := 0$

   $i := 1$

   $k := n/2$

   while $i \leq k$ **do**

   $C[j] := C[j] + A[i]$

   $i := i + 1$

   if $C[j] < 0$ **then** $C[j] := 0$

6. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$; $c = 2$.

   $i := 1$

   while $i \leq n$ **do**

   $\quad B[i] := 0$

   $\quad$ **for** $j := i$ **to** n **do**

   $\quad\quad B[i] := B[i] + A[j]$

   $\quad$ **if** $B[i] < A[i]$ **then** $B[i] := 0$

   $\quad i := i + 1$

7. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$; $c = 2$.

   $j := 1$

   while $j \leq n$ **do**

   $\quad C[j] := 0$

   $\quad i := n$

   $\quad$ **while** $i \geq j$ **do**

   $\quad\quad C[j] := C[j] + A[i]$

   $\quad\quad i := i - 1$

   $\quad$ **if** $C[j] < 0$ **then** $C[j] := 0$

   $\quad j := j + 1$

8. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$; $c = 2$.

   $j := 1$

   while $j \leq n$ **do**

   $\quad C[j] := 0$

   $\quad$ **for** $i := j + 1$ **to** n **do**

   $\quad\quad C[j] := C[j] + A[i]$

   $\quad$ **if** $C[j] < 0$ **then** $C[j] := -C[j]$

   $\quad j := j + 1$

9. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$; $c = 2$.

   $j := 1$

   while $j \leq n$ **do**

   $\quad B[j] := 0$

   $\quad k := j - 1$

   $\quad$ **for** $i := 1$ **to** k **do**

$B[j] := B[j] * A[i]$

if $B[j] < 0$ **then** $B[j] := 0$

$j := j + 1$

10. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1 : n]$ (kur n — lyginis); $c = 2$.

$j := 1$

while $j \leq n$ **do**

$C[j] := 0$

$i := 1$

$k := n/2$

while $i \leq k$ **do**

$C[j] := C[j] * A[i]$

$i := i + 1$

if $C[j] < 0$ **then** $C[j] := 0$

$j := j + 1$

11. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1 : n]$; $c = 2$.

$m := n - 1$

for $i := 1$ **to** m **do**

$\min := A[i]$

$k := i$

for $j := i + 1$ **to** n **do**

if $A[j] < \min$ **then**

$\min := A[j]$

$k := j$

$A[k] := A[i]$

$A[i] := \min$

12. Duotas realių skaičių masyvas $A[0 : n]$ ir $z \in \mathbb{R}$; $c = 1$.

$S := 0$

for $i := 0$ **to** n **do**

$d := A[i]$

for $j := 1$ **to** i **do**

$d := d * z$

$S := S + d$

13. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$; $c = 2$.

$i := 1$

$m := n - 1$

while $i < n$ **do**

  for $j := m$ **step** -1 **to** i **do**

    if $A[j] > A[j+1]$ **then**

      $key := A[j+1]$

      $A[j+1] := A[j]$

      $A[j] := key$

  $i := i + 1$

14. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$ (kur n — nelyginis); $c = 1$.

for $i := 1$ **to** n **do**

  $S[i] := 0$

  for $j := 1$ **to** n **do**

    if $j \leq (n+1)/2$ **then** $S[i] := S[i] + A[j] * (A[j] + 1)$

  $S[i] := S[i] * i$

15. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$; $c = 2$.

$j := 1$

while $j < n$ **do**

  $\min := A[j]$

  $l := j$

  for $i := j + 1$ **to** n **do**

    if $A[i] < \min$ **then**

      $\min := A[i]$

      $l := i$

  $A[l] := A[j]$

  $A[j] := \min$

  $j := j + 1$

16. Duotas realių skaičių masyvas $A[0:n]$ ir $z \in \mathbb{R}$; $c = 1$.

$T := 0$

for $j := 0$ **to** n **do**

  $d := A[j]$

$i := 1$

while $i \leq j$ **do**

$d := d * z$

$i := i + 1$

$T := T + d$

17. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1 : n]$; $c = 2$.

$j := 1$

while $j \leq n$ **do**

$i := n - 1$

while $i \geq j$ **do**

if $A[i] > A[i + 1]$ **then**

$key := A[i]$

$A[i] := A[i + 1]$

$A[i + 1] := key$

$i := i - 1$

$j := j + 1$

18. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1 : n]$ (n — lyginis); $c = 2$.

$j := 1$

while $j \leq n$ **do**

$S[j] := 0$

if $A[j] > 0$ **then** $l := 2$ **else** $l := 3$

for $i := 1$ **step** l **to** n **do**

$S[j] := S[j] + A[j] * A[i]$

$j := j + 1$

19. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1 : n]$ (n — lyginis); $c = 2$.

for $i := 1$ **to** n **do**

$S[i] := 0$

$l := 2 * i$

for $j := l$ **to** n **do**

$S[i] := S[i] + A[j]$

20. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$; $c = 2$.

$m := n - 1$
for $j := 1$ **to** m **do**
    $\min := A[j]$
    $l := j$
    $i := n$
    while $i > j$ **do**
        if $A[i] < \min$ **then**
            $\min := A[i]$
            $l := i$
        $i := i - 1$
    $A[l] := A[j]$
    $A[j] := \min$

21. Duotas realių skaičių masyvas $A[0:n]$ ir $z \in \mathbb{R}$; $c = 1$.

$S := 0$
$i := 0$
while $i \leq n$ **do**
    $e := A[i]$
    $j := 1$
    while $j \leq i$ **do**
        $e := e * z$
        $j := j + 1$
    $S := S + e$
    $i := i + 1$

22. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$; $c = 2$.

$m := n - 1$
for $j := 1$ **to** m **do**
    for $i := m$ **step** -1 **to** j **do**
        if $A[i] > A[i+1]$ **then**
            $key := A[i]$
            $A[i] := A[i+1]$
            $A[i+1] := key$

23. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$ (n — lyginis); $c = 2$.

$j := 1$
while $j \leq n$ **do**
  $S[j] := 0$
  $k := 2 * j$
  for $i := k$ **to** n **do**
    $S[j] := S[j] + A[i]$
  $j := j + 1$

24. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$; $c = 2$.

for $i := 1$ **to** n **do**
  $S[i] := 0$
  $k := 1$
  if $A[i] < 0$ **then** $k := 2$
  for $j := i$ **step** k **to** n **do**
    $S[i] := S[i] + A[i] * A[j]$

25. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$; $c = 2$.

$m := n - 1$
for $j := 1$ **to** m **do**
  $\min := A[j]$
  $k := j$
  $i := j + 1$
  while $i \leq n$ **do**
    if $A[i] < \min$ **then**
      $\min := A[i]$
      $k := i$
    $i := i + 1$
  $A[k] := A[j]$
  $A[j] := \min$

26. Duotas realių skaičių masyvas $A[0:n]$ ir $z \in \mathbb{R}$; $c = 1$.

$j := 0$
$m := n + 1$
$T := 0$

while $j < m$ **do**

$e := A[j]$

for $i := 1$ **to** j **do**

$e := e * z$

$T := T + e$

$j := j + 1$

27. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1 : n]$; $c = 2$.

$m := n - 1$

for $i := 1$ **to** m **do**

$j := m$

while $j \geq i$ **do**

if $A[j] > A[j + 1]$ **then**

$key := A[j]$

$A[j] := A[j + 1]$

$A[j + 1] := key$

$j := j - 1$

28. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1 : n]$ (n — lyginis); $c = 2$.

for $i := 1$ **to** n **do**

$S[i] := 0$

if $A[i] > 0$ **then** $k := 2$ **else** $k := 3$

for $j := 1$ **step** k **to** n **do**

$S[i] := S[i] + A[j] * A[i]$

29. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1 : n]$; $c = 2$.

$j := 1$

while $j \leq n$ **do**

$S[j] := 0$

$l := 1$

if $A[j] > 0$ **then** $l := 2$

for $i := j$ **step** l **to** n **do**

$S[j] := S[j] + A[j] * A[i]$

$j := j + 1$

30. Duotas sveikų skaičių masyvas $A[1:n]$ (n — lyginis); $c = 2$.

for $j := 1$ **to** n **do**

    $S[j] := 0$

for $j := n$ **step** -2 **to** 1 **do**

    $k := j/2$

    for $i := 1$ **to** k **do**

        $S[j] := S[j] + A[i]$