2 namų darbas (2 užd.). Atsiskaityti iki kovo 17 d.

Uždavinys 1 (0.2 balo). (a) Duotos funkcijos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ir $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Užpildykite lentelę pliusais bei minusais, kur pliusas (atitinkamai minusas) reiškia, kad funkciją A galima (atitinkamai negalima) užrašyti pavidalu $A = C(B)$, kur B yra kita funkcija, o C yra vienas iš žymėjimų $O, o, \Omega, \omega, \Theta$.

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$f(n)$	$g(n)$					
$g(n)$	$f(n)$					

Sprendžiant gali prireikti Lopitalio taisyklės bei formulių

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad \text{bei} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Formaliai norėdami pritaikyti Lopitalio taisyklę funkcijų santykio ribos $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$ įrodymui, turėtume funkcijas f ir g pratęsti iki funkcijų $\tilde{f} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ir $\tilde{g} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, panaudoję išvestines gauti, kad $\lim_{x\to\infty} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = c$, o tada grįžti prie funkcijų f ir g. Kad įrodymai būtų paprastesni, vietoje to mes neformaliai tiesiogiai skaičiuosime funkcijų "išvestinę pagal natūralų argumentą n", turėdami galvoje, kad įrodymą visada galima pagrįsti griežtai, pereinant prie realaus kintamojo x, o paskui vėl grįžtant prie natūralaus argumento.

(b) Raskite didžiausias n reikšmes, su kuriomis funkcijos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ir $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tenkina nelygybes $f(n) \le 1000000$ ir $g(n) \le 1000000$, t.y., skaičius N_f ir N_g tokius, kad $f(N_f) \le 1000000$ bei $g(N_g) \le 1000000$, tačiau $f(N_f + 1) > 1000000$ bei $g(N_g + 1) > 1000000$.

Variantai

1. $f(n) = 100 \log_2 \log_2 n, \quad g(n) = \sqrt{2 \log_2 n}.$
2. $f(n) = 10 \log_2(2^{\sqrt{n}}), \quad g(n) = 100\sqrt[3]{n}.$
3. $f(n) = \log_2^2 n, \quad g(n) = 2^{\log_2 \log_2 n^2}.$
4. $f(n) = 100n \log_2 n, \quad g(n) = \frac{n^2}{\log_2^2 n}.$
5. $f(n) = 100n \log_2 n, \quad g(n) = 2^{1.2 \log_2 n}.$
6. $f(n) = 10n \log_2 n + 0.5n^2, \quad g(n) = 100n\sqrt{n}.$
7. $f(n) = 4^{\sqrt{n}}, \quad g(n) = 2^{n/\log_2 n}.$
8. $f(n) = 10n^2 + 100n \log_2^2 n, \quad g(n) = n^2 \log_2 n.$

9. $f(n) = \frac{n}{100\log_2^2 n}$, $\quad g(n) = n^{1/2}$.

10. $f(n) = \frac{n}{100\log_2 n}$, $\quad g(n) = 10n^{2/3}$.

11. $f(n) = 10n\sqrt{n}$, $\quad g(n) = n \cdot (2^{\log_2 \sqrt{n}} + 128)$.

12. $f(n) = 10n$, $\quad g(n) = n + \log_2^2 n^4$.

13. $f(n) = 10n$, $\quad g(n) = n + 100n^{2/3}$.

14. $f(n) = 10n\log_2 n$, $\quad g(n) = n^2 \cdot 2^{-\log_2 \log_2 n}$.

15. $f(n) = \sqrt{n^3 \log_2 n}$, $\quad g(n) = 10n\sqrt{n} + 100n$.

16. $f(n) = 2^{\log_2^2 n}$, $\quad g(n) = 10n^{10}$.

17. $f(n) = (\sqrt{2})^{\log_2 n}$, $\quad g(n) = \frac{1}{2}\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}$.

18. $f(n) = 10n^2\log_2^2 n$, $\quad g(n) = n^2 \cdot (\sqrt{2})^{\log_2 n}$.

19. $f(n) = 10n^{\log_2 3}$, $\quad g(n) = n\sqrt{n} + 100n$.

20. $f(n) = 10n^{\log_2 7}$, $\quad g(n) = n^2 \cdot 2^{0.5\log_2 n}$.

21. $f(n) = 2\sqrt{2^n}$, $\quad g(n) = 4^{n/4} + n^2$.

22. $f(n) = \frac{2^n}{n^2}$, $\quad g(n) = 10n^2\sqrt{2^n}$.

23. $f(n) = 10n^2 \cdot 2^{\sqrt{n}}$, $\quad g(n) = \sqrt{2^n}$.

24. $f(n) = 2^n$, $\quad g(n) = n^2\sqrt{3^n}$.

25. $f(n) = 10n\log_2 n + 100n$, $\quad g(n) = n \cdot 4^{\log_2 \log_2 n}$.

26. $f(n) = n\log_2 n$, $\quad g(n) = 100n^{1.1}$.

27. $f(n) = n^2 + n \cdot 2^{0.5\log_2 n}$, $\quad g(n) = 10n^2 + \frac{n^2}{\sqrt[3]{n}}$.

28. $f(n) = \sqrt[3]{n}\log_2 n$, $\quad g(n) = n \cdot 2^{-0.5\log_2 n}$.

29. $f(n) = \sqrt{n^3 \log_2 n}$, $\quad g(n) = 4^{\log_2 n}$.

30. $f(n) = 10n\log_2^2 n$, $\quad g(n) = \frac{n^2}{\log_2 n}$.

Uždavinys 2 (0.3 balo). (a) Duotas 5 funkcijas $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ išdėstykite jų augimo greičio didėjimo tvarka (kiekviena funkcija yra O(kitos funkcijos)). Taip pat nurodykite, kurios funkcijos turi vienodą augimo greitį (yra Θ viena nuo kitos). Tos pačios augimo eilės funkcijas dėstykite didėjimo tvarka atsižvelgiant ir į konstantas.

(b) Išdėstykite didėjimo tvarka funkcijų reikšmes $f_1(n), f_2(n), f_3(n), f_4(n), f_5(n)$, kai $n = 16$.

(c) Išdėstykite didėjimo tvarka funkcijų reikšmes $f_1(n), f_2(n), f_3(n), f_4(n), f_5(n)$, kai $n = 2^{16} = 65536$.

Variantai

1. $f_1(n) = (\sqrt{2})^{\log_2 n}$, $f_2(n) = \frac{2^n}{100n}$, $f_3(n) = n^2 + 10n$, $f_4(n) = 10n^{1/2}$ ir $f_5(n) = 100 \log_2^2 n$.
2. $f_1(n) = \sqrt[4]{2^n}$, $f_2(n) = 2^{\log_2 \log_2 n}$, $f_3(n) = \frac{n}{\log_2 n}$, $f_4(n) = \sqrt{10n}$ ir $f_5(n) = n^{\log_4 3}$.
3. $f_1(n) = 10n + \log_2^2(4^n)$, $f_2(n) = 10n \log_2 n$, $f_3(n) = \sqrt{2^n}$, $f_4(n) = n^{\log_2 5}$ ir $f_5(n) = \frac{n^3}{10 \log_2 n}$.
4. $f_1(n) = 100n$, $f_2(n) = 2^{\log_2 \log_2 n}$, $f_3(n) = n^{4/3}$, $f_4(n) = n \log_2 n + 10n$ ir $f_5(n) = 2^{\sqrt[4]{n}}$.
5. $f_1(n) = 4^{\sqrt{n}}$, $f_2(n) = 100n^2 \log_2 n$, $f_3(n) = n^2 \cdot 2^{n/2}$, $f_4(n) = n^{5/2}$ ir $f_5(n) = n^2(\log_2 n + \sqrt{n})$.
6. $f_1(n) = \sqrt{n^3 \log_2 n}$, $f_2(n) = 2^{\log_2^2 n}$, $f_3(n) = 100n\sqrt{n}$, $f_4(n) = \frac{n^2}{\log_2 n}$ ir $f_5(n) = \log_2^2 n$.
7. $f_1(n) = \frac{n^2}{\log_2^2 n}$, $f_2(n) = 10n\sqrt{n}$, $f_3(n) = 2^{n/\log_2 n}$, $f_4(n) = n^{\log_2 3}$ ir $f_5(n) = n + 10\sqrt{n}$.
8. $f_1(n) = 10n^2$, $f_2(n) = 2\sqrt{2^n}$, $f_3(n) = 100n \log_2^2 n$, $f_4(n) = \frac{n^3}{10 \log_2 n}$ ir $f_5(n) = 4^{n/4}$.
9. $f_1(n) = 10n^{\log_2 3}$, $f_2(n) = n\sqrt{n}$, $f_3(n) = 2^{2 \log_2 n}$, $f_4(n) = n^{\sqrt{2}}$ ir $f_5(n) = 1.1^n$.
10. $f_1(n) = 10n^{3/2}$, $f_2(n) = n \log_2 n + \frac{n^2}{2}$, $f_3(n) = \frac{n^2}{\log_2 n}$, $f_4(n) = 2^{\sqrt{n}}$ ir $f_5(n) = \sqrt{2^n}$.
11. $f_1(n) = n \cdot 2^{n/2}$, $f_2(n) = 4^{\log_2 \log_2 n}$, $f_3(n) = \sqrt{2^n} \log_2^2 n$, $f_4(n) = 2 \log_2^2 n$ ir $f_5(n) = 10n$.
12. $f_1(n) = 10n$, $f_2(n) = \sqrt{2^{n/2}}$, $f_3(n) = \sqrt{n} \cdot 2^{\log_2 \sqrt{n}}$, $f_4(n) = \sqrt[3]{n^4}$ ir $f_5(n) = \log_2 2^{n \log_2 n}$.

13. $f_1(n) = \frac{n^3}{\sqrt{n}}$, $f_2(n) = 2^{n\log_2 n}$, $f_3(n) = n^2\sqrt{n} + 100n^2$, $f_4(n) = \frac{n^3}{\log_2 n}$ ir $f_5(n) = n^{\log_2 7}$.

14. $f_1(n) = 2^{1.2\log_2 n}$, $f_2(n) = 2^{\sqrt{n}}$, $f_3(n) = 100n\sqrt{n}$, $f_4(n) = n\log_2 n$ ir $f_5(n) = \frac{n^2}{\log_2 n}$.

15. $f_1(n) = 4^{\log_2 n}$, $f_2(n) = 4^{\sqrt{n}}$, $f_3(n) = \frac{n^3}{\log_2 n}$, $f_4(n) = 100n^2$ ir $f_5(n) = n\log_2^2 n$.

16. $f_1(n) = (n + \sqrt{n})^2$, $f_2(n) = \sqrt{2^n}$, $f_3(n) = 10n\log_2^2 n$, $f_4(n) = \frac{n^3}{10\log_2 n}$ ir $f_5(n) = n^{\log_2 5}$.

17. $f_1(n) = \frac{n}{\log_2 n}$, $f_2(n) = 10\log_2^2 n$, $f_3(n) = \frac{n}{10}$, $f_4(n) = 1.1^n$ ir $f_5(n) = 10\sqrt{n}\log_2 n$.

18. $f_1(n) = n + \log_2 n^4$, $f_2(n) = 2^{n/\log_2 n}$, $f_3(n) = \sqrt{n} + \sqrt[3]{n}$, $f_4(n) = 10n + \log_2 n$ ir $f_5(n) = \frac{n^2}{\log_2 n}$.

19. $f_1(n) = 4^{\log_2 n}$, $f_2(n) = 10n\log_2 n$, $f_3(n) = 2^{\sqrt[4]{n}}$, $f_4(n) = 10n^2 + \log_2^2 n$ ir $f_5(n) = n^{\log_2 3}$.

20. $f_1(n) = \sqrt{n\log_2 n}$, $f_2(n) = (\sqrt{2})^{\log_2 n}$, $f_3(n) = \frac{n}{\log_2 n}$, $f_4(n) = 2^{n/4}$ ir $f_5(n) = 10\sqrt{n}$.

21. $f_1(n) = \sqrt{2^n}$, $f_2(n) = 10n^2 + 100n\log_2^2 n$, $f_3(n) = n^2\sqrt{n}$, $f_4(n) = n^2\log_2 n$ ir $f_5(n) = n^{\log_2 7}$.

22. $f_1(n) = n + \log_2^2 n^4$, $f_2(n) = 10n\log_2 n$, $f_3(n) = 10n - 5$, $f_4(n) = \sqrt{2^n}$ ir $f_5(n) = n\sqrt{n}$.

23. $f_1(n) = 2^{\log_2^2 n}$, $f_2(n) = n^2 + 10n$, $f_3(n) = 10n^{10}$, $f_4(n) = 4^{\log_2 n}$ ir $f_5(n) = \frac{n^2}{\log_2 n}$.

24. $f_1(n) = n + 10\log_2 n$, $f_2(n) = n\log_2 n$, $f_3(n) = 2^{1.2\log_2 n}$, $f_4(n) = \sqrt{n}\log_2 n$ ir $f_5(n) = (1.2)^n$.

25. $f_1(n) = 10n^{\log_2 3}$, $f_2(n) = 10n\sqrt{n}$, $f_3(n) = \frac{n^2}{\log_2 n}$, $f_4(n) = n \cdot (\sqrt{2})^{\log_2 n}$ ir $f_5(n) = 2^{\sqrt{n}}$.

26. $f_1(n) = 2^{\sqrt[4]{n}}$, $f_2(n) = n\sqrt[4]{n}$, $f_3(n) = 10n\log_2 n$, $f_4(n) = \frac{n^2}{10\log_2 n}$ ir $f_5(n) = n^{5/4} + 10n$.

27. $f_1(n) = n^2 + n\sqrt{n}$, $f_2(n) = 2^{\sqrt{n}}$, $f_3(n) = \frac{n^2}{\log_2 n}$, $f_4(n) = 100n^{\log_2 3}$ ir $f_5(n) = 4^{\log_2 n}$.

28. $f_1(n) = 2^{n/2}$, $f_2(n) = 10n + (\frac{n}{2})^2$, $f_3(n) = n\log_2^2 n$, $f_4(n) = 4^{\log_2 n}$ ir $f_5(n) = \frac{n^3}{\log_2 n}$.

29. $f_1(n) = 2\log_2^2 n$, $f_2(n) = n\log_2 n$, $f_3(n) = 2\sqrt{n}$, $f_4(n) = \sqrt{n} + \log_2^2 n$ ir $f_5(n) = 2^{\log_2 \sqrt{n}}$.

30. $f_1(n) = \log_2 4^n$, $f_2(n) = n+2\sqrt{n}$, $f_3(n) = n\log_2 n$, $f_4(n) = 2^{\sqrt{n}}$ ir $f_5(n) = \frac{n^2}{\log_2 n}$.