Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Projektni zadatak iz dinamike mehaničkih sistema

Odsek za signale i sisteme

školska 2023/24 godina

Profesor: prof. dr Marko Krstić

Filip Bajraktari
Vladimir Ignjatijević
Ana Manojlović

Sadržaj

1 Uvod

1.1 Constraint stabilization method

Kada opisujemo neki mehanički sistem u kome postoje odredjena ograničenja možemo postaviti jednačine koje opisuju odgovarajuće sile ograničenja. Primenom metoda Lagranžovih množilaca moguće je dobiti sistem jednačina koji u potpunosti opisuje kretanje posmatranog sistema. Medjutim, dobijeni sistem sastojaće se iz diferencijalnih jednačina (dobijenih iz modifikovanih Lagranž-Ojlerovih jednačina) i algebarskih koje opisuju funkcije ograničenja sistema. Ukoliko ovakav sistem jednačina rešavamo kompijuterski potrebno je da nekakva odabrana numerička metoda kojom će se doći do rešenja diferencijalnih jednačina zadivoljava i zadate algebarske jednačine. Jedan način za rešavanje ovakvog problema jeste da se data algebarska jednačina pretvori u diferencijalnu primenom constraint stabilization metode. Ova metoda podrazumeva zapisivanje algebarske jednačine ograničenja u formi jednačine kritično prigušenog oscilatora.

$$f(r,z) = 0 \equiv \ddot{f} + 2\xi\dot{f} + \xi^2 f = 0$$

Razlog za ovo je to što se kritično prigušeni oscilator po izvodjenju iz ravnotežnog položaja vrlo brzo vraća u njega i u njemu se zadržava, dakle ukoliko na početku (ili u bilo kom trenutku numeričkog izračunavanja) funkcija ograničenja ima neku vrednost različitu od 0 (nastalu zbog odstupanja usled primene neke numeričke metode) njena vrednost će se brzo vratiti u 0 i dalje se neće menjati. Brzina vraćanja u ravnotežni položaj zavisi od odabira vrednosti ξ. Vreme potrebno da se sistem koji je izveden iz ravnotežnog stanja vrati u to stanje može se proceniti na osnovu parametra ξ i iznosi otprilike $\frac{1}{\xi}$ sekundi.

U nastavku projektnog zadatka biće prikazano izvodjenje potrebnih jednačina i postupak rešavanja zadatog problema korišćenjem opisane metode.

2 Problem

Mala kuglica mase m postavljena je tako da može da klizi bez trenja po žici koja je savijena kao parabola, $z = br^2$, gde je b pozitivna konstanta. Žica rotira oko svoje ose simetrije konstantnom ugaonom brzinom ω.

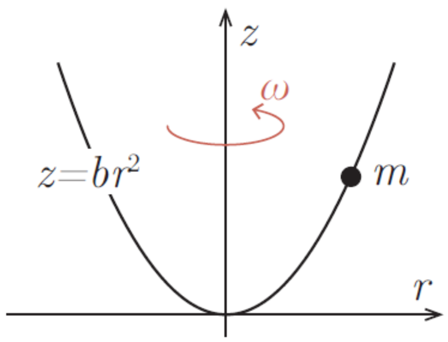

Figure 2.1: sistem koji analiziramo

Izabrati proizvoljne numeričke vrednosti za masu kuglice i parametar parabole b. Koristeći Lagranžov pristup, izvesti jednačine kretanja pod odgovarajućim ograničenjima i predstaviti ih u formi sistema diferencijalnih jednačina. Algebarske jednačine ograničenja pretvoriti u diferencijalne jednačine primenom constraint stabilization metode. Za proizvoljno izabranu ugaonu brzinu ω prikazati grafike:

- Zavisnost sila reakcije žice na kuglicu u funkciji vremena;
- Trajektoriju kuglice u cilindričnom koordinatnom sistemu;
- Zavisnost jednačine ograničenja u funkciji vremena.

Komentarisati dobijene grafike. Po potrebi nacrtati i dodatne grafike. Svi grafici treba da imaju obeležene ose i odgovarajuće naslove.

3 Izvodjenje jednačina

Za početak, definišimo potencijalnu i kinetičku energiju posmatranog sistema.

$$U = mgz$$

$$T = \frac{m(\dot{r}^2 + \dot{z}^2)}{2} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

Dakle Lgranžijan sistema definisan je kao:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m(\dot{r}^2 + \dot{z}^2)}{2} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - mgz$$

Funkcija ograničenja koja obezbedjuje to da se telo kreće po zadatoj paraboli je:

$$f = z - br^2 = 0$$

Odgovarajuće modifikovane Lagranž-Ojlerove jednačine po generalisanim koordinatama r i z glase:

$$\frac{\partial L}{\partial r} + \lambda \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}) = 0$$

Gde je λ nepoznati parametar. Iz ovih jednačina izvodi se sledeći sistem diferencijalnih jednačina koji opisuje kretanje sistema:

$$mr\omega^2 - 2br\lambda - m\ddot{r} = 0$$

$$-mg + \lambda - m\ddot{z} = 0$$

Sada kada imamo sve potrebne jednačine možemo primeniti constraint stabilization metod.

4 Primena constraint stabilization metode

Kako bismo izvršili kompijuterske proračune potrebno je algebarsku jednačinu ograničenja pretvoriti u diferencijalnu. Funkciju ograničenja moguće je opisati diferencijalnom koja predstavlja kretanje kritično prigušenog oscilatora sa velikom konstantom prigušenja.

$$f(r,z) = 0 \equiv \ddot{f} + 2\xi\dot{f} + \xi^2 f = 0$$

U daljim proračunima korišćeno je da je $\xi = 1000$.
Prvi izvod funkcije ograničenja ima formu:

$$\dot{f} = f_r\dot{r} + f_z\dot{z}$$

Drugi izvod, uz malo sredjivanja, možemo napisati u obliku:

$$\ddot{f} = (f_{rr}\dot{r} + f_{rz}\dot{z})\dot{r} + f_r\ddot{r} + (f_{zr}\dot{r} + f_{zz}\dot{z})\dot{z} + f_z\ddot{z}$$

ili u matričnoj formi:

$$\ddot{f} = \begin{bmatrix} f_r & f_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{r} & \dot{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{rr} & f_{rz} \\ f_{zr} & f_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

Sada diferencijalnu jednačinu ograničenja možemo zapisati u obliku:

$$-\begin{bmatrix} f_r & f_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} & \dot{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{rr} & f_{rz} \\ f_{zr} & f_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + 2\xi(f_r v_r + f_z v_z) + \xi^2 f$$

Zbog preglednosti, dalje ćemo izraz sa desne strane gornje jednakosti obeležiti sa C.

Konačni sistem diferencijalnih jednačina (jednačine kretanja i funkcija ograničenja u diferencijalnom obliku) može se zapisati u matričnom obliku na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} -m & 0 & -2br \\ 0 & -m & 1 \\ 2br & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v_r} \\ \dot{v_z} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m\omega^2 r \\ mg \\ C \end{bmatrix}$$

Možemo primetiti da gornja jednačina ima oblik

$$A\dot{X} = B$$

odnosno odavde možemo dobiti vrednost vektora $\dot{X}$ kao:

$$\dot{X} = A^{-1}B$$

Dalje vrednost vektora X dobijamo korišćenjem numeričke integracije u programu MATLAB pomoću funkcije ode45. Medju potrebnim parametrima koji se prosledjuju funkciji ode45 su i početni uslovi sistema za koje smo mi u ovom projektnom zadatku uzeli da važi sledeće:

$$r_0 = 0.1m$$

$$v_{r0} = 0\frac{m}{s}$$

$$z_0 = br_0^2 = 0.01m$$

$$v_{z0} = 0\frac{m}{s}$$

Na ovaj način dobijamo vremenske zavisnosti $r(t)$, $z(t)$, $v_r(t)$, $v_z(t)$. Na osnovu dobijenih vrednosti moguće je izračunati i nepoznati parametar λ koji će nam kasnije poslužiti u izračunavanju vrednosti generalisanih sila ograničenja i njihovih vremenskih zavisnosti. Dobijeni rezultati prikazani su na sledećim graficima.

5 Rezultati i diskusija

5.1 Zavisnost generalisanih koordinata od vremena

Grafici generalisanih koordinata r i z potvrdjuju da se radi o oscilatornom kretanju sistema.

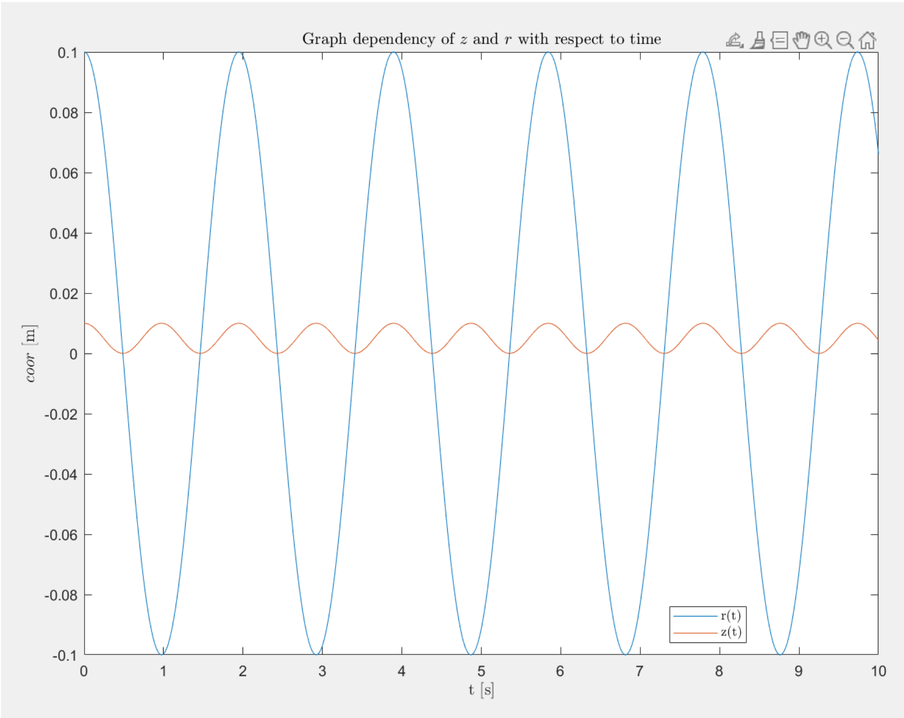

Figure 5.1

5.2 Zavisnost brzina duž generalisanih koordinata

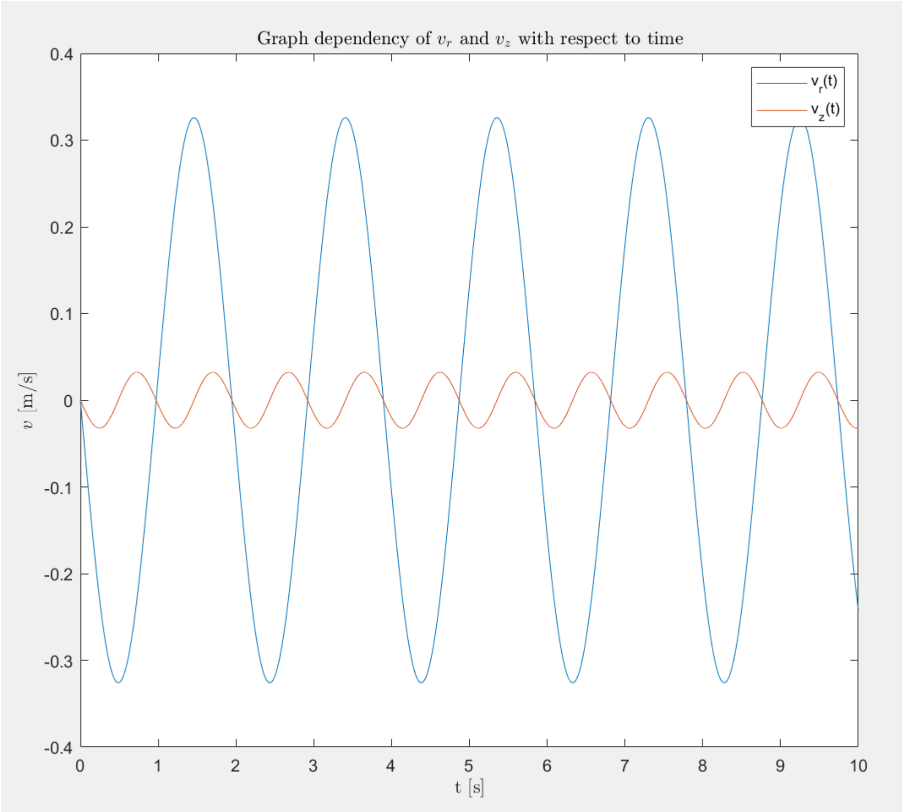

Figure 5.2

5.3 Generalisane sile ograničenja

Sila ograničenja duž z ose predstavlja silu reakcije podloge duž z pravca i opisana je izrazom:

$$F_{cz} = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \equiv N_z$$

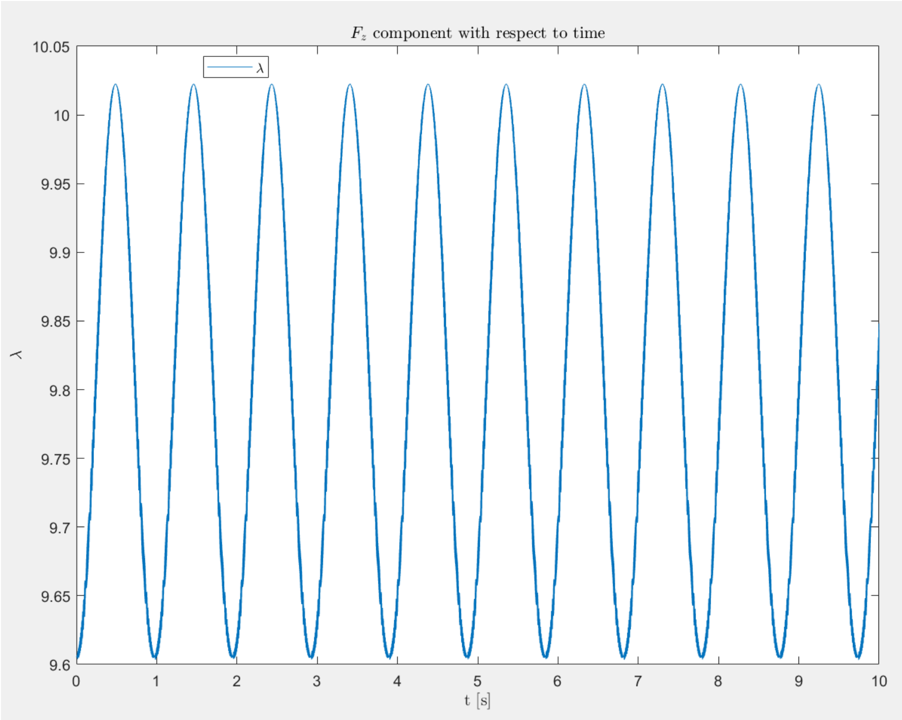

Figure 5.3

Dok je sila ograničenja duž r ose opisana sledećom jednačinom, ali takodje predstavlja komponentu sile reakcije podloge duž r pravca.

$$F_{cr} = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = -2br\lambda \equiv N_r$$

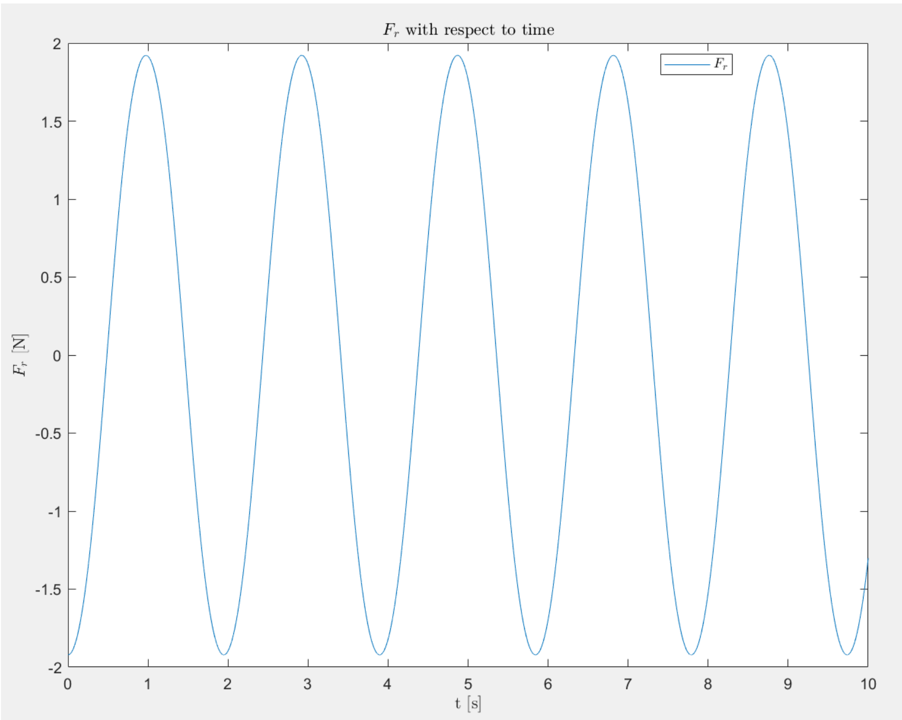

Figure 5.4

5.4 Trajektorija kuglice

Na sledećim graficima prikazana je zavisnost z od r koordinate i putanja kuglice.

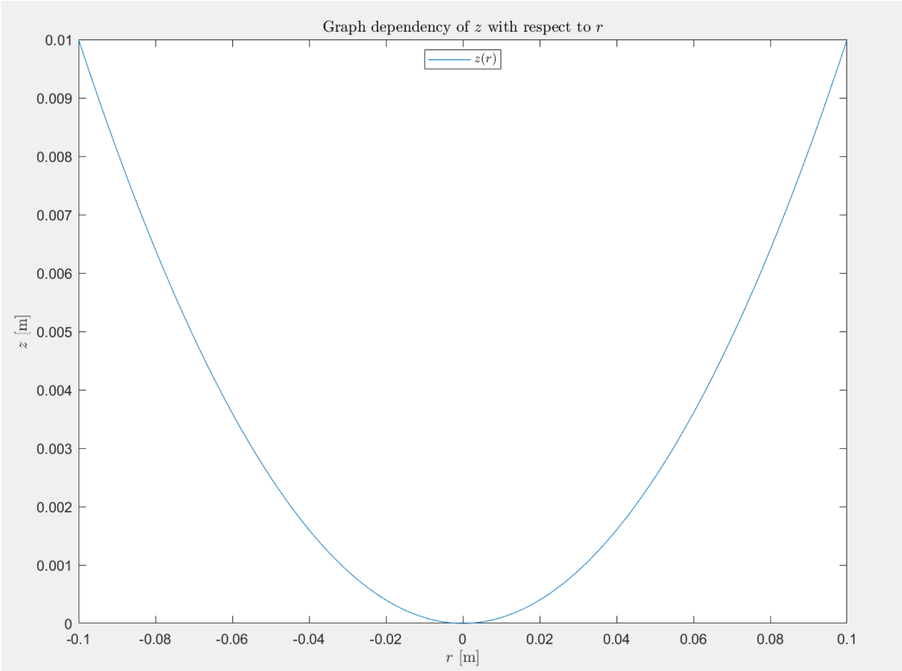

Figure 5.5

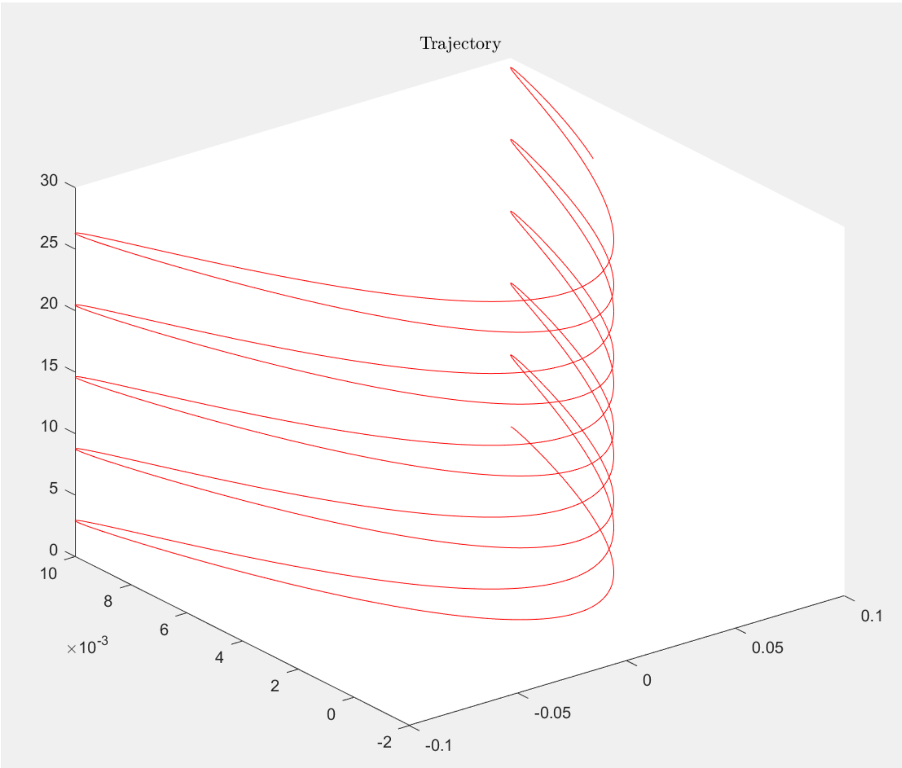

Figure 5.6