Demostraciones Análisis Avanzado

Lucas Dowhyj

Índice

1. Unidad 1: Infimo, supremo y sucesiones

1.1. Axioma de completitud

Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, existe $\sup A$.
Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente, existe $\inf A$.

1.2. Infimo

Sea $A \subset \mathbb{R}$, no vacío y acotado inferiormente.

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \leq a & \text{para todo } a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \text{ tal que } i \leq a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $i = \inf A$.

(i) Como i es el ínfimo de A, por definición i es cota inferior de A. Es decir, para todo $a \in A$ se cumple $i \leq a$.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos, buscando una contradicción, que no existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$. Entonces, para todo $a \in A$ se cumple $a \geq i + \varepsilon$, de modo que $i + \varepsilon$ es una cota inferior de A. Como además $\varepsilon > 0$, tenemos $i + \varepsilon > i$, lo que contradice que i es la mayor de las cotas inferiores de A. Por lo tanto, debe existir $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$.

Recíprocamente, supongamos que se verifican: (i) $i \leq a$ para todo $a \in A$; (ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$.

De (i) se sigue que i es cota inferior de A. Sea i' otra cota inferior de A. Queremos ver que $i' \leq i$. Supongamos, buscando una contradicción, que

$i' > i$. Sea $\varepsilon = i' - i > 0$. Por (ii) existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$. Como $i + \varepsilon = i'$, obtenemos $a < i'$, lo cual contradice que i' es cota inferior de A. Por lo tanto $i' \leq i$ y, en consecuencia, $i = \inf A$. $\square$

1.3. Supremo

Sea $A \subset \mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente.

$$s = \sup A \iff \begin{cases} s \geq a & \text{para todo } a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A \text{ tal que } s - \varepsilon < a \leq s. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $s = \sup A$.

(i) Como s es el supremo de A, por definición s es cota superior de A. Es decir, para todo $a \in A$ se cumple $a \leq s$.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos, buscando una contradicción, que no existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$. Entonces, para todo $a \in A$ se cumple $a \leq s - \varepsilon$, y por lo tanto $s - \varepsilon$ es una cota superior de A. Como además $\varepsilon > 0$, tenemos $s - \varepsilon < s$, lo que contradice que s es la menor de las cotas superiores de A. Por lo tanto, debe existir $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

Supongamos que se cumplen:
(i) $a \leq s$ para todo $a \in A$
(ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

Entonces (i) dice que s es cota superior de A. Sea ahora s' otra cota superior de A. Queremos ver que $s \leq s'$. Supongamos, buscando una contradicción, que $s' < s$. Sea $\varepsilon = s - s' > 0$. Por (ii) existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$. Como $s - \varepsilon = s'$, obtenemos $s' < a$, lo cual contradice que s' es cota superior de A. Por lo tanto $s \leq s'$ y, en consecuencia, $s = \sup A$. $\square$

1.4. Principio de Arquímedes

Versión 1

$$\forall x \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \leq n.$$

Demostración. Supongamos por el absurdo que el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ está acotado superiormente. Como $\mathbb{N}$ es no vacío, por el axioma de completitud existe $s = \sup \mathbb{N}$.

Tomamos $\varepsilon = 1$. Por la propiedad caracterizadora del supremo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$s - 1 < n \leq s.$$

De $s - 1 < n$ se sigue que $n + 1 > s$. Como $n \in \mathbb{N}$, también $n + 1 \in \mathbb{N}$, y por lo tanto hemos encontrado un número natural estrictamente mayor que s, lo que contradice que s sea cota superior de $\mathbb{N}$.

Esta contradicción muestra que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente, es decir, para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$. En particular, dado $x \in \mathbb{R}$, tomando $M = x$ obtenemos un $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq x$, que es justamente lo que afirma la versión 1. $\square$

Versión 2

$$\forall y > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 < \frac{1}{n} < y.$$

Demostración. Sea $y > 0$. Por la Versión 1 del principio de Arquímedes aplicada a $x = 1/y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{y}.$$

Como $n > 0$, al invertir la desigualdad obtenemos

$$0 < \frac{1}{n} < y.$$

Por lo tanto, para todo $y > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < y$, como queríamos demostrar. $\square$

1.5. Sucesiones

Proposición 1.1. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real y sea $l \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

Entonces la sucesión (a_n) está acotada.

Demostración. Por hipótesis, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N: \ |a_n - l| < \varepsilon.$$

Tomamos ahora $\varepsilon = 1$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple

$$|a_n - l| < 1.$$

Por la desigualdad triangular,

$$|a_n| = |(a_n - l) + l| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$$

para todo $n \geq N$. Es decir, para todos los índices grandes,

$$|a_n| \leq |l| + 1.$$

Consideremos ahora los primeros términos de la sucesión:

$$a_1, a_2, \dots, a_{N-1}.$$

Se trata de un conjunto finito de números reales, por lo que el conjunto

$$\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$$

tiene un máximo. Sea

$$M_0 = \text{máx}\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$$

(en el caso $N = 1$ podemos tomar, por ejemplo, $M_0 = 0$).

Definimos ahora

$$M = \text{máx}\{M_0,\ |l| + 1\}.$$

Entonces:
- Si $n < N$, se cumple $|a_n| \le M_0 \le M$.
- Si $n \ge N$, se cumple $|a_n| \le |l| + 1 \le M$.

En ambos casos obtenemos

$$|a_n| \le M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, la sucesión (a_n) está acotada. □

Proposición 1.2. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real monótona creciente y acotada superiormente. Sea*

$$s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s.$$

Demostración. Como (a_n) está acotada superiormente, el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

tiene supremo $s \in \mathbb{R}$.

Queremos probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N :\ |a_n - s| < \varepsilon.$$

Sea entonces $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por la propiedad caracterizadora del supremo aplicada al conjunto A, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$s - \varepsilon < a_N \le s.$$

Como la sucesión (a_n) es monótona creciente, se cumple

$$a_N \le a_n \le s \quad \text{para todo } n \ge N.$$

De $a_n \leq s$ obtenemos $a_n - s \leq 0$, luego

$$|a_n - s| = s - a_n.$$

Además, de $a_N \leq a_n$ se sigue

$$s - a_n \leq s - a_N.$$

Juntando estas desigualdades,

$$|a_n - s| = s - a_n \leq s - a_N < s - (s - \varepsilon) = \varepsilon$$

para todo $n \geq N$.

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ encontramos $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $|a_n - s| < \varepsilon$, y esto significa exactamente que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. □

Proposición 1.3. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real monótona decreciente y acotada inferiormente. Sea*

$$i = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = i.$$

Demostración. Como (a_n) está acotada inferiormente, el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

tiene ínfimo $i \in \mathbb{R}$.

Queremos probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = i$, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : \ |a_n - i| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por la propiedad caracterizadora del ínfimo aplicada al conjunto A, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$i \leq a_N < i + \varepsilon.$$

Como la sucesión (a_n) es monótona decreciente, se cumple

$$i \leq a_n \leq a_N \quad \text{para todo } n \geq N.$$

De $a_n \geq i$ se obtiene $a_n - i \geq 0$, luego

$$|a_n - i| = a_n - i.$$

Además, de $a_n \leq a_N$ se sigue

$$a_n - i \leq a_N - i.$$

Por lo tanto,

$$|a_n - i| = a_n - i \le a_N - i < (i + \varepsilon) - i = \varepsilon$$

para todo $n \ge N$.

Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ encontramos $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \ge N$ se cumple $|a_n - i| < \varepsilon$, lo cual prueba que $\lim_{n\to\infty} a_n = i$. $\square$

Proposición 1.4 (Equivalencia del supremo)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente, y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$s = \sup A$$

si y sólo si se cumplen:

(I) s es cota superior de A, es decir, $a \le s$ para todo $a \in A$;

(II) existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \in A$ para todo n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s.$$

Demostración. Supongamos primero que $s = \sup A$. Entonces, por definición de supremo, s es cota superior de A, con lo cual se cumple (i).

Nos queda probar (ii). Usamos la caracterización del supremo que ya vimos: para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que

$$s - \varepsilon < a \le s.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicamos esta propiedad con $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Obtenemos así un elemento $a_n \in A$ tal que

$$s - \frac{1}{n} < a_n \le s.$$

Esto define una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A.

Veamos ahora que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Entonces, si $n \ge N$, se tiene $\frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon$, y por la construcción de (a_n) se cumple

$$s - \frac{1}{n} < a_n \le s.$$

De aquí, $s - \varepsilon = s - \frac{1}{n} < a_n \le s$, luego

$$0 \le s - a_n < \varepsilon,$$

lo que implica

$$|a_n - s| = s - a_n < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \ge N : \; |a_n - s| < \varepsilon,$$

es decir, $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. Esto prueba (ii).

Recíprocamente, supongamos que se cumplen (i) y (ii). Entonces s es cota superior de A. Para ver que $s = \sup A$, basta probar que s es la menor de las cotas superiores de A. Sea M otra cota superior de A. Queremos ver que $s \leq M$.

Supongamos, buscando una contradicción, que $s > M$. Definimos

$$\varepsilon = \frac{s - M}{2} > 0.$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = s$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, se cumple

$$|a_n - s| < \varepsilon.$$

En particular, para $n \geq N$ tenemos

$$a_n > s - \varepsilon = s - \frac{s - M}{2} = \frac{2s - s + M}{2} = \frac{s + M}{2}.$$

Pero, como $s > M$, se tiene

$$\frac{s + M}{2} > M,$$

de modo que

$$a_n > \frac{s + M}{2} > M$$

para todo $n \geq N$. Sin embargo, $a_n \in A$ y M es cota superior de A, luego debería cumplirse $a_n \leq M$ para todo n, lo que contradice la desigualdad anterior.

Esta contradicción muestra que no puede ocurrir $s > M$, por lo que necesariamente $s \leq M$. Como M era una cota superior cualquiera de A, concluimos que s es la menor de las cotas superiores de A, es decir, $s = \sup A$.

Queda así demostrada la equivalencia. $\square$

Proposición 1.5. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real y sea $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de (a_n), donde $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Si*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l,$$

entonces

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = l.$$

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Por definición de límite, esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N : \ |a_n - l| < \varepsilon.$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$ fijo. Por la hipótesis anterior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |a_n - l| < \varepsilon.$$

Como $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, podemos elegir $J \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_J \geq N.$$

Entonces, para todo $j \geq J$ se tiene

$$n_j \geq n_J \geq N.$$

Aplicando la propiedad de arriba a $n = n_j$, obtenemos

$$|a_{n_j} - l| < \varepsilon \quad \text{para todo } j \geq J.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists J \in \mathbb{N}\ \forall j \geq J:\ |a_{n_j} - l| < \varepsilon,$$

lo cual significa exactamente que

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = l.$$

□

2. Unidad 2: Cardinalidad

2.1. Conjuntos coordinables y cardinal

Definición 2.1. Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que son *coordinables* (o *equipotentes*, o que tienen el mismo cardinal) si existe una función biyectiva $f : X \to Y$. En este caso escribimos

$$X \sim Y.$$

Proposición 2.2. *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia en la clase de todos los conjuntos.*

Demostración. Debemos probar que la relación $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexividad. Sea X un conjunto cualquiera. Consideramos la función identidad

$$\mathrm{id}_X : X \to X, \quad \mathrm{id}_X(x) = x.$$

La función identidad es inyectiva (si $\mathrm{id}_X(x) = \mathrm{id}_X(y)$, entonces $x = y$) y sobreyectiva (para todo $x \in X$ existe $x \in X$ tal que $\mathrm{id}_X(x) = x$). Luego es biyectiva, y por la definición de $\sim$ se tiene $X \sim X$. Por lo tanto, $\sim$ es reflexiva.

Simetría. Sean X e Y conjuntos tales que $X \sim Y$. Por definición, existe una biyección $f : X \to Y$. Toda función biyectiva tiene inversa $f^{-1} : Y \to X$, y dicha inversa es también biyectiva. Por lo tanto, existe una biyección de Y en X, es decir, $Y \sim X$. Luego, $\sim$ es simétrica.

Transitividad. Sean X, Y, Z conjuntos tales que $X \sim Y$ y $Y \sim Z$. Entonces existen biyecciones

$$f : X \to Y, \qquad g : Y \to Z.$$

Consideramos la composición

$$g \circ f : X \to Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Como composición de funciones biyectivas, $g \circ f$ es también biyectiva: la composición de funciones inyectivas es inyectiva y la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva. En consecuencia, existe una biyección de X en Z, es decir, $X \sim Z$. Esto muestra que $\sim$ es transitiva.

Como $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva, concluimos que $\sim$ es una relación de equivalencia. □

Definición 2.3. Definimos el *cardinal* de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = \mathrm{Card}(X) := \{Y \mid X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales les damos nombres especiales:

- $\#\mathbb{N} = \aleph_0$ (cardinal numerable),
- $\#\mathbb{R} = \mathfrak{c}$ (el *continuo*),
- $\#\{1, 2, \ldots, n\} = n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.4. Para $n \in \mathbb{N}$, llamamos

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$$

al *intervalo inicial* del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

Definición 2.5. Un conjunto A es *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \sim I_n.$$

Definición 2.6. Un conjunto A es *infinito* si no es finito.

Definición 2.7. Un conjunto A es *numerable* si $A \sim \mathbb{N}$. Equivalente y simbólicamente, si

$$\#A = \aleph_0.$$

Definición 2.8. Decimos que un conjunto A es *a lo sumo numerable* (o *contable*) si es finito o numerable. Es decir, A es a lo sumo numerable si cumple

$$A \sim I_n \quad \text{para algún } n \in \mathbb{N} \quad \text{o bien} \quad A \sim \mathbb{N}.$$

Proposición 2.9. *Sea A un conjunto numerable y sea $B \subseteq A$. Entonces B es a lo sumo numerable.*

Demostración. Si B es finito, por definición ya es a lo sumo numerable y no hay nada que probar. Supongamos entonces que B es infinito. Veremos que en ese caso B es numerable.

Como A es numerable, por definición existe una biyección

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A.$$

Consideremos la sucesión $(f(1), f(2), f(3), \dots)$ de elementos de A y vamos a "extraer" de ella una enumeración de los elementos de B.

Definimos, por inducción, una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturales de la siguiente manera.

En primer lugar, como B es infinito, en particular es no vacío y existe algún $b_1 \in B$. Como f es sobreyectiva, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n_1) = b_1$. Además, podemos elegir n_1 como el mínimo de los naturales n que satisfacen $f(n) \in B$:

$$n_1 = \text{mín}\{\, n \in \mathbb{N} : f(n) \in B \,\}.$$

Este mínimo existe porque el conjunto entre llaves es no vacío y está contenido en $\mathbb{N}$.

Supuesto definido n_k para algún $k \in \mathbb{N}$, definimos n_{k+1} así. Como B es infinito, el conjunto

$$B_k := B \setminus \{f(n_1), f(n_2), \dots, f(n_k)\}$$

no es vacío (si fuera vacío, B tendría a lo sumo k elementos y sería finito). Entonces existe $b_{k+1} \in B_k$. Nuevamente, como f es sobreyectiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = b_{k+1}$. Además, podemos elegir m de manera que $m > n_k$ (basta tomar algún índice de b_{k+1} mayor que todos $n_1, \dots, n_k$). Definimos

$$n_{k+1} = \text{mín}\{\, n \in \mathbb{N} : n > n_k,\ f(n) \in B_k \,\}.$$

Este mínimo existe porque el conjunto entre llaves es no vacío y contenido en los naturales mayores que n_k. De la definición se deduce que

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots,$$

es decir, (n_k) es estrictamente creciente.

Definimos ahora una función

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow B, \qquad g(k) = f(n_k).$$

Veamos que g es biyectiva.

Inyectividad. Sean $k, \ell \in \mathbb{N}$ tales que $g(k) = g(\ell)$, es decir, $f(n_k) = f(n_\ell)$. Como f es inyectiva, se sigue que $n_k = n_\ell$. Pero la sucesión (n_k) es estrictamente creciente, luego de $n_k = n_\ell$ se deduce $k = \ell$. Por lo tanto, g es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $b \in B$. Como f es sobreyectiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = b$. En el proceso de construcción de la sucesión (n_k), en algún paso k el elemento b aparece por primera vez entre los valores de f; es decir, existe un único k tal que n_k es el mínimo índice con $f(n_k) = b$ y $n_k > n_{k-1}$ (para $k = 1$ entendemos que no hay condición anterior). Por la definición de g, se tiene entonces

$$g(k) = f(n_k) = b.$$

De este modo, para todo $b \in B$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(k) = b$, y por lo tanto g es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección $g : \mathbb{N} \to B$, lo cual muestra que B es numerable. Recordando que al principio separamos el caso en que B es finito, concluimos que, en todos los casos, B es a lo sumo numerable. □

Teorema 2.10. *Sea A un conjunto infinito. Entonces existe un subconjunto $B \subseteq A$ tal que B es numerable.*

Demostración. Como A es infinito, en particular es no vacío, de modo que podemos elegir un elemento $a_1 \in A$.

Supondremos construidos elementos distintos $a_1, \ldots, a_n \in A$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto

$$F_n = \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Si $A \setminus F_n$ fuera vacío, tendríamos $A = F_n$, es decir, A sería finito, lo cual contradice la hipótesis de que A es infinito. Por lo tanto,

$$A \setminus F_n \neq \varnothing,$$

y podemos elegir un elemento

$$a_{n+1} \in A \setminus F_n.$$

En particular, $a_{n+1} \in A$ y $a_{n+1} \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$, por lo que los elementos $a_1, \ldots, a_{n+1}$ siguen siendo todos distintos.

De este modo, por inducción, obtenemos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tales que

$$a_n \neq a_m \quad \text{si } n \neq m.$$

Definimos ahora

$$B = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Claramente $B \subseteq A$, por construcción.

Consideremos la función

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow B, \qquad f(n) = a_n.$$

Inyectividad. Si $f(n) = f(m)$, entonces $a_n = a_m$, y como la sucesión (a_n) tiene todos sus términos distintos, se sigue que $n = m$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $b \in B$. Por definición de B, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b = a_n$. Entonces $f(n) = a_n = b$, de modo que todo elemento de B es imagen de algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, f es sobreyectiva.

Concluimos que $f : \mathbb{N} \to B$ es una biyección, es decir, B es numerable. Como además $B \subseteq A$, hemos encontrado un subconjunto numerable de A, tal como queríamos. $\square$

2.2. Orden entre cardinales

Recordemos que, por definición,

$$\#A = \#B \iff A \sim B$$

es decir, si y sólo si existe una biyección $f : A \to B$.

Definición 2.11. Sean X e Y conjuntos. Decimos que

$$\#X \leq \#Y$$

si existe una función inyectiva $f : X \to Y$.

Definición 2.12. Decimos que

$$\#X < \#Y$$

si se cumplen:

(i) $\#X \leq \#Y$, es decir, existe una inyección $f : X \to Y$;

(ii) $X \not\sim Y$, es decir, no existe biyección entre X e Y.

Proposición 2.13. *Sean X e Y conjuntos. Existe una función inyectiva $f : X \to Y$ si y sólo si existe una función sobreyectiva $g : Y \to X$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que existe una función inyectiva $f : X \to Y$. Distinguimos dos casos.

Si $X = \varnothing$, entonces f es la única función posible $\varnothing \to Y$. En este caso, la única función de Y a X es la función vacía $g : Y \to \varnothing$, que es sobreyectiva sólo si $Y = \varnothing$. En muchas aplicaciones se descarta el caso trivial $X = \varnothing$, así que supongamos ahora que $X \neq \varnothing$.

Como $X \neq \varnothing$, elegimos un elemento fijo $x_0 \in X$. Definimos $g : Y \to X$ de la siguiente manera:

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{si existe } x \in X \text{ tal que } f(x) = y, \\ x_0 & \text{si no existe tal } x. \end{cases}$$

La inyectividad de f garantiza que, cuando y está en la imagen de f, el elemento x tal que $f(x) = y$ es único, de modo que g está bien definida.

Veamos que g es sobreyectiva. Sea $x \in X$. Como f es función de X en Y, tenemos $f(x) \in Y$, y por definición de g,

$$g(f(x)) = x.$$

Luego todo $x \in X$ es imagen de algún elemento de Y (por ejemplo, de $f(x)$), y por lo tanto g es sobreyectiva.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que existe una función sobreyectiva $g : Y \to X$. Para cada $x \in X$ consideremos el conjunto de sus preimágenes:

$$Y_x = \{\, y \in Y : g(y) = x \,\}.$$

Como g es sobreyectiva, Y_x es no vacío para todo $x \in X$.

Elegimos, para cada $x \in X$, un elemento $y_x \in Y_x$ (es decir, $g(y_x) = x$), y definimos

$$f : X \to Y, \qquad f(x) = y_x.$$

Probemos que f es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces

$$y_{x_1} = y_{x_2}.$$

Aplicando g a ambos lados obtenemos

$$g(y_{x_1}) = g(y_{x_2}),$$

es decir,

$$x_1 = x_2,$$

ya que por definición de y_x se cumple $g(y_x) = x$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Hemos probado en un sentido que de una inyectiva $X \to Y$ obtenemos una sobreyectiva $Y \to X$, y en el otro que de una sobreyectiva $Y \to X$ obtenemos una inyectiva $X \to Y$. Esto completa la demostración. □

2.3. Conjunto de partes y teorema de Cantor

Definición 2.14. Dado un conjunto X, llamamos *conjunto de partes* de X al conjunto

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}.$$

Teorema 2.15 (Cantor). *Sea X un conjunto. Entonces*

$$\#X < \#\mathcal{P}(X).$$

Demostración. Recordemos que, por la definición de orden entre cardinales,

$$\#X < \#\mathcal{P}(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{existe una inyección } f : X \to \mathcal{P}(X), \\ \text{no existe biyección entre } X \text{ y } \mathcal{P}(X). \end{cases}$$

(1) Existe una inyección $X \to \mathcal{P}(X)$.
Definimos

$$f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X), \qquad f(x) = \{x\}.$$

Claramente $f(x) \subseteq X$ para todo x, luego $f(x) \in \mathcal{P}(X)$. Si $f(x) = f(y)$, entonces $\{x\} = \{y\}$ y por lo tanto $x = y$. Así, f es inyectiva, y obtenemos

$$\#X \leq \#\mathcal{P}(X).$$

(2) No existe biyección entre X y $\mathcal{P}(X)$.
Basta ver que *no existe ninguna función sobreyectiva* $g : X \to \mathcal{P}(X)$.
Procedemos por absurdo. Supongamos que existe una función

$$g : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

sobreyectiva. Consideremos el subconjunto

$$B = \{x \in X : x \notin g(x)\}.$$

Por definición, $B \subseteq X$, de modo que $B \in \mathcal{P}(X)$.

Como g es sobreyectiva, debe existir algún elemento $a \in X$ tal que

$$g(a) = B.$$

Estudiemos ahora si a pertenece o no a B:

- Supongamos que $a \in B$. Por la definición de B, esto significa que $a \notin g(a)$. Pero $g(a) = B$, luego $a \notin B$, lo que contradice $a \in B$.

- Supongamos que $a \notin B$. Entonces, por la definición de B, se tiene $a \in g(a)$. Como $g(a) = B$, esto implica $a \in B$, contradiciendo $a \notin B$.

En ambos casos llegamos a una contradicción. Por lo tanto, nuestra suposición inicial es falsa: no existe función sobreyectiva $g : X \to \mathcal{P}(X)$.

Concluimos que no existe biyección entre X y $\mathcal{P}(X)$. Junto con (1), esto implica

$$\#X < \#\mathcal{P}(X),$$

como queríamos demostrar. □

2.4. Suma y resta de conjuntos numerables

Proposición 2.16. *Sea X un conjunto infinito. Entonces existe un subconjunto $Z \subset X$, con Z numerable, tal que*

$$X \sim X \setminus Z.$$

Demostración. Como X es infinito, por el teorema anterior existe un subconjunto numerable infinito $C \subset X$. Como C es numerable, existe una biyección

$$\varphi : \mathbb{N} \to C.$$

Escribimos $c_n = \varphi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que

$$C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}.$$

Definimos ahora dos subconjuntos disjuntos de C:

$$Z = \{c_{2n} : n \in \mathbb{N}\}, \qquad D = \{c_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces $C = D \cup Z$ y $D \cap Z = \varnothing$. Además, tanto D como Z son numerables (son imágenes de $\mathbb{N}$ por las aplicaciones $n \mapsto c_{2n-1}$ y $n \mapsto c_{2n}$, respectivamente).

Sea

$$Y = X \setminus C.$$

Entonces tenemos una partición

$$X = Y \cup D \cup Z \quad \text{(unión disjunta)}.$$

Por otra parte,

$$X \setminus Z = Y \cup D.$$

Definimos una aplicación $f : X \to X \setminus Z$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in Y \cup D, \\ c_{2n-1}, & \text{si } x = c_{2n} \in Z \text{ para algún } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Veamos que f es biyectiva.

Inyectividad. - Si $x_1, x_2 \in Y \cup D$ y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$ porque f actúa como la identidad en $Y \cup D$.

- Si $x_1 = c_{2n_1}$ e $x_2 = c_{2n_2}$ pertenecen a Z y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$c_{2n_1-1} = f(c_{2n_1}) = f(c_{2n_2}) = c_{2n_2-1},$$

de donde $2n_1 - 1 = 2n_2 - 1$ y luego $n_1 = n_2$, es decir $x_1 = x_2$.

- No puede ocurrir que $x_1 \in Y \cup D$ y $x_2 \in Z$ tengan la misma imagen, porque las imágenes de $Y \cup D$ están en $Y \cup D$ y las de Z están contenidas en D; pero Y y D son disjuntos.

En todos los casos, de $f(x_1) = f(x_2)$ se deduce $x_1 = x_2$, luego f es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $y \in X \setminus Z = Y \cup D$.

- Si $y \in Y$, entonces $f(y) = y$, así que y es imagen de sí mismo.

- Si $y \in D$, digamos $y = c_{2n-1}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(c_{2n}) = c_{2n-1} = y$, de modo que y es imagen de $c_{2n} \in Z$.

En consecuencia, todo elemento de $X \setminus Z$ es imagen de algún elemento de X, y f es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección $f : X \to X \setminus Z$ con $Z \subset X$ numerable, por lo que $X \sim X \setminus Z$. □

Proposición 2.17. *Sea B un conjunto y sea A un conjunto numerable. Suponemos que $B \setminus A$ es infinito. Entonces*

$$B \sim B \setminus A.$$

Demostración. Podemos reemplazar A por $A \cap B$, que sigue siendo numerable y cumple

$$B \setminus (A \cap B) = B \setminus A.$$

Por simplicidad, suponemos desde ahora que $A \subseteq B$.

Como A es numerable, existe una biyección

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \to A,$$

es decir, podemos escribir

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Por hipótesis, $B \setminus A$ es infinito. Entonces, por el teorema "conjunto infinito contiene un subconjunto numerable", existe un subconjunto numerable infinito

$$C \subseteq B \setminus A.$$

Tomamos una biyección

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \to C, \quad C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}.$$

Definimos ahora una aplicación $f : B \to B \setminus A$ por:

$$f(x) = \begin{cases} c_n, & \text{si } x = a_n \in A \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ x, & \text{si } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Observemos primero que f está bien definida: si $x \in A$, entonces $f(x) = c_n \in C \subseteq B \setminus A$; si $x \in B \setminus A$, entonces $f(x) = x \in B \setminus A$. En cualquier caso, $f(x) \in B \setminus A$.

Inyectividad. - Si $x_1, x_2 \in B \setminus A$ y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$ porque f actúa como la identidad en $B \setminus A$.

- Si $x_1 = a_n$ y $x_2 = a_m$ pertenecen a A y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $c_n = c_m$, y como la sucesión (c_n) tiene todos sus términos distintos, se sigue $n = m$ y por lo tanto $x_1 = x_2$.

- No puede ocurrir que $x_1 \in A$ y $x_2 \in B \setminus A$ tengan la misma imagen, porque $f(x_1) \in C \subseteq B \setminus A$, mientras que $f(x_2) = x_2 \in B \setminus A \setminus C$, y C es disjunto de $B \setminus A \setminus C$.

En consecuencia, f es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $y \in B \setminus A$. Distinguimos dos casos:

- Si $y \in B \setminus (A \cup C)$, entonces $f(y) = y$, de modo que y es imagen de sí mismo.

- Si $y \in C$, digamos $y = c_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(a_n) = c_n = y$, de modo que y es imagen de $a_n \in A$.

Por lo tanto, todo elemento de $B \setminus A$ es imagen de algún elemento de B, y f es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección $f : B \to B \setminus A$, lo cual prueba que $B \sim B \setminus A$. □

Proposición 2.18. *Sea X un conjunto infinito y sea A un conjunto numerable. Entonces*

$$X \sim X \cup A.$$

Demostración. Si $A \subseteq X$, entonces $X \cup A = X$ y la afirmación es trivial. Supongamos, por lo tanto, que A no está contenido en X. Definimos

$$A_0 = A \setminus X,$$

que es el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a X. Como A es numerable, también A_0 es numerable (subconjunto de un numerable). Además,

$$X \cup A = X \cup A_0$$

y la unión es disjunta, ya que $A_0 \cap X = \varnothing$.

Notemos que X es infinito, luego el conjunto $X \cup A_0$ también es infinito. Consideremos ahora el conjunto

$$B = X \cup A_0.$$

Entonces A_0 es numerable y

$$B \setminus A_0 = X.$$

Como X es infinito, también $B \setminus A_0$ es infinito. Podemos aplicar la proposición anterior con $A = A_0$ y este conjunto B: obtenemos

$$B \sim B \setminus A_0.$$

Pero $B = X \cup A_0$ y $B \setminus A_0 = X$, por lo que

$$X \cup A_0 \sim X.$$

Como $X \cup A = X \cup A_0$, concluimos que

$$X \cup A \sim X.$$

Por simetría de la relación de equipotencia, también escribimos $X \sim X \cup A$, como queríamos. □

Corolario 2.19. *Un conjunto X es infinito si y sólo si es coordinable con un subconjunto propio suyo, es decir, si y sólo si existe $Y \subsetneq X$ tal que $X \sim Y$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que X es infinito. Por la proposición anterior, existe un subconjunto numerable $Z \subset X$ tal que $X \sim X \setminus Z$. Como $Z \neq \varnothing$ (pues es numerable) y $Z \subset X$, se tiene $X \setminus Z \subsetneq X$. Por lo tanto, X es coordinable con el subconjunto propio $X \setminus Z$.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que existe un subconjunto propio $Y \subsetneq X$ tal que $X \sim Y$. Procedamos por absurdo: supongamos que X es finito. Sea $n = \#X$. Entonces $X \sim I_n$. Como Y es subconjunto propio de X, tiene un número m de elementos con $m < n$, de modo que $Y \sim I_m$.

Por transitividad de la relación de equipotencia, tendríamos

$$I_n \sim X \sim Y \sim I_m,$$

de donde se seguiría $I_n \sim I_m$. Pero por el teorema anterior, $I_n \sim I_m$ implica $n = m$, lo cual contradice $m < n$. Esta contradicción muestra que X no puede ser finito, luego X es infinito. □

Teorema 2.20 (Cantor–Schröder–Bernstein)**.** *Sean X e Y dos conjuntos. Si existe una función inyectiva $f : X \to Y$ y una función inyectiva $g : Y \to X$, entonces X e Y son coordinables, es decir, existe una biyección $h : X \to Y$.*

Equivalentemente, en términos de cardinales:

$$\#X \leq \#Y \text{ y } \#Y \leq \#X \quad \Longrightarrow \quad \#X = \#Y.$$

Lema 2.21. *El producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.*

Demostración. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(m, n) = 2^m 3^n.$$

Por el teorema fundamental de la aritmética, todo número natural tiene una única factorización en primos, de modo que distintos pares (m, n) producen distintos números $2^m 3^n$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Como hemos construido una inyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, se sigue que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es a lo sumo numerable. Además, es infinito, por lo que es numerable. □

Teorema 2.22. *Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos numerables. Entonces la unión*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

es a lo sumo numerable. En particular, si A es infinita, entonces A es numerable.

Demostración. Como cada A_n es numerable, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una biyección

$$f_n : \mathbb{N} \to A_n.$$

Escribimos $a_{n,k} = f_n(k)$, de modo que

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \dots\}.$$

Definimos ahora una aplicación

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A, \qquad F(n,k) = a_{n,k}.$$

Para todo $(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ se tiene $a_{n,k} \in A_n \subseteq A$, luego F está bien definida. Además, por la definición de A, todo elemento de A es de la forma $a_{n,k}$ para algún $n, k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto F es sobreyectiva.

Por el lema anterior, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es numerable. Entonces existe una biyectiva

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}.$$

Consideremos la composición

$$h = F \circ g : \mathbb{N} \to A.$$

Como composición de una biyección con una sobreyección, h sigue siendo sobreyectiva: para todo $a \in A$ existe $(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tal que $F(n,k) = a$, y como g es biyectiva, existe $m \in \mathbb{N}$ con $g(m) = (n,k)$; entonces

$$h(m) = (F \circ g)(m) = F(n,k) = a.$$

Así hemos construido una función sobreyectiva $h : \mathbb{N} \to A$. Por la proposición que relaciona inyecciones y sobreyecciones entre cardinales, esto implica que A es a lo sumo numerable.

Si además A es infinito, por definición de "a lo sumo numerable" resulta que A es numerable. □

3. Unidad 3: Espacios métricos

3.1. Conjuntos abiertos

Definición 3.1. Sea (E,d) un espacio métrico. Un subconjunto $U \subseteq E$ se dice *abierto* si

$$\forall x \in U\ \exists r > 0 \text{ tal que } B(x,r) \subseteq U,$$

donde
$$B(x,r)=\{y\in E: d(x,y)<r\}$$
es la bola abierta de centro x y radio r.

Proposición 3.2. *Sea (E,d) un espacio métrico, $x_0\in E$ y $r>0$. Entonces la bola abierta $B(x_0,r)$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Debemos ver que para todo punto $x\in B(x_0,r)$ existe un radio $\varepsilon>0$ tal que
$$B(x,\varepsilon)\subseteq B(x_0,r).$$

Sea $x\in B(x_0,r)$. Por definición de bola abierta,
$$d(x,x_0)<r.$$
Definimos
$$\varepsilon=r-d(x,x_0).$$
Entonces $\varepsilon>0$ porque $d(x,x_0)<r$.

Tomemos ahora un punto cualquiera $y\in B(x,\varepsilon)$; es decir,
$$d(x,y)<\varepsilon.$$
Aplicando la desigualdad triangular, obtenemos
$$d(y,x_0)\le d(y,x)+d(x,x_0).$$
Sustituyendo las cotas anteriores,
$$d(y,x_0)<\varepsilon+d(x,x_0)=\big(r-d(x,x_0)\big)+d(x,x_0)=r.$$
Por lo tanto, $d(y,x_0)<r$, lo que significa que $y\in B(x_0,r)$.

Como y fue elegido arbitrariamente en $B(x,\varepsilon)$, hemos probado
$$B(x,\varepsilon)\subseteq B(x_0,r).$$
Y esto vale para todo $x\in B(x_0,r)$, con el ε definido como arriba. Por definición de conjunto abierto, $B(x_0,r)$ es abierto. □

Definición 3.3. Sea (E,d) un espacio métrico y sea $A\subseteq E$. El *interior* de A es el conjunto
$$A^\circ=\{\,x\in A:\exists r>0 \text{ tal que } B(x,r)\subseteq A\,\}.$$
Equivalente: A° es el conjunto de los puntos interiores de A.

Proposición 3.4. *Sea (E,d) un espacio métrico y $A,A_1,A_2\subseteq E$. Se tienen las siguientes propiedades:*

(i) $A^\circ \subseteq A$.

(ii) *Si* $A_1 \subseteq A_2$*, entonces* $A_1^\circ \subseteq A_2^\circ$.

(iii) A° *es un conjunto abierto.*

(iv) *Si* G *es abierto y* $G \subseteq A$*, entonces* $G \subseteq A^\circ$.

Demostración. (i) Por definición,

$$A^\circ = \{x \in A : \exists r > 0 \text{ tal que } B(x,r) \subseteq A\}.$$

En particular, todo $x \in A^\circ$ pertenece a A, luego $A^\circ \subseteq A$.

(ii) Supongamos que $A_1 \subseteq A_2$ y sea $x \in A_1^\circ$. Entonces, por definición de interior, existe $r > 0$ tal que

$$B(x,r) \subseteq A_1.$$

Como $A_1 \subseteq A_2$, se tiene también

$$B(x,r) \subseteq A_2,$$

de modo que x es punto interior de A_2, es decir, $x \in A_2^\circ$. Hemos probado que $A_1^\circ \subseteq A_2^\circ$.

(iii) Queremos ver que A° es abierto. Sea $x \in A^\circ$. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(x,r) \subseteq A.$$

Por la proposición ya demostrada, $B(x,r)$ es un conjunto abierto. En particular, como $x \in B(x,r)$ y $B(x,r)$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x,\varepsilon) \subseteq B(x,r).$$

Como además $B(x,r) \subseteq A$, obtenemos

$$B(x,\varepsilon) \subseteq A.$$

Por definición de interior, esto implica que $x \in A^\circ$ y, de hecho, para todo $y \in B(x,\varepsilon)$ se cumple $y \in A^\circ$. Por lo tanto, $B(x,\varepsilon) \subseteq A^\circ$.

Hemos visto que para todo $x \in A^\circ$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subseteq A^\circ$, lo cual significa que A° es abierto.

(iv) Sea G un conjunto abierto tal que $G \subseteq A$, y sea $x \in G$. Como G es abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B(x,r) \subseteq G.$$

De la inclusión $G \subseteq A$ se deduce

$$B(x,r) \subseteq A.$$

Luego x es punto interior de A, es decir, $x \in A^\circ$. Como x era un punto arbitrario de G, concluimos que $G \subseteq A^\circ$. □

Proposición 3.5. *Sea (E, d) un espacio métrico. Entonces se verifican:*

(I) La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

(II) La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Demostración. (i) Sea $(G_i)_{i \in I}$ una familia cualquiera de conjuntos abiertos en E (indexada por un conjunto I no necesariamente numerable) y definamos

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i.$$

Queremos ver que G es abierto.

Sea $x \in G$. Entonces existe algún índice $i_0 \in I$ tal que $x \in G_{i_0}$. Como G_{i_0} es abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq G_{i_0}.$$

De aquí se deduce

$$B(x, r) \subseteq G_{i_0} \subseteq G.$$

Por lo tanto, para todo $x \in G$ hemos encontrado un radio $r > 0$ con $B(x, r) \subseteq G$. Por definición, G es abierto.

(ii) Sea $G_1, \ldots, G_n$ una familia finita de conjuntos abiertos en E y definamos

$$H = \bigcap_{k=1}^{n} G_k.$$

Probemos que H es abierto.

Tomemos $x \in H$. Entonces $x \in G_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$. Como cada G_k es abierto, existe $r_k > 0$ tal que

$$B(x, r_k) \subseteq G_k \quad \text{para cada } k = 1, \ldots, n.$$

Definimos

$$r = \text{mín}\{r_1, \ldots, r_n\}.$$

Entonces $r > 0$ y, para todo k,

$$B(x, r) \subseteq B(x, r_k) \subseteq G_k.$$

De aquí se sigue

$$B(x, r) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} G_k = H.$$

Por lo tanto, para cada $x \in H$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq H$, lo que muestra que H es abierto. $\square$

Observación. El resultado sobre intersección de abiertos es, en general, válido sólo para intersecciones finitas. Una intersección infinita de abiertos puede no ser abierta.

Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, d_{\text{eucl}})$, para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

es un abierto. Consideremos la intersección

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Es fácil ver que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

El conjunto $\{0\}$ no es abierto en $\mathbb{R}$ con la métrica usual, ya que si tomamos cualquier $r > 0$, la bola $B(0, r) = (-r, r)$ contiene puntos distintos de 0, de modo que nunca se cumple $B(0, r) \subseteq \{0\}$. Por lo tanto, la intersección numerable de los abiertos G_n no es abierta.

3.2. Conjuntos cerrados

Definición 3.6. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Un punto $x \in E$ se llama *punto de adherencia* (o *punto de clausura*) de A si

$$\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \varnothing.$$

Definición 3.7. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. La *clausura* (o *adherencia*) de A es el conjunto

$$\overline{A} = \{x \in E : x \text{ es punto de adherencia de } A\}.$$

Definición 3.8. Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $F \subseteq E$ se dice *cerrado* si su complemento $E \setminus F$ es un conjunto abierto.

Proposición 3.9. *Sea (E, d) un espacio métrico, $x_0 \in E$ y $r > 0$. Entonces la bola cerrada*

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E : d(x, x_0) \leq r\}$$

es un conjunto cerrado.

Demostración. Por definición, $\overline{B}(x_0, r)$ es cerrada si su complemento $E \setminus \overline{B}(x_0, r)$ es abierto. Sea

$$x \in E \setminus \overline{B}(x_0, r).$$

Entonces $d(x, x_0) > r$. Definimos

$$\varepsilon = \frac{d(x, x_0) - r}{2}.$$

Como $d(x, x_0) > r$, se tiene $\varepsilon > 0$.

Mostremos que

$$B(x, \varepsilon) \subseteq E \setminus \overline{B}(x_0, r).$$

Sea $y \in B(x, \varepsilon)$, es decir,

$$d(x, y) < \varepsilon.$$

Por la desigualdad triangular,

$$d(y, x_0) \geq d(x, x_0) - d(x, y).$$

Luego

$$d(y, x_0) > d(x, x_0) - \varepsilon = d(x, x_0) - \frac{d(x, x_0) - r}{2} = \frac{d(x, x_0) + r}{2}.$$

Como $d(x, x_0) > r$, se tiene

$$\frac{d(x, x_0) + r}{2} > \frac{r + r}{2} = r,$$

de modo que $d(y, x_0) > r$. En particular, $d(y, x_0) \not\leq r$, así que $y \notin \overline{B}(x_0, r)$.

Hemos probado que todo $y \in B(x, \varepsilon)$ pertenece al complemento de la bola cerrada:

$$B(x, \varepsilon) \subseteq E \setminus \overline{B}(x_0, r).$$

Por lo tanto, para cada x del complemento existe un $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B(x, \varepsilon)$ está contenida en dicho complemento. Esto significa que $E \setminus \overline{B}(x_0, r)$ es abierto.

Concluimos que $\overline{B}(x_0, r)$ es cerrado. □

Proposición 3.10 (Caracterización de la clausura mediante cerrados)**.** *Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Entonces:*

(I) $A \subseteq \overline{A}$.

(II) $\overline{A}$ *es un conjunto cerrado.*

(III) Si F es un conjunto cerrado con $A \subseteq F$, entonces $\overline{A} \subseteq F$.

En particular, $\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A, y se puede escribir

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq E : F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}.$$

Demostración. (i) Sea $x \in A$. Entonces, para cualquier $r > 0$, se tiene $x \in B(x,r)$, y por lo tanto $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$. Es decir, xes punto de adherencia de A, y por definición $x \in \overline{A}$. Luego $A \subseteq \overline{A}$.

(ii) Probemos que $\overline{A}$ es cerrado mostrando que $E \setminus \overline{A}$ es abierto.

Sea $x \in E \setminus \overline{A}$. Entonces x no es punto de adherencia de A, es decir, existe $r > 0$ tal que

$$B(x,r) \cap A = \varnothing.$$

Mostraremos que $B(x, r/2) \subseteq E \setminus \overline{A}$.

Sea $y \in B(x, r/2)$, de modo que $d(x,y) < r/2$. Tomemos $s = r/2$. Consideremos un punto $z \in B(y,s)$; entonces $d(y,z) < s = r/2$. Por la desigualdad triangular,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

luego $z \in B(x,r)$. Como $B(x,r) \cap A = \varnothing$, se sigue que $z \notin A$. En consecuencia,

$$B(y,s) \cap A = \varnothing.$$

Esto significa que y no es punto de adherencia de A, es decir, $y \notin \overline{A}$.

Como y fue un punto arbitrario de $B(x,r/2)$, hemos probado que $B(x,r/2) \subseteq E \setminus \overline{A}$. Por lo tanto, $E \setminus \overline{A}$ es abierto, y en consecuencia $\overline{A}$ es cerrado.

(iii) Sea F un conjunto cerrado tal que $A \subseteq F$. Debemos probar que $\overline{A} \subseteq F$.

Sea $x \in E \setminus F$. Como F es cerrado, su complemento $E \setminus F$ es abierto. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(x,r) \subseteq E \setminus F.$$

Como $A \subseteq F$, se tiene $A \cap (E \setminus F) = \varnothing$, y en particular

$$B(x,r) \cap A = \varnothing.$$

Esto muestra que x no es punto de adherencia de A, es decir, $x \notin \overline{A}$. Hemos probado

$$E \setminus F \subseteq E \setminus \overline{A}.$$

Tomando complementos,

$$\overline{A} \subseteq F.$$

Esto vale para todo conjunto cerrado F que contiene a A, con lo cual queda demostrado que $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A, y en particular

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq E : F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}.$$

$\square$

Proposición 3.11. *Un conjunto $F \subseteq E$ es cerrado si y sólo si*

$$F = \overline{F}.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Si F es cerrado y F contiene a F, por la proposición anterior, $\overline{F} \subseteq F$. Por otra parte, siempre se cumple $F \subseteq \overline{F}$. De aquí se deduce $F = \overline{F}$.

($\Leftarrow$) Si $F = \overline{F}$, como sabemos que $\overline{F}$ es cerrado, se sigue que F es cerrado. $\square$

Proposición 3.12 (Caracterización secuencial de la clausura)**.** *Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) $x \in \overline{A}$.

(II) Existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \in A$ para todo n tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

Demostración. (*(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*) Supongamos que $x \in \overline{A}$. Por definición de clausura, esto significa que para todo $r > 0$ se cumple

$$B(x, r) \cap A \neq \varnothing.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el radio $r_n = \frac{1}{n} > 0$. Como $B(x, r_n) \cap A \neq \varnothing$, podemos elegir un punto

$$a_n \in B\Big(x, \frac{1}{n}\Big) \cap A.$$

Así definimos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de A que satisface

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que $a_n \to x$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Si $n \geq N$, entonces

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ d(a_n, x) < \varepsilon,$$

lo cual significa que $a_n \to x$. Esto prueba (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$) Recíprocamente, supongamos que existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \in A$ para todo n tal que $a_n \to x$. Debemos probar que $x \in \overline{A}$, es decir, que

$$\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \varnothing.$$

Sea $r > 0$. Como $a_n \to x$, por definición de límite existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$d(a_n, x) < r.$$

En particular, tomando $n = N$, tenemos $a_N \in B(x,r)$. Como además $a_N \in A$ por construcción de la sucesión, se obtiene

$$a_N \in B(x,r) \cap A,$$

y por lo tanto $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$.

Como esto vale para todo $r > 0$, concluimos que x es punto de adherencia de A, es decir, $x \in \overline{A}$. □

Proposición 3.13. *Sea (E,d) un espacio métrico y $F \subseteq E$. Entonces F es cerrado si y sólo si se verifica:*

$$\textit{si } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F \textit{ y } x_n \to x \textit{ en } E, \textit{ entonces } x \in F.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que F es cerrado y sea (x_n) una sucesión de puntos de F tal que $x_n \to x$ en E. Supongamos, por absurdo, que $x \notin F$. Entonces $x \in E \setminus F$.

Como $E \setminus F$ es abierto (porque F es cerrado), existe $r > 0$ tal que

$$B(x,r) \subseteq E \setminus F.$$

Por la convergencia de (x_n) a x, sabemos que

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Tomamos $\varepsilon = r$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, se cumple $d(x_n, x) < r$, es decir, $x_n \in B(x,r)$. Pero $B(x,r) \subseteq E \setminus F$, luego $x_n \notin F$ para todo $n \geq N$. Esto contradice el hecho de que $x_n \in F$ para todos los n, por hipótesis. Por lo tanto, debe ser $x \in F$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que se cumple la propiedad secuencial: toda sucesión de puntos de F que converge en E tiene su límite en F. Queremos ver que F es cerrado, es decir, que $E \setminus F$ es abierto.

Tomemos un punto $x \in E \setminus F$. Supongamos, por absurdo, que $E \setminus F$ no es abierto. Entonces no existe ningún $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq E \setminus F$. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, el radio $r = \frac{1}{n}$ no sirve, es decir:

$$B\Big(x, \frac{1}{n}\Big) \not\subseteq E \setminus F.$$

Esto significa que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe algún punto

$$x_n \in B\Big(x, \frac{1}{n}\Big) \cap F.$$

Por construcción, $x_n \in F$ y, además,

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De aquí se deduce que $x_n \to x$ en el espacio métrico (E, d).

Pero, por hipótesis secuencial, el límite de cualquier sucesión de puntos de F que converge en E debe pertenecer a F, de modo que $x \in F$. Esto contradice que $x \in E \setminus F$.

Por lo tanto, nuestra suposición era falsa: para cada $x \in E \setminus F$ debe existir $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq E \setminus F$, lo que muestra que $E \setminus F$ es abierto. En consecuencia, F es cerrado. □

Proposición 3.14. *Sea (E, d) un espacio métrico. Entonces se verifican:*

(I) $\varnothing$ y E son conjuntos cerrados.

(II) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

(III) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Demostración. (i) Notemos que

$$E \setminus \varnothing = E \quad \text{y} \quad E \setminus E = \varnothing.$$

Como ya sabemos que E y $\varnothing$ son abiertos, por definición de conjunto cerrado se sigue que $\varnothing$ y E son cerrados.

(ii) Sea $(F_i)_{i \in I}$ una familia cualquiera de conjuntos cerrados en E, indexada por un conjunto I arbitrario, y consideremos

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Queremos probar que F es cerrado.

Usamos la relación entre complementos, uniones e intersecciones:

$$E \setminus F = E \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i).$$

Cada F_i es cerrado, así que $E \setminus F_i$ es abierto para todo i. Por lo tanto, la unión $\bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i)$ es abierta (por la propiedad ya demostrada para uniones arbitrarias de abiertos). En consecuencia, $E \setminus F$ es abierto, lo que implica que F es cerrado.

(iii) Sean $F_1, \ldots, F_n$ conjuntos cerrados en E y consideremos

$$H = \bigcup_{k=1}^{n} F_k.$$

Entonces

$$E \setminus H = E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k \right) = \bigcap_{k=1}^{n} (E \setminus F_k).$$

Como cada F_k es cerrado, $E \setminus F_k$ es abierto para todo k. La intersección finita de abiertos es abierta, por lo tanto $\bigcap_{k=1}^{n}(E \setminus F_k)$ es abierta. De aquí se deduce que $E \setminus H$ es abierto y, por definición, H es cerrado. $\square$

3.3. Puntos de acumulación y frontera

Definición 3.15. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Un punto $x \in E$ se llama *punto de acumulación* (o *punto límite*) de A si

$$\forall r > 0 \quad \big(B(x, r) \setminus \{x\}\big) \cap A \neq \varnothing.$$

Denotamos por A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A.

Proposición 3.16 (Caracterización secuencial de puntos de acumulación)**.** *Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) x es punto de acumulación de A, es decir $x \in A'$.

(II) Existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \in A \setminus \{x\}$ para todo n tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$) Supongamos que $x \in A'$. Entonces, por definición, para todo $r > 0$ se cumple

$$\big(B(x, r) \setminus \{x\}\big) \cap A \neq \varnothing.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $r_n = \frac{1}{n}$ y elegimos

$$a_n \in \big(B(x, r_n) \setminus \{x\}\big) \cap A.$$

Entonces $a_n \in A \setminus \{x\}$ y $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Si $n \geq N$, entonces

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por definición de límite, $a_n \to x$.

$(ii) \Rightarrow (i)$) Recíprocamente, supongamos que existe una sucesión (a_n) con $a_n \in A \setminus \{x\}$ para todo n y $a_n \to x$. Sea $r > 0$. Como $a_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$d(a_n, x) < r.$$

En particular, $a_N \in B(x, r)$, y como $a_N \neq x$ se tiene $a_N \in B(x, r) \setminus \{x\}$. Además, $a_N \in A$.

Por lo tanto,

$$\big(B(x, r) \setminus \{x\}\big) \cap A \neq \varnothing$$

para todo $r > 0$, lo que significa que x es punto de acumulación de A, es decir, $x \in A'$. □

Teorema 3.17. *Sea $A \subseteq E$ un subconjunto de un espacio métrico (E, d). Entonces*

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Demostración. Primero probamos la inclusión $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. Sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, ya está. Supongamos que $x \notin A$. Como $x \in \overline{A}$, por definición de clausura se cumple

$$\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \varnothing.$$

Pero como $x \notin A$, esto implica automáticamente que

$$\forall r > 0 \quad \big(B(x, r) \setminus \{x\}\big) \cap A \neq \varnothing,$$

es decir, x es punto de acumulación de A, $x \in A'$. En cualquiera de los dos casos, $x \in A \cup A'$. Por lo tanto

$$\overline{A} \subseteq A \cup A'.$$

Ahora probamos la inclusión inversa $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Si $x \in A$, ya vimos que siempre se cumple $A \subseteq \overline{A}$, así que $x \in \overline{A}$.

Si $x \in A'$, entonces para todo $r > 0$ se tiene

$$\big(B(x, r) \setminus \{x\}\big) \cap A \neq \varnothing.$$

En particular, esto implica $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$ para todo $r > 0$, de modo que x es punto de adherencia de A, es decir, $x \in \overline{A}$.

En ambos casos $x \in \overline{A}$, por lo que

$$A \cup A' \subseteq \overline{A}.$$

Concluimos que $\overline{A} = A \cup A'$. □

Corolario 3.18. *Sea $A \subseteq E$. Entonces A es cerrado si y sólo si*

$$A' \subseteq A.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Si A es cerrado, por definición $A = \overline{A}$. Por el teorema anterior,

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Luego

$$A = A \cup A'.$$

Esto sólo puede ocurrir si $A' \subseteq A$.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que $A' \subseteq A$. Del teorema anterior tenemos

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Como $A' \subseteq A$, se obtiene

$$\overline{A} = A.$$

Pero un conjunto es cerrado si y sólo si coincide con su clausura, por lo que A es cerrado. □

Definición 3.19. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Un punto $x \in E$ se llama *punto frontera* (o *punto de borde*) de A si para todo $r > 0$ se cumple

$$B(x, r) \cap A \neq \varnothing \quad \text{y} \quad B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing.$$

El conjunto de todos los puntos frontera de A se denota por ∂A y se llama *frontera* (o *borde*) de A.

Proposición 3.20. *Para todo $A \subseteq E$ se verifica*

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^{\circ}.$$

Demostración. Sea $x \in \partial A$. Entonces, por definición de punto frontera, para todo $r > 0$,

$$B(x, r) \cap A \neq \varnothing \quad \text{y} \quad B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing.$$

En particular, la primera condición implica que x es punto de adherencia de A, es decir $x \in \overline{A}$. Por otra parte, la segunda condición impide que exista algún $r > 0$ con $B(x, r) \subseteq A$, luego x no es punto interior de A, es decir $x \notin A^{\circ}$. Por lo tanto $x \in \overline{A} \setminus A^{\circ}$.

Recíprocamente, sea $x \in \overline{A} \setminus A^{\circ}$. Entonces $x \in \overline{A}$, de modo que para todo $r > 0$,

$$B(x, r) \cap A \neq \varnothing.$$

Además, $x \notin A^{\circ}$, es decir, no existe ningún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$. Por lo tanto, para todo $r > 0$ se tiene

$$B(x, r) \nsubseteq A,$$

lo que significa que para todo $r > 0$ existe $y \in B(x, r)$ tal que $y \notin A$, es decir,

$$B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing.$$

Juntando ambas condiciones, x es punto frontera de A, es decir $x \in \partial A$.

Hemos probado ambas inclusiones, así que $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. $\square$

Proposición 3.21. *Sea $A \subseteq E$. Entonces:*

(I) *∂A es un conjunto cerrado.*

(II) *Se tiene la descomposición*

$$E = A^\circ \,\dot{\cup}\, \partial A \,\dot{\cup}\, (E \setminus \overline{A}),$$

donde las uniones son disjuntas.

(III) *Se verifica*

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Demostración. (i) Por la proposición anterior,

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (E \setminus A^\circ).$$

Sabemos que $\overline{A}$ es cerrado. Como A° es abierto, su complemento $E \setminus A^\circ$ es cerrado. La intersección de conjuntos cerrados es cerrada, luego ∂A es cerrado.

(ii) Por definición de interior, clausura y frontera, se tiene

$$A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}.$$

Además, por la proposición anterior,

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

Entonces

$$\overline{A} = A^\circ \,\dot{\cup}\, \partial A.$$

Por otra parte, el complemento de $\overline{A}$ es $E \setminus \overline{A}$, y es abierto. Así, todo punto de E pertenece o bien a $\overline{A}$ o bien a $E \setminus \overline{A}$, y dentro de $\overline{A}$ está exactamente en A° o en ∂A. Esto da la descomposición

$$E = A^\circ \,\dot{\cup}\, \partial A \,\dot{\cup}\, (E \setminus \overline{A}).$$

(iii) De la igualdad del teorema anterior $\overline{A} = A \cup A'$ y del hecho de que $\partial A \subseteq \overline{A}$, se deduce en particular que

$$A \subseteq \overline{A} \quad \text{y} \quad \partial A \subseteq \overline{A}.$$

Por lo tanto,

$$A \cup \partial A \subseteq \overline{A}.$$

Recíprocamente, sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, ya está. Si $x \notin A$, como $x \in \overline{A}$, para todo $r > 0$ se cumple $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$. Además, como $x \notin A$, se tiene $x \in E \setminus A$, luego para todo $r > 0$ se cumple $x \in B(x,r) \cap (E \setminus A)$, o sea

$$B(x,r) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing.$$

Por definición, esto significa que $x \in \partial A$. En cualquier caso, $x \in A \cup \partial A$, con lo cual

$$\overline{A} \subseteq A \cup \partial A.$$

Concluimos que $\overline{A} = A \cup \partial A$. $\square$

3.4. Métricas equivalentes

Sea E un conjunto y d_1, d_2 dos métricas en E.

Definición 3.22. Decimos que las métricas d_1 y d_2 en E son *equivalentes* si inducen los mismos conjuntos abiertos, es decir, si para todo $U \subseteq E$ se cumple:

$$U \text{ es abierto en } (E, d_1) \iff U \text{ es abierto en } (E, d_2).$$

Proposición 3.23 (Caracterización secuencial)**.** *Sean d_1, d_2 dos métricas en E. Son equivalentes si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E y todo $x \in E$ se verifica*

$$x_n \to x \text{ en } (E, d_1) \iff x_n \to x \text{ en } (E, d_2).$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que d_1 y d_2 son equivalentes, es decir, tienen los mismos conjuntos abiertos.

Recordemos que, en un espacio métrico, una sucesión (x_n) converge a x si y sólo si se verifica la siguiente propiedad topológica:

$$\forall U \text{ abierto con } x \in U,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ x_n \in U.$$

Sea (x_n) una sucesión en E y $x \in E$. Supongamos que $x_n \to x$ en (E, d_1). Entonces, para todo abierto U de (E, d_1) con $x \in U$, existe N tal que, si $n \geq N$, se cumple $x_n \in U$.

Como d_1 y d_2 tienen los mismos abiertos, ese mismo conjunto U es abierto también en (E, d_2). La condición anterior es exactamente la definición de convergencia de (x_n) a x en (E, d_2). Por lo tanto, $x_n \to x$ en (E, d_2).

La implicación recíproca se demuestra igual, intercambiando el rol de d_1 y d_2.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que las sucesiones convergentes son las mismas para d_1 y d_2.

Queremos ver que los conjuntos abiertos también coinciden. Sea $U \subseteq E$ abierto en (E, d_1), y probemos que es abierto en (E, d_2).

Para eso, basta ver que si (x_n) es una sucesión en $E \setminus U$ que converge a algún $x \in E$ respecto de d_2, entonces $x \in E \setminus U$ (es decir, $x \notin U$). En efecto, esta propiedad caracteriza a los cerrados, y al tomar complementos caracteriza a los abiertos.

Sea entonces (x_n) una sucesión con $x_n \in E \setminus U$ para todo n y $x_n \to x$ en (E, d_2). Por hipótesis, las sucesiones convergentes son las mismas en ambas métricas, así que también $x_n \to x$ en (E, d_1).

Como U es abierto en (E, d_1), su complemento $E \setminus U$ es cerrado en (E, d_1). Por la caracterización secuencial de cerrados, si una sucesión de puntos de $E \setminus U$ converge (en d_1), su límite debe pertenecer a $E \setminus U$. En particular, $x \in E \setminus U$, es decir, $x \notin U$.

Hemos probado que el complemento de U es cerrado también con la métrica d_2, luego U es abierto en (E, d_2). El mismo argumento, cambiando el rol de d_1 y d_2, muestra la implicación inversa. Por lo tanto, los abiertos de d_1 coinciden con los de d_2, y las métricas son equivalentes. □

Definición 3.24. Decimos que dos métricas d_1, d_2 en E son *fuertemente equivalentes* si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1\, d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2\, d_1(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Proposición 3.25. *Si d_1 y d_2 son fuertemente equivalentes, entonces son equivalentes (en el sentido de que inducen los mismos conjuntos abiertos).*

Demostración. Sea U un abierto de (E, d_1) y tomemos $x \in U$. Por definición de abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B_{d_1}(x, r) \subseteq U,$$

donde $B_{d_1}(x, r) = \{y : d_1(x, y) < r\}$.

Consideremos ahora la bola en la métrica d_2

$$B_{d_2}\big(x, c_1 r\big) = \{y \in E : d_2(x, y) < c_1 r\}.$$

Si $y \in B_{d_2}(x, c_1 r)$, entonces $d_2(x, y) < c_1 r$, y usando la desigualdad $c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y)$ obtenemos

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) < c_1 r \quad \Longrightarrow \quad d_1(x, y) < r.$$

Luego $y \in B_{d_1}(x, r)$, y por lo tanto

$$B_{d_2}(x, c_1 r) \subseteq B_{d_1}(x, r) \subseteq U.$$

Hemos mostrado que para todo $x \in U$ existe un radio $c_1 r > 0$ tal que la bola d_2-abierta correspondiente está contenida en U, de modo que U es abierto en (E, d_2).

La implicación recíproca (todo abierto d_2-abierto es d_1-abierto) se prueba exactamente igual usando la otra desigualdad $d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$. Concluimos que d_1 y d_2 tienen los mismos abiertos, es decir, son métricas equivalentes. $\square$

Observación. En espacios de dimensión finita (por ejemplo, $\mathbb{R}^n$), todas las normas son fuertemente equivalentes. En particular, las métricas inducidas por las normas d_1, d_2, d_∞ en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, y por lo tanto tienen los mismos abiertos, los mismos cerrados, las mismas sucesiones convergentes, etc.

Teorema 3.26. *Sean d y d' dos métricas sobre un mismo conjunto E. Las métricas d y d' son (topológicamente) equivalentes si y sólo si para todo $x \in E$ y todo $r > 0$ existen $r_1, r_2 > 0$ tales que*

$$B_{d'}(x, r_1) \subseteq B_d(x, r) \quad y \quad B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r),$$

donde

$$B_d(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}, \qquad B_{d'}(x, r) = \{y \in E : d'(x, y) < r\}.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que d y d' son métricas equivalentes, es decir, inducen los mismos conjuntos abiertos.

Sea $x \in E$ y $r > 0$ arbitrarios. Entonces $B_d(x, r)$ es un abierto en (E, d); como los abiertos de (E, d) y (E, d') coinciden, $B_d(x, r)$ es también abierto en (E, d').

Por definición de abierto en la métrica d', existe $r_1 > 0$ tal que

$$B_{d'}(x, r_1) \subseteq B_d(x, r).$$

Para obtener la otra inclusión, usamos el mismo argumento intercambiando el rol de d y d': como $B_{d'}(x, r)$ es abierto en (E, d') y las familias de abiertos coinciden, $B_{d'}(x, r)$ es abierto en (E, d). Luego existe $r_2 > 0$ tal que

$$B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r).$$

Así se verifica la condición del enunciado.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que para todo $x \in E$ y todo $r > 0$ existen $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$B_{d'}(x, r_1) \subseteq B_d(x, r) \quad \text{y} \quad B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r).$$

Queremos probar que los abiertos de (E, d) y (E, d') coinciden.

Sea $U \subseteq E$ un conjunto abierto en (E, d). Sea $x \in U$. Como U es abierto para d, existe $r > 0$ tal que

$$B_d(x, r) \subseteq U.$$

Por hipótesis, existe $r_2 > 0$ tal que

$$B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r).$$

Aplicando de nuevo la hipótesis, pero ahora a la bola d'-abierta $B_{d'}(x, r)$, podemos elegir $r_3 > 0$ con

$$B_{d'}(x, r_3) \subseteq B_d(x, r_2).$$

Por lo tanto,

$$B_{d'}(x, r_3) \subseteq B_d(x, r_2) \subseteq B_d(x, r) \subseteq U.$$

Hemos encontrado, para cada $x \in U$, un radio $r_3 > 0$ tal que $B_{d'}(x, r_3) \subseteq U$, lo que significa que U es abierto en (E, d').

El argumento recíproco (si U es abierto en (E, d') entonces lo es en (E, d)) se obtiene exactamente igual, usando de nuevo la hipótesis para pasar de bolas d'-abiertas a bolas d-abiertas. Concluimos que las familias de conjuntos abiertos de (E, d) y (E, d') coinciden, es decir, d y d' son métricas equivalentes. □

3.5. Sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos

Definición 3.27. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Decimos que A es *acotado* si existen $x \in E$ y $r > 0$ tales que

$$A \subset B(x, r),$$

donde $B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$ es la bola abierta de centro x y radio r.

Definición 3.28. Sea (E, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ una sucesión. Decimos que (x_n) es *acotada* si existen $x \in E$ y $r > 0$ tales que

$$x_n \in B(x, r) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Equivalente: el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en E.

Definición 3.29. Sea (E, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ una sucesión. Decimos que (x_n) es una *sucesión de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n, m \geq n_0 : \ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Teorema 3.30. *Sea (E, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$. Entonces:*

(1) Si (x_n) es de Cauchy, entonces es acotada.

(2) Si (x_n) es convergente en E, entonces es de Cauchy.

(3) Si (x_n) es de Cauchy y tiene alguna subsucesión convergente, entonces (x_n) es convergente (en E) y converge al mismo límite que esa subsucesión.

Demostración. (1) Supongamos que (x_n) es de Cauchy. Tomamos $\varepsilon = 1$ en la definición. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq n_0$, se cumple

$$d(x_n, x_m) < 1.$$

En particular, para todo $n \geq n_0$,

$$d(x_n, x_{n_0}) < 1.$$

Sea ahora

$$M = \max\big\{d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0}), 1\big\}$$

(si $n_0 = 1$, simplemente tomamos $M = 1$). Entonces $M > 0$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x_{n_0}) \leq M.$$

Por lo tanto,

$$x_n \in B(x_{n_0}, M) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

lo que muestra que la sucesión (x_n) es acotada.

(2) Supongamos que (x_n) converge en E a algún $x \in E$; es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \ d(x_n, x) < \varepsilon/2.$$

(Escribimos $\varepsilon/2$ para simplificar las cuentas que siguen.)

Sea ahora $\varepsilon > 0$ fijo. Tomamos n_0 como arriba. Si $n, m \geq n_0$, por la desigualdad triangular:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos mostrado que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que, si $n, m \geq n_0$, se cumple $d(x_n, x_m) < \varepsilon$; es decir, (x_n) es de Cauchy.

(3) Supongamos que (x_n) es de Cauchy y que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to x \in E$.

Debemos probar que $x_n \to x$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como (x_{n_k}) converge a x, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq K$,

$$d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2.$$

Como (x_n) es de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq n_0$,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon/2.$$

Definimos
$$N = \text{máx}\{n_0, n_K\}.$$
Sea ahora $n \geq N$. Entonces $n \geq n_0$ y $n_K \geq n_0$, por lo que aplicando la propiedad de Cauchy con $m = n_K$ obtenemos:
$$d(x_n, x_{n_K}) < \varepsilon/2.$$
Por otra parte, como $n_K \geq K$, tenemos
$$d(x_{n_K}, x) < \varepsilon/2.$$
Usando la desigualdad triangular,
$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Hemos probado que
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ d(x_n, x) < \varepsilon,$$
lo cual significa que $x_n \to x$ en (E, d). $\square$

Definición 3.31. Un espacio métrico (E, d) se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy en E es convergente a un punto de E.

Proposición 3.32. *Sea (E, d) un espacio métrico completo y sea $F \subseteq E$ un subconjunto cerrado. Entonces el subespacio métrico (F, d) es completo.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en F (con la métrica d restringida). Como $F \subseteq E$, también es una sucesión de Cauchy en E. Dado que (E, d) es completo, existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$ en E.

Como F es cerrado en E y todos los x_n están en F, por la caracterización secuencial de cerrados se tiene necesariamente $x \in F$. Por lo tanto, (x_n) converge a un punto de F, y así (F, d) es completo. $\square$

4. Unidad 4: Funciones continuas

4.1. Definición y caracterizaciones de continuidad

Sea (E, d_E) y (F, d_F) espacios métricos, y sea $A \subseteq E$. Consideramos funciones $f : A \to F$.

Definición 4.1 (Continuidad en un punto)**.** Sea $x_0 \in A$. Decimos que f es *continua en x_0* si
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in A,\ d_E(x, x_0) < \delta\ \Rightarrow\ d_F\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

Definición 4.2 (Continuidad en un conjunto)**.** Decimos que f es *continua en* A si es continua en todo punto $x_0 \in A$. En particular, cuando $A = E$, diremos simplemente que $f : E \to F$ es *continua.*

Definición 4.3 (Continuidad secuencial en un punto)**.** Sea $x_0 \in A$. Decimos que f es *secuencialmente continua en* x_0 si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que

$$x_n \to x_0 \text{ en } (E, d_E),$$

se cumple

$$f(x_n) \to f(x_0) \text{ en } (F, d_F).$$

Proposición 4.4 (Equivalencia ε–δ / sucesiones)**.** *Sea $f : A \to F$ y $x_0 \in A$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) f es continua en x_0 (en el sentido ε–δ).

(II) f es secuencialmente continua en x_0, es decir: para toda sucesión $(x_n) \subseteq A$ con $x_n \to x_0$ en (E, d_E), se tiene $f(x_n) \to f(x_0)$ en (F, d_F).

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$) Supongamos que f es continua en x_0 en el sentido ε–δ. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ una sucesión tal que $x_n \to x_0$ en (E, d_E).

Sea $\varepsilon > 0$. Por continuidad en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_E(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d_F\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in A.$$

Como $x_n \to x_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$, se cumple

$$d_E(x_n, x_0) < \delta.$$

Aplicando la condición de continuidad a cada x_n con $n \geq N$, obtenemos

$$d_F\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Por definición de límite de sucesión en (F, d_F), esto significa que $f(x_n) \to f(x_0)$. Luego (ii) es verdadera.

$(ii) \Rightarrow (i)$) Supongamos ahora que f es secuencialmente continua en x_0 y probemos que es continua en x_0 en el sentido ε–δ.

Razonamos por absurdo. Supongamos que f *no* es continua en x_0. Entonces existe algún $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $x \in A$ con

$$d_E(x, x_0) < \delta \quad \text{pero} \quad d_F\big(f(x), f(x_0)\big) \geq \varepsilon_0.$$

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicamos esta propiedad con $\delta = \frac{1}{n}$ y obtenemos un punto $x_n \in A$ tal que

$$d_E\Big(x_n, x_0\Big) < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad d_F\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \varepsilon_0.$$

De aquí se ve que $x_n \to x_0$ en (E, d_E), porque para todo $\varepsilon > 0$ basta tomar N con $\frac{1}{N} < \varepsilon$; entonces si $n \geq N$,

$$d_E(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Sin embargo, la sucesión $(f(x_n))$ no puede converger a $f(x_0)$ en (F, d_F), ya que para todo n se tiene

$$d_F\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \varepsilon_0,$$

y esto contradice la definición de límite. Esto contradice la hipótesis de continuidad secuencial en x_0.

Por lo tanto, nuestra suposición era falsa y f debe ser continua en x_0 en el sentido ε–δ. $\square$

Definición 4.5 (Imagen inversa)**.** Sea $f : A \to F$ y $B \subseteq F$. Definimos la *imagen inversa* de B por f como

$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}.$$

Teorema 4.6 (Continuidad y abiertos)**.** *Sea $f : A \to F$ una función entre espacios métricos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *f es continua en A.*

(II) *Para todo abierto $G \subseteq F$, el conjunto $f^{-1}(G)$ es abierto en el subespacio A (es decir, $f^{-1}(G) = A \cap U$ para algún abierto U de E).*

(III) *Si $A = E$, entonces (ii) dice simplemente: para todo abierto $G \subseteq F$, $f^{-1}(G)$ es abierto en E.*

Demostración. ($(i) \Rightarrow (ii)$) Supongamos que f es continua en A y sea $G \subseteq F$ un conjunto abierto. Consideremos $f^{-1}(G) \subseteq A$.

Tomemos $x_0 \in f^{-1}(G)$. Entonces $f(x_0) \in G$. Como G es abierto en (F, d_F), existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_{d_F}\big(f(x_0), \varepsilon\big) \subseteq G.$$

Como f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$,

$$d_E(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d_F\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon,$$

es decir,

$$x \in B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A \;\Rightarrow\; f(x) \in B_{d_F}\big(f(x_0), \varepsilon\big) \subseteq G.$$

Por lo tanto,

$$B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A \subseteq f^{-1}(G).$$

Esto muestra que, en el subespacio A, el punto x_0 tiene una "bola" (dada por $B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A$) contenida en $f^{-1}(G)$. Por definición, $f^{-1}(G)$ es abierto en A.

$(ii) \Rightarrow (i)$) Supongamos ahora que para todo abierto $G \subseteq F$, el conjunto $f^{-1}(G)$ es abierto en el subespacio A.

Sea $x_0 \in A$ y probemos que f es continua en x_0.

Sea $\varepsilon > 0$. Consideramos el abierto

$$G = B_{d_F}\big(f(x_0), \varepsilon\big) \subseteq F.$$

Por hipótesis, $f^{-1}(G)$ es abierto en A. En particular, $x_0 \in f^{-1}(G)$ (porque $f(x_0) \in G$), y como $f^{-1}(G)$ es abierto en el subespacio A, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A \subseteq f^{-1}(G).$$

Entonces, si $x \in A$ y $d_E(x, x_0) < \delta$, se tiene $x \in A$ y $x \in B_{d_E}(x_0, \delta)$, por lo que $x \in f^{-1}(G)$; esto significa que $f(x) \in G$, es decir,

$$d_F\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

Hemos probado exactamente la condición ε–δ de continuidad de f en x_0. Como x_0 es arbitrario en A, f es continua en A.

La equivalencia con (iii) es sólo una simplificación de notación cuando $A = E$, ya que en ese caso "abierto en A" coincide con "abierto en E". □

Teorema 4.7 (Continuidad y cerrados)**.** *Sea $f : A \to F$ una función entre espacios métricos. Son equivalentes:*

(I) f es continua en A.

(II) Para todo cerrado $C \subseteq F$, el conjunto $f^{-1}(C)$ es cerrado en el subespacio A.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$) Supongamos f continua en A y sea $C \subseteq F$ un cerrado. Su complemento $F \setminus C$ es abierto en F.

Por el teorema anterior, $f^{-1}(F \setminus C)$ es abierto en A. Notemos que

$$A \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(F \setminus C).$$

Entonces el complemento de $f^{-1}(C)$ en A es abierto en A, por lo que $f^{-1}(C)$ es cerrado en A.

$(ii) \Rightarrow (i)$) Recíprocamente, supongamos que la preimagen de todo cerrado en F es cerrada en A.

Sea $G \subseteq F$ un abierto. Entonces $F \setminus G$ es cerrado en F, y por hipótesis

$$f^{-1}(F \setminus G)$$

es cerrado en A. Su complemento en A,

$$A \setminus f^{-1}(F \setminus G),$$

es abierto en A. Pero

$$A \setminus f^{-1}(F \setminus G) = f^{-1}(G).$$

Concluimos que $f^{-1}(G)$ es abierto en A para todo abierto G de F. Por el teorema anterior, esto implica que f es continua en A. $\square$

Teorema 4.8 (Continuidad y clausura de la imagen)**.** *Sea $f : E \to E'$ una función entre espacios métricos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) f es continua en E.

(II) Para todo subconjunto $A \subseteq E$ se cumple

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Demostración. ($(i) \Rightarrow (ii)$) Supongamos que f es continua en E (en cada punto de E).

Sea $A \subseteq E$ y sea $x \in \overline{A}$. Por la caracterización secuencial de la clausura, existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que

$$a_n \to x \quad \text{en } E.$$

Como f es continua en x, se tiene

$$f(a_n) \to f(x) \quad \text{en } E'.$$

Además, cada $f(a_n)$ pertenece a $f(A)$, luego por la caracterización secuencial de la clausura en E' concluimos que

$$f(x) \in \overline{f(A)}.$$

Esto vale para todo $x \in \overline{A}$, por lo tanto

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

($(ii) \Rightarrow (i)$) Supongamos ahora que para todo $A \subseteq E$ se cumple

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Queremos probar que f es continua en E.

Usaremos el criterio de continuidad en términos de cerrados: f es continua si y sólo si, para todo conjunto cerrado $C \subseteq E'$, la preimagen $f^{-1}(C)$ es cerrada en E.

Sea entonces $C \subseteq E'$ un cerrado y definamos

$$A = f^{-1}(C) = \{x \in E : f(x) \in C\}.$$

Tenemos $A \subseteq E$ y, en particular, $f(A) \subseteq C$. De la hipótesis aplicada a este conjunto A se obtiene

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Como $f(A) \subseteq C$, se cumple

$$\overline{f(A)} \subseteq \overline{C} = C$$

(porque C es cerrado). Por lo tanto,

$$f(\overline{A}) \subseteq C.$$

Tomando preimagen por f de ambos lados,

$$f^{-1}\big(f(\overline{A})\big) \subseteq f^{-1}(C) = A.$$

En particular, como $\overline{A} \subseteq f^{-1}\big(f(\overline{A})\big)$ (siempre se cumple $B \subseteq f^{-1}(f(B))$ para cualquier función y cualquier conjunto B), obtenemos

$$\overline{A} \subseteq A.$$

Pero siempre se tiene $A \subseteq \overline{A}$, por definición de clausura. Luego

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq A,$$

de donde se deduce $\overline{A} = A$. Es decir, A es cerrado en E.

Hemos probado que, para todo cerrado $C \subseteq E'$, la preimagen $f^{-1}(C)$ es cerrada en E. Por el criterio de continuidad mediante cerrados, esto implica que f es continua en E.

Así queda demostrada la equivalencia entre (i) y (ii). □

4.2. Continuidad uniforme

Sea $f : E \to E'$ entre espacios métricos (E, d) y (E', d').

Definición 4.9 (Continuidad uniforme, versión con bolas)**.** Decimos que f es *uniformemente continua* en E si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tal que } f\big(B_d(x, \delta)\big) \subseteq B_{d'}(f(x), \varepsilon) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Es decir: dado $\varepsilon > 0$ se puede elegir un mismo $\delta > 0$ (válido para todos los puntos x) de modo que, siempre que y esté δ-cerca de x, las imágenes $f(y)$ y $f(x)$ estén ε-cerca.

Definición 4.10 (Definición equivalente, versión ε–δ)**.** Equivalente y más usada: f es *uniformemente continua* en E si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x, y \in E, \ d(x,y) < \delta \ \Rightarrow \ d'\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

Aquí δ depende sólo de ε, no de los puntos x, y.

Proposición 4.11. *Las dos definiciones anteriores de continuidad uniforme son equivalentes.*

Demostración. Supongamos primero la definición con bolas. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ el correspondiente en esa definición. Si $x, y \in E$ y $d(x,y) < \delta$, entonces $y \in B_d(x,\delta)$ y, por la hipótesis,

$$f(y) \in f\big(B_d(x,\delta)\big) \subseteq B_{d'}(f(x),\varepsilon),$$

es decir, $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Esto da la definición ε–δ.

Recíprocamente, supongamos que vale la definición ε–δ. Fijamos $\varepsilon > 0$ y tomamos el correspondiente $\delta > 0$. Sea $x \in E$ y $y \in B_d(x,\delta)$, entonces $d(x,y) < \delta$ y por la hipótesis

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

es decir, $f(y) \in B_{d'}(f(x),\varepsilon)$. Por lo tanto,

$$f\big(B_d(x,\delta)\big) \subseteq B_{d'}(f(x),\varepsilon) \quad \text{para todo } x \in E,$$

que es la definición con bolas. $\square$

Proposición 4.12 (Criterio secuencial para *no* continuidad uniforme)**.** *Sea $f : E \to E'$. Entonces f* ***no*** *es uniformemente continua en E si y sólo si existen $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E tales que*

$$d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \textit{pero} \quad d'\big(f(x_n), f(y_n)\big) \geq \varepsilon_0 \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que f no es uniformemente continua. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que *para todo* $\delta > 0$ no se cumple la condición de continuidad uniforme, es decir:

$$\forall \delta > 0 \ \exists x, y \in E \text{ con } d(x,y) < \delta \text{ y } d'\big(f(x), f(y)\big) \geq \varepsilon_0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicamos esto con $\delta = \frac{1}{n}$, obteniendo puntos $x_n, y_n \in E$ tales que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad d'\big(f(x_n), f(y_n)\big) \geq \varepsilon_0.$$

Entonces $d(x_n, y_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, mientras que las distancias entre las imágenes están siempre acotadas inferiormente por ε_0. Esto da las sucesiones pedidas.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que existen $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones (x_n), (y_n) en E tales que

$$d(x_n, y_n) \to 0 \quad \text{y} \quad d'\big(f(x_n), f(y_n)\big) \geq \varepsilon_0 \ \forall n.$$

Supongamos, por absurdo, que f fuera uniformemente continua. Tomemos $\varepsilon = \varepsilon_0$ en la definición de continuidad uniforme. Entonces existiría $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in E$,

$$d(x, y) < \delta \ \Rightarrow \ d'\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon_0.$$

Como $d(x_n, y_n) \to 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$d(x_n, y_n) < \delta.$$

Aplicando la condición de uniformidad, tendríamos

$$d'\big(f(x_n), f(y_n)\big) < \varepsilon_0 \quad \text{para todo } n \geq N,$$

lo que contradice la hipótesis $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ para todo n.

Por lo tanto, f no puede ser uniformemente continua. $\square$

Definición 4.13 (Aplicación de Lipschitz). Sea $C > 0$. Decimos que $f : E \to E'$ es *Lipschitz* (o C-*Lipschitz*) si

$$d'\big(f(x), f(y)\big) \leq C\, d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Teorema 4.14. *Sea $f : E \to E'$. Si existe $C > 0$ tal que*

$$d'\big(f(x), f(y)\big) \leq C\, d(x, y) \quad \textit{para todo } x, y \in E,$$

entonces f es uniformemente continua en E.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Definimos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{C} > 0.$$

Si $x, y \in E$ satisfacen $d(x, y) < \delta$, entonces

$$d'\big(f(x), f(y)\big) \leq C\, d(x, y) < C\delta = \varepsilon.$$

Esto es exactamente la definición de continuidad uniforme (con $\delta = \varepsilon/C$). Por lo tanto f es uniformemente continua. $\square$

4.2.1. Isometrías

Definición 4.15. Sea $f : E \to E'$ entre espacios métricos (E, d) y (E', d'). Decimos que f es una *isometría* si

$$d(x, y) = d'\big(f(x), f(y)\big) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Proposición 4.16. *Sea $f : E \to E'$ una isometría. Entonces:*

(I) f es inyectiva.

(II) f es 1-Lipschitz, luego uniformemente continua.

Demostración. (i) Si $f(x) = f(y)$, entonces

$$d(x, y) = d'\big(f(x), f(y)\big) = d'(f(x), f(x)) = 0,$$

lo que implica $x = y$. Por lo tanto, f es inyectiva.

(ii) De la definición de isometría se tiene directamente

$$d'\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y) \leq 1 \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in E,$$

es decir, f es 1-Lipschitz. Por el teorema anterior, toda aplicación Lipschitz es uniformemente continua, así que f lo es. □

Observación. Si $f : E \to E'$ es una isometría *biyectiva*, entonces su inversa $f^{-1} : E' \to E$ también es una isometría: para $u, v \in E'$, escribiendo $u = f(x)$ y $v = f(y)$ con $x, y \in E$, se tiene

$$d\big(f^{-1}(u), f^{-1}(v)\big) = d(x, y) = d'\big(f(x), f(y)\big) = d'(u, v).$$

En particular, f^{-1} también es uniformemente continua.

4.2.2. Homeomorfismos

Definición 4.17. Sea $f : E \to E'$ una función entre espacios métricos. Decimos que f es un *homeomorfismo* si:

(I) f es biyectiva,

(II) f es continua,

(III) la inversa $f^{-1} : E' \to E$ es continua.

Definición 4.18. Dos espacios métricos (E, d) y (E', d') se dicen *homeomorfos* si existe un homeomorfismo $f : E \to E'$.

Proposición 4.19. *Si $f : E \to E'$ es un homeomorfismo, entonces:*

(I) $G \subseteq E$ es abierto si y sólo si $f(G)$ es abierto en E'.

(II) *$F \subseteq E$ es cerrado si y sólo si $f(F)$ es cerrado en E'.*

Demostración. (i) Si G es abierto en E y f es continua, entonces $f(G)$ es abierto en E' si y sólo si f^{-1} es continua, porque $G = f^{-1}(f(G))$ y f^{-1} es continua por hipótesis.

Formalmente: como f es biyectiva, $G = f^{-1}(H)$ para $H = f(G)$. La continuidad de f^{-1} implica que, si H es abierto en E', entonces G es abierto en E. Inversamente, dado G abierto en E, $H = f(G)$ es abierto en E' porque H es la imagen inversa de un abierto por f^{-1} (que es continua).

(ii) Se deduce de (i) aplicando el resultado a los complementos: F es cerrado en E si y sólo si $E \setminus F$ es abierto, y la imagen por f de $E \setminus F$ es el complemento de $f(F)$ en E'. □

Observación. En general, una aplicación biyectiva y continua *no* tiene por qué tener inversa continua, es decir, no todo biectivo continuo es un homeomorfismo. El requisito f^{-1} continua es esencial en la definición.

4.2.3. Conjuntos densos

Definición 4.20. Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subseteq E$ se dice *denso en E* si

$$\overline{D} = E.$$

Equivalente: todo punto de E es límite de una sucesión de puntos de D.

Proposición 4.21. *Sea (E, d) un espacio métrico y $D \subseteq E$. Son equivalentes:*

(I) *D es denso en E, es decir, $\overline{D} = E$.*

(II) *Para todo abierto no vacío $G \subseteq E$ se cumple*

$$G \cap D \neq \varnothing.$$

Demostración. *(i) ⇒ (ii))* Supongamos $\overline{D} = E$. Sea G un abierto no vacío en E. Como $G \subseteq E = \overline{D}$, y G es abierto, se cumple $G \cap D \neq \varnothing$ (porque todo abierto que intersecta la clausura de un conjunto debe intersectar al conjunto mismo).

Más formalmente: si $G \cap D = \varnothing$, entonces $G \subseteq E \setminus D$, y el complemento $E \setminus D$ sería un cerrado que contiene a G, contradiciendo que $G \subseteq \overline{D}$.

(ii) ⇒ *(i)*) Supongamos que todo abierto no vacío G verifica $G \cap D \neq \varnothing$. Si existiera $x \in E \setminus \overline{D}$, entonces x estaría en el abierto $E \setminus \overline{D}$, que por definición de clausura no intersecta a D. Esto contradice (ii). Por lo tanto, $E \setminus \overline{D} = \varnothing$, es decir, $\overline{D} = E$. □

5. Unidad 5: Compacidad

5.1. Definiciones básicas

Definición 5.1 (Conjunto compacto)**.** Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subseteq E$. Decimos que K es *compacto* si para toda familia de abiertos $\{G_i\}_{i \in I}$ de E tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i,$$

existe un subíndice finito $i_1, \ldots, i_n \in I$ con

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}.$$

Es decir, todo recubrimiento abierto de K admite un subcubrimiento finito.

Definición 5.2 (Compacidad secuencial)**.** Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subseteq E$. Decimos que K es *secuencialmente compacto* si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in K$ para todo n, existe una subsucesión $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ y un punto $x \in K$ tales que

$$x_{n_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} x.$$

Definición 5.3 (Conjunto totalmente acotado)**.** Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Decimos que A es *totalmente acotado* (T.T.A.) si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_1, \ldots, x_{n(\varepsilon)} \in E \text{ tales que } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n(\varepsilon)} B(x_k, \varepsilon),$$

donde $B(x_k, \varepsilon) = \{y \in E : d(x_k, y) < \varepsilon\}$.

Definición 5.4 (Punto de acumulación)**.** Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Un punto $x \in E$ se llama *punto de acumulación* (o punto límite) de A si

$$\forall r > 0 \quad \big(B(x, r) \setminus \{x\}\big) \cap A \neq \varnothing.$$

Denotamos por A' al conjunto de puntos de acumulación de A.

Proposición 5.5 (Caracterización secuencial de puntos de acumulación)**.** *Sea $A \subseteq E$ y $x \in E$. Entonces*

$$x \in A' \iff \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x\} \textit{ tal que } a_n \to x.$$

5.2. Compacidad y puntos de acumulación

Teorema 5.6 (Equivalencias de compacidad en espacios métricos)**.** *Sea (E,d) un espacio métrico y $K \subseteq E$. Son equivalentes:*

(I) K es compacto.

(II) K es secuencialmente compacto.

(III) Todo subconjunto infinito $A \subseteq K$ tiene al menos un punto de acumulación en K, es decir, $A' \cap K \neq \varnothing$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sea (x_n) una sucesión en K. Si el conjunto de valores $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito, alguna de sus constantes se repite infinitas veces y obtenemos una subsucesión constante, luego convergente.

Si A es infinito, como K es compacto, también lo es $\overline{A}$, y por tanto A tiene un punto de acumulación $x \in K$. Por la caracterización secuencial de puntos de acumulación, existe una subsucesión (x_{n_j}) con $x_{n_j} \to x \in K$. En ambos casos, (x_n) admite una subsucesión convergente en K.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sea $A \subseteq K$ infinito. Elegimos una sucesión de puntos distintos $(x_n) \subseteq A$ (por ejemplo, una enumeración inyectiva de A). Por (ii), existe una subsucesión (x_{n_j}) y un punto $x \in K$ tales que $x_{n_j} \to x$. Como todos los $x_{n_j} \in A$, la caracterización secuencial de puntos de acumulación dice que $x \in A'$. Por tanto $A' \cap K \neq \varnothing$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Sea (x_n) una sucesión en K y sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$. Si A es finito, como antes obtenemos una subsucesión constante y convergente.

Si A es infinito, por (iii) existe $x \in A' \cap K$. Entonces, por la caracterización secuencial de puntos de acumulación, existe una subsucesión (x_{n_j}) de (x_n) tal que $x_{n_j} \to x \in K$. En todo caso, (x_n) admite una subsucesión convergente en K.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Probamos la contrarrecíproca. Supongamos que K no es compacto. Entonces existe un recubrimiento abierto $\{G_i\}_{i \in I}$ de K que no admite subcubrimiento finito.

Construimos inductivamente una sucesión (x_n) en K del siguiente modo: - Elegimos $x_1 \in K$ y un índice i_1 con $x_1 \in G_{i_1}$. - Supuesto elegido $x_1, \ldots, x_n$ con índices $i_1, \ldots, i_n$ tales que $x_k \in G_{i_k}$, como $K \nsubseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$ existe $x_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$. Elegimos i_{n+1} con $x_{n+1} \in G_{i_{n+1}}$.

Entonces cada x_n pertenece a un abierto nuevo de la familia, distinto de los anteriores. Sea (x_{n_j}) una subsucesión cualquiera. Si fuera convergente, digamos $x_{n_j} \to x \in K$, algún abierto G_i contendría a x y a todos los términos suficientemente avanzados de la subsucesión; en particular, ese solo G_i cubriría casi todos los x_n, y un número finito de abiertos de la familia cubriría K, contradiciendo la elección de $\{G_i\}$ sin subcubrimiento finito. Luego (x_n) no posee subsucesión convergente, y K no es secuencialmente compacto.

La contrarrecíproca muestra que (ii) implica (i). $\square$

5.3. Compacidad, completitud y total acotación

Teorema 5.7. *Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subseteq E$. Entonces:*

(I) Si K es compacto, entonces K es completo y totalmente acotado.

(II) Si K es completo y totalmente acotado, entonces K es compacto.

En particular,

$$K \text{ compacto} \iff K \text{ completo y totalmente acotado.}$$

Demostración. (i) Si K es compacto, por el teorema anterior es secuencialmente compacto. Toda sucesión de Cauchy en K admite una subsucesión convergente; un argumento estándar muestra que la sucesión completa converge al mismo límite, que pertenece a K, de modo que K es completo.

Para ver que K es T.T.A., sea $\varepsilon > 0$ y consideremos la familia de bolas $\{B(x, \varepsilon) : x \in K\}$, que es un recubrimiento abierto de K. Por compacidad, existe un subcubrimiento finito $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$, que es precisamente la definición de T.T.A.

(ii) Supongamos que K es completo y totalmente acotado. Sea (x_n) una sucesión en K. Por total acotación, usando el clásico método de "subsucesiones encajadas", se puede extraer una subsucesión (x_{n_j}) que resulta ser de Cauchy. Como K es completo, esa subsucesión converge en K. Así, toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K, es decir, K es secuencialmente compacto. Por el teorema anterior, K es compacto. □

Proposición 5.8. *Si (E, d) es un espacio métrico y $K \subseteq E$ es compacto, entonces K es cerrado y acotado.*

Demostración. Ya vimos que todo compacto es totalmente acotado, luego es acotado.

Resta ver que es cerrado. Sea $\overline{K}$ la clausura de K. Si $x \in \overline{K}$, existe una sucesión $(x_n) \subseteq K$ tal que $x_n \to x$. Como K es compacto, es secuencialmente compacto, por lo que (x_n) admite una subsucesión convergente con límite en K; la unicidad del límite en espacios métricos fuerza que ese límite sea x, por lo que $x \in K$. Se obtiene $\overline{K} \subseteq K$, y como siempre $K \subseteq \overline{K}$, concluimos $\overline{K} = K$, es decir, K es cerrado. □

Teorema 5.9 (Heine–Borel en $\mathbb{R}^m$). *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^m$ con la métrica euclídea usual. Entonces*

$$K \text{ es compacto} \iff K \text{ es cerrado y acotado.}$$

5.4. Propiedades estructurales de compactos y T.T.A.

Proposición 5.10 (Subconjunto cerrado de un compacto). *Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subseteq E$ compacto. Si $F \subseteq K$ es cerrado (en E), entonces F es compacto.*

Demostración. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recubrimiento abierto de F en E. Como F es cerrado, $E \setminus F$ es abierto. Entonces

$$\{G_\alpha : \alpha \in A\} \cup \{E \setminus F\}$$

es un recubrimiento abierto de K. Por compacidad, existe una subfamilia finita que recubre K, y por lo tanto F queda cubierto por una subfamilia finita de los G_α. Así, F es compacto. □

Corolario 5.11. *La intersección arbitraria de subconjuntos compactos de un espacio métrico es un conjunto compacto (en particular, $\varnothing$ es compacto).*

Demostración. Si $\{K_i\}_{i \in I}$ son compactos, cada uno es cerrado en E. La intersección $K = \bigcap_{i \in I} K_i$ es cerrada y satisface $K \subseteq K_{i_0}$ para cualquier índice fijo i_0. Como K es un subconjunto cerrado de K_{i_0}, por la proposición anterior K es compacto. El caso $K = \varnothing$ también es compacto por definición. □

Proposición 5.12 (Propiedades de conjuntos totalmente acotados). *Sea (E, d) un espacio métrico.*

- *(I) Si $A \subseteq B \subseteq E$ y B es T.T.A., entonces A es T.T.A.*
- *(II) Si A es T.T.A., entonces $\overline{A}$ es T.T.A.*
- *(III) Si A y B son T.T.A., entonces $A \cup B$ es T.T.A. (en general, la unión finita de conjuntos T.T.A. es T.T.A.).*
- *(IV) Si A es T.T.A., entonces A es acotado.*

Demostración. (i) y (iii) se obtienen directamente de la definición observando que un recubrimiento finito de B o de A y B provee uno de A o de $A \cup B$.

(ii) Dado $\varepsilon > 0$, se cubre A con finitas bolas $B(x_k, \varepsilon/2)$; se comprueba que la clausura de cada una de ellas queda incluida en $B(x_k, \varepsilon)$, y se deduce que $\overline{A}$ queda cubierta por la unión finita $\bigcup_k B(x_k, \varepsilon)$.

(iv) Tomando $\varepsilon = 1$, se ve que A queda contenido en la unión finita de bolas de radio 1, por lo que todo punto de A está a distancia acotada de cualquiera de sus centros; esto da una cota global para A. □

Proposición 5.13 (Imagen de T.T.A. por función uniformemente continua). *Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos, $A \subseteq E$ totalmente acotado y $f : E \to E'$ uniformemente continua. Entonces $f(A)$ es totalmente acotado en (E', d').*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por uniformidad de f, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall x, y \in E.$$

Como A es T.T.A., existen $x_1, \ldots, x_n$ con

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \delta).$$

Entonces

$$f(A) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} f(B(x_k, \delta)) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_{d'}(f(x_k), \varepsilon).$$

Hemos cubierto $f(A)$ con finitas bolas de radio ε; como ε era arbitrario, $f(A)$ es T.T.A. $\square$

5.5. Funciones continuas sobre compactos

Teorema 5.14 (Imagen continua de un compacto)**.** *Sean (E,d) y (E',d') espacios métricos y sea $f : E \to E'$ continua. Si $K \subseteq E$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto en E'.*

Demostración. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recubrimiento abierto de $f(K)$ en E'. Para cada α definimos $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$, que es abierto en E por continuidad de f. Además,

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha,$$

pues si $x \in K$ entonces $f(x) \in f(K) \subseteq \bigcup V_\alpha$.

Como K es compacto, existe un subcubrimiento finito $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}$. Aplicando f,

$$f(K) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} f(U_{\alpha_j}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_{\alpha_j},$$

que es un subcubrimiento finito de $f(K)$. Así, $f(K)$ es compacto. $\square$

Corolario 5.15 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sea $K \subseteq E$ compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Entonces:*

(I) f es acotada en K: existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in K$;

(II) f alcanza su máximo y su mínimo en K, es decir, existen $x_{\text{mín}}, x_{\text{máx}} \in K$ con

$$f(x_{\text{mín}}) \leq f(x) \leq f(x_{\text{máx}}) \quad \forall x \in K.$$

Demostración. Por el teorema anterior, $f(K)$ es compacto en $\mathbb{R}$. Todo compacto no vacío de $\mathbb{R}$ es cerrado y acotado, de modo que admite supremo e ínfimo que pertenecen al conjunto; eso da el máximo y el mínimo. La acotación se deduce de la existencia de supremo y de ínfimo. $\square$

Teorema 5.16 (Continuidad uniforme en compactos)**.** *Sean* (E, d) *y* (E', d') *espacios métricos y sea* $f : E \to E'$ *continua. Si* E *es compacto, entonces* f *es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in E$, por continuidad de f en x existe $\delta_x > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta_x \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall y \in E.$$

La familia de bolas $B(x, \delta_x)$ (o $B(x, \delta_x/2)$) es un cubrimiento abierto de E. Por compacidad, existe un subcubrimiento finito

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B\big(x_k, \delta_{x_k}\big).$$

Definimos

$$\delta = \min_{1 \leq k \leq n} \delta_{x_k} > 0.$$

Si $x, y \in E$ satisfacen $d(x, y) < \delta$, entonces ambos pertenecen a alguna de las bolas del subcubrimiento (por ejemplo, a la de centro x_k que contiene a x), y como en esa bola vale la condición de continuidad con $\delta_{x_k} \geq \delta$, obtenemos $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in E : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

y f es uniformemente continua. □

Corolario 5.17 (Funciones continuas sobre compacto son cerradas)**.** *Sean* (E, d) *y* (E', d') *espacios métricos,* E *compacto y* $f : E \to E'$ *continua. Entonces* f *es una aplicación cerrada: si* $G \subseteq E$ *es cerrado, entonces* $f(G)$ *es cerrado en* E'*.*

Demostración. Si G es cerrado en E, entonces G es compacto (cerrado en un compacto). Por el teorema de la imagen de un compacto, $f(G)$ es compacto en E'. En un espacio métrico, todo compacto es cerrado, así que $f(G)$ es cerrado. □

Corolario 5.18 (Homeomorfismos desde compactos)**.** *Sean* (E, d) *y* (E', d') *espacios métricos, con* E *compacto, y sea* $f : E \to E'$ *continua y biyectiva. Entonces* f *es un homeomorfismo, es decir,* $f^{-1} : E' \to E$ *es continua.*

Demostración. Del corolario anterior, f es una aplicación cerrada. Sea $F' \subseteq E'$ cerrado. Como f es biyectiva, se tiene

$$f^{-1}(F') \subseteq E.$$

Además

$$E' \setminus F' \text{ es abierto} \Rightarrow f^{-1}(E' \setminus F') = E \setminus f^{-1}(F') \text{ es abierto en } E,$$

por continuidad de f. Por lo tanto $f^{-1}(F')$ es cerrado en E. La preimagen por f^{-1} de todo cerrado de E es cerrada, lo que equivale a la continuidad de f^{-1}. Luego f es un homeomorfismo. □

6. Unidad 6: Espacios normados

7. Unidad 7: Sucesiones de funciones

7.1. Convergencia puntual y uniforme

Definición 7.1 (Convergencia puntual)**.** Sean (E,d) y (E',d') espacios métricos y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : E \to E'$. Decimos que (f_n) *converge puntualmente* a una función $f : E \to E'$ si

$$\forall x \in E: \quad \lim_{n\to\infty} d'\big(f_n(x), f(x)\big) = 0.$$

Equivalentemente,

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ d'\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon.$$

En este caso escribimos $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente, o simplemente $f_n \to f$ puntualmente en E.

Definición 7.2 (Convergencia uniforme)**.** Con la notación anterior, diremos que (f_n) *converge uniformemente* a f en E si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in E:\ d'\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon.$$

En este caso escribimos $f_n \rightrightarrows f$ en E.

7.2. Límite uniforme de funciones continuas

Teorema 7.3. *Sea (E,d), (E',d') espacios métricos y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas $f_n : E \to E'$, que converge uniformemente a $f : E \to E'$. Entonces f es continua.*

Demostración. Sea $x_0 \in E$ y sea $\varepsilon > 0$ dado. Como $f_n \rightrightarrows f$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d'\big(f_n(x), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in E,\ \forall n \geq N.$$

En particular,

$$d'\big(f_N(x_0), f(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como f_N es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'\big(f_N(x), f_N(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomemos ahora un $x \in E$ con $d(x,x_0) < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} d'\big(f(x), f(x_0)\big) &\leq d'\big(f(x), f_N(x)\big) + d'\big(f_N(x), f_N(x_0)\big) + d'\big(f_N(x_0), f(x_0)\big) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, esto prueba que f es continua en x_0. Dado que x_0 era un punto cualquiera de E, f es continua en todo E. □

7.3. Pasaje al límite bajo el signo integral

Proposición 7.4. *Sea* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *y sean* $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas tales que* $f_n \rightrightarrows f$ *en* $[a,b]$*. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $f_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$, por definición de convergencia uniforme existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N\ \forall x \in [a,b] :\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Fijemos $n \geq N$. Entonces, para todo $t \in [a,b]$,

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Integrando en el intervalo $[a,b]$ y usando la desigualdad triangular para integrales, obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t)\, dt - \int_a^b f(t)\, dt \right| &= \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t))\, dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dt \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}\,(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hemos probado que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \left| \int_a^b f_n(t)\, dt - \int_a^b f(t)\, dt \right| < \varepsilon,$$

lo cual es precisamente

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

□

7.4. Convergencia de derivadas

Proposición 7.5. *Sean* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones de clase* C^1 *en* $[a,b]$*, tales que*

- $f_n \to f$ *puntualmente en* $[a,b]$*;*

- *$f_n' \rightrightarrows g$ en $[a,b]$.*

Entonces f es derivable en $[a,b]$ y

$$f' = g.$$

Demostración. Sea $x_0 \in [a,b]$ fijo. Por el Teorema Fundamental del Cálculo aplicado a cada f_n, para todo $x \in [a,b]$ se cumple

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt.$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ en ambos lados:

- Por la convergencia puntual $f_n(x) \to f(x)$ y $f_n(x_0) \to f(x_0)$, el lado izquierdo converge a $f(x) - f(x_0)$.

- Por la proposición anterior (pasaje al límite bajo el integral) y la convergencia uniforme de f_n' a g, el lado derecho converge a $\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$.

Por lo tanto,

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

Definamos

$$F(x) := f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt.$$

La función F es de clase C^1 en $[a,b]$ y satisface $F' = g$. Además, la igualdad anterior muestra que $f(x) = F(x)$ para todo x. Luego f es derivable y $f' = g$. □

7.5. Sucesiones uniformemente de Cauchy

Definición 7.6 (Sucesión uniformemente de Cauchy)**.** Sea (E,d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y (E',d') otro espacio métrico. Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $f_n : A \to E'$ se dice *uniformemente de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m,n \geq n_0\ \forall x \in A:\ d'\big(f_n(x), f_m(x)\big) < \varepsilon.$$

Teorema 7.7. *Sea $A \subseteq E$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}$ uniformemente de Cauchy. Entonces existe una función $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \rightrightarrows f$ en A.*

Demostración. Fijemos $x \in A$. Consideremos la sucesión numérica

$$\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}.$$

De la definición de sucesión uniformemente de Cauchy se deduce en particular que, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } m,n \geq n_0.$$

Es decir, para cada $x \in A$, la sucesión $(f_n(x))$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, existe el límite

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}.$$

Así definimos una función $f : A \to \mathbb{R}$.

Resta ver que $f_n \rightrightarrows f$ en A. Sea $\varepsilon > 0$. Por ser (f_n) uniformemente de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0,\ \forall x \in A.$$

Fijemos $n \geq n_0$ y $x \in A$ arbitrarios. Tomando el límite cuando $m \to \infty$ en la desigualdad anterior, obtenemos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ya que $f_m(x) \to f(x)$ para cada x.

Como la cota ε es independiente de x y vale para todo $n \geq n_0$, concluimos que

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Esto es precisamente $f_n \rightrightarrows f$ en A. □

8. Unidad 8: Medida de Lebesgue

8.1. Conjuntos nulos

Definición 8.1 (Conjunto nulo)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que A es un *conjunto nulo* si para todo $\varepsilon > 0$ existen intervalos abiertos contables $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \quad \text{y} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{long}(U_n) < \varepsilon.$$

8.2. σ-álgebras y conjuntos medibles de Lebesgue

Definición 8.2 (σ-álgebra)**.** Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{A}$ es una *σ-álgebra* si se verifica:

(i) $X \in \mathcal{A}$;

(ii) si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(iii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{y} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Definición 8.3 (Conjuntos medibles de Lebesgue)**.** Sea $\mathcal{M}$ la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos y los conjuntos nulos de $\mathbb{R}$. A $\mathcal{M}$ la llamamos *σ-álgebra de conjuntos medibles de Lebesgue* en $\mathbb{R}$.

Si I es un intervalo de $\mathbb{R}$, denotamos por $\mathcal{M}(I)$ a la σ-álgebra de subconjuntos medibles de Lebesgue de I.

8.3. Medida de Lebesgue

Teorema 8.4 (Existencia y unicidad de la medida de Lebesgue)**.** *Existe una única función*

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$$

tal que:

(I) si $A = (a, b)$ es un intervalo abierto acotado, entonces

$$\mu(A) = b - a;$$

(II) si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n);$$

(III) si, además, los A_n son dos a dos disjuntos, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n);$$

(IV) para todo $A \in \mathcal{M}$ se cumple la propiedad de regularidad exterior*:*

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(U) : A \subseteq U,\ U \text{ abierto}\}.$$

La función μ se llama medida de Lebesgue.

8.4. Propiedades básicas de la medida de Lebesgue

En esta subsección trabajamos, salvo aclaración en contrario, en el intervalo $I = [0, 1]$ con la medida de Lebesgue, y escribimos $\mathcal{M}(I)$ para la σ-álgebra de subconjuntos medibles de I.

Teorema 8.5 (Propiedades básicas)**.** *Sea $\mu : \mathcal{M}(I) \to [0, +\infty]$ la medida de Lebesgue. Entonces:*

(I) Monotonía: *si $A, B \in \mathcal{M}(I)$ y $A \subseteq B$, entonces*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

(II) Conjuntos nulos: *si* $A \subseteq \mathbb{R}$ *es un conjunto nulo, entonces* $A \in \mathcal{M}$ *y* $\mu(A) = 0$. *Recíprocamente, si* $A \in \mathcal{M}$ *y* $\mu(A) = 0$, *entonces* A *es un conjunto nulo.*

(III) Invariancia por traslaciones: *dados* $A \in \mathcal{M}$ *y* $c \in \mathbb{R}$, *se tiene* $A + c := \{x + c : x \in A\} \in \mathcal{M}$ *y*

$$\mu(A + c) = \mu(A).$$

Idea de la demostración. La monotonía se obtiene escribiendo B como unión disjunta de A y $B \setminus A$ y usando la σ-aditividad. Las afirmaciones sobre conjuntos nulos se deducen de la relación entre definición de conjunto nulo y la regularidad exterior. La invariancia por traslaciones se prueba primero en intervalos (donde es obvia) y luego se extiende a $\mathcal{M}$ usando que ésta es la σ-álgebra generada por intervalos y conjuntos nulos, y que la traslación preserva nulos. □

Proposición 8.6. *Sea* $I = [0, 1]$ *y sea* μ *la medida de Lebesgue en* $\mathcal{M}(I)$. *Si* $A, B \in \mathcal{M}(I)$, *entonces:*

(I) $A \setminus B \in \mathcal{M}(I)$;

(II)
$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B).$$

En particular,
$$\mu(A^c) = 1 - \mu(A), \qquad A^c = I \setminus A.$$

Demostración. (i) Como $\mathcal{M}(I)$ es una σ-álgebra, es cerrada por complementos e intersecciones. Observamos que

$$A \setminus B = A \cap B^c,$$

por lo que $A \setminus B \in \mathcal{M}(I)$.

(ii) Notamos que
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$$
y que $(A \setminus B)$ y B son disjuntos. Por σ-aditividad,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B).$$

La igualdad $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$ se obtiene aplicando esta fórmula con A y A^c observando que $I = A \cup A^c$ y $\mu(I) = 1$. □

8.5. Regularidad de la medida de Lebesgue

Proposición 8.7 (Regularidad exterior)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}(I)$. Entonces*

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(U) : A \subseteq U,\ U \textit{ abierto en } I\}.$$

Esbozo. Esta propiedad forma parte de la construcción misma de la medida de Lebesgue (en el teorema de existencia). La desigualdad

$$\mu(A) \leq \text{ínf}\{\mu(U)\}$$

se sigue de la monotonía: si $A \subseteq U$, entonces $\mu(A) \leq \mu(U)$. En la construcción de la medida se verifica además que para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto $U \supseteq A$ tal que $\mu(U) < \mu(A) + \varepsilon$, lo que da la igualdad. □

Proposición 8.8 (Regularidad interior)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}(I)$. Entonces*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A,\ F \textit{ cerrado en } I\}.$$

Demostración. Por monotonía, si $F \subseteq A$ entonces $\mu(F) \leq \mu(A)$, de donde

$$\sup\{\mu(F) : F \subseteq A,\ F \text{ cerrado}\} \leq \mu(A).$$

Para la otra desigualdad, sea $\varepsilon > 0$. Por regularidad exterior aplicada a A^c, existe un abierto $U \supseteq A^c$ tal que

$$\mu(U) < \mu(A^c) + \varepsilon.$$

Tomando complementos en I, el conjunto

$$F := U^c = I \setminus U$$

es cerrado y satisface $F \subseteq A$.

Además, por la proposición anterior,

$$\mu(F) = \mu(I) - \mu(U).$$

Como $\mu(I) = 1$ y $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$, obtenemos

$$\mu(F) = 1 - \mu(U) > 1 - (\mu(A^c) + \varepsilon) = \mu(A) - \varepsilon.$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe un cerrado $F \subseteq A$ tal que $\mu(F) > \mu(A) - \varepsilon$, lo que implica

$$\mu(A) \leq \sup\{\mu(F) : F \subseteq A,\ F \text{ cerrado}\}.$$

□

Proposición 8.9 (Regularidad fuerte). *Sea $A \in \mathcal{M}(I)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existen un cerrado C y un abierto U tales que*

$$C \subseteq A \subseteq U \quad y \quad \mu(A) - \varepsilon < \mu(C) \leq \mu(A) \leq \mu(U) < \mu(A) + \varepsilon.$$

Además, U puede elegirse como una unión numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por regularidad interior, existe un cerrado $C \subseteq A$ tal que

$$\mu(C) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por regularidad exterior, existe un abierto $U \supseteq A$ tal que

$$\mu(U) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aquí se obtiene

$$\mu(A) - \varepsilon < \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(C) \leq \mu(A) \leq \mu(U) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} < \mu(A) + \varepsilon.$$

El hecho de que cualquier abierto $U \subseteq I$ puede escribirse como unión numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos es un resultado clásico de análisis real (se prueba usando que U es una unión numerable de componentes conexas, que en $\mathbb{R}$ son intervalos). Aplicándolo a este U, se obtiene la última afirmación. □

8.6. Continuidad de la medida

Teorema 8.10 (Continuidad de la medida). *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(I)$. Entonces:*

(I) *(Continuidad desde abajo) Si*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$$

y $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, entonces

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(II) *(Continuidad desde arriba) Si*

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_n \supseteq \cdots$$

y $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, con $\mu(B_1) < \infty$, entonces

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Demostración. (i) Definimos

$$C_1 = A_1, \qquad C_n = A_n \setminus A_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Entonces los conjuntos C_n son dos a dos disjuntos y

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

Por σ-aditividad,

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n).$$

Además, para cada n,

$$\mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} C_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k).$$

La sucesión de sumas parciales converge a la suma infinita, luego

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) = \mu(A).$$

(ii) Definimos

$$A_n = B_1 \setminus B_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Entonces $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ y

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = B_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = B_1 \setminus B.$$

Aplicando (i) a la familia (A_n),

$$\mu(B_1 \setminus B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \big(\mu(B_1) - \mu(B_n)\big),$$

donde usamos que $A_n = B_1 \setminus B_n$ y $\mu(B_1) < \infty$. Entonces

$$\mu(B_1) - \mu(B) = \lim_{n\to\infty} \big(\mu(B_1) - \mu(B_n)\big).$$

Restando $\mu(B_1)$ en ambos lados se obtiene

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

$\square$

9. Unidad 9: Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible (es decir, X es un conjunto y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X).

Definición 9.1 (Función medible real)**.** Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se llama *(Lebesgue) medible* si para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}.$$

Teorema 9.2 (Caracterizaciones de función medible)**.** *Sea* $(X, \mathcal{A})$ *un espacio medible y* $f : X \to \mathbb{R}$ *una función. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(I) Para todo $a \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}.$$

(II) Para todo $a \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}.$$

(III) Para todo $a \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}.$$

(IV) Para todo $a \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}.$$

En particular, cualquiera de estas condiciones puede tomarse como definición de función medible.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $a \in \mathbb{R}$. Mostramos que

$$\{f \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < a + \tfrac{1}{n}\}.$$

Primero, si $x \in \{f \leq a\}$, entonces $f(x) \leq a < a + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $x \in \{f < a + 1/n\}$ para todo n. Esto prueba la inclusión

$$\{f \leq a\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < a + \tfrac{1}{n}\}.$$

Recíprocamente, sea x tal que $x \in \{f < a + 1/n\}$ para todo n. Entonces

$$f(x) < a + \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Supongamos, por absurdo, que $f(x) > a$. Entonces $f(x) - a > 0$ y podemos definir

$$\varepsilon = \frac{f(x) - a}{2} > 0.$$

Tomamos n suficientemente grande tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Entonces

$$a + \frac{1}{n} < a + \varepsilon = \frac{a + f(x)}{2} < f(x),$$

lo cual contradice $f(x) < a + 1/n$. Por lo tanto no puede ser $f(x) > a$, y forzosamente $f(x) \leq a$, es decir $x \in \{f \leq a\}$.

Concluimos la igualdad de conjuntos. Cada conjunto $\{f < a + 1/n\}$ es medible por hipótesis (i), y las intersecciones numerables de conjuntos medibles pertenecen a $\mathcal{A}$. Por lo tanto $\{f \leq a\}$ es medible. Así, (ii) se cumple.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*. Sea $a \in \mathbb{R}$. Observamos que

$$\{f > a\} = X \setminus \{f \leq a\}.$$

En efecto, si $f(x) > a$ entonces $f(x)$ no puede satisfacer $f(x) \leq a$, y viceversa. Como $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, es estable por complementos; de la medibilidad de $\{f \leq a\}$ se deduce la medibilidad de $\{f > a\}$. Luego (iii) se verifica.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)*. Sea $a \in \mathbb{R}$. Mostramos que

$$\{f \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > a - \tfrac{1}{n}\}.$$

Si $x \in \{f \geq a\}$, entonces $f(x) \geq a > a - \frac{1}{n}$ para todo n, y en particular $x \in \{f > a - 1/n\}$ para todo n. Esto prueba la inclusión

$$\{f \geq a\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > a - \tfrac{1}{n}\}.$$

Para la inclusión recíproca, sea x tal que $x \in \{f > a - 1/n\}$ para todo n, es decir,

$$f(x) > a - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Supongamos, por absurdo, que $f(x) < a$. Entonces $a - f(x) > 0$ y podemos definir

$$\varepsilon = \frac{a - f(x)}{2} > 0.$$

Elegimos n suficientemente grande tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Entonces

$$a - \frac{1}{n} > a - \varepsilon = \frac{a + f(x)}{2} > f(x),$$

lo cual contradice $f(x) > a - 1/n$. Por lo tanto no puede ser $f(x) < a$, y debe cumplirse $f(x) \geq a$, es decir $x \in \{f \geq a\}$.

Hemos probado la igualdad. Cada conjunto $\{f > a-1/n\}$ es medible por hipótesis (iii), y la intersección numerable de medibles también lo es; por lo tanto $\{f \geq a\}$ es medible. Se verifica (iv).

$(iv) \Rightarrow (i)$. Sea $a \in \mathbb{R}$. Notamos que

$$\{f < a\} = X \setminus \{f \geq a\}.$$

En efecto, si $f(x) < a$ entonces no puede ser $f(x) \geq a$, y si $f(x) \geq a$ entonces no puede ser $f(x) < a$. Si $\{f \geq a\}$ es medible por (iv), su complemento también pertenece a $\mathcal{A}$, de modo que $\{f < a\}$ es medible.

Con esto cerramos el ciclo

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i),$$

y las cuatro condiciones son equivalentes. □