

Demostraciones Análisis Avanzado

Lucas Dowhyj

Índice

1. Unidad 1: Infimo, supremo y sucesiones	2
1.1. Axioma de completitud	2
1.2. Infimo	2
1.3. Supremo	3
1.4. Principio de Arquímedes	3
1.5. Sucesiones	4
2. Unidad 2: Cardinalidad	9
2.1. Conjuntos coordinables y cardinal	9
2.2. Orden entre cardinales	13
2.3. Conjunto de partes y teorema de Cantor	14
2.4. Suma y resta de conjuntos numerables	15
3. Unidad 3: Espacios métricos	20
3.1. Conjuntos abiertos	20
3.2. Conjuntos cerrados	24
3.3. Puntos de acumulación y frontera	30
3.4. Métricas equivalentes	34
3.5. Sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos	37
4. Unidad 4: Funciones continuas	39
4.1. Definición y caracterizaciones de continuidad	39
4.2. Continuidad uniforme	44
4.2.1. Isometrías	47
4.2.2. Homeomorfismos	47
4.2.3. Conjuntos densos	48
5. Unidad 5: Compacidad	49
5.1. Definiciones básicas	49
5.2. Compacidad y puntos de acumulación	50
5.3. Compacidad, completitud y total acotación	51
5.4. Propiedades estructurales de compactos y T.T.A.	52
5.5. Funciones continuas sobre compactos	53

6. Unidad 6: Espacios normados	55
7. Unidad 7: Sucesiones de funciones	55
7.1. Convergencia puntual y uniforme	55
7.2. Límite uniforme de funciones continuas	55
7.3. Pasaje al límite bajo el signo integral	56
7.4. Convergencia de derivadas	56
7.5. Sucesiones uniformemente de Cauchy	57
8. Unidad 8: Medida de Lebesgue	58
8.1. Conjuntos nulos	58
8.2. σ -álgebras y conjuntos medibles de Lebesgue	58
8.3. Medida de Lebesgue	59
8.4. Propiedades básicas de la medida de Lebesgue	59
8.5. Regularidad de la medida de Lebesgue	61
8.6. Continuidad de la medida	62

1. Unidad 1: Infimo, supremo y sucesiones

1.1. Axioma de completitud

Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, existe $\sup A$.
Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente, existe $\inf A$.

1.2. Infimo

Sea $A \subset \mathbb{R}$, no vacío y acotado inferiormente.

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \leq a & \text{para todo } a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ tal que } i \leq a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $i = \inf A$.

(i) Como i es el ínfimo de A , por definición i es cota inferior de A . Es decir, para todo $a \in A$ se cumple $i \leq a$.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos, buscando una contradicción, que no existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$. Entonces, para todo $a \in A$ se cumple $a \geq i + \varepsilon$, de modo que $i + \varepsilon$ es una cota inferior de A . Como además $\varepsilon > 0$, tenemos $i + \varepsilon > i$, lo que contradice que i es la mayor de las cotas inferiores de A . Por lo tanto, debe existir $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$.

Recíprocamente, supongamos que se verifican: (i) $i \leq a$ para todo $a \in A$; (ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$.

De (i) se sigue que i es cota inferior de A . Sea i' otra cota inferior de A . Queremos ver que $i' \leq i$. Supongamos, buscando una contradicción, que $i' > i$. Sea $\varepsilon = i' - i > 0$. Por (ii) existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$. Como

$i + \varepsilon = i'$, obtenemos $a < i'$, lo cual contradice que i' es cota inferior de A . Por lo tanto $i' \leq i$ y, en consecuencia, $i = \inf A$. \square

1.3. Supremo

Sea $A \subset \mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente.

$$s = \sup A \iff \begin{cases} s \geq a & \text{para todo } a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ tal que } s - \varepsilon < a \leq s. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $s = \sup A$.

(i) Como s es el supremo de A , por definición s es cota superior de A . Es decir, para todo $a \in A$ se cumple $a \leq s$.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos, buscando una contradicción, que no existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$. Entonces, para todo $a \in A$ se cumple $a \leq s - \varepsilon$, y por lo tanto $s - \varepsilon$ es una cota superior de A . Como además $\varepsilon > 0$, tenemos $s - \varepsilon < s$, lo que contradice que s es la menor de las cotas superiores de A . Por lo tanto, debe existir $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

Supongamos que se cumplen:

- (i) $a \leq s$ para todo $a \in A$
- (ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

Entonces (i) dice que s es cota superior de A . Sea ahora s' otra cota superior de A . Queremos ver que $s \leq s'$. Supongamos, buscando una contradicción, que $s' < s$. Sea $\varepsilon = s - s' > 0$. Por (ii) existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$. Como $s - \varepsilon = s'$, obtenemos $s' < a$, lo cual contradice que s' es cota superior de A . Por lo tanto $s \leq s'$ y, en consecuencia, $s = \sup A$. \square

1.4. Principio de Arquímedes

Versión 1

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \leq n.$$

Demostración. Supongamos por el absurdo que el conjunto de los naturales \mathbb{N} está acotado superiormente. Como \mathbb{N} es no vacío, por el axioma de completitud existe $s = \sup \mathbb{N}$.

Tomamos $\varepsilon = 1$. Por la propiedad caracterizadora del supremo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$s - 1 < n \leq s.$$

De $s - 1 < n$ se sigue que $n + 1 > s$. Como $n \in \mathbb{N}$, también $n + 1 \in \mathbb{N}$, y por lo tanto hemos encontrado un número natural estrictamente mayor que s , lo que contradice que s sea cota superior de \mathbb{N} .

Esta contradicción muestra que \mathbb{N} no está acotado superiormente, es decir, para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$. En particular, dado

$x \in \mathbb{R}$, tomando $M = x$ obtenemos un $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq x$, que es justamente lo que afirma la versión 1. \square

Versión 2

$$\forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 < \frac{1}{n} < y.$$

Demostración. Sea $y > 0$. Por la Versión 1 del principio de Arquímedes aplicada a $x = 1/y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{y}.$$

Como $n > 0$, al invertir la desigualdad obtenemos

$$0 < \frac{1}{n} < y.$$

Por lo tanto, para todo $y > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < y$, como queríamos demostrar. \square

1.5. Sucesiones

Proposición 1.1. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión real y sea $l \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l.$$

Entonces la sucesión (a_n) está acotada.

Demostración. Por hipótesis, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. Esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N : |a_n - l| < \varepsilon.$$

Tomamos ahora $\varepsilon = 1$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple

$$|a_n - l| < 1.$$

Por la desigualdad triangular,

$$|a_n| = |(a_n - l) + l| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$$

para todo $n \geq N$. Es decir, para todos los índices grandes,

$$|a_n| \leq |l| + 1.$$

Consideremos ahora los primeros términos de la sucesión:

$$a_1, a_2, \dots, a_{N-1}.$$

Se trata de un conjunto finito de números reales, por lo que el conjunto

$$\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$$

tiene un máximo. Sea

$$M_0 = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$$

(en el caso $N = 1$ podemos tomar, por ejemplo, $M_0 = 0$).

Definimos ahora

$$M = \max\{M_0, |l| + 1\}.$$

Entonces:

- Si $n < N$, se cumple $|a_n| \leq M_0 \leq M$.
- Si $n \geq N$, se cumple $|a_n| \leq |l| + 1 \leq M$.

En ambos casos obtenemos

$$|a_n| \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, la sucesión (a_n) está acotada. \square

Proposición 1.2. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión real monótona creciente y acotada superiormente. Sea

$$s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s.$$

Demostración. Como (a_n) está acotada superiormente, el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

tiene supremo $s \in \mathbb{R}$.

Queremos probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - s| < \varepsilon.$$

Sea entonces $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por la propiedad caracterizadora del supremo aplicada al conjunto A , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$s - \varepsilon < a_N \leq s.$$

Como la sucesión (a_n) es monótona creciente, se cumple

$$a_N \leq a_n \leq s \quad \text{para todo } n \geq N.$$

De $a_n \leq s$ obtenemos $a_n - s \leq 0$, luego

$$|a_n - s| = s - a_n.$$

Además, de $a_N \leq a_n$ se sigue

$$s - a_n \leq s - a_N.$$

Juntando estas desigualdades,

$$|a_n - s| = s - a_n \leq s - a_N < s - (s - \varepsilon) = \varepsilon$$

para todo $n \geq N$.

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ encontramos $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $|a_n - s| < \varepsilon$, y esto significa exactamente que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$. \square

Proposición 1.3. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión real monótona decreciente y acotada inferiormente. Sea

$$i = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = i.$$

Demostración. Como (a_n) está acotada inferiormente, el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

tiene ínfimo $i \in \mathbb{R}$.

Queremos probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = i$, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - i| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por la propiedad caracterizadora del ínfimo aplicada al conjunto A , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$i \leq a_N < i + \varepsilon.$$

Como la sucesión (a_n) es monótona decreciente, se cumple

$$i \leq a_n \leq a_N \quad \text{para todo } n \geq N.$$

De $a_n \geq i$ se obtiene $a_n - i \geq 0$, luego

$$|a_n - i| = a_n - i.$$

Además, de $a_n \leq a_N$ se sigue

$$a_n - i \leq a_N - i.$$

Por lo tanto,

$$|a_n - i| = a_n - i \leq a_N - i < (i + \varepsilon) - i = \varepsilon$$

para todo $n \geq N$.

Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ encontramos $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $|a_n - i| < \varepsilon$, lo cual prueba que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = i$. \square

Proposición 1.4 (Equivalencia del supremo). Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente, y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces

$$s = \sup A$$

si y sólo si se cumplen:

- (I) s es cota superior de A , es decir, $a \leq s$ para todo $a \in A$;
- (II) existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n \in A$ para todo n , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s.$$

Demostración. Supongamos primero que $s = \sup A$. Entonces, por definición de supremo, s es cota superior de A , con lo cual se cumple (i).

Nos queda probar (ii). Usamos la caracterización del supremo que ya vimos: para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que

$$s - \varepsilon < a \leq s.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicamos esta propiedad con $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Obtenemos así un elemento $a_n \in A$ tal que

$$s - \frac{1}{n} < a_n \leq s.$$

Esto define una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A .

Veamos ahora que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Entonces, si $n \geq N$, se tiene $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$, y por la construcción de (a_n) se cumple

$$s - \frac{1}{n} < a_n \leq s.$$

De aquí, $s - \varepsilon = s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$, luego

$$0 \leq s - a_n < \varepsilon,$$

lo que implica

$$|a_n - s| = s - a_n < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - s| < \varepsilon,$$

es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$. Esto prueba (ii).

Recíprocamente, supongamos que se cumplen (i) y (ii). Entonces s es cota superior de A . Para ver que $s = \sup A$, basta probar que s es la menor de las cotas superiores de A . Sea M otra cota superior de A . Queremos ver que $s \leq M$.

Supongamos, buscando una contradicción, que $s > M$. Definimos

$$\varepsilon = \frac{s - M}{2} > 0.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, se cumple

$$|a_n - s| < \varepsilon.$$

En particular, para $n \geq N$ tenemos

$$a_n > s - \varepsilon = s - \frac{s - M}{2} = \frac{2s - s + M}{2} = \frac{s + M}{2}.$$

Pero, como $s > M$, se tiene

$$\frac{s + M}{2} > M,$$

de modo que

$$a_n > \frac{s + M}{2} > M$$

para todo $n \geq N$. Sin embargo, $a_n \in A$ y M es cota superior de A , luego debería cumplirse $a_n \leq M$ para todo n , lo que contradice la desigualdad anterior.

Esta contradicción muestra que no puede ocurrir $s > M$, por lo que necesariamente $s \leq M$. Como M era una cota superior cualquiera de A , concluimos que s es la menor de las cotas superiores de A , es decir, $s = \sup A$.

Queda así demostrada la equivalencia. \square

Proposición 1.5. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión real y sea $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ una sub-sucesión de (a_n) , donde $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l,$$

entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = l.$$

Demostración. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. Por definición de límite, esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N : |a_n - l| < \varepsilon.$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$ fijo. Por la hipótesis anterior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon.$$

Como $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, podemos elegir $J \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_J \geq N.$$

Entonces, para todo $j \geq J$ se tiene

$$n_j \geq n_J \geq N.$$

Aplicando la propiedad de arriba a $n = n_j$, obtenemos

$$|a_{n_j} - l| < \varepsilon \quad \text{para todo } j \geq J.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists J \in \mathbb{N} \forall j \geq J : |a_{n_j} - l| < \varepsilon,$$

lo cual significa exactamente que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = l.$$

□

2. Unidad 2: Cardinalidad

2.1. Conjuntos coordinables y cardinal

Definición 2.1. Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que son *coordinables* (o *equipotentes*, o que tienen el mismo cardinal) si existe una función biyectiva $f : X \rightarrow Y$. En este caso escribimos

$$X \sim Y.$$

Proposición 2.2. La relación \sim es una relación de equivalencia en la clase de todos los conjuntos.

Demostración. Debemos probar que la relación \sim es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexividad. Sea X un conjunto cualquiera. Consideramos la función identidad

$$\text{id}_X : X \rightarrow X, \quad \text{id}_X(x) = x.$$

La función identidad es inyectiva (si $\text{id}_X(x) = \text{id}_X(y)$, entonces $x = y$) y sobreyectiva (para todo $x \in X$ existe $x \in X$ tal que $\text{id}_X(x) = x$). Luego es biyectiva, y por la definición de \sim se tiene $X \sim X$. Por lo tanto, \sim es reflexiva.

Simetría. Sean X e Y conjuntos tales que $X \sim Y$. Por definición, existe una biyección $f : X \rightarrow Y$. Toda función biyectiva tiene inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$, y dicha inversa es también biyectiva. Por lo tanto, existe una biyección de Y en X , es decir, $Y \sim X$. Luego, \sim es simétrica.

Transitividad. Sean X, Y, Z conjuntos tales que $X \sim Y$ y $Y \sim Z$. Entonces existen biyecciones

$$f : X \rightarrow Y, \quad g : Y \rightarrow Z.$$

Consideramos la composición

$$g \circ f : X \rightarrow Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Como composición de funciones biyectivas, $g \circ f$ es también biyectiva: la composición de funciones inyectivas es inyectiva y la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva. En consecuencia, existe una biyección de X en Z , es decir, $X \sim Z$. Esto muestra que \sim es transitiva.

Como \sim es reflexiva, simétrica y transitiva, concluimos que \sim es una relación de equivalencia. \square

Definición 2.3. Definimos el *cardinal* de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X :

$$\#X = \text{Card}(X) := \{Y \mid X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales les damos nombres especiales:

- $\#\mathbb{N} = \aleph_0$ (cardinal numerable),
- $\#\mathbb{R} = \mathfrak{c}$ (el *continuo*),
- $\#\{1, 2, \dots, n\} = n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.4. Para $n \in \mathbb{N}$, llamamos

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

al *intervalo inicial* del conjunto \mathbb{N} de los números naturales.

Definición 2.5. Un conjunto A es *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \sim I_n.$$

Definición 2.6. Un conjunto A es *infinito* si no es finito.

Definición 2.7. Un conjunto A es *numerable* si $A \sim \mathbb{N}$. Equivalente y simbólicamente, si

$$\#A = \aleph_0.$$

Definición 2.8. Decimos que un conjunto A es *a lo sumo numerable* (o *contable*) si es finito o numerable. Es decir, A es a lo sumo numerable si cumple

$$A \sim I_n \quad \text{para algún } n \in \mathbb{N} \quad \text{o bien} \quad A \sim \mathbb{N}.$$

Proposición 2.9. Sea A un conjunto numerable y sea $B \subseteq A$. Entonces B es a lo sumo numerable.

Demostración. Si B es finito, por definición ya es a lo sumo numerable y no hay nada que probar. Supongamos entonces que B es infinito. Veremos que en ese caso B es numerable.

Como A es numerable, por definición existe una biyección

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A.$$

Consideremos la sucesión $(f(1), f(2), f(3), \dots)$ de elementos de A y vamos a “extraer” de ella una enumeración de los elementos de B .

Definimos, por inducción, una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de números naturales de la siguiente manera.

En primer lugar, como B es infinito, en particular es no vacío y existe algún $b_1 \in B$. Como f es sobreyectiva, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n_1) = b_1$. Además, podemos elegir n_1 como el mínimo de los naturales n que satisfacen $f(n) \in B$:

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : f(n) \in B\}.$$

Este mínimo existe porque el conjunto entre llaves es no vacío y está contenido en \mathbb{N} .

Supuesto definido n_k para algún $k \in \mathbb{N}$, definimos n_{k+1} así. Como B es infinito, el conjunto

$$B_k := B \setminus \{f(n_1), f(n_2), \dots, f(n_k)\}$$

no es vacío (si fuera vacío, B tendría a lo sumo k elementos y sería finito). Entonces existe $b_{k+1} \in B_k$. Nuevamente, como f es sobreyectiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = b_{k+1}$. Además, podemos elegir m de manera que $m > n_k$ (basta tomar algún índice de b_{k+1} mayor que todos n_1, \dots, n_k). Definimos

$$n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} : n > n_k, f(n) \in B_k\}.$$

Este mínimo existe porque el conjunto entre llaves es no vacío y contenido en los naturales mayores que n_k . De la definición se deduce que

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots,$$

es decir, (n_k) es estrictamente creciente.

Definimos ahora una función

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow B, \quad g(k) = f(n_k).$$

Veamos que g es biyectiva.

Inyectividad. Sean $k, \ell \in \mathbb{N}$ tales que $g(k) = g(\ell)$, es decir, $f(n_k) = f(n_\ell)$. Como f es inyectiva, se sigue que $n_k = n_\ell$. Pero la sucesión (n_k) es estrictamente creciente, luego de $n_k = n_\ell$ se deduce $k = \ell$. Por lo tanto, g es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $b \in B$. Como f es sobreyectiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = b$. En el proceso de construcción de la sucesión (n_k) , en algún paso k el elemento b aparece por primera vez entre los valores de f ; es decir, existe un único k tal que n_k es el mínimo índice con $f(n_k) = b$ y $n_k > n_{k-1}$ (para $k = 1$ entendemos que no hay condición anterior). Por la definición de g , se tiene entonces

$$g(k) = f(n_k) = b.$$

De este modo, para todo $b \in B$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(k) = b$, y por lo tanto g es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección $g : \mathbb{N} \rightarrow B$, lo cual muestra que B es numerable. Recordando que al principio separamos el caso en que B es finito, concluimos que, en todos los casos, B es a lo sumo numerable. \square

Teorema 2.10. *Sea A un conjunto infinito. Entonces existe un subconjunto $B \subseteq A$ tal que B es numerable.*

Demostración. Como A es infinito, en particular es no vacío, de modo que podemos elegir un elemento $a_1 \in A$.

Supondremos construidos elementos distintos $a_1, \dots, a_n \in A$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto

$$F_n = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Si $A \setminus F_n$ fuera vacío, tendríamos $A = F_n$, es decir, A sería finito, lo cual contradice la hipótesis de que A es infinito. Por lo tanto,

$$A \setminus F_n \neq \emptyset,$$

y podemos elegir un elemento

$$a_{n+1} \in A \setminus F_n.$$

En particular, $a_{n+1} \in A$ y $a_{n+1} \notin \{a_1, \dots, a_n\}$, por lo que los elementos a_1, \dots, a_{n+1} siguen siendo todos distintos.

De este modo, por inducción, obtenemos una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A tales que

$$a_n \neq a_m \quad \text{si } n \neq m.$$

Definimos ahora

$$B = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Claramente $B \subseteq A$, por construcción.

Consideremos la función

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow B, \quad f(n) = a_n.$$

Injectividad. Si $f(n) = f(m)$, entonces $a_n = a_m$, y como la sucesión (a_n) tiene todos sus términos distintos, se sigue que $n = m$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $b \in B$. Por definición de B , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b = a_n$. Entonces $f(n) = a_n = b$, de modo que todo elemento de B es imagen de algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, f es sobreyectiva.

Concluimos que $f : \mathbb{N} \rightarrow B$ es una biyección, es decir, B es numerable. Como además $B \subseteq A$, hemos encontrado un subconjunto numerable de A , tal como queríamos. \square

2.2. Orden entre cardinales

Recordemos que, por definición,

$$\#A = \#B \iff A \sim B$$

es decir, si y sólo si existe una biyección $f : A \rightarrow B$.

Definición 2.11. Sean X e Y conjuntos. Decimos que

$$\#X \leq \#Y$$

si existe una función inyectiva $f : X \rightarrow Y$.

Definición 2.12. Decimos que

$$\#X < \#Y$$

si se cumplen:

- (I) $\#X \leq \#Y$, es decir, existe una inyección $f : X \rightarrow Y$;
- (II) $X \not\sim Y$, es decir, no existe biyección entre X e Y .

Proposición 2.13. Sean X e Y conjuntos. Existe una función inyectiva $f : X \rightarrow Y$ si y sólo si existe una función sobreyectiva $g : Y \rightarrow X$.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que existe una función inyectiva $f : X \rightarrow Y$. Distinguimos dos casos.

Si $X = \emptyset$, entonces f es la única función posible $\emptyset \rightarrow Y$. En este caso, la única función de Y a X es la función vacía $g : Y \rightarrow \emptyset$, que es sobreyectiva sólo si $Y = \emptyset$. En muchas aplicaciones se descarta el caso trivial $X = \emptyset$, así que supongamos ahora que $X \neq \emptyset$.

Como $X \neq \emptyset$, elegimos un elemento fijo $x_0 \in X$. Definimos $g : Y \rightarrow X$ de la siguiente manera:

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{si existe } x \in X \text{ tal que } f(x) = y, \\ x_0 & \text{si no existe tal } x. \end{cases}$$

La inyectividad de f garantiza que, cuando y está en la imagen de f , el elemento x tal que $f(x) = y$ es único, de modo que g está bien definida.

Veamos que g es sobreyectiva. Sea $x \in X$. Como f es función de X en Y , tenemos $f(x) \in Y$, y por definición de g ,

$$g(f(x)) = x.$$

Luego todo $x \in X$ es imagen de algún elemento de Y (por ejemplo, de $f(x)$), y por lo tanto g es sobreyectiva.

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que existe una función sobreyectiva $g : Y \rightarrow X$. Para cada $x \in X$ consideremos el conjunto de sus preimágenes:

$$Y_x = \{ y \in Y : g(y) = x \}.$$

Como g es sobreyectiva, Y_x es no vacío para todo $x \in X$.

Elegimos, para cada $x \in X$, un elemento $y_x \in Y_x$ (es decir, $g(y_x) = x$), y definimos

$$f : X \rightarrow Y, \quad f(x) = y_x.$$

Probemos que f es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces

$$y_{x_1} = y_{x_2}.$$

Aplicando g a ambos lados obtenemos

$$g(y_{x_1}) = g(y_{x_2}),$$

es decir,

$$x_1 = x_2,$$

ya que por definición de y_x se cumple $g(y_x) = x$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Hemos probado en un sentido que de una inyectiva $X \rightarrow Y$ obtenemos una sobreyectiva $Y \rightarrow X$, y en el otro que de una sobreyectiva $Y \rightarrow X$ obtenemos una inyectiva $X \rightarrow Y$. Esto completa la demostración. \square

2.3. Conjunto de partes y teorema de Cantor

Definición 2.14. Dado un conjunto X , llamamos *conjunto de partes* de X al conjunto

$$\mathcal{P}(X) = \{ A : A \subseteq X \}.$$

Teorema 2.15 (Cantor). *Sea X un conjunto. Entonces*

$$\#X < \#\mathcal{P}(X).$$

Demostración. Recordemos que, por la definición de orden entre cardinales,

$$\#X < \#\mathcal{P}(X) \iff \begin{cases} \text{existe una inyección } f : X \rightarrow \mathcal{P}(X), \\ \text{no existe biyección entre } X \text{ y } \mathcal{P}(X). \end{cases}$$

(1) Existe una inyección $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

Definimos

$$f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad f(x) = \{x\}.$$

Claramente $f(x) \subseteq X$ para todo x , luego $f(x) \in \mathcal{P}(X)$. Si $f(x) = f(y)$, entonces $\{x\} = \{y\}$ y por lo tanto $x = y$. Así, f es inyectiva, y obtenemos

$$\#X \leq \#\mathcal{P}(X).$$

(2) No existe biyección entre X y $\mathcal{P}(X)$.

Basta ver que *no existe ninguna función sobreyectiva* $g : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

Procedemos por absurdo. Supongamos que existe una función

$$g : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

sobreyectiva. Consideremos el subconjunto

$$B = \{x \in X : x \notin g(x)\}.$$

Por definición, $B \subseteq X$, de modo que $B \in \mathcal{P}(X)$.

Como g es sobreyectiva, debe existir algún elemento $a \in X$ tal que

$$g(a) = B.$$

Estudiemos ahora si a pertenece o no a B :

- Supongamos que $a \in B$. Por la definición de B , esto significa que $a \notin g(a)$. Pero $g(a) = B$, luego $a \notin B$, lo que contradice $a \in B$.

- Supongamos que $a \notin B$. Entonces, por la definición de B , se tiene $a \in g(a)$. Como $g(a) = B$, esto implica $a \in B$, contradiciendo $a \notin B$.

En ambos casos llegamos a una contradicción. Por lo tanto, nuestra suposición inicial es falsa: no existe función sobreyectiva $g : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

Concluimos que no existe biyección entre X y $\mathcal{P}(X)$. Junto con (1), esto implica

$$\#X < \#\mathcal{P}(X),$$

como queríamos demostrar. □

2.4. Suma y resta de conjuntos numerables

Proposición 2.16. *Sea X un conjunto infinito. Entonces existe un subconjunto $Z \subset X$, con Z numerable, tal que*

$$X \sim X \setminus Z.$$

Demostración. Como X es infinito, por el teorema anterior existe un subconjunto numerable infinito $C \subset X$. Como C es numerable, existe una biyección

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow C.$$

Escribimos $c_n = \varphi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que

$$C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}.$$

Definimos ahora dos subconjuntos disjuntos de C :

$$Z = \{c_{2n} : n \in \mathbb{N}\}, \quad D = \{c_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces $C = D \cup Z$ y $D \cap Z = \emptyset$. Además, tanto D como Z son numerables (son imágenes de \mathbb{N} por las aplicaciones $n \mapsto c_{2n-1}$ y $n \mapsto c_{2n}$, respectivamente).

Sea

$$Y = X \setminus C.$$

Entonces tenemos una partición

$$X = Y \cup D \cup Z \quad (\text{unión disjunta}).$$

Por otra parte,

$$X \setminus Z = Y \cup D.$$

Definimos una aplicación $f : X \rightarrow X \setminus Z$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in Y \cup D, \\ c_{2n-1}, & \text{si } x = c_{2n} \in Z \text{ para algún } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Veamos que f es biyectiva.

Inyectividad. - Si $x_1, x_2 \in Y \cup D$ y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$ porque f actúa como la identidad en $Y \cup D$.

- Si $x_1 = c_{2n_1}$ e $x_2 = c_{2n_2}$ pertenecen a Z y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$c_{2n_1-1} = f(c_{2n_1}) = f(c_{2n_2}) = c_{2n_2-1},$$

de donde $2n_1 - 1 = 2n_2 - 1$ y luego $n_1 = n_2$, es decir $x_1 = x_2$.

- No puede ocurrir que $x_1 \in Y \cup D$ y $x_2 \in Z$ tengan la misma imagen, porque las imágenes de $Y \cup D$ están en $Y \cup D$ y las de Z están contenidas en D ; pero Y y D son disjuntos.

En todos los casos, de $f(x_1) = f(x_2)$ se deduce $x_1 = x_2$, luego f es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $y \in X \setminus Z = Y \cup D$.

- Si $y \in Y$, entonces $f(y) = y$, así que y es imagen de sí mismo.

- Si $y \in D$, digamos $y = c_{2n-1}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(c_{2n}) = c_{2n-1} = y$, de modo que y es imagen de $c_{2n} \in Z$.

En consecuencia, todo elemento de $X \setminus Z$ es imagen de algún elemento de X , y f es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección $f : X \rightarrow X \setminus Z$ con $Z \subset X$ numerable, por lo que $X \sim X \setminus Z$. \square

Proposición 2.17. *Sea B un conjunto y sea A un conjunto numerable. Suponemos que $B \setminus A$ es infinito. Entonces*

$$B \sim B \setminus A.$$

Demostración. Podemos reemplazar A por $A \cap B$, que sigue siendo numerable y cumple

$$B \setminus (A \cap B) = B \setminus A.$$

Por simplicidad, suponemos desde ahora que $A \subseteq B$.

Como A es numerable, existe una biyección

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow A,$$

es decir, podemos escribir

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Por hipótesis, $B \setminus A$ es infinito. Entonces, por el teorema “conjunto infinito contiene un subconjunto numerable”, existe un subconjunto numerable infinito

$$C \subseteq B \setminus A.$$

Tomamos una biyección

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow C, \quad C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}.$$

Definimos ahora una aplicación $f : B \rightarrow B \setminus A$ por:

$$f(x) = \begin{cases} c_n, & \text{si } x = a_n \in A \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ x, & \text{si } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Observemos primero que f está bien definida: si $x \in A$, entonces $f(x) = c_n \in C \subseteq B \setminus A$; si $x \in B \setminus A$, entonces $f(x) = x \in B \setminus A$. En cualquier caso, $f(x) \in B \setminus A$.

Inyectividad. - Si $x_1, x_2 \in B \setminus A$ y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$ porque f actúa como la identidad en $B \setminus A$.

- Si $x_1 = a_n$ y $x_2 = a_m$ pertenecen a A y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $c_n = c_m$, y como la sucesión (c_n) tiene todos sus términos distintos, se sigue $n = m$ y por lo tanto $x_1 = x_2$.

- No puede ocurrir que $x_1 \in A$ y $x_2 \in B \setminus A$ tengan la misma imagen, porque $f(x_1) \in C \subseteq B \setminus A$, mientras que $f(x_2) = x_2 \in B \setminus A \setminus C$, y C es disjunto de $B \setminus A \setminus C$.

En consecuencia, f es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $y \in B \setminus A$. Distinguimos dos casos:

- Si $y \in B \setminus (A \cup C)$, entonces $f(y) = y$, de modo que y es imagen de sí mismo.

- Si $y \in C$, digamos $y = c_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(a_n) = c_n = y$, de modo que y es imagen de $a_n \in A$.

Por lo tanto, todo elemento de $B \setminus A$ es imagen de algún elemento de B , y f es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección $f : B \rightarrow B \setminus A$, lo cual prueba que $B \sim B \setminus A$. \square

Proposición 2.18. *Sea X un conjunto infinito y sea A un conjunto numerable. Entonces*

$$X \sim X \cup A.$$

Demostración. Si $A \subseteq X$, entonces $X \cup A = X$ y la afirmación es trivial. Supongamos, por lo tanto, que A no está contenido en X . Definimos

$$A_0 = A \setminus X,$$

que es el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a X . Como A es numerable, también A_0 es numerable (subconjunto de un numerable). Además,

$$X \cup A = X \cup A_0$$

y la unión es disjunta, ya que $A_0 \cap X = \emptyset$.

Notemos que X es infinito, luego el conjunto $X \cup A_0$ también es infinito. Consideremos ahora el conjunto

$$B = X \cup A_0.$$

Entonces A_0 es numerable y

$$B \setminus A_0 = X.$$

Como X es infinito, también $B \setminus A_0$ es infinito. Podemos aplicar la proposición anterior con $A = A_0$ y este conjunto B : obtenemos

$$B \sim B \setminus A_0.$$

Pero $B = X \cup A_0$ y $B \setminus A_0 = X$, por lo que

$$X \cup A_0 \sim X.$$

Como $X \cup A = X \cup A_0$, concluimos que

$$X \cup A \sim X.$$

Por simetría de la relación de equipotencia, también escribimos $X \sim X \cup A$, como queríamos. \square

Corolario 2.19. *Un conjunto X es infinito si y sólo si es coordinable con un subconjunto propio suyo, es decir, si y sólo si existe $Y \subsetneq X$ tal que $X \sim Y$.*

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que X es infinito. Por la proposición anterior, existe un subconjunto numerable $Z \subset X$ tal que $X \sim X \setminus Z$. Como $Z \neq \emptyset$ (pues es numerable) y $Z \subset X$, se tiene $X \setminus Z \subsetneq X$. Por lo tanto, X es coordinable con el subconjunto propio $X \setminus Z$.

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que existe un subconjunto propio $Y \subsetneq X$ tal que $X \sim Y$. Procedamos por absurdo: supongamos que X es finito. Sea $n = \#X$. Entonces $X \sim I_n$. Como Y es subconjunto propio de X , tiene un número m de elementos con $m < n$, de modo que $Y \sim I_m$.

Por transitividad de la relación de equipotencia, tendríamos

$$I_n \sim X \sim Y \sim I_m,$$

de donde se seguiría $I_n \sim I_m$. Pero por el teorema anterior, $I_n \sim I_m$ implica $n = m$, lo cual contradice $m < n$. Esta contradicción muestra que X no puede ser finito, luego X es infinito. \square

Teorema 2.20 (Cantor–Schröder–Bernstein). *Sean X e Y dos conjuntos. Si existe una función inyectiva $f : X \rightarrow Y$ y una función inyectiva $g : Y \rightarrow X$, entonces X e Y son coordinables, es decir, existe una biyección $h : X \rightarrow Y$.*

Equivalentemente, en términos de cardinales:

$$\#X \leq \#Y \text{ y } \#Y \leq \#X \implies \#X = \#Y.$$

Lema 2.21. *El producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.*

Demostración. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$f(m, n) = 2^m 3^n.$$

Por el teorema fundamental de la aritmética, todo número natural tiene una única factorización en primos, de modo que distintos pares (m, n) producen distintos números $2^m 3^n$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Como hemos construido una inyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en \mathbb{N} , se sigue que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es a lo sumo numerable. Además, es infinito, por lo que es numerable. \square

Teorema 2.22. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos numerables. Entonces la unión

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

es a lo sumo numerable. En particular, si A es infinita, entonces A es numerable.

Demostración. Como cada A_n es numerable, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una biyección

$$f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n.$$

Escribimos $a_{n,k} = f_n(k)$, de modo que

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \dots\}.$$

Definimos ahora una aplicación

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A, \quad F(n, k) = a_{n,k}.$$

Para todo $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se tiene $a_{n,k} \in A_n \subseteq A$, luego F está bien definida. Además, por la definición de A , todo elemento de A es de la forma $a_{n,k}$ para algún $n, k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto F es sobreyectiva.

Por el lema anterior, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Entonces existe una biyectiva

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Consideremos la composición

$$h = F \circ g : \mathbb{N} \rightarrow A.$$

Como composición de una biyección con una sobreyección, h sigue siendo sobreyectiva: para todo $a \in A$ existe $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $F(n, k) = a$, y como g es biyectiva, existe $m \in \mathbb{N}$ con $g(m) = (n, k)$; entonces

$$h(m) = (F \circ g)(m) = F(n, k) = a.$$

Así hemos construido una función sobreyectiva $h : \mathbb{N} \rightarrow A$. Por la proposición que relaciona inyecciones y sobreyecciones entre cardinales, esto implica que A es a lo sumo numerable.

Si además A es infinito, por definición de “a lo sumo numerable” resulta que A es numerable. \square

3. Unidad 3: Espacios métricos

3.1. Conjuntos abiertos

Definición 3.1. Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $U \subseteq E$ se dice *abierto* si

$$\forall x \in U \exists r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subseteq U,$$

donde

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$$

es la bola abierta de centro x y radio r .

Proposición 3.2. Sea (E, d) un espacio métrico, $x_0 \in E$ y $r > 0$. Entonces la bola abierta $B(x_0, r)$ es un conjunto abierto.

Demostración. Debemos ver que para todo punto $x \in B(x_0, r)$ existe un radio $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, r).$$

Sea $x \in B(x_0, r)$. Por definición de bola abierta,

$$d(x, x_0) < r.$$

Definimos

$$\varepsilon = r - d(x, x_0).$$

Entonces $\varepsilon > 0$ porque $d(x, x_0) < r$.

Tomemos ahora un punto cualquiera $y \in B(x, \varepsilon)$; es decir,

$$d(x, y) < \varepsilon.$$

Aplicando la desigualdad triangular, obtenemos

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0).$$

Sustituyendo las cotas anteriores,

$$d(y, x_0) < \varepsilon + d(x, x_0) = (r - d(x, x_0)) + d(x, x_0) = r.$$

Por lo tanto, $d(y, x_0) < r$, lo que significa que $y \in B(x_0, r)$.

Como y fue elegido arbitrariamente en $B(x, \varepsilon)$, hemos probado

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, r).$$

Y esto vale para todo $x \in B(x_0, r)$, con el ε definido como arriba. Por definición de conjunto abierto, $B(x_0, r)$ es abierto. \square

Definición 3.3. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq E$. El *interior* de A es el conjunto

$$A^\circ = \{x \in A : \exists r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subseteq A\}.$$

Equivalente: A° es el conjunto de los puntos interiores de A .

Proposición 3.4. Sea (E, d) un espacio métrico y $A, A_1, A_2 \subseteq E$. Se tienen las siguientes propiedades:

(I) $A^\circ \subseteq A$.

(II) Si $A_1 \subseteq A_2$, entonces $A_1^\circ \subseteq A_2^\circ$.

(III) A° es un conjunto abierto.

(IV) Si G es abierto y $G \subseteq A$, entonces $G \subseteq A^\circ$.

Demostración. (i) Por definición,

$$A^\circ = \{x \in A : \exists r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subseteq A\}.$$

En particular, todo $x \in A^\circ$ pertenece a A , luego $A^\circ \subseteq A$.

(ii) Supongamos que $A_1 \subseteq A_2$ y sea $x \in A_1^\circ$. Entonces, por definición de interior, existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq A_1.$$

Como $A_1 \subseteq A_2$, se tiene también

$$B(x, r) \subseteq A_2,$$

de modo que x es punto interior de A_2 , es decir, $x \in A_2^\circ$. Hemos probado que $A_1^\circ \subseteq A_2^\circ$.

(iii) Queremos ver que A° es abierto. Sea $x \in A^\circ$. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq A.$$

Por la proposición ya demostrada, $B(x, r)$ es un conjunto abierto. En particular, como $x \in B(x, r)$ y $B(x, r)$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, r).$$

Como además $B(x, r) \subseteq A$, obtenemos

$$B(x, \varepsilon) \subseteq A.$$

Por definición de interior, esto implica que $x \in A^\circ$ y, de hecho, para todo $y \in B(x, \varepsilon)$ se cumple $y \in A^\circ$. Por lo tanto, $B(x, \varepsilon) \subseteq A^\circ$.

Hemos visto que para todo $x \in A^\circ$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A^\circ$, lo cual significa que A° es abierto.

(iv) Sea G un conjunto abierto tal que $G \subseteq A$, y sea $x \in G$. Como G es abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq G.$$

De la inclusión $G \subseteq A$ se deduce

$$B(x, r) \subseteq A.$$

Luego x es punto interior de A , es decir, $x \in A^\circ$. Como x era un punto arbitrario de G , concluimos que $G \subseteq A^\circ$. \square

Proposición 3.5. Sea (E, d) un espacio métrico. Entonces se verifican:

- (I) La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- (II) La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Demostración. (i) Sea $(G_i)_{i \in I}$ una familia cualquiera de conjuntos abiertos en E (indexada por un conjunto I no necesariamente numerable) y definamos

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i.$$

Queremos ver que G es abierto.

Sea $x \in G$. Entonces existe algún índice $i_0 \in I$ tal que $x \in G_{i_0}$. Como G_{i_0} es abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq G_{i_0}.$$

De aquí se deduce

$$B(x, r) \subseteq G_{i_0} \subseteq G.$$

Por lo tanto, para todo $x \in G$ hemos encontrado un radio $r > 0$ con $B(x, r) \subseteq G$. Por definición, G es abierto.

(ii) Sea G_1, \dots, G_n una familia finita de conjuntos abiertos en E y definamos

$$H = \bigcap_{k=1}^n G_k.$$

Probemos que H es abierto.

Tomemos $x \in H$. Entonces $x \in G_k$ para todo $k = 1, \dots, n$. Como cada G_k es abierto, existe $r_k > 0$ tal que

$$B(x, r_k) \subseteq G_k \quad \text{para cada } k = 1, \dots, n.$$

Definimos

$$r = \min\{r_1, \dots, r_n\}.$$

Entonces $r > 0$ y, para todo k ,

$$B(x, r) \subseteq B(x, r_k) \subseteq G_k.$$

De aquí se sigue

$$B(x, r) \subseteq \bigcap_{k=1}^n G_k = H.$$

Por lo tanto, para cada $x \in H$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq H$, lo que muestra que H es abierto. \square

Observación. El resultado sobre intersección de abiertos es, en general, válido sólo para intersecciones finitas. Una intersección infinita de abiertos puede no ser abierta.

Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, d_{\text{eucl}})$, para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

es un abierto. Consideremos la intersección

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Es fácil ver que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

El conjunto $\{0\}$ no es abierto en \mathbb{R} con la métrica usual, ya que si tomamos cualquier $r > 0$, la bola $B(0, r) = (-r, r)$ contiene puntos distintos de 0, de modo que nunca se cumple $B(0, r) \subseteq \{0\}$. Por lo tanto, la intersección numerable de los abiertos G_n no es abierta.

3.2. Conjuntos cerrados

Definición 3.6. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Un punto $x \in E$ se llama *punto de adherencia* (o *punto de clausura*) de A si

$$\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Definición 3.7. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. La *clausura* (o *adherencia*) de A es el conjunto

$$\overline{A} = \{x \in E : x \text{ es punto de adherencia de } A\}.$$

Definición 3.8. Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $F \subseteq E$ se dice *cerrado* si su complemento $E \setminus F$ es un conjunto abierto.

Proposición 3.9. Sea (E, d) un espacio métrico, $x_0 \in E$ y $r > 0$. Entonces la bola cerrada

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E : d(x, x_0) \leq r\}$$

es un conjunto cerrado.

Demostración. Por definición, $\overline{B}(x_0, r)$ es cerrada si su complemento $E \setminus \overline{B}(x_0, r)$ es abierto. Sea

$$x \in E \setminus \overline{B}(x_0, r).$$

Entonces $d(x, x_0) > r$. Definimos

$$\varepsilon = \frac{d(x, x_0) - r}{2}.$$

Como $d(x, x_0) > r$, se tiene $\varepsilon > 0$.

Mostremos que

$$B(x, \varepsilon) \subseteq E \setminus \overline{B}(x_0, r).$$

Sea $y \in B(x, \varepsilon)$, es decir,

$$d(x, y) < \varepsilon.$$

Por la desigualdad triangular,

$$d(y, x_0) \geq d(x, x_0) - d(x, y).$$

Luego

$$d(y, x_0) > d(x, x_0) - \varepsilon = d(x, x_0) - \frac{d(x, x_0) - r}{2} = \frac{d(x, x_0) + r}{2}.$$

Como $d(x, x_0) > r$, se tiene

$$\frac{d(x, x_0) + r}{2} > \frac{r + r}{2} = r,$$

de modo que $d(y, x_0) > r$. En particular, $d(y, x_0) \not\leq r$, así que $y \notin \overline{B}(x_0, r)$.

Hemos probado que todo $y \in B(x, \varepsilon)$ pertenece al complemento de la bola cerrada:

$$B(x, \varepsilon) \subseteq E \setminus \overline{B}(x_0, r).$$

Por lo tanto, para cada x del complemento existe un $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B(x, \varepsilon)$ está contenida en dicho complemento. Esto significa que $E \setminus \overline{B}(x_0, r)$ es abierto.

Concluimos que $\overline{B}(x_0, r)$ es cerrado. \square

Proposición 3.10 (Caracterización de la clausura mediante cerrados). *Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Entonces:*

(I) $A \subseteq \overline{A}$.

(II) \overline{A} es un conjunto cerrado.

(III) Si F es un conjunto cerrado con $A \subseteq F$, entonces $\overline{A} \subseteq F$.

En particular, \overline{A} es el menor conjunto cerrado que contiene a A , y se puede escribir

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq E : F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}.$$

Demostración. (i) Sea $x \in A$. Entonces, para cualquier $r > 0$, se tiene $x \in B(x, r)$, y por lo tanto $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Es decir, x es punto de adherencia de A , y por definición $x \in \bar{A}$. Luego $A \subseteq \bar{A}$.

(ii) Probemos que \bar{A} es cerrado mostrando que $E \setminus \bar{A}$ es abierto.

Sea $x \in E \setminus \bar{A}$. Entonces x no es punto de adherencia de A , es decir, existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \cap A = \emptyset.$$

Mostraremos que $B(x, r/2) \subseteq E \setminus \bar{A}$.

Sea $y \in B(x, r/2)$, de modo que $d(x, y) < r/2$. Tomemos $s = r/2$. Consideremos un punto $z \in B(y, s)$; entonces $d(y, z) < s = r/2$. Por la desigualdad triangular,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

luego $z \in B(x, r)$. Como $B(x, r) \cap A = \emptyset$, se sigue que $z \notin A$. En consecuencia,

$$B(y, s) \cap A = \emptyset.$$

Esto significa que y no es punto de adherencia de A , es decir, $y \notin \bar{A}$.

Como y fue un punto arbitrario de $B(x, r/2)$, hemos probado que $B(x, r/2) \subseteq E \setminus \bar{A}$. Por lo tanto, $E \setminus \bar{A}$ es abierto, y en consecuencia \bar{A} es cerrado.

(iii) Sea F un conjunto cerrado tal que $A \subseteq F$. Debemos probar que $\bar{A} \subseteq F$.

Sea $x \in E \setminus F$. Como F es cerrado, su complemento $E \setminus F$ es abierto. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq E \setminus F.$$

Como $A \subseteq F$, se tiene $A \cap (E \setminus F) = \emptyset$, y en particular

$$B(x, r) \cap A = \emptyset.$$

Esto muestra que x no es punto de adherencia de A , es decir, $x \notin \bar{A}$. Hemos probado

$$E \setminus F \subseteq E \setminus \bar{A}.$$

Tomando complementos,

$$\bar{A} \subseteq F.$$

Esto vale para todo conjunto cerrado F que contiene a A , con lo cual queda demostrado que \bar{A} es el menor cerrado que contiene a A , y en particular

$$\bar{A} = \bigcap \{F \subseteq E : F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}.$$

□

Proposición 3.11. *Un conjunto $F \subseteq E$ es cerrado si y sólo si*

$$F = \overline{F}.$$

Demostración. (\Rightarrow) Si F es cerrado y F contiene a F , por la proposición anterior, $\overline{F} \subseteq F$. Por otra parte, siempre se cumple $F \subseteq \overline{F}$. De aquí se deduce $F = \overline{F}$.

(\Leftarrow) Si $F = \overline{F}$, como sabemos que \overline{F} es cerrado, se sigue que F es cerrado. \square

Proposición 3.12 (Caracterización secuencial de la clausura). *Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$$(I) \ x \in \overline{A}.$$

(II) *Existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n \in A$ para todo n tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que $x \in \overline{A}$. Por definición de clausura, esto significa que para todo $r > 0$ se cumple

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el radio $r_n = \frac{1}{n} > 0$. Como $B(x, r_n) \cap A \neq \emptyset$, podemos elegir un punto

$$a_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A.$$

Así definimos una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de A que satisface

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que $a_n \rightarrow x$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Si $n \geq N$, entonces

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : d(a_n, x) < \varepsilon,$$

lo cual significa que $a_n \rightarrow x$. Esto prueba (ii).

(ii) \Rightarrow (i)) Recíprocamente, supongamos que existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n \in A$ para todo n tal que $a_n \rightarrow x$. Debemos probar que $x \in \overline{A}$, es decir, que

$$\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Sea $r > 0$. Como $a_n \rightarrow x$, por definición de límite existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$d(a_n, x) < r.$$

En particular, tomando $n = N$, tenemos $a_N \in B(x, r)$. Como además $a_N \in A$ por construcción de la sucesión, se obtiene

$$a_N \in B(x, r) \cap A,$$

y por lo tanto $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Como esto vale para todo $r > 0$, concluimos que x es punto de adherencia de A , es decir, $x \in \overline{A}$. \square

Proposición 3.13. Sea (E, d) un espacio métrico y $F \subseteq E$. Entonces F es cerrado si y sólo si se verifica:

$$\text{si } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F \text{ y } x_n \rightarrow x \text{ en } E, \text{ entonces } x \in F.$$

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que F es cerrado y sea (x_n) una sucesión de puntos de F tal que $x_n \rightarrow x$ en E . Supongamos, por absurdo, que $x \notin F$. Entonces $x \in E \setminus F$.

Como $E \setminus F$ es abierto (porque F es cerrado), existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq E \setminus F.$$

Por la convergencia de (x_n) a x , sabemos que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Tomamos $\varepsilon = r$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, se cumple $d(x_n, x) < r$, es decir, $x_n \in B(x, r)$. Pero $B(x, r) \subseteq E \setminus F$, luego $x_n \notin F$ para todo $n \geq N$. Esto contradice el hecho de que $x_n \in F$ para todos los n , por hipótesis. Por lo tanto, debe ser $x \in F$.

(\Leftarrow) Supongamos ahora que se cumple la propiedad secuencial: toda sucesión de puntos de F que converge en E tiene su límite en F . Queremos ver que F es cerrado, es decir, que $E \setminus F$ es abierto.

Tomemos un punto $x \in E \setminus F$. Supongamos, por absurdo, que $E \setminus F$ no es abierto. Entonces no existe ningún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq E \setminus F$. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, el radio $r = \frac{1}{n}$ no sirve, es decir:

$$B\left(x, \frac{1}{n}\right) \not\subseteq E \setminus F.$$

Esto significa que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe algún punto

$$x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap F.$$

Por construcción, $x_n \in F$ y, además,

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De aquí se deduce que $x_n \rightarrow x$ en el espacio métrico (E, d) .

Pero, por hipótesis secuencial, el límite de cualquier sucesión de puntos de F que converge en E debe pertenecer a F , de modo que $x \in F$. Esto contradice que $x \in E \setminus F$.

Por lo tanto, nuestra suposición era falsa: para cada $x \in E \setminus F$ debe existir $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq E \setminus F$, lo que muestra que $E \setminus F$ es abierto. En consecuencia, F es cerrado. \square

Proposición 3.14. *Sea (E, d) un espacio métrico. Entonces se verifican:*

- (I) \emptyset y E son conjuntos cerrados.
- (II) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
- (III) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Demostración. (i) Notemos que

$$E \setminus \emptyset = E \quad \text{y} \quad E \setminus E = \emptyset.$$

Como ya sabemos que E y \emptyset son abiertos, por definición de conjunto cerrado se sigue que \emptyset y E son cerrados.

(ii) Sea $(F_i)_{i \in I}$ una familia cualquiera de conjuntos cerrados en E , indexada por un conjunto I arbitrario, y consideremos

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Queremos probar que F es cerrado.

Usamos la relación entre complementos, uniones e intersecciones:

$$E \setminus F = E \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i).$$

Cada F_i es cerrado, así que $E \setminus F_i$ es abierto para todo i . Por lo tanto, la unión $\bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i)$ es abierta (por la propiedad ya demostrada para uniones arbitrarias de abiertos). En consecuencia, $E \setminus F$ es abierto, lo que implica que F es cerrado.

(iii) Sean F_1, \dots, F_n conjuntos cerrados en E y consideremos

$$H = \bigcup_{k=1}^n F_k.$$

Entonces

$$E \setminus H = E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n F_k \right) = \bigcap_{k=1}^n (E \setminus F_k).$$

Como cada F_k es cerrado, $E \setminus F_k$ es abierto para todo k . La intersección finita de abiertos es abierta, por lo tanto $\bigcap_{k=1}^n (E \setminus F_k)$ es abierta. De aquí se deduce que $E \setminus H$ es abierto y, por definición, H es cerrado. \square

3.3. Puntos de acumulación y frontera

Definición 3.15. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Un punto $x \in E$ se llama *punto de acumulación* (o *punto límite*) de A si

$$\forall r > 0 \quad (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Denotamos por A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A .

Proposición 3.16 (Caracterización secuencial de puntos de acumulación). *Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (I) x es punto de acumulación de A , es decir $x \in A'$.
- (II) Existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n \in A \setminus \{x\}$ para todo n tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Supongamos que $x \in A'$. Entonces, por definición, para todo $r > 0$ se cumple

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $r_n = \frac{1}{n}$ y elegimos

$$a_n \in (B(x, r_n) \setminus \{x\}) \cap A.$$

Entonces $a_n \in A \setminus \{x\}$ y $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Si $n \geq N$, entonces

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por definición de límite, $a_n \rightarrow x$.

(ii) \Rightarrow (i)) Recíprocamente, supongamos que existe una sucesión (a_n) con $a_n \in A \setminus \{x\}$ para todo n y $a_n \rightarrow x$. Sea $r > 0$. Como $a_n \rightarrow x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$d(a_n, x) < r.$$

En particular, $a_N \in B(x, r)$, y como $a_N \neq x$ se tiene $a_N \in B(x, r) \setminus \{x\}$. Además, $a_N \in A$.

Por lo tanto,

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

para todo $r > 0$, lo que significa que x es punto de acumulación de A , es decir, $x \in A'$. \square

Teorema 3.17. Sea $A \subseteq E$ un subconjunto de un espacio métrico (E, d) . Entonces

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Demostración. Primero probamos la inclusión $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. Sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, ya está. Supongamos que $x \notin A$. Como $x \in \overline{A}$, por definición de clausura se cumple

$$\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Pero como $x \notin A$, esto implica automáticamente que

$$\forall r > 0 \quad (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset,$$

es decir, x es punto de acumulación de A , $x \in A'$. En cualquiera de los dos casos, $x \in A \cup A'$. Por lo tanto

$$\overline{A} \subseteq A \cup A'.$$

Ahora probamos la inclusión inversa $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Si $x \in A$, ya vimos que siempre se cumple $A \subseteq \overline{A}$, así que $x \in \overline{A}$.

Si $x \in A'$, entonces para todo $r > 0$ se tiene

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

En particular, esto implica $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$, de modo que x es punto de adherencia de A , es decir, $x \in \overline{A}$.

En ambos casos $x \in \overline{A}$, por lo que

$$A \cup A' \subseteq \overline{A}.$$

Concluimos que $\overline{A} = A \cup A'$. \square

Corolario 3.18. Sea $A \subseteq E$. Entonces A es cerrado si y sólo si

$$A' \subseteq A.$$

Demostración. (\Rightarrow) Si A es cerrado, por definición $A = \overline{A}$. Por el teorema anterior,

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Luego

$$A = A \cup A'.$$

Esto sólo puede ocurrir si $A' \subseteq A$.

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que $A' \subseteq A$. Del teorema anterior tenemos

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Como $A' \subseteq A$, se obtiene

$$\overline{A} = A.$$

Pero un conjunto es cerrado si y sólo si coincide con su clausura, por lo que A es cerrado. \square

Definición 3.19. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Un punto $x \in E$ se llama *punto frontera* (o *punto de borde*) de A si para todo $r > 0$ se cumple

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset.$$

El conjunto de todos los puntos frontera de A se denota por ∂A y se llama *frontera* (o *borde*) de A .

Proposición 3.20. Para todo $A \subseteq E$ se verifica

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

Demostración. Sea $x \in \partial A$. Entonces, por definición de punto frontera, para todo $r > 0$,

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset.$$

En particular, la primera condición implica que x es punto de adherencia de A , es decir $x \in \overline{A}$. Por otra parte, la segunda condición impide que exista algún $r > 0$ con $B(x, r) \subseteq A$, luego x no es punto interior de A , es decir $x \notin A^\circ$. Por lo tanto $x \in \overline{A} \setminus A^\circ$.

Recíprocamente, sea $x \in \overline{A} \setminus A^\circ$. Entonces $x \in \overline{A}$, de modo que para todo $r > 0$,

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Además, $x \notin A^\circ$, es decir, no existe ningún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$. Por lo tanto, para todo $r > 0$ se tiene

$$B(x, r) \not\subseteq A,$$

lo que significa que para todo $r > 0$ existe $y \in B(x, r)$ tal que $y \notin A$, es decir,

$$B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset.$$

Juntando ambas condiciones, x es punto frontera de A , es decir $x \in \partial A$.

Hemos probado ambas inclusiones, así que $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. \square

Proposición 3.21. *Sea $A \subseteq E$. Entonces:*

(I) ∂A es un conjunto cerrado.

(II) Se tiene la descomposición

$$E = A^\circ \dot{\cup} \partial A \dot{\cup} (E \setminus \overline{A}),$$

donde las uniones son disjuntas.

(III) Se verifica

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Demostración. (i) Por la proposición anterior,

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (E \setminus A^\circ).$$

Sabemos que \overline{A} es cerrado. Como A° es abierto, su complemento $E \setminus A^\circ$ es cerrado. La intersección de conjuntos cerrados es cerrada, luego ∂A es cerrado.

(ii) Por definición de interior, clausura y frontera, se tiene

$$A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}.$$

Además, por la proposición anterior,

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

Entonces

$$\overline{A} = A^\circ \dot{\cup} \partial A.$$

Por otra parte, el complemento de \overline{A} es $E \setminus \overline{A}$, y es abierto. Así, todo punto de E pertenece o bien a \overline{A} o bien a $E \setminus \overline{A}$, y dentro de \overline{A} está exactamente en A° o en ∂A . Esto da la descomposición

$$E = A^\circ \dot{\cup} \partial A \dot{\cup} (E \setminus \overline{A}).$$

(iii) De la igualdad del teorema anterior $\overline{A} = A \cup \partial A$ y del hecho de que $\partial A \subseteq \overline{A}$, se deduce en particular que

$$A \subseteq \overline{A} \quad \text{y} \quad \partial A \subseteq \overline{A}.$$

Por lo tanto,

$$A \cup \partial A \subseteq \overline{A}.$$

Recíprocamente, sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, ya está. Si $x \notin A$, como $x \in \overline{A}$, para todo $r > 0$ se cumple $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Además, como $x \notin A$, se tiene $x \in E \setminus A$, luego para todo $r > 0$ se cumple $x \in B(x, r) \cap (E \setminus A)$, o sea

$$B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset.$$

Por definición, esto significa que $x \in \partial A$. En cualquier caso, $x \in A \cup \partial A$, con lo cual

$$\overline{A} \subseteq A \cup \partial A.$$

Concluimos que $\overline{A} = A \cup \partial A$. □

3.4. Métricas equivalentes

Sea E un conjunto y d_1, d_2 dos métricas en E .

Definición 3.22. Decimos que las métricas d_1 y d_2 en E son *equivalentes* si inducen los mismos conjuntos abiertos, es decir, si para todo $U \subseteq E$ se cumple:

$$U \text{ es abierto en } (E, d_1) \iff U \text{ es abierto en } (E, d_2).$$

Proposición 3.23 (Caracterización secuencial). *Sean d_1, d_2 dos métricas en E . Son equivalentes si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en E y todo $x \in E$ se verifica*

$$x_n \rightarrow x \text{ en } (E, d_1) \iff x_n \rightarrow x \text{ en } (E, d_2).$$

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que d_1 y d_2 son equivalentes, es decir, tienen los mismos conjuntos abiertos.

Recordemos que, en un espacio métrico, una sucesión (x_n) converge a x si y sólo si se verifica la siguiente propiedad topológica:

$$\forall U \text{ abierto con } x \in U, \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n \in U.$$

Sea (x_n) una sucesión en E y $x \in E$. Supongamos que $x_n \rightarrow x$ en (E, d_1) . Entonces, para todo abierto U de (E, d_1) con $x \in U$, existe N tal que, si $n \geq N$, se cumple $x_n \in U$.

Como d_1 y d_2 tienen los mismos abiertos, ese mismo conjunto U es abierto también en (E, d_2) . La condición anterior es exactamente la definición de convergencia de (x_n) a x en (E, d_2) . Por lo tanto, $x_n \rightarrow x$ en (E, d_2) .

La implicación recíproca se demuestra igual, intercambiando el rol de d_1 y d_2 .

(\Leftarrow) Supongamos ahora que las sucesiones convergentes son las mismas para d_1 y d_2 .

Queremos ver que los conjuntos abiertos también coinciden. Sea $U \subseteq E$ abierto en (E, d_1) , y probemos que es abierto en (E, d_2) .

Para eso, basta ver que si (x_n) es una sucesión en $E \setminus U$ que converge a algún $x \in E$ respecto de d_2 , entonces $x \in E \setminus U$ (es decir, $x \notin U$). En efecto, esta propiedad caracteriza a los cerrados, y al tomar complementos caracteriza a los abiertos.

Sea entonces (x_n) una sucesión con $x_n \in E \setminus U$ para todo n y $x_n \rightarrow x$ en (E, d_2) . Por hipótesis, las sucesiones convergentes son las mismas en ambas métricas, así que también $x_n \rightarrow x$ en (E, d_1) .

Como U es abierto en (E, d_1) , su complemento $E \setminus U$ es cerrado en (E, d_1) . Por la caracterización secuencial de cerrados, si una sucesión de puntos de $E \setminus U$ converge (en d_1), su límite debe pertenecer a $E \setminus U$. En particular, $x \in E \setminus U$, es decir, $x \notin U$.

Hemos probado que el complemento de U es cerrado también con la métrica d_2 , luego U es abierto en (E, d_2) . El mismo argumento, cambiando el rol de d_1 y d_2 , muestra la implicación inversa. Por lo tanto, los abiertos de d_1 coinciden con los de d_2 , y las métricas son equivalentes. \square

Definición 3.24. Decimos que dos métricas d_1, d_2 en E son *fuertemente equivalentes* si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Proposición 3.25. Si d_1 y d_2 son fuertemente equivalentes, entonces son equivalentes (en el sentido de que inducen los mismos conjuntos abiertos).

Demostración. Sea U un abierto de (E, d_1) y tomemos $x \in U$. Por definición de abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B_{d_1}(x, r) \subseteq U,$$

donde $B_{d_1}(x, r) = \{y : d_1(x, y) < r\}$.

Consideremos ahora la bola en la métrica d_2

$$B_{d_2}(x, c_1 r) = \{y \in E : d_2(x, y) < c_1 r\}.$$

Si $y \in B_{d_2}(x, c_1 r)$, entonces $d_2(x, y) < c_1 r$, y usando la desigualdad $c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y)$ obtenemos

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) < c_1 r \implies d_1(x, y) < r.$$

Luego $y \in B_{d_1}(x, r)$, y por lo tanto

$$B_{d_2}(x, c_1 r) \subseteq B_{d_1}(x, r) \subseteq U.$$

Hemos mostrado que para todo $x \in U$ existe un radio $c_1 r > 0$ tal que la bola d_2 -abierto correspondiente está contenida en U , de modo que U es abierto en (E, d_2) .

La implicación recíproca (todo abierto d_2 -abierto es d_1 -abierto) se prueba exactamente igual usando la otra desigualdad $d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$. Concluimos que d_1 y d_2 tienen los mismos abiertos, es decir, son métricas equivalentes. \square

Observación. En espacios de dimensión finita (por ejemplo, \mathbb{R}^n), todas las normas son fuertemente equivalentes. En particular, las métricas inducidas por las normas d_1, d_2, d_∞ en \mathbb{R}^n son equivalentes, y por lo tanto tienen los mismos abiertos, los mismos cerrados, las mismas sucesiones convergentes, etc.

Teorema 3.26. *Sean d y d' dos métricas sobre un mismo conjunto E . Las métricas d y d' son (topológicamente) equivalentes si y sólo si para todo $x \in E$ y todo $r > 0$ existen $r_1, r_2 > 0$ tales que*

$$B_{d'}(x, r_1) \subseteq B_d(x, r) \quad \text{y} \quad B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r),$$

donde

$$B_d(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}, \quad B_{d'}(x, r) = \{y \in E : d'(x, y) < r\}.$$

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que d y d' son métricas equivalentes, es decir, inducen los mismos conjuntos abiertos.

Sea $x \in E$ y $r > 0$ arbitrarios. Entonces $B_d(x, r)$ es un abierto en (E, d) ; como los abiertos de (E, d) y (E, d') coinciden, $B_d(x, r)$ es también abierto en (E, d') .

Por definición de abierto en la métrica d' , existe $r_1 > 0$ tal que

$$B_{d'}(x, r_1) \subseteq B_d(x, r).$$

Para obtener la otra inclusión, usamos el mismo argumento intercambiando el rol de d y d' : como $B_{d'}(x, r)$ es abierto en (E, d') y las familias de abiertos coinciden, $B_{d'}(x, r)$ es abierto en (E, d) . Luego existe $r_2 > 0$ tal que

$$B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r).$$

Así se verifica la condición del enunciado.

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que para todo $x \in E$ y todo $r > 0$ existen $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$B_{d'}(x, r_1) \subseteq B_d(x, r) \quad \text{y} \quad B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r).$$

Queremos probar que los abiertos de (E, d) y (E, d') coinciden.

Sea $U \subseteq E$ un conjunto abierto en (E, d) . Sea $x \in U$. Como U es abierto para d , existe $r > 0$ tal que

$$B_d(x, r) \subseteq U.$$

Por hipótesis, existe $r_2 > 0$ tal que

$$B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r).$$

Aplicando de nuevo la hipótesis, pero ahora a la bola d' -abierta $B_{d'}(x, r)$, podemos elegir $r_3 > 0$ con

$$B_{d'}(x, r_3) \subseteq B_d(x, r_2).$$

Por lo tanto,

$$B_{d'}(x, r_3) \subseteq B_d(x, r_2) \subseteq B_d(x, r) \subseteq U.$$

Hemos encontrado, para cada $x \in U$, un radio $r_3 > 0$ tal que $B_{d'}(x, r_3) \subseteq U$, lo que significa que U es abierto en (E, d') .

El argumento recíproco (si U es abierto en (E, d') entonces lo es en (E, d)) se obtiene exactamente igual, usando de nuevo la hipótesis para pasar de bolas d' -abiertas a bolas d -abiertas. Concluimos que las familias de conjuntos abiertos de (E, d) y (E, d') coinciden, es decir, d y d' son métricas equivalentes. \square

3.5. Sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos

Definición 3.27. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Decimos que A es *acotado* si existen $x \in E$ y $r > 0$ tales que

$$A \subset B(x, r),$$

donde $B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$ es la bola abierta de centro x y radio r .

Definición 3.28. Sea (E, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ una sucesión. Decimos que (x_n) es *acotada* si existen $x \in E$ y $r > 0$ tales que

$$x_n \in B(x, r) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Equivalente: el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en E .

Definición 3.29. Sea (E, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ una sucesión. Decimos que (x_n) es una *sucesión de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Teorema 3.30. Sea (E, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$. Entonces:

- (1) Si (x_n) es de Cauchy, entonces es acotada.
- (2) Si (x_n) es convergente en E , entonces es de Cauchy.

(3) Si (x_n) es de Cauchy y tiene alguna subsucesión convergente, entonces (x_n) es convergente (en E) y converge al mismo límite que esa subsucesión.

Demostración. (1) Supongamos que (x_n) es de Cauchy. Tomamos $\varepsilon = 1$ en la definición. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq n_0$, se cumple

$$d(x_n, x_m) < 1.$$

En particular, para todo $n \geq n_0$,

$$d(x_n, x_{n_0}) < 1.$$

Sea ahora

$$M = \max\{d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0}), 1\}$$

(si $n_0 = 1$, simplemente tomamos $M = 1$). Entonces $M > 0$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x_{n_0}) \leq M.$$

Por lo tanto,

$$x_n \in B(x_{n_0}, M) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

lo que muestra que la sucesión (x_n) es acotada.

(2) Supongamos que (x_n) converge en E a algún $x \in E$; es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon/2.$$

(Escribimos $\varepsilon/2$ para simplificar las cuentas que siguen.)

Sea ahora $\varepsilon > 0$ fijo. Tomamos n_0 como arriba. Si $n, m \geq n_0$, por la desigualdad triangular:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos mostrado que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que, si $n, m \geq n_0$, se cumple $d(x_n, x_m) < \varepsilon$; es decir, (x_n) es de Cauchy.

(3) Supongamos que (x_n) es de Cauchy y que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x \in E$.

Debemos probar que $x_n \rightarrow x$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como (x_{n_k}) converge a x , existe $K \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq K$,

$$d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2.$$

Como (x_n) es de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq n_0$,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon/2.$$

Definimos

$$N = \max\{n_0, n_K\}.$$

Sea ahora $n \geq N$. Entonces $n \geq n_0$ y $n_K \geq n_0$, por lo que aplicando la propiedad de Cauchy con $m = n_K$ obtenemos:

$$d(x_n, x_{n_K}) < \varepsilon/2.$$

Por otra parte, como $n_K \geq K$, tenemos

$$d(x_{n_K}, x) < \varepsilon/2.$$

Usando la desigualdad triangular,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos probado que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon,$$

lo cual significa que $x_n \rightarrow x$ en (E, d) . □

Definición 3.31. Un espacio métrico (E, d) se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy en E es convergente a un punto de E .

Proposición 3.32. Sea (E, d) un espacio métrico completo y sea $F \subseteq E$ un subconjunto cerrado. Entonces el subespacio métrico (F, d) es completo.

Demostración. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en F (con la métrica d restringida). Como $F \subseteq E$, también es una sucesión de Cauchy en E . Dado que (E, d) es completo, existe $x \in E$ tal que $x_n \rightarrow x$ en E .

Como F es cerrado en E y todos los x_n están en F , por la caracterización secuencial de cerrados se tiene necesariamente $x \in F$. Por lo tanto, (x_n) converge a un punto de F , y así (F, d) es completo. □

4. Unidad 4: Funciones continuas

4.1. Definición y caracterizaciones de continuidad

Sea (E, d_E) y (F, d_F) espacios métricos, y sea $A \subseteq E$. Consideramos funciones $f : A \rightarrow F$.

Definición 4.1 (Continuidad en un punto). Sea $x_0 \in A$. Decimos que f es *continua en x_0* si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in A, d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Definición 4.2 (Continuidad en un conjunto). Decimos que f es *continua* en A si es continua en todo punto $x_0 \in A$. En particular, cuando $A = E$, diremos simplemente que $f : E \rightarrow F$ es *continua*.

Definición 4.3 (Continuidad secuencial en un punto). Sea $x_0 \in A$. Decimos que f es *secuencialmente continua* en x_0 si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ en } (E, d_E),$$

se cumple

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0) \text{ en } (F, d_F).$$

Proposición 4.4 (Equivalencia ε - δ / sucesiones). Sea $f : A \rightarrow F$ y $x_0 \in A$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (I) f es continua en x_0 (en el sentido ε - δ).
- (II) f es secuencialmente continua en x_0 , es decir: para toda sucesión $(x_n) \subseteq A$ con $x_n \rightarrow x_0$ en (E, d_E) , se tiene $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ en (F, d_F) .

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Supongamos que f es continua en x_0 en el sentido ε - δ . Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ una sucesión tal que $x_n \rightarrow x_0$ en (E, d_E) .

Sea $\varepsilon > 0$. Por continuidad en x_0 , existe $\delta > 0$ tal que

$$d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in A.$$

Como $x_n \rightarrow x_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$, se cumple

$$d_E(x_n, x_0) < \delta.$$

Aplicando la condición de continuidad a cada x_n con $n \geq N$, obtenemos

$$d_F(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Por definición de límite de sucesión en (F, d_F) , esto significa que $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Luego (ii) es verdadera.

(ii) \Rightarrow (i) Supongamos ahora que f es secuencialmente continua en x_0 y probemos que es continua en x_0 en el sentido ε - δ .

Razonamos por absurdo. Supongamos que f *no* es continua en x_0 . Entonces existe algún $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $x \in A$ con

$$d_E(x, x_0) < \delta \quad \text{pero} \quad d_F(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon_0.$$

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicamos esta propiedad con $\delta = \frac{1}{n}$ y obtenemos un punto $x_n \in A$ tal que

$$d_E(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad d_F(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0.$$

De aquí se ve que $x_n \rightarrow x_0$ en (E, d_E) , porque para todo $\varepsilon > 0$ basta tomar N con $\frac{1}{N} < \varepsilon$; entonces si $n \geq N$,

$$d_E(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Sin embargo, la sucesión $(f(x_n))$ no puede converger a $f(x_0)$ en (F, d_F) , ya que para todo n se tiene

$$d_F(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0,$$

y esto contradice la definición de límite. Esto contradice la hipótesis de continuidad secuencial en x_0 .

Por lo tanto, nuestra suposición era falsa y f debe ser continua en x_0 en el sentido ε - δ . \square

Definición 4.5 (Imagen inversa). Sea $f : A \rightarrow F$ y $B \subseteq F$. Definimos la *imagen inversa* de B por f como

$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}.$$

Teorema 4.6 (Continuidad y abiertos). Sea $f : A \rightarrow F$ una función entre espacios métricos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (I) f es continua en A .
- (II) Para todo abierto $G \subseteq F$, el conjunto $f^{-1}(G)$ es abierto en el subespacio A (es decir, $f^{-1}(G) = A \cap U$ para algún abierto U de E).
- (III) Si $A = E$, entonces (ii) dice simplemente: para todo abierto $G \subseteq F$, $f^{-1}(G)$ es abierto en E .

Demostración. (i) \Rightarrow (ii)) Supongamos que f es continua en A y sea $G \subseteq F$ un conjunto abierto. Consideremos $f^{-1}(G) \subseteq A$.

Tomemos $x_0 \in f^{-1}(G)$. Entonces $f(x_0) \in G$. Como G es abierto en (F, d_F) , existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_{d_F}(f(x_0), \varepsilon) \subseteq G.$$

Como f es continua en x_0 , existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$,

$$d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

es decir,

$$x \in B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_{d_F}(f(x_0), \varepsilon) \subseteq G.$$

Por lo tanto,

$$B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A \subseteq f^{-1}(G).$$

Esto muestra que, en el subespacio A , el punto x_0 tiene una “bola” (dada por $B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A$) contenida en $f^{-1}(G)$. Por definición, $f^{-1}(G)$ es abierto en A .

(ii) \Rightarrow (i) Supongamos ahora que para todo abierto $G \subseteq F$, el conjunto $f^{-1}(G)$ es abierto en el subespacio A .

Sea $x_0 \in A$ y probemos que f es continua en x_0 .

Sea $\varepsilon > 0$. Consideramos el abierto

$$G = B_{d_F}(f(x_0), \varepsilon) \subseteq F.$$

Por hipótesis, $f^{-1}(G)$ es abierto en A . En particular, $x_0 \in f^{-1}(G)$ (porque $f(x_0) \in G$), y como $f^{-1}(G)$ es abierto en el subespacio A , existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A \subseteq f^{-1}(G).$$

Entonces, si $x \in A$ y $d_E(x, x_0) < \delta$, se tiene $x \in A$ y $x \in B_{d_E}(x_0, \delta)$, por lo que $x \in f^{-1}(G)$; esto significa que $f(x) \in G$, es decir,

$$d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Hemos probado exactamente la condición ε - δ de continuidad de f en x_0 . Como x_0 es arbitrario en A , f es continua en A .

La equivalencia con (iii) es sólo una simplificación de notación cuando $A = E$, ya que en ese caso “abierto en A ” coincide con “abierto en E ”. \square

Teorema 4.7 (Continuidad y cerrados). *Sea $f : A \rightarrow F$ una función entre espacios métricos. Son equivalentes:*

(I) f es continua en A .

(II) Para todo cerrado $C \subseteq F$, el conjunto $f^{-1}(C)$ es cerrado en el subespacio A .

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Supongamos f continua en A y sea $C \subseteq F$ un cerrado. Su complemento $F \setminus C$ es abierto en F .

Por el teorema anterior, $f^{-1}(F \setminus C)$ es abierto en A . Notemos que

$$A \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(F \setminus C).$$

Entonces el complemento de $f^{-1}(C)$ en A es abierto en A , por lo que $f^{-1}(C)$ es cerrado en A .

(ii) \Rightarrow (i) Recíprocamente, supongamos que la preimagen de todo cerrado en F es cerrada en A .

Sea $G \subseteq F$ un abierto. Entonces $F \setminus G$ es cerrado en F , y por hipótesis

$$f^{-1}(F \setminus G)$$

es cerrado en A . Su complemento en A ,

$$A \setminus f^{-1}(F \setminus G),$$

es abierto en A . Pero

$$A \setminus f^{-1}(F \setminus G) = f^{-1}(G).$$

Concluimos que $f^{-1}(G)$ es abierto en A para todo abierto G de F . Por el teorema anterior, esto implica que f es continua en A . \square

Teorema 4.8 (Continuidad y clausura de la imagen). *Sea $f : E \rightarrow E'$ una función entre espacios métricos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) f es continua en E .

(II) Para todo subconjunto $A \subseteq E$ se cumple

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii)) Supongamos que f es continua en E (en cada punto de E).

Sea $A \subseteq E$ y sea $x \in \overline{A}$. Por la caracterización secuencial de la clausura, existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que

$$a_n \rightarrow x \quad \text{en } E.$$

Como f es continua en x , se tiene

$$f(a_n) \rightarrow f(x) \quad \text{en } E'.$$

Además, cada $f(a_n)$ pertenece a $f(A)$, luego por la caracterización secuencial de la clausura en E' concluimos que

$$f(x) \in \overline{f(A)}.$$

Esto vale para todo $x \in \overline{A}$, por lo tanto

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

(ii) \Rightarrow (i)) Supongamos ahora que para todo $A \subseteq E$ se cumple

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Queremos probar que f es continua en E .

Usaremos el criterio de continuidad en términos de cerrados: f es continua si y sólo si, para todo conjunto cerrado $C \subseteq E'$, la preimagen $f^{-1}(C)$ es cerrada en E .

Sea entonces $C \subseteq E'$ un cerrado y definamos

$$A = f^{-1}(C) = \{x \in E : f(x) \in C\}.$$

Tenemos $A \subseteq E$ y, en particular, $f(A) \subseteq C$. De la hipótesis aplicada a este conjunto A se obtiene

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Como $f(A) \subseteq C$, se cumple

$$\overline{f(A)} \subseteq \overline{C} = C$$

(porque C es cerrado). Por lo tanto,

$$f(\overline{A}) \subseteq C.$$

Tomando preimagen por f de ambos lados,

$$f^{-1}(f(\overline{A})) \subseteq f^{-1}(C) = A.$$

En particular, como $\overline{A} \subseteq f^{-1}(f(\overline{A}))$ (siempre se cumple $B \subseteq f^{-1}(f(B))$ para cualquier función y cualquier conjunto B), obtenemos

$$\overline{A} \subseteq A.$$

Pero siempre se tiene $A \subseteq \overline{A}$, por definición de clausura. Luego

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq A,$$

de donde se deduce $\overline{A} = A$. Es decir, A es cerrado en E .

Hemos probado que, para todo cerrado $C \subseteq E'$, la preimagen $f^{-1}(C)$ es cerrada en E . Por el criterio de continuidad mediante cerrados, esto implica que f es continua en E .

Así queda demostrada la equivalencia entre (i) y (ii). \square

4.2. Continuidad uniforme

Sea $f : E \rightarrow E'$ entre espacios métricos (E, d) y (E', d') .

Definición 4.9 (Continuidad uniforme, versión con bolas). Decimos que f es *uniformemente continua* en E si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } f(B_d(x, \delta)) \subseteq B_{d'}(f(x), \varepsilon) \text{ para todo } x \in E.$$

Es decir: dado $\varepsilon > 0$ se puede elegir un mismo $\delta > 0$ (válido para todos los puntos x) de modo que, siempre que y esté δ -cerca de x , las imágenes $f(y)$ y $f(x)$ estén ε -cerca.

Definición 4.10 (Definición equivalente, versión ε - δ). Equivalente y más usada: f es *uniformemente continua* en E si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x, y \in E, d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Aquí δ depende sólo de ε , no de los puntos x, y .

Proposición 4.11. *Las dos definiciones anteriores de continuidad uniforme son equivalentes.*

Demostración. Supongamos primero la definición con bolas. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ el correspondiente en esa definición. Si $x, y \in E$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $y \in B_d(x, \delta)$ y, por la hipótesis,

$$f(y) \in f(B_d(x, \delta)) \subseteq B_{d'}(f(x), \varepsilon),$$

es decir, $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Esto da la definición ε - δ .

Recíprocamente, supongamos que vale la definición ε - δ . Fijamos $\varepsilon > 0$ y tomamos el correspondiente $\delta > 0$. Sea $x \in E$ y $y \in B_d(x, \delta)$, entonces $d(x, y) < \delta$ y por la hipótesis

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

es decir, $f(y) \in B_{d'}(f(x), \varepsilon)$. Por lo tanto,

$$f(B_d(x, \delta)) \subseteq B_{d'}(f(x), \varepsilon) \quad \text{para todo } x \in E,$$

que es la definición con bolas. □

Proposición 4.12 (Criterio secuencial para *no* continuidad uniforme). *Sea $f : E \rightarrow E'$. Entonces f **no** es uniformemente continua en E si y sólo si existen $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en E tales que*

$$d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{pero} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que f no es uniformemente continua. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que *para todo* $\delta > 0$ no se cumple la condición de continuidad uniforme, es decir:

$$\forall \delta > 0 \exists x, y \in E \text{ con } d(x, y) < \delta \text{ y } d'(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicamos esto con $\delta = \frac{1}{n}$, obteniendo puntos $x_n, y_n \in E$ tales que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0.$$

Entonces $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, mientras que las distancias entre las imágenes están siempre acotadas inferiormente por ε_0 . Esto da las sucesiones pedidas.

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que existen $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones (x_n) , (y_n) en E tales que

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0 \quad \forall n.$$

Supongamos, por absurdo, que f fuera uniformemente continua. Tomemos $\varepsilon = \varepsilon_0$ en la definición de continuidad uniforme. Entonces existiría $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in E$,

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon_0.$$

Como $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$d(x_n, y_n) < \delta.$$

Aplicando la condición de uniformidad, tendríamos

$$d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon_0 \quad \text{para todo } n \geq N,$$

lo que contradice la hipótesis $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ para todo n .

Por lo tanto, f no puede ser uniformemente continua. \square

Definición 4.13 (Aplicación de Lipschitz). Sea $C > 0$. Decimos que $f : E \rightarrow E'$ es *Lipschitz* (o *C-Lipschitz*) si

$$d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Teorema 4.14. Sea $f : E \rightarrow E'$. Si existe $C > 0$ tal que

$$d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in E,$$

entonces f es uniformemente continua en E .

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Definimos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{C} > 0.$$

Si $x, y \in E$ satisfacen $d(x, y) < \delta$, entonces

$$d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) < C\delta = \varepsilon.$$

Esto es exactamente la definición de continuidad uniforme (con $\delta = \varepsilon/C$). Por lo tanto f es uniformemente continua. \square

4.2.1. Isometrías

Definición 4.15. Sea $f : E \rightarrow E'$ entre espacios métricos (E, d) y (E', d') . Decimos que f es una *isometría* si

$$d(x, y) = d'(f(x), f(y)) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Proposición 4.16. Sea $f : E \rightarrow E'$ una isometría. Entonces:

(I) f es inyectiva.

(II) f es 1-Lipschitz, luego uniformemente continua.

Demostración. (i) Si $f(x) = f(y)$, entonces

$$d(x, y) = d'(f(x), f(y)) = d'(f(x), f(x)) = 0,$$

lo que implica $x = y$. Por lo tanto, f es inyectiva.

(ii) De la definición de isometría se tiene directamente

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \leq 1 \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in E,$$

es decir, f es 1-Lipschitz. Por el teorema anterior, toda aplicación Lipschitz es uniformemente continua, así que f lo es. \square

Observación. Si $f : E \rightarrow E'$ es una isometría *biyectiva*, entonces su inversa $f^{-1} : E' \rightarrow E$ también es una isometría: para $u, v \in E'$, escribiendo $u = f(x)$ y $v = f(y)$ con $x, y \in E$, se tiene

$$d(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = d(x, y) = d'(f(x), f(y)) = d'(u, v).$$

En particular, f^{-1} también es uniformemente continua.

4.2.2. Homeomorfismos

Definición 4.17. Sea $f : E \rightarrow E'$ una función entre espacios métricos. Decimos que f es un *homeomorfismo* si:

(I) f es biyectiva,

(II) f es continua,

(III) la inversa $f^{-1} : E' \rightarrow E$ es continua.

Definición 4.18. Dos espacios métricos (E, d) y (E', d') se dicen *homeomorfos* si existe un homeomorfismo $f : E \rightarrow E'$.

Proposición 4.19. Si $f : E \rightarrow E'$ es un homeomorfismo, entonces:

(I) $G \subseteq E$ es abierto si y sólo si $f(G)$ es abierto en E' .

(II) $F \subseteq E$ es cerrado si y sólo si $f(F)$ es cerrado en E' .

Demostración. (i) Si G es abierto en E y f es continua, entonces $f(G)$ es abierto en E' si y sólo si f^{-1} es continua, porque $G = f^{-1}(f(G))$ y f^{-1} es continua por hipótesis.

Formalmente: como f es biyectiva, $G = f^{-1}(H)$ para $H = f(G)$. La continuidad de f^{-1} implica que, si H es abierto en E' , entonces G es abierto en E . Inversamente, dado G abierto en E , $H = f(G)$ es abierto en E' porque H es la imagen inversa de un abierto por f^{-1} (que es continua).

(ii) Se deduce de (i) aplicando el resultado a los complementos: F es cerrado en E si y sólo si $E \setminus F$ es abierto, y la imagen por f de $E \setminus F$ es el complemento de $f(F)$ en E' . \square

Observación. En general, una aplicación biyectiva y continua *no* tiene por qué tener inversa continua, es decir, no todo biectivo continuo es un homeomorfismo. El requisito f^{-1} continua es esencial en la definición.

4.2.3. Conjuntos densos

Definición 4.20. Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subseteq E$ se dice *denso en E* si

$$\overline{D} = E.$$

Equivalente: todo punto de E es límite de una sucesión de puntos de D .

Proposición 4.21. Sea (E, d) un espacio métrico y $D \subseteq E$. Son equivalentes:

(I) D es denso en E , es decir, $\overline{D} = E$.

(II) Para todo abierto no vacío $G \subseteq E$ se cumple

$$G \cap D \neq \emptyset.$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Supongamos $\overline{D} = E$. Sea G un abierto no vacío en E . Como $G \subseteq E = \overline{D}$, y G es abierto, se cumple $G \cap D \neq \emptyset$ (porque todo abierto que intersecta la clausura de un conjunto debe intersectar al conjunto mismo).

Más formalmente: si $G \cap D = \emptyset$, entonces $G \subseteq E \setminus D$, y el complemento $E \setminus D$ sería un cerrado que contiene a G , contradiciendo que $G \subseteq \overline{D}$.

(ii) \Rightarrow (i) Supongamos que todo abierto no vacío G verifica $G \cap D \neq \emptyset$. Si existiera $x \in E \setminus \overline{D}$, entonces x estaría en el abierto $E \setminus \overline{D}$, que por definición de clausura no intersecta a D . Esto contradice (ii). Por lo tanto, $E \setminus \overline{D} = \emptyset$, es decir, $\overline{D} = E$. \square

5. Unidad 5: Compacidad

5.1. Definiciones básicas

Definición 5.1 (Conjunto compacto). Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subseteq E$. Decimos que K es *compacto* si para toda familia de abiertos $\{G_i\}_{i \in I}$ de E tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i,$$

existe un subíndice finito $i_1, \dots, i_n \in I$ con

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}.$$

Es decir, todo recubrimiento abierto de K admite un subcubrimiento finito.

Definición 5.2 (Compacidad secuencial). Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subseteq E$. Decimos que K es *secuencialmente compacto* si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in K$ para todo n , existe una subsucesión $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ y un punto $x \in K$ tales que

$$x_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x.$$

Definición 5.3 (Conjunto totalmente acotado). Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Decimos que A es *totalmente acotado* (T.T.A.) si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1, \dots, x_{n(\varepsilon)} \in A \text{ tales que } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n(\varepsilon)} B(x_k, \varepsilon),$$

donde $B(x_k, \varepsilon) = \{y \in E : d(x_k, y) < \varepsilon\}$.

Definición 5.4 (Punto de acumulación). Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Un punto $x \in E$ se llama *punto de acumulación* (o punto límite) de A si

$$\forall r > 0 \quad (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Denotamos por A' al conjunto de puntos de acumulación de A .

Proposición 5.5 (Caracterización secuencial de puntos de acumulación). Sea $A \subseteq E$ y $x \in E$. Entonces

$$x \in A' \iff \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x\} \text{ tal que } a_n \rightarrow x.$$

5.2. Compacidad y puntos de acumulación

Teorema 5.6 (Equivalencias de compacidad en espacios métricos). *Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subseteq E$. Son equivalentes:*

- (I) K es compacto.
- (II) K es secuencialmente compacto.
- (III) Todo subconjunto infinito $A \subseteq K$ tiene al menos un punto de acumulación en K , es decir, $A' \cap K \neq \emptyset$.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii). Sea (x_n) una sucesión en K . Si el conjunto de valores $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito, alguna de sus constantes se repite infinitas veces y obtenemos una subsucesión constante, luego convergente.

Si A es infinito, como K es compacto, también lo es \overline{A} , y por tanto A tiene un punto de acumulación $x \in K$. Por la caracterización secuencial de puntos de acumulación, existe una subsucesión (x_{n_j}) con $x_{n_j} \rightarrow x \in K$. En ambos casos, (x_n) admite una subsucesión convergente en K .

(ii) \Rightarrow (iii). Sea $A \subseteq K$ infinito. Elegimos una sucesión de puntos distintos $(x_n) \subseteq A$ (por ejemplo, una enumeración inyectiva de A). Por (ii), existe una subsucesión (x_{n_j}) y un punto $x \in K$ tales que $x_{n_j} \rightarrow x$. Como todos los $x_{n_j} \in A$, la caracterización secuencial de puntos de acumulación dice que $x \in A'$. Por tanto $A' \cap K \neq \emptyset$.

(iii) \Rightarrow (ii). Sea (x_n) una sucesión en K y sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$. Si A es finito, como antes obtenemos una subsucesión constante y convergente.

Si A es infinito, por (iii) existe $x \in A' \cap K$. Entonces, por la caracterización secuencial de puntos de acumulación, existe una subsucesión (x_{n_j}) de (x_n) tal que $x_{n_j} \rightarrow x \in K$. En todo caso, (x_n) admite una subsucesión convergente en K .

(ii) \Rightarrow (i). Probamos la contrarrecíproca. Supongamos que K no es compacto. Entonces existe un recubrimiento abierto $\{G_i\}_{i \in I}$ de K que no admite subcubrimiento finito.

Construimos inductivamente una sucesión (x_n) en K del siguiente modo:

- Elegimos $x_1 \in K$ y un índice i_1 con $x_1 \in G_{i_1}$. - Supuesto elegido x_1, \dots, x_n con índices i_1, \dots, i_n tales que $x_k \in G_{i_k}$, como $K \not\subseteq \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$, existe $x_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$. Elegimos i_{n+1} con $x_{n+1} \in G_{i_{n+1}}$.

Entonces cada x_n pertenece a un abierto nuevo de la familia, distinto de los anteriores. Sea (x_{n_j}) una subsucesión cualquiera. Si fuera convergente, digamos $x_{n_j} \rightarrow x \in K$, algún abierto G_i contendría a x y a todos los términos suficientemente avanzados de la subsucesión; en particular, ese solo G_i cubriría casi todos los x_n , y un número finito de abiertos de la familia cubriría K , contradiciendo la elección de $\{G_i\}$ sin subcubrimiento finito. Luego (x_n) no posee subsucesión convergente, y K no es secuencialmente compacto.

La contrarrecíproca muestra que (ii) implica (i). \square

5.3. Compacidad, completitud y total acotación

Teorema 5.7. Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subseteq E$. Entonces:

- (I) Si K es compacto, entonces K es completo y totalmente acotado.
- (II) Si K es completo y totalmente acotado, entonces K es compacto.

En particular,

$$K \text{ compacto} \iff K \text{ completo y totalmente acotado.}$$

Demostración. (i) Si K es compacto, por el teorema anterior es secuencialmente compacto. Toda sucesión de Cauchy en K admite una subsucesión convergente; un argumento estándar muestra que la sucesión completa converge al mismo límite, que pertenece a K , de modo que K es completo.

Para ver que K es T.T.A., sea $\varepsilon > 0$ y consideremos la familia de bolas $\{B(x, \varepsilon) : x \in K\}$, que es un recubrimiento abierto de K . Por compacidad, existe un subcubrimiento finito $K \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$, que es precisamente la definición de T.T.A.

(ii) Supongamos que K es completo y totalmente acotado. Sea (x_n) una sucesión en K . Por total acotación, usando el clásico método de “subsucesiones encajadas”, se puede extraer una subsucesión (x_{n_j}) que resulta ser de Cauchy. Como K es completo, esa subsucesión converge en K . Así, toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K , es decir, K es secuencialmente compacto. Por el teorema anterior, K es compacto. \square

Proposición 5.8. Si (E, d) es un espacio métrico y $K \subseteq E$ es compacto, entonces K es cerrado y acotado.

Demostración. Ya vimos que todo compacto es totalmente acotado, luego es acotado.

Resta ver que es cerrado. Sea \overline{K} la clausura de K . Si $x \in \overline{K}$, existe una sucesión $(x_n) \subseteq K$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como K es compacto, es secuencialmente compacto, por lo que (x_n) admite una subsucesión convergente con límite en K ; la unicidad del límite en espacios métricos fuerza que ese límite sea x , por lo que $x \in K$. Se obtiene $\overline{K} \subseteq K$, y como siempre $K \subseteq \overline{K}$, concluimos $\overline{K} = K$, es decir, K es cerrado. \square

Teorema 5.9 (Heine–Borel en \mathbb{R}^m). Sea $K \subseteq \mathbb{R}^m$ con la métrica euclídea usual. Entonces

$$K \text{ es compacto} \iff K \text{ es cerrado y acotado.}$$

5.4. Propiedades estructurales de compactos y T.T.A.

Proposición 5.10 (Subconjunto cerrado de un compacto). *Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subseteq E$ compacto. Si $F \subseteq K$ es cerrado (en E), entonces F es compacto.*

Demostración. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recubrimiento abierto de F en E . Como F es cerrado, $E \setminus F$ es abierto. Entonces

$$\{G_\alpha : \alpha \in A\} \cup \{E \setminus F\}$$

es un recubrimiento abierto de K . Por compacidad, existe una subfamilia finita que recubre K , y por lo tanto F queda cubierto por una subfamilia finita de los G_α . Así, F es compacto. \square

Corolario 5.11. *La intersección arbitraria de subconjuntos compactos de un espacio métrico es un conjunto compacto (en particular, \emptyset es compacto).*

Demostración. Si $\{K_i\}_{i \in I}$ son compactos, cada uno es cerrado en E . La intersección $K = \bigcap_{i \in I} K_i$ es cerrada y satisface $K \subseteq K_{i_0}$ para cualquier índice fijo i_0 . Como K es un subconjunto cerrado de K_{i_0} , por la proposición anterior K es compacto. El caso $K = \emptyset$ también es compacto por definición. \square

Proposición 5.12 (Propiedades de conjuntos totalmente acotados). *Sea (E, d) un espacio métrico.*

- (I) *Si $A \subseteq B \subseteq E$ y B es T.T.A., entonces A es T.T.A.*
- (II) *Si A es T.T.A., entonces \overline{A} es T.T.A.*
- (III) *Si A y B son T.T.A., entonces $A \cup B$ es T.T.A. (en general, la unión finita de conjuntos T.T.A. es T.T.A.).*
- (IV) *Si A es T.T.A., entonces A es acotado.*

Demostración. (i) y (iii) se obtienen directamente de la definición observando que un recubrimiento finito de B o de A y B provee uno de A o de $A \cup B$.

(ii) Dado $\varepsilon > 0$, se cubre A con finitas bolas $B(x_k, \varepsilon/2)$; se comprueba que la clausura de cada una de ellas queda incluida en $B(x_k, \varepsilon)$, y se deduce que \overline{A} queda cubierta por la unión finita $\bigcup_k B(x_k, \varepsilon)$.

(iv) Tomando $\varepsilon = 1$, se ve que A queda contenido en la unión finita de bolas de radio 1, por lo que todo punto de A está a distancia acotada de cualquiera de sus centros; esto da una cota global para A . \square

Proposición 5.13 (Imagen de T.T.A. por función uniformemente continua). *Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos, $A \subseteq E$ totalmente acotado y $f : E \rightarrow E'$ uniformemente continua. Entonces $f(A)$ es totalmente acotado en (E', d') .*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por uniformidad de f , existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall x, y \in E.$$

Como A es T.T.A., existen x_1, \dots, x_n con

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \delta).$$

Entonces

$$f(A) \subseteq \bigcup_{k=1}^n f(B(x_k, \delta)) \subseteq \bigcup_{k=1}^n B_{d'}(f(x_k), \varepsilon).$$

Hemos cubierto $f(A)$ con finitas bolas de radio ε ; como ε era arbitrario, $f(A)$ es T.T.A. \square

5.5. Funciones continuas sobre compactos

Teorema 5.14 (Imagen continua de un compacto). *Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y sea $f : E \rightarrow E'$ continua. Si $K \subseteq E$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto en E' .*

Demostración. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recubrimiento abierto de $f(K)$ en E' . Para cada α definimos $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$, que es abierto en E por continuidad de f . Además,

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha,$$

pues si $x \in K$ entonces $f(x) \in f(K) \subseteq \bigcup V_\alpha$.

Como K es compacto, existe un subcubrimiento finito $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$. Aplicando f ,

$$f(K) \subseteq \bigcup_{j=1}^n f(U_{\alpha_j}) \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_{\alpha_j},$$

que es un subcubrimiento finito de $f(K)$. Así, $f(K)$ es compacto. \square

Corolario 5.15 (Teorema de Weierstrass). *Sea $K \subseteq E$ compacto y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces:*

- (I) *f es acotada en K : existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in K$;*
- (II) *f alcanza su máximo y su mínimo en K , es decir, existen $x_{\min}, x_{\max} \in K$ con*

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \forall x \in K.$$

Demostración. Por el teorema anterior, $f(K)$ es compacto en \mathbb{R} . Todo compacto no vacío de \mathbb{R} es cerrado y acotado, de modo que admite supremo e ínfimo que pertenecen al conjunto; eso da el máximo y el mínimo. La acotación se deduce de la existencia de supremo y de ínfimo. \square

Teorema 5.16 (Continuidad uniforme en compactos). Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y sea $f : E \rightarrow E'$ continua. Si E es compacto, entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in E$, por continuidad de f en x existe $\delta_x > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta_x \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall y \in E.$$

La familia de bolas $B(x, \delta_x)$ (o $B(x, \delta_x/2)$) es un cubrimiento abierto de E . Por compacidad, existe un subcubrimiento finito

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \delta_{x_k}).$$

Definimos

$$\delta = \min_{1 \leq k \leq n} \delta_{x_k} > 0.$$

Si $x, y \in E$ satisfacen $d(x, y) < \delta$, entonces ambos pertenecen a alguna de las bolas del subcubrimiento (por ejemplo, a la de centro x_k que contiene a x), y como en esa bola vale la condición de continuidad con $\delta_{x_k} \geq \delta$, obtenemos $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

y f es uniformemente continua. \square

Corolario 5.17 (Funciones continuas sobre compacto son cerradas). Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos, E compacto y $f : E \rightarrow E'$ continua. Entonces f es una aplicación cerrada: si $G \subseteq E$ es cerrado, entonces $f(G)$ es cerrado en E' .

Demostración. Si G es cerrado en E , entonces G es compacto (cerrado en un compacto). Por el teorema de la imagen de un compacto, $f(G)$ es compacto en E' . En un espacio métrico, todo compacto es cerrado, así que $f(G)$ es cerrado. \square

Corolario 5.18 (Homeomorfismos desde compactos). Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos, con E compacto, y sea $f : E \rightarrow E'$ continua y biyectiva. Entonces f es un homeomorfismo, es decir, $f^{-1} : E' \rightarrow E$ es continua.

Demostración. Del corolario anterior, f es una aplicación cerrada. Sea $F' \subseteq E'$ cerrado. Como f es biyectiva, se tiene

$$f^{-1}(F') \subseteq E.$$

Además

$$E' \setminus F' \text{ es abierto} \Rightarrow f^{-1}(E' \setminus F') = E \setminus f^{-1}(F') \text{ es abierto en } E,$$

por continuidad de f . Por lo tanto $f^{-1}(F')$ es cerrado en E . La preimagen por f^{-1} de todo cerrado de E' es cerrada, lo que equivale a la continuidad de f^{-1} . Luego f es un homeomorfismo. \square

6. Unidad 6: Espacios normados

7. Unidad 7: Sucesiones de funciones

7.1. Convergencia puntual y uniforme

Definición 7.1 (Convergencia puntual). Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : E \rightarrow E'$. Decimos que (f_n) converge puntualmente a una función $f : E \rightarrow E'$ si

$$\forall x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} d'(f_n(x), f(x)) = 0.$$

Equivalentemente,

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

En este caso escribimos $f_n(x) \rightarrow f(x)$ puntualmente, o simplemente $f_n \rightarrow f$ puntualmente en E .

Definición 7.2 (Convergencia uniforme). Con la notación anterior, diremos que (f_n) converge uniformemente a f en E si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in E : d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

En este caso escribimos $f_n \rightrightarrows f$ en E .

7.2. Límite uniforme de funciones continuas

Teorema 7.3. Sea (E, d) , (E', d') espacios métricos y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas $f_n : E \rightarrow E'$, que converge uniformemente a $f : E \rightarrow E'$. Entonces f es continua.

Demostración. Sea $x_0 \in E$ y sea $\varepsilon > 0$ dado. Como $f_n \rightrightarrows f$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d'(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in E, \forall n \geq N.$$

En particular,

$$d'(f_N(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como f_N es continua en x_0 , existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomemos ahora un $x \in E$ con $d(x, x_0) < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(x_0)) &\leq d'(f(x), f_N(x)) + d'(f_N(x), f_N(x_0)) + d'(f_N(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, esto prueba que f es continua en x_0 . Dado que x_0 era un punto cualquiera de E , f es continua en todo E . \square

7.3. Pasaje al límite bajo el signo integral

Proposición 7.4. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con $a < b$ y sean $f_n, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f_n \rightrightarrows f$ en $[a, b]$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $f_n \rightrightarrows f$ en $[a, b]$, por definición de convergencia uniforme existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N \quad \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Fijemos $n \geq N$. Entonces, para todo $t \in [a, b]$,

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Integrando en el intervalo $[a, b]$ y usando la desigualdad triangular para integrales, obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| &= \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hemos probado que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| < \varepsilon,$$

lo cual es precisamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

□

7.4. Convergencia de derivadas

Proposición 7.5. Sean $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 en $[a, b]$, tales que

- $f_n \rightarrow f$ puntualmente en $[a, b]$;

- $f'_n \rightrightarrows g$ en $[a, b]$.

Entonces f es derivable en $[a, b]$ y

$$f' = g.$$

Demostración. Sea $x_0 \in [a, b]$ fijo. Por el Teorema Fundamental del Cálculo aplicado a cada f_n , para todo $x \in [a, b]$ se cumple

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados:

- Por la convergencia puntual $f_n(x) \rightarrow f(x)$ y $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$, el lado izquierdo converge a $f(x) - f(x_0)$.

- Por la proposición anterior (pasaje al límite bajo el integral) y la convergencia uniforme de f'_n a g , el lado derecho converge a $\int_{x_0}^x g(t) dt$.

Por lo tanto,

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x g(t) dt \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Definamos

$$F(x) := f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

La función F es de clase C^1 en $[a, b]$ y satisface $F' = g$. Además, la igualdad anterior muestra que $f(x) = F(x)$ para todo x . Luego f es derivable y $f' = g$. \square

7.5. Sucesiones uniformemente de Cauchy

Definición 7.6 (Sucesión uniformemente de Cauchy). Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y (E', d') otro espacio métrico. Una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones $f_n : A \rightarrow E'$ se dice *uniformemente de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 \forall x \in A : d'(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon.$$

Teorema 7.7. Sea $A \subseteq E$ y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente de Cauchy. Entonces existe una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_n \rightrightarrows f$ en A .

Demostración. Fijemos $x \in A$. Consideremos la sucesión numérica

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}.$$

De la definición de sucesión uniformemente de Cauchy se deduce en particular que, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } m, n \geq n_0.$$

Es decir, para cada $x \in A$, la sucesión $(f_n(x))$ es de Cauchy en \mathbb{R} . Como \mathbb{R} es completo, existe el límite

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}.$$

Así definimos una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Resta ver que $f_n \rightrightarrows f$ en A . Sea $\varepsilon > 0$. Por ser (f_n) uniformemente de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0, \quad \forall x \in A.$$

Fijemos $n \geq n_0$ y $x \in A$ arbitrarios. Tomando el límite cuando $m \rightarrow \infty$ en la desigualdad anterior, obtenemos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ya que $f_m(x) \rightarrow f(x)$ para cada x .

Como la cota ε es independiente de x y vale para todo $n \geq n_0$, concluimos que

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Esto es precisamente $f_n \rightrightarrows f$ en A . □

8. Unidad 8: Medida de Lebesgue

8.1. Conjuntos nulos

Definición 8.1 (Conjunto nulo). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que A es un *conjunto nulo* si para todo $\varepsilon > 0$ existen intervalos abiertos contables $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{long}(U_n) < \varepsilon.$$

8.2. σ -álgebras y conjuntos medibles de Lebesgue

Definición 8.2 (σ -álgebra). Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X . Decimos que \mathcal{A} es una σ -álgebra si se verifica:

- (I) $X \in \mathcal{A}$;
- (II) si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- (III) si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, entonces

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{y} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Definición 8.3 (Conjuntos medibles de Lebesgue). Sea \mathcal{M} la σ -álgebra generada por los intervalos abiertos y los conjuntos nulos de \mathbb{R} . A \mathcal{M} la llamamos σ -álgebra de conjuntos medibles de Lebesgue en \mathbb{R} .

Si I es un intervalo de \mathbb{R} , denotamos por $\mathcal{M}(I)$ a la σ -álgebra de subconjuntos medibles de Lebesgue de I .

8.3. Medida de Lebesgue

Teorema 8.4 (Existencia y unicidad de la medida de Lebesgue). *Existe una única función*

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$$

tal que:

(I) *si $A = (a, b)$ es un intervalo abierto acotado, entonces*

$$\mu(A) = b - a;$$

(II) *si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n);$$

(III) *si, además, los A_n son dos a dos disjuntos, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n);$$

(IV) *para todo $A \in \mathcal{M}$ se cumple la propiedad de regularidad exterior:*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{ abierto}\}.$$

La función μ se llama medida de Lebesgue.

8.4. Propiedades básicas de la medida de Lebesgue

En esta subsección trabajamos, salvo aclaración en contrario, en el intervalo $I = [0, 1]$ con la medida de Lebesgue, y escribimos $\mathcal{M}(I)$ para la σ -álgebra de subconjuntos medibles de I .

Teorema 8.5 (Propiedades básicas). *Sea $\mu : \mathcal{M}(I) \rightarrow [0, +\infty]$ la medida de Lebesgue. Entonces:*

(I) *Monotonía: si $A, B \in \mathcal{M}(I)$ y $A \subseteq B$, entonces*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

(II) Conjuntos nulos: si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto nulo, entonces $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$. Recíprocamente, si $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$, entonces A es un conjunto nulo.

(III) Invariancia por traslaciones: dados $A \in \mathcal{M}$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene $A + c := \{x + c : x \in A\} \in \mathcal{M}$ y

$$\mu(A + c) = \mu(A).$$

Idea de la demostración. La monotonía se obtiene escribiendo B como unión disjunta de A y $B \setminus A$ y usando la σ -aditividad. Las afirmaciones sobre conjuntos nulos se deducen de la relación entre definición de conjunto nulo y la regularidad exterior. La invariancia por traslaciones se prueba primero en intervalos (donde es obvia) y luego se extiende a \mathcal{M} usando que ésta es la σ -álgebra generada por intervalos y conjuntos nulos, y que la traslación preserva nulos. \square

Proposición 8.6. Sea $I = [0, 1]$ y sea μ la medida de Lebesgue en $\mathcal{M}(I)$. Si $A, B \in \mathcal{M}(I)$, entonces:

(I) $A \setminus B \in \mathcal{M}(I)$;

(II)

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B).$$

En particular,

$$\mu(A^c) = 1 - \mu(A), \quad A^c = I \setminus A.$$

Demostración. (i) Como $\mathcal{M}(I)$ es una σ -álgebra, es cerrada por complementos e intersecciones. Observamos que

$$A \setminus B = A \cap B^c,$$

por lo que $A \setminus B \in \mathcal{M}(I)$.

(ii) Notamos que

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$$

y que $(A \setminus B)$ y B son disjuntos. Por σ -aditividad,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B).$$

La igualdad $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$ se obtiene aplicando esta fórmula con A y A^c observando que $I = A \cup A^c$ y $\mu(I) = 1$. \square

8.5. Regularidad de la medida de Lebesgue

Proposición 8.7 (Regularidad exterior). *Sea $A \in \mathcal{M}(I)$. Entonces*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{ abierto en } I\}.$$

Esbozo. Esta propiedad forma parte de la construcción misma de la medida de Lebesgue (en el teorema de existencia). La desigualdad

$$\mu(A) \leq \inf\{\mu(U)\}$$

se sigue de la monotonía: si $A \subseteq U$, entonces $\mu(A) \leq \mu(U)$. En la construcción de la medida se verifica además que para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto $U \supseteq A$ tal que $\mu(U) < \mu(A) + \varepsilon$, lo que da la igualdad. \square

Proposición 8.8 (Regularidad interior). *Sea $A \in \mathcal{M}(I)$. Entonces*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A, F \text{ cerrado en } I\}.$$

Demostración. Por monotonía, si $F \subseteq A$ entonces $\mu(F) \leq \mu(A)$, de donde

$$\sup\{\mu(F) : F \subseteq A, F \text{ cerrado}\} \leq \mu(A).$$

Para la otra desigualdad, sea $\varepsilon > 0$. Por regularidad exterior aplicada a A^c , existe un abierto $U \supseteq A^c$ tal que

$$\mu(U) < \mu(A^c) + \varepsilon.$$

Tomando complementos en I , el conjunto

$$F := U^c = I \setminus U$$

es cerrado y satisface $F \subseteq A$.

Además, por la proposición anterior,

$$\mu(F) = \mu(I) - \mu(U).$$

Como $\mu(I) = 1$ y $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$, obtenemos

$$\mu(F) = 1 - \mu(U) > 1 - (\mu(A^c) + \varepsilon) = \mu(A) - \varepsilon.$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe un cerrado $F \subseteq A$ tal que $\mu(F) > \mu(A) - \varepsilon$, lo que implica

$$\mu(A) \leq \sup\{\mu(F) : F \subseteq A, F \text{ cerrado}\}.$$

\square

Proposición 8.9 (Regularidad fuerte). *Sea $A \in \mathcal{M}(I)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existen un cerrado C y un abierto U tales que*

$$C \subseteq A \subseteq U \quad \text{y} \quad \mu(A) - \varepsilon < \mu(C) \leq \mu(A) \leq \mu(U) < \mu(A) + \varepsilon.$$

Además, U puede elegirse como una unión numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por regularidad interior, existe un cerrado $C \subseteq A$ tal que

$$\mu(C) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por regularidad exterior, existe un abierto $U \supseteq A$ tal que

$$\mu(U) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aquí se obtiene

$$\mu(A) - \varepsilon < \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(C) \leq \mu(A) \leq \mu(U) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} < \mu(A) + \varepsilon.$$

El hecho de que cualquier abierto $U \subseteq I$ puede escribirse como unión numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos es un resultado clásico de análisis real (se prueba usando que U es una unión numerable de componentes conexas, que en \mathbb{R} son intervalos). Aplicándolo a este U , se obtiene la última afirmación. \square

8.6. Continuidad de la medida

Teorema 8.10 (Continuidad de la medida). *Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(I)$. Entonces:*

(I) (Continuidad desde abajo) Si

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$$

y $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, entonces

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(II) (Continuidad desde arriba) Si

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_n \supseteq \cdots$$

y $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$, con $\mu(B_1) < \infty$, entonces

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

Demostración. (i) Definimos

$$C_1 = A_1, \quad C_n = A_n \setminus A_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Entonces los conjuntos C_n son dos a dos disjuntos y

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Por σ -aditividad,

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n).$$

Además, para cada n ,

$$\mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n C_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(C_k).$$

La sucesión de sumas parciales converge a la suma infinita, luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) = \mu(A).$$

(ii) Definimos

$$A_n = B_1 \setminus B_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Entonces $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ y

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = B_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = B_1 \setminus B.$$

Aplicando (i) a la familia (A_n) ,

$$\mu(B_1 \setminus B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)),$$

donde usamos que $A_n = B_1 \setminus B_n$ y $\mu(B_1) < \infty$. Entonces

$$\mu(B_1) - \mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)).$$

Restando $\mu(B_1)$ en ambos lados se obtiene

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

□