

Demostraciones Análisis Avanzado

Lucas Dowhyj

Índice

1. Unidad 1: Infimo, supremo y sucesiones	1
1.1. Axioma de completitud	1
1.2. Infimo	2
1.3. Supremo	2
1.4. Principio de Arquímedes	3
1.5. Sucesiones	4
2. Unidad 2: Cardinalidad	9
2.1. Conjuntos coordinables y cardinal	9
2.2. Orden entre cardinales	12
2.3. Conjunto de partes y teorema de Cantor	14
2.4. Suma y resta de conjuntos numerables	15
3. Unidad 3: Espacios métricos	20
3.1. Conjuntos abiertos	20
3.2. Conjuntos cerrados	24
3.3. Puntos de acumulación y frontera	30
3.4. Métricas equivalentes	34
3.5. Sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos	37
4. Unidad 4: Funciones continuas	39
4.1. Definición y caracterizaciones de continuidad	39
4.2. Continuidad uniforme	44
4.2.1. Isometrías	46
4.2.2. Homeomorfismos	47
4.2.3. Conjuntos densos	47

1. Unidad 1: Infimo, supremo y sucesiones

1.1. Axioma de completitud

Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, existe $\sup A$.
Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente, existe $\inf A$.

1.2. Infimo

Sea $A \subset \mathbb{R}$, no vacío y acotado inferiormente.

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \leq a & \text{para todo } a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ tal que } i \leq a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $i = \inf A$.

(i) Como i es el ínfimo de A , por definición i es cota inferior de A . Es decir, para todo $a \in A$ se cumple $i \leq a$.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos, buscando una contradicción, que no existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$. Entonces, para todo $a \in A$ se cumple $a \geq i + \varepsilon$, de modo que $i + \varepsilon$ es una cota inferior de A . Como además $\varepsilon > 0$, tenemos $i + \varepsilon > i$, lo que contradice que i es la mayor de las cotas inferiores de A . Por lo tanto, debe existir $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$.

Recíprocamente, supongamos que se verifican: (i) $i \leq a$ para todo $a \in A$; (ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$.

De (i) se sigue que i es cota inferior de A . Sea i' otra cota inferior de A . Queremos ver que $i' \leq i$. Supongamos, buscando una contradicción, que $i' > i$. Sea $\varepsilon = i' - i > 0$. Por (ii) existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$. Como $i + \varepsilon = i'$, obtenemos $a < i'$, lo cual contradice que i' es cota inferior de A . Por lo tanto $i' \leq i$ y, en consecuencia, $i = \inf A$. \square

1.3. Supremo

Sea $A \subset \mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente.

$$s = \sup A \iff \begin{cases} s \geq a & \text{para todo } a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ tal que } s - \varepsilon < a \leq s. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $s = \sup A$.

(i) Como s es el supremo de A , por definición s es cota superior de A . Es decir, para todo $a \in A$ se cumple $a \leq s$.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos, buscando una contradicción, que no existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$. Entonces, para todo $a \in A$ se cumple $a \leq s - \varepsilon$, y por lo tanto $s - \varepsilon$ es una cota superior de A . Como además $\varepsilon > 0$, tenemos $s - \varepsilon < s$, lo que contradice que s es la menor de las cotas superiores de A . Por lo tanto, debe existir $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

Supongamos que se cumplen:

(i) $a \leq s$ para todo $a \in A$

(ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

Entonces (i) dice que s es cota superior de A . Sea ahora s' otra cota superior de A . Queremos ver que $s \leq s'$. Supongamos, buscando una contradicción, que $s' < s$. Sea $\varepsilon = s - s' > 0$. Por (ii) existe $a \in A$ tal que

$s - \varepsilon < a \leq s$. Como $s - \varepsilon = s'$, obtenemos $s' < a$, lo cual contradice que s' es cota superior de A . Por lo tanto $s \leq s'$ y, en consecuencia, $s = \sup A$. \square

1.4. Principio de Arquímedes

Versión 1

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \leq n.$$

Demostración. Supongamos por el absurdo que el conjunto de los naturales \mathbb{N} está acotado superiormente. Como \mathbb{N} es no vacío, por el axioma de completitud existe $s = \sup \mathbb{N}$.

Tomamos $\varepsilon = 1$. Por la propiedad caracterizadora del supremo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$s - 1 < n \leq s.$$

De $s - 1 < n$ se sigue que $n + 1 > s$. Como $n \in \mathbb{N}$, también $n + 1 \in \mathbb{N}$, y por lo tanto hemos encontrado un número natural estrictamente mayor que s , lo que contradice que s sea cota superior de \mathbb{N} .

Esta contradicción muestra que \mathbb{N} no está acotado superiormente, es decir, para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$. En particular, dado $x \in \mathbb{R}$, tomando $M = x$ obtenemos un $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq x$, que es justamente lo que afirma la versión 1. \square

Versión 2

$$\forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 < \frac{1}{n} < y.$$

Demostración. Sea $y > 0$. Por la Versión 1 del principio de Arquímedes aplicada a $x = 1/y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{y}.$$

Como $n > 0$, al invertir la desigualdad obtenemos

$$0 < \frac{1}{n} < y.$$

Por lo tanto, para todo $y > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < y$, como queríamos demostrar. \square

1.5. Sucesiones

Proposición 1.1. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión real y sea $l \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l.$$

Entonces la sucesión (a_n) está acotada.

Demostración. Por hipótesis, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. Esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N : |a_n - l| < \varepsilon.$$

Tomamos ahora $\varepsilon = 1$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple

$$|a_n - l| < 1.$$

Por la desigualdad triangular,

$$|a_n| = |(a_n - l) + l| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$$

para todo $n \geq N$. Es decir, para todos los índices grandes,

$$|a_n| \leq |l| + 1.$$

Consideremos ahora los primeros términos de la sucesión:

$$a_1, a_2, \dots, a_{N-1}.$$

Se trata de un conjunto finito de números reales, por lo que el conjunto

$$\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$$

tiene un máximo. Sea

$$M_0 = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$$

(en el caso $N = 1$ podemos tomar, por ejemplo, $M_0 = 0$).

Definimos ahora

$$M = \max\{M_0, |l| + 1\}.$$

Entonces:

- Si $n < N$, se cumple $|a_n| \leq M_0 \leq M$.
- Si $n \geq N$, se cumple $|a_n| \leq |l| + 1 \leq M$.

En ambos casos obtenemos

$$|a_n| \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, la sucesión (a_n) está acotada. □

Proposición 1.2. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión real monótona creciente y acotada superiormente. Sea

$$s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s.$$

Demostración. Como (a_n) está acotada superiormente, el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

tiene supremo $s \in \mathbb{R}$.

Queremos probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - s| < \varepsilon.$$

Sea entonces $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por la propiedad caracterizadora del supremo aplicada al conjunto A , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$s - \varepsilon < a_N \leq s.$$

Como la sucesión (a_n) es monótona creciente, se cumple

$$a_N \leq a_n \leq s \quad \text{para todo } n \geq N.$$

De $a_n \leq s$ obtenemos $a_n - s \leq 0$, luego

$$|a_n - s| = s - a_n.$$

Además, de $a_N \leq a_n$ se sigue

$$s - a_n \leq s - a_N.$$

Juntando estas desigualdades,

$$|a_n - s| = s - a_n \leq s - a_N < s - (s - \varepsilon) = \varepsilon$$

para todo $n \geq N$.

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ encontramos $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $|a_n - s| < \varepsilon$, y esto significa exactamente que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$. \square

Proposición 1.3. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión real monótona decreciente y acotada inferiormente. Sea

$$i = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = i.$$

Demostración. Como (a_n) está acotada inferiormente, el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

tiene ínfimo $i \in \mathbb{R}$.

Queremos probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = i$, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - i| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por la propiedad caracterizadora del ínfimo aplicada al conjunto A , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$i \leq a_N < i + \varepsilon.$$

Como la sucesión (a_n) es monótona decreciente, se cumple

$$i \leq a_n \leq a_N \quad \text{para todo } n \geq N.$$

De $a_n \geq i$ se obtiene $a_n - i \geq 0$, luego

$$|a_n - i| = a_n - i.$$

Además, de $a_n \leq a_N$ se sigue

$$a_n - i \leq a_N - i.$$

Por lo tanto,

$$|a_n - i| = a_n - i \leq a_N - i < (i + \varepsilon) - i = \varepsilon$$

para todo $n \geq N$.

Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ encontramos $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $|a_n - i| < \varepsilon$, lo cual prueba que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = i$. \square

Proposición 1.4 (Equivalencia del supremo). *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente, y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$s = \sup A$$

si y sólo si se cumplen:

- (I) *s es cota superior de A , es decir, $a \leq s$ para todo $a \in A$;*
- (II) *existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n \in A$ para todo n , tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s.$$

Demostración. Supongamos primero que $s = \sup A$. Entonces, por definición de supremo, s es cota superior de A , con lo cual se cumple (i).

Nos queda probar (ii). Usamos la caracterización del supremo que ya vimos: para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que

$$s - \varepsilon < a \leq s.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicamos esta propiedad con $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Obtenemos así un elemento $a_n \in A$ tal que

$$s - \frac{1}{n} < a_n \leq s.$$

Esto define una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A .

Veamos ahora que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Entonces, si $n \geq N$, se tiene $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$, y por la construcción de (a_n) se cumple

$$s - \frac{1}{n} < a_n \leq s.$$

De aquí, $s - \varepsilon = s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$, luego

$$0 \leq s - a_n < \varepsilon,$$

lo que implica

$$|a_n - s| = s - a_n < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - s| < \varepsilon,$$

es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$. Esto prueba (ii).

Recíprocamente, supongamos que se cumplen (i) y (ii). Entonces s es cota superior de A . Para ver que $s = \sup A$, basta probar que s es la menor de las cotas superiores de A . Sea M otra cota superior de A . Queremos ver que $s \leq M$.

Supongamos, buscando una contradicción, que $s > M$. Definimos

$$\varepsilon = \frac{s - M}{2} > 0.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, se cumple

$$|a_n - s| < \varepsilon.$$

En particular, para $n \geq N$ tenemos

$$a_n > s - \varepsilon = s - \frac{s - M}{2} = \frac{2s - s + M}{2} = \frac{s + M}{2}.$$

Pero, como $s > M$, se tiene

$$\frac{s + M}{2} > M,$$

de modo que

$$a_n > \frac{s + M}{2} > M$$

para todo $n \geq N$. Sin embargo, $a_n \in A$ y M es cota superior de A , luego debería cumplirse $a_n \leq M$ para todo n , lo que contradice la desigualdad anterior.

Esta contradicción muestra que no puede ocurrir $s > M$, por lo que necesariamente $s \leq M$. Como M era una cota superior cualquiera de A , concluimos que s es la menor de las cotas superiores de A , es decir, $s = \sup A$.

Queda así demostrada la equivalencia. \square

Proposición 1.5. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión real y sea $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ una sub-sucesión de (a_n) , donde $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l,$$

entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = l.$$

Demostración. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. Por definición de límite, esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N : |a_n - l| < \varepsilon.$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$ fijo. Por la hipótesis anterior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon.$$

Como $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, podemos elegir $J \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_J \geq N.$$

Entonces, para todo $j \geq J$ se tiene

$$n_j \geq n_J \geq N.$$

Aplicando la propiedad de arriba a $n = n_j$, obtenemos

$$|a_{n_j} - l| < \varepsilon \quad \text{para todo } j \geq J.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists J \in \mathbb{N} \forall j \geq J : |a_{n_j} - l| < \varepsilon,$$

lo cual significa exactamente que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = l.$$

\square

2. Unidad 2: Cardinalidad

2.1. Conjuntos coordinables y cardinal

Definición 2.1. Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que son *coordinables* (o *equipotentes*, o que tienen el mismo cardinal) si existe una función biyectiva $f : X \rightarrow Y$. En este caso escribimos

$$X \sim Y.$$

Proposición 2.2. La relación \sim es una relación de equivalencia en la clase de todos los conjuntos.

Demostración. Debemos probar que la relación \sim es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexividad. Sea X un conjunto cualquiera. Consideramos la función identidad

$$\text{id}_X : X \rightarrow X, \quad \text{id}_X(x) = x.$$

La función identidad es inyectiva (si $\text{id}_X(x) = \text{id}_X(y)$, entonces $x = y$) y sobreyectiva (para todo $x \in X$ existe $x \in X$ tal que $\text{id}_X(x) = x$). Luego es biyectiva, y por la definición de \sim se tiene $X \sim X$. Por lo tanto, \sim es reflexiva.

Simetría. Sean X e Y conjuntos tales que $X \sim Y$. Por definición, existe una biyección $f : X \rightarrow Y$. Toda función biyectiva tiene inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$, y dicha inversa es también biyectiva. Por lo tanto, existe una biyección de Y en X , es decir, $Y \sim X$. Luego, \sim es simétrica.

Transitividad. Sean X, Y, Z conjuntos tales que $X \sim Y$ y $Y \sim Z$. Entonces existen biyecciones

$$f : X \rightarrow Y, \quad g : Y \rightarrow Z.$$

Consideramos la composición

$$g \circ f : X \rightarrow Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Como composición de funciones biyectivas, $g \circ f$ es también biyectiva: la composición de funciones inyectivas es inyectiva y la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva. En consecuencia, existe una biyección de X en Z , es decir, $X \sim Z$. Esto muestra que \sim es transitiva.

Como \sim es reflexiva, simétrica y transitiva, concluimos que \sim es una relación de equivalencia. \square

Definición 2.3. Definimos el *cardinal* de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X :

$$\#X = \text{Card}(X) := \{Y \mid X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales les damos nombres especiales:

- $\#\mathbb{N} = \aleph_0$ (cardinal numerable),
- $\#\mathbb{R} = \mathfrak{c}$ (el *continuo*),
- $\#\{1, 2, \dots, n\} = n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.4. Para $n \in \mathbb{N}$, llamamos

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

al *intervalo inicial* del conjunto \mathbb{N} de los números naturales.

Definición 2.5. Un conjunto A es *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \sim I_n.$$

Definición 2.6. Un conjunto A es *infinito* si no es finito.

Definición 2.7. Un conjunto A es *numerable* si $A \sim \mathbb{N}$. Equivalente y simbólicamente, si

$$\#A = \aleph_0.$$

Definición 2.8. Decimos que un conjunto A es *a lo sumo numerable* (o *contable*) si es finito o numerable. Es decir, A es a lo sumo numerable si cumple

$$A \sim I_n \quad \text{para algún } n \in \mathbb{N} \quad \text{o bien} \quad A \sim \mathbb{N}.$$

Proposición 2.9. Sea A un conjunto numerable y sea $B \subseteq A$. Entonces B es a lo sumo numerable.

Demostración. Si B es finito, por definición ya es a lo sumo numerable y no hay nada que probar. Supongamos entonces que B es infinito. Veremos que en ese caso B es numerable.

Como A es numerable, por definición existe una biyección

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A.$$

Consideremos la sucesión $(f(1), f(2), f(3), \dots)$ de elementos de A y vamos a “extraer” de ella una enumeración de los elementos de B .

Definimos, por inducción, una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de números naturales de la siguiente manera.

En primer lugar, como B es infinito, en particular es no vacío y existe algún $b_1 \in B$. Como f es sobreyectiva, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n_1) = b_1$. Además, podemos elegir n_1 como el mínimo de los naturales n que satisfacen $f(n) \in B$:

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : f(n) \in B\}.$$

Este mínimo existe porque el conjunto entre llaves es no vacío y está contenido en \mathbb{N} .

Supuesto definido n_k para algún $k \in \mathbb{N}$, definimos n_{k+1} así. Como B es infinito, el conjunto

$$B_k := B \setminus \{f(n_1), f(n_2), \dots, f(n_k)\}$$

no es vacío (si fuera vacío, B tendría a lo sumo k elementos y sería finito). Entonces existe $b_{k+1} \in B_k$. Nuevamente, como f es sobreyectiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = b_{k+1}$. Además, podemos elegir m de manera que $m > n_k$ (basta tomar algún índice de b_{k+1} mayor que todos n_1, \dots, n_k). Definimos

$$n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} : n > n_k, f(n) \in B_k\}.$$

Este mínimo existe porque el conjunto entre llaves es no vacío y contenido en los naturales mayores que n_k . De la definición se deduce que

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots,$$

es decir, (n_k) es estrictamente creciente.

Definimos ahora una función

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow B, \quad g(k) = f(n_k).$$

Veamos que g es biyectiva.

Inyectividad. Sean $k, \ell \in \mathbb{N}$ tales que $g(k) = g(\ell)$, es decir, $f(n_k) = f(n_\ell)$. Como f es inyectiva, se sigue que $n_k = n_\ell$. Pero la sucesión (n_k) es estrictamente creciente, luego de $n_k = n_\ell$ se deduce $k = \ell$. Por lo tanto, g es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $b \in B$. Como f es sobreyectiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = b$. En el proceso de construcción de la sucesión (n_k) , en algún paso k el elemento b aparece por primera vez entre los valores de f ; es decir, existe un único k tal que n_k es el mínimo índice con $f(n_k) = b$ y $n_k > n_{k-1}$ (para $k = 1$ entendemos que no hay condición anterior). Por la definición de g , se tiene entonces

$$g(k) = f(n_k) = b.$$

De este modo, para todo $b \in B$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(k) = b$, y por lo tanto g es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección $g : \mathbb{N} \rightarrow B$, lo cual muestra que B es numerable. Recordando que al principio separamos el caso en que B es finito, concluimos que, en todos los casos, B es a lo sumo numerable. \square

Teorema 2.10. *Sea A un conjunto infinito. Entonces existe un subconjunto $B \subseteq A$ tal que B es numerable.*

Demostración. Como A es infinito, en particular es no vacío, de modo que podemos elegir un elemento $a_1 \in A$.

Supondremos contruidos elementos distintos $a_1, \dots, a_n \in A$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto

$$F_n = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Si $A \setminus F_n$ fuera vacío, tendríamos $A = F_n$, es decir, A sería finito, lo cual contradice la hipótesis de que A es infinito. Por lo tanto,

$$A \setminus F_n \neq \emptyset,$$

y podemos elegir un elemento

$$a_{n+1} \in A \setminus F_n.$$

En particular, $a_{n+1} \in A$ y $a_{n+1} \notin \{a_1, \dots, a_n\}$, por lo que los elementos a_1, \dots, a_{n+1} siguen siendo todos distintos.

De este modo, por inducción, obtenemos una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A tales que

$$a_n \neq a_m \quad \text{si } n \neq m.$$

Definimos ahora

$$B = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Claramente $B \subseteq A$, por construcción.

Consideremos la función

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow B, \quad f(n) = a_n.$$

Inyectividad. Si $f(n) = f(m)$, entonces $a_n = a_m$, y como la sucesión (a_n) tiene todos sus términos distintos, se sigue que $n = m$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $b \in B$. Por definición de B , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b = a_n$. Entonces $f(n) = a_n = b$, de modo que todo elemento de B es imagen de algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, f es sobreyectiva.

Concluimos que $f : \mathbb{N} \rightarrow B$ es una biyección, es decir, B es numerable. Como además $B \subseteq A$, hemos encontrado un subconjunto numerable de A , tal como queríamos. \square

2.2. Orden entre cardinales

Recordemos que, por definición,

$$\#A = \#B \iff A \sim B$$

es decir, si y sólo si existe una biyección $f : A \rightarrow B$.

Definición 2.11. Sean X e Y conjuntos. Decimos que

$$\#X \leq \#Y$$

si existe una función inyectiva $f : X \rightarrow Y$.

Definición 2.12. Decimos que

$$\#X < \#Y$$

si se cumplen:

- (I) $\#X \leq \#Y$, es decir, existe una inyección $f : X \rightarrow Y$;
- (II) $X \not\sim Y$, es decir, no existe biyección entre X e Y .

Proposición 2.13. Sean X e Y conjuntos. Existe una función inyectiva $f : X \rightarrow Y$ si y sólo si existe una función sobreyectiva $g : Y \rightarrow X$.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que existe una función inyectiva $f : X \rightarrow Y$. Distinguimos dos casos.

Si $X = \emptyset$, entonces f es la única función posible $\emptyset \rightarrow Y$. En este caso, la única función de Y a X es la función vacía $g : Y \rightarrow \emptyset$, que es sobreyectiva sólo si $Y = \emptyset$. En muchas aplicaciones se descarta el caso trivial $X = \emptyset$, así que supongamos ahora que $X \neq \emptyset$.

Como $X \neq \emptyset$, elegimos un elemento fijo $x_0 \in X$. Definimos $g : Y \rightarrow X$ de la siguiente manera:

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{si existe } x \in X \text{ tal que } f(x) = y, \\ x_0 & \text{si no existe tal } x. \end{cases}$$

La inyectividad de f garantiza que, cuando y está en la imagen de f , el elemento x tal que $f(x) = y$ es único, de modo que g está bien definida.

Veamos que g es sobreyectiva. Sea $x \in X$. Como f es función de X en Y , tenemos $f(x) \in Y$, y por definición de g ,

$$g(f(x)) = x.$$

Luego todo $x \in X$ es imagen de algún elemento de Y (por ejemplo, de $f(x)$), y por lo tanto g es sobreyectiva.

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que existe una función sobreyectiva $g : Y \rightarrow X$. Para cada $x \in X$ consideremos el conjunto de sus preimágenes:

$$Y_x = \{ y \in Y : g(y) = x \}.$$

Como g es sobreyectiva, Y_x es no vacío para todo $x \in X$.

Elegimos, para cada $x \in X$, un elemento $y_x \in Y_x$ (es decir, $g(y_x) = x$), y definimos

$$f : X \rightarrow Y, \quad f(x) = y_x.$$

Probemos que f es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces

$$y_{x_1} = y_{x_2}.$$

Aplicando g a ambos lados obtenemos

$$g(y_{x_1}) = g(y_{x_2}),$$

es decir,

$$x_1 = x_2,$$

ya que por definición de y_x se cumple $g(y_x) = x$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Hemos probado en un sentido que de una inyectiva $X \rightarrow Y$ obtenemos una sobreyectiva $Y \rightarrow X$, y en el otro que de una sobreyectiva $Y \rightarrow X$ obtenemos una inyectiva $X \rightarrow Y$. Esto completa la demostración. \square

2.3. Conjunto de partes y teorema de Cantor

Definición 2.14. Dado un conjunto X , llamamos *conjunto de partes* de X al conjunto

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}.$$

Teorema 2.15 (Cantor). *Sea X un conjunto. Entonces*

$$\#X < \#\mathcal{P}(X).$$

Demostración. Recordemos que, por la definición de orden entre cardinales,

$$\#X < \#\mathcal{P}(X) \iff \begin{cases} \text{existe una inyección } f : X \rightarrow \mathcal{P}(X), \\ \text{no existe biyección entre } X \text{ y } \mathcal{P}(X). \end{cases}$$

(1) Existe una inyección $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

Definimos

$$f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad f(x) = \{x\}.$$

Claramente $f(x) \subseteq X$ para todo x , luego $f(x) \in \mathcal{P}(X)$. Si $f(x) = f(y)$, entonces $\{x\} = \{y\}$ y por lo tanto $x = y$. Así, f es inyectiva, y obtenemos

$$\#X \leq \#\mathcal{P}(X).$$

(2) No existe biyección entre X y $\mathcal{P}(X)$.

Basta ver que *no existe ninguna función sobreyectiva $g : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$.*

Procedemos por absurdo. Supongamos que existe una función

$$g : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

sobreyectiva. Consideremos el subconjunto

$$B = \{x \in X : x \notin g(x)\}.$$

Por definición, $B \subseteq X$, de modo que $B \in \mathcal{P}(X)$.

Como g es sobreyectiva, debe existir algún elemento $a \in X$ tal que

$$g(a) = B.$$

Estudiemos ahora si a pertenece o no a B :

- Supongamos que $a \in B$. Por la definición de B , esto significa que $a \notin g(a)$. Pero $g(a) = B$, luego $a \notin B$, lo que contradice $a \in B$.

- Supongamos que $a \notin B$. Entonces, por la definición de B , se tiene $a \in g(a)$. Como $g(a) = B$, esto implica $a \in B$, contradiciendo $a \notin B$.

En ambos casos llegamos a una contradicción. Por lo tanto, nuestra suposición inicial es falsa: no existe función sobreyectiva $g : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

Concluimos que no existe biyección entre X y $\mathcal{P}(X)$. Junto con (1), esto implica

$$\#X < \#\mathcal{P}(X),$$

como queríamos demostrar. \square

2.4. Suma y resta de conjuntos numerables

Proposición 2.16. *Sea X un conjunto infinito. Entonces existe un subconjunto $Z \subset X$, con Z numerable, tal que*

$$X \sim X \setminus Z.$$

Demostración. Como X es infinito, por el teorema anterior existe un subconjunto numerable infinito $C \subset X$. Como C es numerable, existe una biyección

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow C.$$

Escribimos $c_n = \varphi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que

$$C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}.$$

Definimos ahora dos subconjuntos disjuntos de C :

$$Z = \{c_{2n} : n \in \mathbb{N}\}, \quad D = \{c_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces $C = D \cup Z$ y $D \cap Z = \emptyset$. Además, tanto D como Z son numerables (son imágenes de \mathbb{N} por las aplicaciones $n \mapsto c_{2n-1}$ y $n \mapsto c_{2n}$, respectivamente).

Sea

$$Y = X \setminus C.$$

Entonces tenemos una partición

$$X = Y \cup D \cup Z \quad (\text{unión disjunta}).$$

Por otra parte,

$$X \setminus Z = Y \cup D.$$

Definimos una aplicación $f : X \rightarrow X \setminus Z$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in Y \cup D, \\ c_{2n-1}, & \text{si } x = c_{2n} \in Z \text{ para algún } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Veamos que f es biyectiva.

Inyectividad. - Si $x_1, x_2 \in Y \cup D$ y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$ porque f actúa como la identidad en $Y \cup D$.

- Si $x_1 = c_{2n_1}$ e $x_2 = c_{2n_2}$ pertenecen a Z y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$c_{2n_1-1} = f(c_{2n_1}) = f(c_{2n_2}) = c_{2n_2-1},$$

de donde $2n_1 - 1 = 2n_2 - 1$ y luego $n_1 = n_2$, es decir $x_1 = x_2$.

- No puede ocurrir que $x_1 \in Y \cup D$ y $x_2 \in Z$ tengan la misma imagen, porque las imágenes de $Y \cup D$ están en $Y \cup D$ y las de Z están contenidas en D ; pero Y y D son disjuntos.

En todos los casos, de $f(x_1) = f(x_2)$ se deduce $x_1 = x_2$, luego f es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $y \in X \setminus Z = Y \cup D$.

- Si $y \in Y$, entonces $f(y) = y$, así que y es imagen de sí mismo.

- Si $y \in D$, digamos $y = c_{2n-1}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(c_{2n}) = c_{2n-1} = y$, de modo que y es imagen de $c_{2n} \in Z$.

En consecuencia, todo elemento de $X \setminus Z$ es imagen de algún elemento de X , y f es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección $f : X \rightarrow X \setminus Z$ con $Z \subset X$ numerable, por lo que $X \sim X \setminus Z$. \square

Proposición 2.17. *Sea B un conjunto y sea A un conjunto numerable. Suponemos que $B \setminus A$ es infinito. Entonces*

$$B \sim B \setminus A.$$

Demostración. Podemos reemplazar A por $A \cap B$, que sigue siendo numerable y cumple

$$B \setminus (A \cap B) = B \setminus A.$$

Por simplicidad, suponemos desde ahora que $A \subseteq B$.

Como A es numerable, existe una biyección

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow A,$$

es decir, podemos escribir

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Por hipótesis, $B \setminus A$ es infinito. Entonces, por el teorema “conjunto infinito contiene un subconjunto numerable”, existe un subconjunto numerable infinito

$$C \subseteq B \setminus A.$$

Tomamos una biyección

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow C, \quad C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}.$$

Definimos ahora una aplicación $f : B \rightarrow B \setminus A$ por:

$$f(x) = \begin{cases} c_n, & \text{si } x = a_n \in A \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ x, & \text{si } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Observemos primero que f está bien definida: si $x \in A$, entonces $f(x) = c_n \in C \subseteq B \setminus A$; si $x \in B \setminus A$, entonces $f(x) = x \in B \setminus A$. En cualquier caso, $f(x) \in B \setminus A$.

Inyectividad. - Si $x_1, x_2 \in B \setminus A$ y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$ porque f actúa como la identidad en $B \setminus A$.

- Si $x_1 = a_n$ y $x_2 = a_m$ pertenecen a A y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $c_n = c_m$, y como la sucesión (c_n) tiene todos sus términos distintos, se sigue $n = m$ y por lo tanto $x_1 = x_2$.

- No puede ocurrir que $x_1 \in A$ y $x_2 \in B \setminus A$ tengan la misma imagen, porque $f(x_1) \in C \subseteq B \setminus A$, mientras que $f(x_2) = x_2 \in B \setminus A \setminus C$, y C es disjunto de $B \setminus A \setminus C$.

En consecuencia, f es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $y \in B \setminus A$. Distinguimos dos casos:

- Si $y \in B \setminus (A \cup C)$, entonces $f(y) = y$, de modo que y es imagen de sí mismo.

- Si $y \in C$, digamos $y = c_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(a_n) = c_n = y$, de modo que y es imagen de $a_n \in A$.

Por lo tanto, todo elemento de $B \setminus A$ es imagen de algún elemento de B , y f es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección $f : B \rightarrow B \setminus A$, lo cual prueba que $B \sim B \setminus A$. \square

Proposición 2.18. *Sea X un conjunto infinito y sea A un conjunto numerable. Entonces*

$$X \sim X \cup A.$$

Demostración. Si $A \subseteq X$, entonces $X \cup A = X$ y la afirmación es trivial. Supongamos, por lo tanto, que A no está contenido en X . Definimos

$$A_0 = A \setminus X,$$

que es el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a X . Como A es numerable, también A_0 es numerable (subconjunto de un numerable). Además,

$$X \cup A = X \cup A_0$$

y la unión es disjunta, ya que $A_0 \cap X = \emptyset$.

Notemos que X es infinito, luego el conjunto $X \cup A_0$ también es infinito. Consideremos ahora el conjunto

$$B = X \cup A_0.$$

Entonces A_0 es numerable y

$$B \setminus A_0 = X.$$

Como X es infinito, también $B \setminus A_0$ es infinito. Podemos aplicar la proposición anterior con $A = A_0$ y este conjunto B : obtenemos

$$B \sim B \setminus A_0.$$

Pero $B = X \cup A_0$ y $B \setminus A_0 = X$, por lo que

$$X \cup A_0 \sim X.$$

Como $X \cup A = X \cup A_0$, concluimos que

$$X \cup A \sim X.$$

Por simetría de la relación de equipotencia, también escribimos $X \sim X \cup A$, como queríamos. \square

Corolario 2.19. *Un conjunto X es infinito si y sólo si es coordinable con un subconjunto propio suyo, es decir, si y sólo si existe $Y \subsetneq X$ tal que $X \sim Y$.*

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que X es infinito. Por la proposición anterior, existe un subconjunto numerable $Z \subset X$ tal que $X \sim X \setminus Z$. Como $Z \neq \emptyset$ (pues es numerable) y $Z \subset X$, se tiene $X \setminus Z \subsetneq X$. Por lo tanto, X es coordinable con el subconjunto propio $X \setminus Z$.

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que existe un subconjunto propio $Y \subsetneq X$ tal que $X \sim Y$. Procedamos por absurdo: supongamos que X es finito.

Sea $n = \#X$. Entonces $X \sim I_n$. Como Y es subconjunto propio de X , tiene un número m de elementos con $m < n$, de modo que $Y \sim I_m$.

Por transitividad de la relación de equipotencia, tendríamos

$$I_n \sim X \sim Y \sim I_m,$$

de donde se seguiría $I_n \sim I_m$. Pero por el teorema anterior, $I_n \sim I_m$ implica $n = m$, lo cual contradice $m < n$. Esta contradicción muestra que X no puede ser finito, luego X es infinito. \square

Teorema 2.20 (Cantor–Schröder–Bernstein). *Sean X e Y dos conjuntos. Si existe una función inyectiva $f : X \rightarrow Y$ y una función inyectiva $g : Y \rightarrow X$, entonces X e Y son coordinables, es decir, existe una biyección $h : X \rightarrow Y$.*

Equivalentemente, en términos de cardinales:

$$\#X \leq \#Y \text{ y } \#Y \leq \#X \implies \#X = \#Y.$$

Lema 2.21. *El producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.*

Demostración. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$f(m, n) = 2^m 3^n.$$

Por el teorema fundamental de la aritmética, todo número natural tiene una única factorización en primos, de modo que distintos pares (m, n) producen distintos números $2^m 3^n$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Como hemos construido una inyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en \mathbb{N} , se sigue que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es a lo sumo numerable. Además, es infinito, por lo que es numerable. \square

Teorema 2.22. *Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos numerables. Entonces la unión*

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

es a lo sumo numerable. En particular, si A es infinita, entonces A es numerable.

Demostración. Como cada A_n es numerable, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una biyección

$$f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n.$$

Escribimos $a_{n,k} = f_n(k)$, de modo que

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \dots\}.$$

Definimos ahora una aplicación

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A, \quad F(n, k) = a_{n,k}.$$

Para todo $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se tiene $a_{n,k} \in A_n \subseteq A$, luego F está bien definida. Además, por la definición de A , todo elemento de A es de la forma $a_{n,k}$ para algún $n, k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto F es sobreyectiva.

Por el lema anterior, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Entonces existe una biyectiva

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Consideremos la composición

$$h = F \circ g : \mathbb{N} \rightarrow A.$$

Como composición de una biyección con una sobreyección, h sigue siendo sobreyectiva: para todo $a \in A$ existe $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $F(n, k) = a$, y como g es biyectiva, existe $m \in \mathbb{N}$ con $g(m) = (n, k)$; entonces

$$h(m) = (F \circ g)(m) = F(n, k) = a.$$

Así hemos construido una función sobreyectiva $h : \mathbb{N} \rightarrow A$. Por la proposición que relaciona inyecciones y sobreyecciones entre cardinales, esto implica que A es a lo sumo numerable.

Si además A es infinito, por definición de “a lo sumo numerable” resulta que A es numerable. \square

3. Unidad 3: Espacios métricos

3.1. Conjuntos abiertos

Definición 3.1. Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $U \subseteq E$ se dice *abierto* si

$$\forall x \in U \exists r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subseteq U,$$

donde

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$$

es la bola abierta de centro x y radio r .

Proposición 3.2. Sea (E, d) un espacio métrico, $x_0 \in E$ y $r > 0$. Entonces la bola abierta $B(x_0, r)$ es un conjunto abierto.

Demostración. Debemos ver que para todo punto $x \in B(x_0, r)$ existe un radio $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, r).$$

Sea $x \in B(x_0, r)$. Por definición de bola abierta,

$$d(x, x_0) < r.$$

Definimos

$$\varepsilon = r - d(x, x_0).$$

Entonces $\varepsilon > 0$ porque $d(x, x_0) < r$.

Tomemos ahora un punto cualquiera $y \in B(x, \varepsilon)$; es decir,

$$d(x, y) < \varepsilon.$$

Aplicando la desigualdad triangular, obtenemos

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0).$$

Sustituyendo las cotas anteriores,

$$d(y, x_0) < \varepsilon + d(x, x_0) = (r - d(x, x_0)) + d(x, x_0) = r.$$

Por lo tanto, $d(y, x_0) < r$, lo que significa que $y \in B(x_0, r)$.

Como y fue elegido arbitrariamente en $B(x, \varepsilon)$, hemos probado

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, r).$$

Y esto vale para todo $x \in B(x_0, r)$, con el ε definido como arriba. Por definición de conjunto abierto, $B(x_0, r)$ es abierto. \square

Definición 3.3. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq E$. El *interior* de A es el conjunto

$$A^\circ = \{x \in A : \exists r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subseteq A\}.$$

Equivalente: A° es el conjunto de los puntos interiores de A .

Proposición 3.4. Sea (E, d) un espacio métrico y $A, A_1, A_2 \subseteq E$. Se tienen las siguientes propiedades:

(I) $A^\circ \subseteq A$.

(II) Si $A_1 \subseteq A_2$, entonces $A_1^\circ \subseteq A_2^\circ$.

(III) A° es un conjunto abierto.

(IV) Si G es abierto y $G \subseteq A$, entonces $G \subseteq A^\circ$.

Demostración. (i) Por definición,

$$A^\circ = \{x \in A : \exists r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subseteq A\}.$$

En particular, todo $x \in A^\circ$ pertenece a A , luego $A^\circ \subseteq A$.

(ii) Supongamos que $A_1 \subseteq A_2$ y sea $x \in A_1^\circ$. Entonces, por definición de interior, existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq A_1.$$

Como $A_1 \subseteq A_2$, se tiene también

$$B(x, r) \subseteq A_2,$$

de modo que x es punto interior de A_2 , es decir, $x \in A_2^\circ$. Hemos probado que $A_1^\circ \subseteq A_2^\circ$.

(iii) Queremos ver que A° es abierto. Sea $x \in A^\circ$. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq A.$$

Por la proposición ya demostrada, $B(x, r)$ es un conjunto abierto. En particular, como $x \in B(x, r)$ y $B(x, r)$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, r).$$

Como además $B(x, r) \subseteq A$, obtenemos

$$B(x, \varepsilon) \subseteq A.$$

Por definición de interior, esto implica que $x \in A^\circ$ y, de hecho, para todo $y \in B(x, \varepsilon)$ se cumple $y \in A^\circ$. Por lo tanto, $B(x, \varepsilon) \subseteq A^\circ$.

Hemos visto que para todo $x \in A^\circ$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A^\circ$, lo cual significa que A° es abierto.

(iv) Sea G un conjunto abierto tal que $G \subseteq A$, y sea $x \in G$. Como G es abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq G.$$

De la inclusión $G \subseteq A$ se deduce

$$B(x, r) \subseteq A.$$

Luego x es punto interior de A , es decir, $x \in A^\circ$. Como x era un punto arbitrario de G , concluimos que $G \subseteq A^\circ$. \square

Proposición 3.5. Sea (E, d) un espacio métrico. Entonces se verifican:

(I) La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

(II) La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Demostración. (i) Sea $(G_i)_{i \in I}$ una familia cualquiera de conjuntos abiertos en E (indexada por un conjunto I no necesariamente numerable) y definamos

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i.$$

Queremos ver que G es abierto.

Sea $x \in G$. Entonces existe algún índice $i_0 \in I$ tal que $x \in G_{i_0}$. Como G_{i_0} es abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq G_{i_0}.$$

De aquí se deduce

$$B(x, r) \subseteq G_{i_0} \subseteq G.$$

Por lo tanto, para todo $x \in G$ hemos encontrado un radio $r > 0$ con $B(x, r) \subseteq G$. Por definición, G es abierto.

(ii) Sea G_1, \dots, G_n una familia finita de conjuntos abiertos en E y definamos

$$H = \bigcap_{k=1}^n G_k.$$

Probemos que H es abierto.

Tomemos $x \in H$. Entonces $x \in G_k$ para todo $k = 1, \dots, n$. Como cada G_k es abierto, existe $r_k > 0$ tal que

$$B(x, r_k) \subseteq G_k \quad \text{para cada } k = 1, \dots, n.$$

Definimos

$$r = \min\{r_1, \dots, r_n\}.$$

Entonces $r > 0$ y, para todo k ,

$$B(x, r) \subseteq B(x, r_k) \subseteq G_k.$$

De aquí se sigue

$$B(x, r) \subseteq \bigcap_{k=1}^n G_k = H.$$

Por lo tanto, para cada $x \in H$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq H$, lo que muestra que H es abierto. \square

Observación. El resultado sobre intersección de abiertos es, en general, válido sólo para intersecciones finitas. Una intersección infinita de abiertos puede no ser abierta.

Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, d_{\text{eucl}})$, para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

es un abierto. Consideremos la intersección

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Es fácil ver que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

El conjunto $\{0\}$ no es abierto en \mathbb{R} con la métrica usual, ya que si tomamos cualquier $r > 0$, la bola $B(0, r) = (-r, r)$ contiene puntos distintos de 0, de modo que nunca se cumple $B(0, r) \subseteq \{0\}$. Por lo tanto, la intersección numerable de los abiertos G_n no es abierta.

3.2. Conjuntos cerrados

Definición 3.6. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Un punto $x \in E$ se llama *punto de adherencia* (o *punto de clausura*) de A si

$$\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Definición 3.7. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. La *clausura* (o *adherencia*) de A es el conjunto

$$\overline{A} = \{x \in E : x \text{ es punto de adherencia de } A\}.$$

Definición 3.8. Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $F \subseteq E$ se dice *cerrado* si su complemento $E \setminus F$ es un conjunto abierto.

Proposición 3.9. Sea (E, d) un espacio métrico, $x_0 \in E$ y $r > 0$. Entonces la bola cerrada

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E : d(x, x_0) \leq r\}$$

es un conjunto cerrado.

Demostración. Por definición, $\overline{B}(x_0, r)$ es cerrada si su complemento $E \setminus \overline{B}(x_0, r)$ es abierto. Sea

$$x \in E \setminus \overline{B}(x_0, r).$$

Entonces $d(x, x_0) > r$. Definimos

$$\varepsilon = \frac{d(x, x_0) - r}{2}.$$

Como $d(x, x_0) > r$, se tiene $\varepsilon > 0$.

Mostremos que

$$B(x, \varepsilon) \subseteq E \setminus \overline{B}(x_0, r).$$

Sea $y \in B(x, \varepsilon)$, es decir,

$$d(x, y) < \varepsilon.$$

Por la desigualdad triangular,

$$d(y, x_0) \geq d(x, x_0) - d(x, y).$$

Luego

$$d(y, x_0) > d(x, x_0) - \varepsilon = d(x, x_0) - \frac{d(x, x_0) - r}{2} = \frac{d(x, x_0) + r}{2}.$$

Como $d(x, x_0) > r$, se tiene

$$\frac{d(x, x_0) + r}{2} > \frac{r + r}{2} = r,$$

de modo que $d(y, x_0) > r$. En particular, $d(y, x_0) \not\leq r$, así que $y \notin \overline{B}(x_0, r)$.

Hemos probado que todo $y \in B(x, \varepsilon)$ pertenece al complemento de la bola cerrada:

$$B(x, \varepsilon) \subseteq E \setminus \overline{B}(x_0, r).$$

Por lo tanto, para cada x del complemento existe un $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B(x, \varepsilon)$ está contenida en dicho complemento. Esto significa que $E \setminus \overline{B}(x_0, r)$ es abierto.

Concluimos que $\overline{B}(x_0, r)$ es cerrado. \square

Proposición 3.10 (Caracterización de la clausura mediante cerrados). *Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Entonces:*

(I) $A \subseteq \overline{A}$.

(II) \overline{A} es un conjunto cerrado.

(III) Si F es un conjunto cerrado con $A \subseteq F$, entonces $\overline{A} \subseteq F$.

En particular, \overline{A} es el menor conjunto cerrado que contiene a A , y se puede escribir

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq E : F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}.$$

Demostración. (i) Sea $x \in A$. Entonces, para cualquier $r > 0$, se tiene $x \in B(x, r)$, y por lo tanto $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Es decir, x es punto de adherencia de A , y por definición $x \in \overline{A}$. Luego $A \subseteq \overline{A}$.

(ii) Probemos que \overline{A} es cerrado mostrando que $E \setminus \overline{A}$ es abierto.

Sea $x \in E \setminus \overline{A}$. Entonces x no es punto de adherencia de A , es decir, existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \cap A = \emptyset.$$

Mostraremos que $B(x, r/2) \subseteq E \setminus \overline{A}$.

Sea $y \in B(x, r/2)$, de modo que $d(x, y) < r/2$. Tomemos $s = r/2$. Consideremos un punto $z \in B(y, s)$; entonces $d(y, z) < s = r/2$. Por la desigualdad triangular,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

luego $z \in B(x, r)$. Como $B(x, r) \cap A = \emptyset$, se sigue que $z \notin A$. En consecuencia,

$$B(y, s) \cap A = \emptyset.$$

Esto significa que y no es punto de adherencia de A , es decir, $y \notin \overline{A}$.

Como y fue un punto arbitrario de $B(x, r/2)$, hemos probado que $B(x, r/2) \subseteq E \setminus \overline{A}$. Por lo tanto, $E \setminus \overline{A}$ es abierto, y en consecuencia \overline{A} es cerrado.

(iii) Sea F un conjunto cerrado tal que $A \subseteq F$. Debemos probar que $\overline{A} \subseteq F$.

Sea $x \in E \setminus F$. Como F es cerrado, su complemento $E \setminus F$ es abierto. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq E \setminus F.$$

Como $A \subseteq F$, se tiene $A \cap (E \setminus F) = \emptyset$, y en particular

$$B(x, r) \cap A = \emptyset.$$

Esto muestra que x no es punto de adherencia de A , es decir, $x \notin \overline{A}$. Hemos probado

$$E \setminus F \subseteq E \setminus \overline{A}.$$

Tomando complementos,

$$\overline{A} \subseteq F.$$

Esto vale para todo conjunto cerrado F que contiene a A , con lo cual queda demostrado que \overline{A} es el menor cerrado que contiene a A , y en particular

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq E : F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}.$$

□

Proposición 3.11. *Un conjunto $F \subseteq E$ es cerrado si y sólo si*

$$F = \overline{F}.$$

Demostración. (\Rightarrow) Si F es cerrado y F contiene a F , por la proposición anterior, $\overline{F} \subseteq F$. Por otra parte, siempre se cumple $F \subseteq \overline{F}$. De aquí se deduce $F = \overline{F}$.

(\Leftarrow) Si $F = \overline{F}$, como sabemos que \overline{F} es cerrado, se sigue que F es cerrado. □

Proposición 3.12 (Caracterización secuencial de la clausura). *Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$$(I) \ x \in \overline{A}.$$

(11) Existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n \in A$ para todo n tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Supongamos que $x \in \overline{A}$. Por definición de clausura, esto significa que para todo $r > 0$ se cumple

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el radio $r_n = \frac{1}{n} > 0$. Como $B(x, r_n) \cap A \neq \emptyset$, podemos elegir un punto

$$a_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A.$$

Así definimos una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de A que satisface

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que $a_n \rightarrow x$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Si $n \geq N$, entonces

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(a_n, x) < \varepsilon,$$

lo cual significa que $a_n \rightarrow x$. Esto prueba (ii).

(ii) \Rightarrow (i) Recíprocamente, supongamos que existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n \in A$ para todo n tal que $a_n \rightarrow x$. Debemos probar que $x \in \overline{A}$, es decir, que

$$\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Sea $r > 0$. Como $a_n \rightarrow x$, por definición de límite existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$d(a_n, x) < r.$$

En particular, tomando $n = N$, tenemos $a_N \in B(x, r)$. Como además $a_N \in A$ por construcción de la sucesión, se obtiene

$$a_N \in B(x, r) \cap A,$$

y por lo tanto $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Como esto vale para todo $r > 0$, concluimos que x es punto de adherencia de A , es decir, $x \in \overline{A}$. \square

Proposición 3.13. Sea (E, d) un espacio métrico y $F \subseteq E$. Entonces F es cerrado si y sólo si se verifica:

$$\text{si } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F \text{ y } x_n \rightarrow x \text{ en } E, \text{ entonces } x \in F.$$

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que F es cerrado y sea (x_n) una sucesión de puntos de F tal que $x_n \rightarrow x$ en E . Supongamos, por absurdo, que $x \notin F$. Entonces $x \in E \setminus F$.

Como $E \setminus F$ es abierto (porque F es cerrado), existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq E \setminus F.$$

Por la convergencia de (x_n) a x , sabemos que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Tomamos $\varepsilon = r$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, se cumple $d(x_n, x) < r$, es decir, $x_n \in B(x, r)$. Pero $B(x, r) \subseteq E \setminus F$, luego $x_n \notin F$ para todo $n \geq N$. Esto contradice el hecho de que $x_n \in F$ para todos los n , por hipótesis. Por lo tanto, debe ser $x \in F$.

(\Leftarrow) Supongamos ahora que se cumple la propiedad secuencial: toda sucesión de puntos de F que converge en E tiene su límite en F . Queremos ver que F es cerrado, es decir, que $E \setminus F$ es abierto.

Tomemos un punto $x \in E \setminus F$. Supongamos, por absurdo, que $E \setminus F$ no es abierto. Entonces no existe ningún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq E \setminus F$. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, el radio $r = \frac{1}{n}$ no sirve, es decir:

$$B\left(x, \frac{1}{n}\right) \not\subseteq E \setminus F.$$

Esto significa que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe algún punto

$$x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap F.$$

Por construcción, $x_n \in F$ y, además,

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De aquí se deduce que $x_n \rightarrow x$ en el espacio métrico (E, d) .

Pero, por hipótesis secuencial, el límite de cualquier sucesión de puntos de F que converge en E debe pertenecer a F , de modo que $x \in F$. Esto contradice que $x \in E \setminus F$.

Por lo tanto, nuestra suposición era falsa: para cada $x \in E \setminus F$ debe existir $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq E \setminus F$, lo que muestra que $E \setminus F$ es abierto. En consecuencia, F es cerrado. \square

Proposición 3.14. Sea (E, d) un espacio métrico. Entonces se verifican:

(I) \emptyset y E son conjuntos cerrados.

(II) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

(III) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Demostración. (i) Notemos que

$$E \setminus \emptyset = E \quad \text{y} \quad E \setminus E = \emptyset.$$

Como ya sabemos que E y \emptyset son abiertos, por definición de conjunto cerrado se sigue que \emptyset y E son cerrados.

(ii) Sea $(F_i)_{i \in I}$ una familia cualquiera de conjuntos cerrados en E , indexada por un conjunto I arbitrario, y consideremos

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Queremos probar que F es cerrado.

Usamos la relación entre complementos, uniones e intersecciones:

$$E \setminus F = E \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i).$$

Cada F_i es cerrado, así que $E \setminus F_i$ es abierto para todo i . Por lo tanto, la unión $\bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i)$ es abierta (por la propiedad ya demostrada para uniones arbitrarias de abiertos). En consecuencia, $E \setminus F$ es abierto, lo que implica que F es cerrado.

(iii) Sean F_1, \dots, F_n conjuntos cerrados en E y consideremos

$$H = \bigcup_{k=1}^n F_k.$$

Entonces

$$E \setminus H = E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n F_k \right) = \bigcap_{k=1}^n (E \setminus F_k).$$

Como cada F_k es cerrado, $E \setminus F_k$ es abierto para todo k . La intersección finita de abiertos es abierta, por lo tanto $\bigcap_{k=1}^n (E \setminus F_k)$ es abierta. De aquí se deduce que $E \setminus H$ es abierto y, por definición, H es cerrado. \square

3.3. Puntos de acumulación y frontera

Definición 3.15. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Un punto $x \in E$ se llama *punto de acumulación* (o *punto límite*) de A si

$$\forall r > 0 \quad (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Denotamos por A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A .

Proposición 3.16 (Caracterización secuencial de puntos de acumulación).
Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) x es punto de acumulación de A , es decir $x \in A'$.

(II) Existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n \in A \setminus \{x\}$ para todo n tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Supongamos que $x \in A'$. Entonces, por definición, para todo $r > 0$ se cumple

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $r_n = \frac{1}{n}$ y elegimos

$$a_n \in (B(x, r_n) \setminus \{x\}) \cap A.$$

Entonces $a_n \in A \setminus \{x\}$ y $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Si $n \geq N$, entonces

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por definición de límite, $a_n \rightarrow x$.

(ii) \Rightarrow (i) Recíprocamente, supongamos que existe una sucesión (a_n) con $a_n \in A \setminus \{x\}$ para todo n y $a_n \rightarrow x$. Sea $r > 0$. Como $a_n \rightarrow x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$d(a_n, x) < r.$$

En particular, $a_N \in B(x, r)$, y como $a_N \neq x$ se tiene $a_N \in B(x, r) \setminus \{x\}$. Además, $a_N \in A$.

Por lo tanto,

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

para todo $r > 0$, lo que significa que x es punto de acumulación de A , es decir, $x \in A'$. \square

Teorema 3.17. Sea $A \subseteq E$ un subconjunto de un espacio métrico (E, d) . Entonces

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Demostración. Primero probamos la inclusión $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. Sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, ya está. Supongamos que $x \notin A$. Como $x \in \overline{A}$, por definición de clausura se cumple

$$\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Pero como $x \notin A$, esto implica automáticamente que

$$\forall r > 0 \quad (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset,$$

es decir, x es punto de acumulación de A , $x \in A'$. En cualquiera de los dos casos, $x \in A \cup A'$. Por lo tanto

$$\overline{A} \subseteq A \cup A'.$$

Ahora probamos la inclusión inversa $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Si $x \in A$, ya vimos que siempre se cumple $A \subseteq \overline{A}$, así que $x \in \overline{A}$.

Si $x \in A'$, entonces para todo $r > 0$ se tiene

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

En particular, esto implica $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$, de modo que x es punto de adherencia de A , es decir, $x \in \overline{A}$.

En ambos casos $x \in \overline{A}$, por lo que

$$A \cup A' \subseteq \overline{A}.$$

Concluimos que $\overline{A} = A \cup A'$. □

Corolario 3.18. Sea $A \subseteq E$. Entonces A es cerrado si y sólo si

$$A' \subseteq A.$$

Demostración. (\Rightarrow) Si A es cerrado, por definición $A = \overline{A}$. Por el teorema anterior,

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Luego

$$A = A \cup A'.$$

Esto sólo puede ocurrir si $A' \subseteq A$.

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que $A' \subseteq A$. Del teorema anterior tenemos

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Como $A' \subseteq A$, se obtiene

$$\overline{A} = A.$$

Pero un conjunto es cerrado si y sólo si coincide con su clausura, por lo que A es cerrado. □

Definición 3.19. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Un punto $x \in E$ se llama *punto frontera* (o *punto de borde*) de A si para todo $r > 0$ se cumple

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset.$$

El conjunto de todos los puntos frontera de A se denota por ∂A y se llama *frontera* (o *borde*) de A .

Proposición 3.20. Para todo $A \subseteq E$ se verifica

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

Demostración. Sea $x \in \partial A$. Entonces, por definición de punto frontera, para todo $r > 0$,

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset.$$

En particular, la primera condición implica que x es punto de adherencia de A , es decir $x \in \overline{A}$. Por otra parte, la segunda condición impide que exista algún $r > 0$ con $B(x, r) \subseteq A$, luego x no es punto interior de A , es decir $x \notin A^\circ$. Por lo tanto $x \in \overline{A} \setminus A^\circ$.

Recíprocamente, sea $x \in \overline{A} \setminus A^\circ$. Entonces $x \in \overline{A}$, de modo que para todo $r > 0$,

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Además, $x \notin A^\circ$, es decir, no existe ningún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$. Por lo tanto, para todo $r > 0$ se tiene

$$B(x, r) \not\subseteq A,$$

lo que significa que para todo $r > 0$ existe $y \in B(x, r)$ tal que $y \notin A$, es decir,

$$B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset.$$

Juntando ambas condiciones, x es punto frontera de A , es decir $x \in \partial A$.

Hemos probado ambas inclusiones, así que $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. \square

Proposición 3.21. Sea $A \subseteq E$. Entonces:

(I) ∂A es un conjunto cerrado.

(II) Se tiene la descomposición

$$E = A^\circ \dot{\cup} \partial A \dot{\cup} (E \setminus \overline{A}),$$

donde las uniones son disjuntas.

(III) Se verifica

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Demostración. (i) Por la proposición anterior,

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (E \setminus A^\circ).$$

Sabemos que \overline{A} es cerrado. Como A° es abierto, su complemento $E \setminus A^\circ$ es cerrado. La intersección de conjuntos cerrados es cerrada, luego ∂A es cerrado.

(ii) Por definición de interior, clausura y frontera, se tiene

$$A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}.$$

Además, por la proposición anterior,

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

Entonces

$$\overline{A} = A^\circ \cup \partial A.$$

Por otra parte, el complemento de \overline{A} es $E \setminus \overline{A}$, y es abierto. Así, todo punto de E pertenece o bien a \overline{A} o bien a $E \setminus \overline{A}$, y dentro de \overline{A} está exactamente en A° o en ∂A . Esto da la descomposición

$$E = A^\circ \cup \partial A \cup (E \setminus \overline{A}).$$

(iii) De la igualdad del teorema anterior $\overline{A} = A \cup A'$ y del hecho de que $\partial A \subseteq \overline{A}$, se deduce en particular que

$$A \subseteq \overline{A} \quad \text{y} \quad \partial A \subseteq \overline{A}.$$

Por lo tanto,

$$A \cup \partial A \subseteq \overline{A}.$$

Recíprocamente, sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, ya está. Si $x \notin A$, como $x \in \overline{A}$, para todo $r > 0$ se cumple $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Además, como $x \notin A$, se tiene $x \in E \setminus A$, luego para todo $r > 0$ se cumple $x \in B(x, r) \cap (E \setminus A)$, o sea

$$B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset.$$

Por definición, esto significa que $x \in \partial A$. En cualquier caso, $x \in A \cup \partial A$, con lo cual

$$\overline{A} \subseteq A \cup \partial A.$$

Concluimos que $\overline{A} = A \cup \partial A$. □

3.4. Métricas equivalentes

Sea E un conjunto y d_1, d_2 dos métricas en E .

Definición 3.22. Decimos que las métricas d_1 y d_2 en E son *equivalentes* si inducen los mismos conjuntos abiertos, es decir, si para todo $U \subseteq E$ se cumple:

$$U \text{ es abierto en } (E, d_1) \iff U \text{ es abierto en } (E, d_2).$$

Proposición 3.23 (Caracterización secuencial). *Sean d_1, d_2 dos métricas en E . Son equivalentes si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en E y todo $x \in E$ se verifica*

$$x_n \rightarrow x \text{ en } (E, d_1) \iff x_n \rightarrow x \text{ en } (E, d_2).$$

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que d_1 y d_2 son equivalentes, es decir, tienen los mismos conjuntos abiertos.

Recordemos que, en un espacio métrico, una sucesión (x_n) converge a x si y sólo si se verifica la siguiente propiedad topológica:

$$\forall U \text{ abierto con } x \in U, \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n \in U.$$

Sea (x_n) una sucesión en E y $x \in E$. Supongamos que $x_n \rightarrow x$ en (E, d_1) . Entonces, para todo abierto U de (E, d_1) con $x \in U$, existe N tal que, si $n \geq N$, se cumple $x_n \in U$.

Como d_1 y d_2 tienen los mismos abiertos, ese mismo conjunto U es abierto también en (E, d_2) . La condición anterior es exactamente la definición de convergencia de (x_n) a x en (E, d_2) . Por lo tanto, $x_n \rightarrow x$ en (E, d_2) .

La implicación recíproca se demuestra igual, intercambiando el rol de d_1 y d_2 .

(\Leftarrow) Supongamos ahora que las sucesiones convergentes son las mismas para d_1 y d_2 .

Queremos ver que los conjuntos abiertos también coinciden. Sea $U \subseteq E$ abierto en (E, d_1) , y probemos que es abierto en (E, d_2) .

Para eso, basta ver que si (x_n) es una sucesión en $E \setminus U$ que converge a algún $x \in E$ respecto de d_2 , entonces $x \in E \setminus U$ (es decir, $x \notin U$). En efecto, esta propiedad caracteriza a los cerrados, y al tomar complementos caracteriza a los abiertos.

Sea entonces (x_n) una sucesión con $x_n \in E \setminus U$ para todo n y $x_n \rightarrow x$ en (E, d_2) . Por hipótesis, las sucesiones convergentes son las mismas en ambas métricas, así que también $x_n \rightarrow x$ en (E, d_1) .

Como U es abierto en (E, d_1) , su complemento $E \setminus U$ es cerrado en (E, d_1) . Por la caracterización secuencial de cerrados, si una sucesión de puntos de $E \setminus U$ converge (en d_1), su límite debe pertenecer a $E \setminus U$. En particular, $x \in E \setminus U$, es decir, $x \notin U$.

Hemos probado que el complemento de U es cerrado también con la métrica d_2 , luego U es abierto en (E, d_2) . El mismo argumento, cambiando el rol de d_1 y d_2 , muestra la implicación inversa. Por lo tanto, los abiertos de d_1 coinciden con los de d_2 , y las métricas son equivalentes. \square

Definición 3.24. Decimos que dos métricas d_1, d_2 en E son *fuertemente equivalentes* si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Proposición 3.25. Si d_1 y d_2 son fuertemente equivalentes, entonces son equivalentes (en el sentido de que inducen los mismos conjuntos abiertos).

Demostración. Sea U un abierto de (E, d_1) y tomemos $x \in U$. Por definición de abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B_{d_1}(x, r) \subseteq U,$$

donde $B_{d_1}(x, r) = \{y : d_1(x, y) < r\}$.

Consideremos ahora la bola en la métrica d_2

$$B_{d_2}(x, c_1 r) = \{y \in E : d_2(x, y) < c_1 r\}.$$

Si $y \in B_{d_2}(x, c_1 r)$, entonces $d_2(x, y) < c_1 r$, y usando la desigualdad $c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y)$ obtenemos

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) < c_1 r \implies d_1(x, y) < r.$$

Luego $y \in B_{d_1}(x, r)$, y por lo tanto

$$B_{d_2}(x, c_1 r) \subseteq B_{d_1}(x, r) \subseteq U.$$

Hemos mostrado que para todo $x \in U$ existe un radio $c_1 r > 0$ tal que la bola d_2 -abierto correspondiente está contenida en U , de modo que U es abierto en (E, d_2) .

La implicación recíproca (todo abierto d_2 -abierto es d_1 -abierto) se prueba exactamente igual usando la otra desigualdad $d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$. Concluimos que d_1 y d_2 tienen los mismos abiertos, es decir, son métricas equivalentes. \square

Observación. En espacios de dimensión finita (por ejemplo, \mathbb{R}^n), todas las normas son fuertemente equivalentes. En particular, las métricas inducidas por las normas d_1, d_2, d_∞ en \mathbb{R}^n son equivalentes, y por lo tanto tienen los mismos abiertos, los mismos cerrados, las mismas sucesiones convergentes, etc.

Teorema 3.26. Sean d y d' dos métricas sobre un mismo conjunto E . Las métricas d y d' son (topológicamente) equivalentes si y sólo si para todo $x \in E$ y todo $r > 0$ existen $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$B_{d'}(x, r_1) \subseteq B_d(x, r) \quad \text{y} \quad B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r),$$

donde

$$B_d(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}, \quad B_{d'}(x, r) = \{y \in E : d'(x, y) < r\}.$$

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que d y d' son métricas equivalentes, es decir, inducen los mismos conjuntos abiertos.

Sea $x \in E$ y $r > 0$ arbitrarios. Entonces $B_d(x, r)$ es un abierto en (E, d) ; como los abiertos de (E, d) y (E, d') coinciden, $B_d(x, r)$ es también abierto en (E, d') .

Por definición de abierto en la métrica d' , existe $r_1 > 0$ tal que

$$B_{d'}(x, r_1) \subseteq B_d(x, r).$$

Para obtener la otra inclusión, usamos el mismo argumento intercambiando el rol de d y d' : como $B_{d'}(x, r)$ es abierto en (E, d') y las familias de abiertos coinciden, $B_{d'}(x, r)$ es abierto en (E, d) . Luego existe $r_2 > 0$ tal que

$$B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r).$$

Así se verifica la condición del enunciado.

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que para todo $x \in E$ y todo $r > 0$ existen $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$B_{d'}(x, r_1) \subseteq B_d(x, r) \quad \text{y} \quad B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r).$$

Queremos probar que los abiertos de (E, d) y (E, d') coinciden.

Sea $U \subseteq E$ un conjunto abierto en (E, d) . Sea $x \in U$. Como U es abierto para d , existe $r > 0$ tal que

$$B_d(x, r) \subseteq U.$$

Por hipótesis, existe $r_2 > 0$ tal que

$$B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r).$$

Aplicando de nuevo la hipótesis, pero ahora a la bola d' -abierto $B_{d'}(x, r)$, podemos elegir $r_3 > 0$ con

$$B_{d'}(x, r_3) \subseteq B_d(x, r_2).$$

Por lo tanto,

$$B_{d'}(x, r_3) \subseteq B_d(x, r_2) \subseteq B_d(x, r) \subseteq U.$$

Hemos encontrado, para cada $x \in U$, un radio $r_3 > 0$ tal que $B_{d'}(x, r_3) \subseteq U$, lo que significa que U es abierto en (E, d') .

El argumento recíproco (si U es abierto en (E, d') entonces lo es en (E, d)) se obtiene exactamente igual, usando de nuevo la hipótesis para pasar de bolas d' -abiertas a bolas d -abiertas. Concluimos que las familias de conjuntos abiertos de (E, d) y (E, d') coinciden, es decir, d y d' son métricas equivalentes. \square

3.5. Sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos

Definición 3.27. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Decimos que A es *acotado* si existen $x \in E$ y $r > 0$ tales que

$$A \subset B(x, r),$$

donde $B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$ es la bola abierta de centro x y radio r .

Definición 3.28. Sea (E, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ una sucesión. Decimos que (x_n) es *acotada* si existen $x \in E$ y $r > 0$ tales que

$$x_n \in B(x, r) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Equivalente: el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en E .

Definición 3.29. Sea (E, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ una sucesión. Decimos que (x_n) es una *sucesión de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Teorema 3.30. Sea (E, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$. Entonces:

- (1) Si (x_n) es de Cauchy, entonces es acotada.
- (2) Si (x_n) es convergente en E , entonces es de Cauchy.
- (3) Si (x_n) es de Cauchy y tiene alguna subsucesión convergente, entonces (x_n) es convergente (en E) y converge al mismo límite que esa subsucesión.

Demostración. (1) Supongamos que (x_n) es de Cauchy. Tomamos $\varepsilon = 1$ en la definición. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq n_0$, se cumple

$$d(x_n, x_m) < 1.$$

En particular, para todo $n \geq n_0$,

$$d(x_n, x_{n_0}) < 1.$$

Sea ahora

$$M = \max\{d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0}), 1\}$$

(si $n_0 = 1$, simplemente tomamos $M = 1$). Entonces $M > 0$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x_{n_0}) \leq M.$$

Por lo tanto,

$$x_n \in B(x_{n_0}, M) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

lo que muestra que la sucesión (x_n) es acotada.

(2) Supongamos que (x_n) converge en E a algún $x \in E$; es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon/2.$$

(Escribimos $\varepsilon/2$ para simplificar las cuentas que siguen.)

Sea ahora $\varepsilon > 0$ fijo. Tomamos n_0 como arriba. Si $n, m \geq n_0$, por la desigualdad triangular:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos mostrado que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que, si $n, m \geq n_0$, se cumple $d(x_n, x_m) < \varepsilon$; es decir, (x_n) es de Cauchy.

(3) Supongamos que (x_n) es de Cauchy y que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x \in E$.

Debemos probar que $x_n \rightarrow x$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como (x_{n_k}) converge a x , existe $K \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq K$,

$$d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2.$$

Como (x_n) es de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq n_0$,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon/2.$$

Definimos

$$N = \max\{n_0, n_K\}.$$

Sea ahora $n \geq N$. Entonces $n \geq n_0$ y $n_K \geq n_0$, por lo que aplicando la propiedad de Cauchy con $m = n_K$ obtenemos:

$$d(x_n, x_{n_K}) < \varepsilon/2.$$

Por otra parte, como $n_K \geq K$, tenemos

$$d(x_{n_K}, x) < \varepsilon/2.$$

Usando la desigualdad triangular,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos probado que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon,$$

lo cual significa que $x_n \rightarrow x$ en (E, d) . \square

Definición 3.31. Un espacio métrico (E, d) se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy en E es convergente a un punto de E .

Proposición 3.32. Sea (E, d) un espacio métrico completo y sea $F \subseteq E$ un subconjunto cerrado. Entonces el subespacio métrico (F, d) es completo.

Demostración. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en F (con la métrica d restringida). Como $F \subseteq E$, también es una sucesión de Cauchy en E . Dado que (E, d) es completo, existe $x \in E$ tal que $x_n \rightarrow x$ en E .

Como F es cerrado en E y todos los x_n están en F , por la caracterización secuencial de cerrados se tiene necesariamente $x \in F$. Por lo tanto, (x_n) converge a un punto de F , y así (F, d) es completo. \square

4. Unidad 4: Funciones continuas

4.1. Definición y caracterizaciones de continuidad

Sea (E, d_E) y (F, d_F) espacios métricos, y sea $A \subseteq E$. Consideramos funciones $f : A \rightarrow F$.

Definición 4.1 (Continuidad en un punto). Sea $x_0 \in A$. Decimos que f es *continua en x_0* si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in A, d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Definición 4.2 (Continuidad en un conjunto). Decimos que f es *continua en A* si es continua en todo punto $x_0 \in A$. En particular, cuando $A = E$, diremos simplemente que $f : E \rightarrow F$ es *continua*.

Definición 4.3 (Continuidad secuencial en un punto). Sea $x_0 \in A$. Decimos que f es *secuencialmente continua en x_0* si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ en } (E, d_E),$$

se cumple

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0) \text{ en } (F, d_F).$$

Proposición 4.4 (Equivalencia ε - δ / sucesiones). Sea $f : A \rightarrow F$ y $x_0 \in A$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) f es continua en x_0 (en el sentido ε - δ).

(II) f es secuencialmente continua en x_0 , es decir: para toda sucesión $(x_n) \subseteq A$ con $x_n \rightarrow x_0$ en (E, d_E) , se tiene $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ en (F, d_F) .

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Supongamos que f es continua en x_0 en el sentido ε - δ . Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ una sucesión tal que $x_n \rightarrow x_0$ en (E, d_E) .

Sea $\varepsilon > 0$. Por continuidad en x_0 , existe $\delta > 0$ tal que

$$d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in A.$$

Como $x_n \rightarrow x_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$, se cumple

$$d_E(x_n, x_0) < \delta.$$

Aplicando la condición de continuidad a cada x_n con $n \geq N$, obtenemos

$$d_F(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Por definición de límite de sucesión en (F, d_F) , esto significa que $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Luego (ii) es verdadera.

(ii) \Rightarrow (i) Supongamos ahora que f es secuencialmente continua en x_0 y probemos que es continua en x_0 en el sentido ε - δ .

Razonamos por absurdo. Supongamos que f *no* es continua en x_0 . Entonces existe algún $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $x \in A$ con

$$d_E(x, x_0) < \delta \quad \text{pero} \quad d_F(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon_0.$$

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicamos esta propiedad con $\delta = \frac{1}{n}$ y obtenemos un punto $x_n \in A$ tal que

$$d_E(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad d_F(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0.$$

De aquí se ve que $x_n \rightarrow x_0$ en (E, d_E) , porque para todo $\varepsilon > 0$ basta tomar N con $\frac{1}{N} < \varepsilon$; entonces si $n \geq N$,

$$d_E(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Sin embargo, la sucesión $(f(x_n))$ no puede converger a $f(x_0)$ en (F, d_F) , ya que para todo n se tiene

$$d_F(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0,$$

y esto contradice la definición de límite. Esto contradice la hipótesis de continuidad secuencial en x_0 .

Por lo tanto, nuestra suposición era falsa y f debe ser continua en x_0 en el sentido ε - δ . \square

Definición 4.5 (Imagen inversa). Sea $f : A \rightarrow F$ y $B \subseteq F$. Definimos la *imagen inversa* de B por f como

$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}.$$

Teorema 4.6 (Continuidad y abiertos). Sea $f : A \rightarrow F$ una función entre espacios métricos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (I) f es continua en A .
- (II) Para todo abierto $G \subseteq F$, el conjunto $f^{-1}(G)$ es abierto en el subespacio A (es decir, $f^{-1}(G) = A \cap U$ para algún abierto U de E).
- (III) Si $A = E$, entonces (ii) dice simplemente: para todo abierto $G \subseteq F$, $f^{-1}(G)$ es abierto en E .

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Supongamos que f es continua en A y sea $G \subseteq F$ un conjunto abierto. Consideremos $f^{-1}(G) \subseteq A$.

Tomemos $x_0 \in f^{-1}(G)$. Entonces $f(x_0) \in G$. Como G es abierto en (F, d_F) , existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_{d_F}(f(x_0), \varepsilon) \subseteq G.$$

Como f es continua en x_0 , existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$,

$$d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

es decir,

$$x \in B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_{d_F}(f(x_0), \varepsilon) \subseteq G.$$

Por lo tanto,

$$B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A \subseteq f^{-1}(G).$$

Esto muestra que, en el subespacio A , el punto x_0 tiene una “bola” (dada por $B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A$) contenida en $f^{-1}(G)$. Por definición, $f^{-1}(G)$ es abierto en A .

(ii) \Rightarrow (i) Supongamos ahora que para todo abierto $G \subseteq F$, el conjunto $f^{-1}(G)$ es abierto en el subespacio A .

Sea $x_0 \in A$ y probemos que f es continua en x_0 .

Sea $\varepsilon > 0$. Consideramos el abierto

$$G = B_{d_F}(f(x_0), \varepsilon) \subseteq F.$$

Por hipótesis, $f^{-1}(G)$ es abierto en A . En particular, $x_0 \in f^{-1}(G)$ (porque $f(x_0) \in G$), y como $f^{-1}(G)$ es abierto en el subespacio A , existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A \subseteq f^{-1}(G).$$

Entonces, si $x \in A$ y $d_E(x, x_0) < \delta$, se tiene $x \in A$ y $x \in B_{d_E}(x_0, \delta)$, por lo que $x \in f^{-1}(G)$; esto significa que $f(x) \in G$, es decir,

$$d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Hemos probado exactamente la condición ε - δ de continuidad de f en x_0 . Como x_0 es arbitrario en A , f es continua en A .

La equivalencia con (iii) es sólo una simplificación de notación cuando $A = E$, ya que en ese caso “abierto en A ” coincide con “abierto en E ”. \square

Teorema 4.7 (Continuidad y cerrados). *Sea $f : A \rightarrow F$ una función entre espacios métricos. Son equivalentes:*

- (I) f es continua en A .
- (II) Para todo cerrado $C \subseteq F$, el conjunto $f^{-1}(C)$ es cerrado en el subespacio A .

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Supongamos f continua en A y sea $C \subseteq F$ un cerrado. Su complemento $F \setminus C$ es abierto en F .

Por el teorema anterior, $f^{-1}(F \setminus C)$ es abierto en A . Notemos que

$$A \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(F \setminus C).$$

Entonces el complemento de $f^{-1}(C)$ en A es abierto en A , por lo que $f^{-1}(C)$ es cerrado en A .

(ii) \Rightarrow (i) Recíprocamente, supongamos que la preimagen de todo cerrado en F es cerrada en A .

Sea $G \subseteq F$ un abierto. Entonces $F \setminus G$ es cerrado en F , y por hipótesis

$$f^{-1}(F \setminus G)$$

es cerrado en A . Su complemento en A ,

$$A \setminus f^{-1}(F \setminus G),$$

es abierto en A . Pero

$$A \setminus f^{-1}(F \setminus G) = f^{-1}(G).$$

Concluimos que $f^{-1}(G)$ es abierto en A para todo abierto G de F . Por el teorema anterior, esto implica que f es continua en A . \square

Teorema 4.8 (Continuidad y clausura de la imagen). *Sea $f : E \rightarrow E'$ una función entre espacios métricos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (I) f es continua en E .

(11) Para todo subconjunto $A \subseteq E$ se cumple

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii)) Supongamos que f es continua en E (en cada punto de E).

Sea $A \subseteq E$ y sea $x \in \overline{A}$. Por la caracterización secuencial de la clausura, existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que

$$a_n \rightarrow x \quad \text{en } E.$$

Como f es continua en x , se tiene

$$f(a_n) \rightarrow f(x) \quad \text{en } E'.$$

Además, cada $f(a_n)$ pertenece a $f(A)$, luego por la caracterización secuencial de la clausura en E' concluimos que

$$f(x) \in \overline{f(A)}.$$

Esto vale para todo $x \in \overline{A}$, por lo tanto

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

(ii) \Rightarrow (i)) Supongamos ahora que para todo $A \subseteq E$ se cumple

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Queremos probar que f es continua en E .

Usaremos el criterio de continuidad en términos de cerrados: f es continua si y sólo si, para todo conjunto cerrado $C \subseteq E'$, la preimagen $f^{-1}(C)$ es cerrada en E .

Sea entonces $C \subseteq E'$ un cerrado y definamos

$$A = f^{-1}(C) = \{x \in E : f(x) \in C\}.$$

Tenemos $A \subseteq E$ y, en particular, $f(A) \subseteq C$. De la hipótesis aplicada a este conjunto A se obtiene

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Como $f(A) \subseteq C$, se cumple

$$\overline{f(A)} \subseteq \overline{C} = C$$

(porque C es cerrado). Por lo tanto,

$$f(\overline{A}) \subseteq C.$$

Tomando preimagen por f de ambos lados,

$$f^{-1}(f(\overline{A})) \subseteq f^{-1}(C) = A.$$

En particular, como $\overline{A} \subseteq f^{-1}(f(\overline{A}))$ (siempre se cumple $B \subseteq f^{-1}(f(B))$ para cualquier función y cualquier conjunto B), obtenemos

$$\overline{A} \subseteq A.$$

Pero siempre se tiene $A \subseteq \overline{A}$, por definición de clausura. Luego

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq A,$$

de donde se deduce $\overline{A} = A$. Es decir, A es cerrado en E .

Hemos probado que, para todo cerrado $C \subseteq E'$, la preimagen $f^{-1}(C)$ es cerrada en E . Por el criterio de continuidad mediante cerrados, esto implica que f es continua en E .

Así queda demostrada la equivalencia entre (i) y (ii). \square

4.2. Continuidad uniforme

Sea $f : E \rightarrow E'$ entre espacios métricos (E, d) y (E', d') .

Definición 4.9 (Continuidad uniforme, versión con bolas). Decimos que f es *uniformemente continua* en E si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } f(B_d(x, \delta)) \subseteq B_{d'}(f(x), \varepsilon) \text{ para todo } x \in E.$$

Es decir: dado $\varepsilon > 0$ se puede elegir un mismo $\delta > 0$ (válido para todos los puntos x) de modo que, siempre que y esté δ -cerca de x , las imágenes $f(y)$ y $f(x)$ estén ε -cerca.

Definición 4.10 (Definición equivalente, versión ε - δ). Equivalente y más usada: f es *uniformemente continua* en E si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x, y \in E, d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Aquí δ depende sólo de ε , no de los puntos x, y .

Proposición 4.11. *Las dos definiciones anteriores de continuidad uniforme son equivalentes.*

Demostración. Supongamos primero la definición con bolas. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ el correspondiente en esa definición. Si $x, y \in E$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $y \in B_d(x, \delta)$ y, por la hipótesis,

$$f(y) \in f(B_d(x, \delta)) \subseteq B_{d'}(f(x), \varepsilon),$$

es decir, $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Esto da la definición ε - δ .

Recíprocamente, supongamos que vale la definición ε - δ . Fijamos $\varepsilon > 0$ y tomamos el correspondiente $\delta > 0$. Sea $x \in E$ y $y \in B_d(x, \delta)$, entonces $d(x, y) < \delta$ y por la hipótesis

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

es decir, $f(y) \in B_{d'}(f(x), \varepsilon)$. Por lo tanto,

$$f(B_d(x, \delta)) \subseteq B_{d'}(f(x), \varepsilon) \quad \text{para todo } x \in E,$$

que es la definición con bolas. \square

Proposición 4.12 (Criterio secuencial para *no* continuidad uniforme). *Sea $f : E \rightarrow E'$. Entonces f **no** es uniformemente continua en E si y sólo si existen $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en E tales que*

$$d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{pero} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que f no es uniformemente continua. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que *para todo* $\delta > 0$ no se cumple la condición de continuidad uniforme, es decir:

$$\forall \delta > 0 \exists x, y \in E \text{ con } d(x, y) < \delta \text{ y } d'(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicamos esto con $\delta = \frac{1}{n}$, obteniendo puntos $x_n, y_n \in E$ tales que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0.$$

Entonces $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, mientras que las distancias entre las imágenes están siempre acotadas inferiormente por ε_0 . Esto da las sucesiones pedidas.

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que existen $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones $(x_n), (y_n)$ en E tales que

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0 \quad \forall n.$$

Supongamos, por absurdo, que f fuera uniformemente continua. Tomemos $\varepsilon = \varepsilon_0$ en la definición de continuidad uniforme. Entonces existiría $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in E$,

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon_0.$$

Como $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$d(x_n, y_n) < \delta.$$

Aplicando la condición de uniformidad, tendríamos

$$d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon_0 \quad \text{para todo } n \geq N,$$

lo que contradice la hipótesis $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ para todo n .

Por lo tanto, f no puede ser uniformemente continua. \square

Definición 4.13 (Aplicación de Lipschitz). Sea $C > 0$. Decimos que $f : E \rightarrow E'$ es *Lipschitz* (o *C-Lipschitz*) si

$$d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Teorema 4.14. Sea $f : E \rightarrow E'$. Si existe $C > 0$ tal que

$$d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in E,$$

entonces f es uniformemente continua en E .

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Definimos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{C} > 0.$$

Si $x, y \in E$ satisfacen $d(x, y) < \delta$, entonces

$$d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) < C\delta = \varepsilon.$$

Esto es exactamente la definición de continuidad uniforme (con $\delta = \varepsilon/C$). Por lo tanto f es uniformemente continua. \square

4.2.1. Isometrías

Definición 4.15. Sea $f : E \rightarrow E'$ entre espacios métricos (E, d) y (E', d') . Decimos que f es una *isometría* si

$$d(x, y) = d'(f(x), f(y)) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Proposición 4.16. Sea $f : E \rightarrow E'$ una isometría. Entonces:

(I) f es inyectiva.

(II) f es 1-Lipschitz, luego uniformemente continua.

Demostración. (i) Si $f(x) = f(y)$, entonces

$$d(x, y) = d'(f(x), f(y)) = d'(f(x), f(x)) = 0,$$

lo que implica $x = y$. Por lo tanto, f es inyectiva.

(ii) De la definición de isometría se tiene directamente

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \leq 1 \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in E,$$

es decir, f es 1-Lipschitz. Por el teorema anterior, toda aplicación Lipschitz es uniformemente continua, así que f lo es. \square

Observación. Si $f : E \rightarrow E'$ es una isometría *biyectiva*, entonces su inversa $f^{-1} : E' \rightarrow E$ también es una isometría: para $u, v \in E'$, escribiendo $u = f(x)$ y $v = f(y)$ con $x, y \in E$, se tiene

$$d(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = d(x, y) = d'(f(x), f(y)) = d'(u, v).$$

En particular, f^{-1} también es uniformemente continua.

4.2.2. Homeomorfismos

Definición 4.17. Sea $f : E \rightarrow E'$ una función entre espacios métricos. Decimos que f es un *homeomorfismo* si:

- (I) f es biyectiva,
- (II) f es continua,
- (III) la inversa $f^{-1} : E' \rightarrow E$ es continua.

Definición 4.18. Dos espacios métricos (E, d) y (E', d') se dicen *homeomorfos* si existe un homeomorfismo $f : E \rightarrow E'$.

Proposición 4.19. Si $f : E \rightarrow E'$ es un homeomorfismo, entonces:

- (I) $G \subseteq E$ es abierto si y sólo si $f(G)$ es abierto en E' .
- (II) $F \subseteq E$ es cerrado si y sólo si $f(F)$ es cerrado en E' .

Demostración. (i) Si G es abierto en E y f es continua, entonces $f(G)$ es abierto en E' si y sólo si f^{-1} es continua, porque $G = f^{-1}(f(G))$ y f^{-1} es continua por hipótesis.

Formalmente: como f es biyectiva, $G = f^{-1}(H)$ para $H = f(G)$. La continuidad de f^{-1} implica que, si H es abierto en E' , entonces G es abierto en E . Inversamente, dado G abierto en E , $H = f(G)$ es abierto en E' porque H es la imagen inversa de un abierto por f^{-1} (que es continua).

(ii) Se deduce de (i) aplicando el resultado a los complementos: F es cerrado en E si y sólo si $E \setminus F$ es abierto, y la imagen por f de $E \setminus F$ es el complemento de $f(F)$ en E' . \square

Observación. En general, una aplicación biyectiva y continua *no* tiene por qué tener inversa continua, es decir, no todo biectivo continuo es un homeomorfismo. El requisito f^{-1} continua es esencial en la definición.

4.2.3. Conjuntos densos

Definición 4.20. Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subseteq E$ se dice *denso en E* si

$$\overline{D} = E.$$

Equivalente: todo punto de E es límite de una sucesión de puntos de D .

Proposición 4.21. Sea (E, d) un espacio métrico y $D \subseteq E$. Son equivalentes:

- (I) D es denso en E , es decir, $\overline{D} = E$.
- (II) Para todo abierto no vacío $G \subseteq E$ se cumple

$$G \cap D \neq \emptyset.$$

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$) Supongamos $\overline{D} = E$. Sea G un abierto no vacío en E . Como $G \subseteq E = \overline{D}$, y G es abierto, se cumple $G \cap D \neq \emptyset$ (porque todo abierto que intersecta la clausura de un conjunto debe intersectar al conjunto mismo).

Más formalmente: si $G \cap D = \emptyset$, entonces $G \subseteq E \setminus D$, y el complemento $E \setminus D$ sería un cerrado que contiene a G , contradiciendo que $G \subseteq \overline{D}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$) Supongamos que todo abierto no vacío G verifica $G \cap D \neq \emptyset$. Si existiera $x \in E \setminus \overline{D}$, entonces x estaría en el abierto $E \setminus \overline{D}$, que por definición de clausura no intersecta a D . Esto contradice (ii). Por lo tanto, $E \setminus \overline{D} = \emptyset$, es decir, $\overline{D} = E$. \square