Demostraciones Análisis Avanzado

Lucas Dowhyj

Índice

1. Unidad 1: Infimo, supremo y sucesiones

1.1. Axioma de completitud

Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, existe $\sup A$.
Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente, existe $\inf A$.

1.2. Infimo

Sea $A \subset \mathbb{R}$, no vacío y acotado inferiormente.

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \leq a & \text{para todo } a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \text{ tal que } i \leq a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $i = \inf A$.

(i) Como i es el ínfimo de A, por definición i es cota inferior de A. Es decir, para todo $a \in A$ se cumple $i \leq a$.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos, buscando una contradicción, que no existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$. Entonces, para todo $a \in A$ se cumple $a \geq i + \varepsilon$, de modo que $i + \varepsilon$ es una cota inferior de A. Como además $\varepsilon > 0$, tenemos

$i + \varepsilon > i$, lo que contradice que i es la mayor de las cotas inferiores de A. Por lo tanto, debe existir $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$.

Recíprocamente, supongamos que se verifican: (i) $i \leq a$ para todo $a \in A$; (ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$.

De (i) se sigue que i es cota inferior de A. Sea i' otra cota inferior de A. Queremos ver que $i' \leq i$. Supongamos, buscando una contradicción, que $i' > i$. Sea $\varepsilon = i' - i > 0$. Por (ii) existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$. Como $i + \varepsilon = i'$, obtenemos $a < i'$, lo cual contradice que i' es cota inferior de A. Por lo tanto $i' \leq i$ y, en consecuencia, $i = \text{ínf}\, A$. □

1.3. Supremo

Sea $A \subset \mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente.

$$s = \sup A \iff \begin{cases} s \geq a & \text{para todo } a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \text{ tal que } s - \varepsilon < a \leq s. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $s = \sup A$.

(i) Como s es el supremo de A, por definición s es cota superior de A. Es decir, para todo $a \in A$ se cumple $a \leq s$.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos, buscando una contradicción, que no existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$. Entonces, para todo $a \in A$ se cumple $a \leq s - \varepsilon$, y por lo tanto $s - \varepsilon$ es una cota superior de A. Como además $\varepsilon > 0$, tenemos $s - \varepsilon < s$, lo que contradice que s es la menor de las cotas superiores de A. Por lo tanto, debe existir $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

Supongamos que se cumplen:
(i) $a \leq s$ para todo $a \in A$
(ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

Entonces (i) dice que s es cota superior de A. Sea ahora s' otra cota superior de A. Queremos ver que $s \leq s'$. Supongamos, buscando una contradicción, que $s' < s$. Sea $\varepsilon = s - s' > 0$. Por (ii) existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$. Como $s - \varepsilon = s'$, obtenemos $s' < a$, lo cual contradice que s' es cota superior de A. Por lo tanto $s \leq s'$ y, en consecuencia, $s = \sup A$. □

1.4. Principio de Arquímedes

Versión 1

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \leq n.$$

Demostración. Supongamos por el absurdo que el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ está acotado superiormente. Como $\mathbb{N}$ es no vacío, por el axioma de completitud existe $s = \sup \mathbb{N}$.

Tomamos $\varepsilon = 1$. Por la propiedad caracterizadora del supremo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$s - 1 < n \leq s.$$
De $s - 1 < n$ se sigue que $n + 1 > s$. Como $n \in \mathbb{N}$, también $n + 1 \in \mathbb{N}$, y por lo tanto hemos encontrado un número natural estrictamente mayor que s, lo que contradice que s sea cota superior de $\mathbb{N}$.

Esta contradicción muestra que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente, es decir, para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$. En particular, dado $x \in \mathbb{R}$, tomando $M = x$ obtenemos un $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq x$, que es justamente lo que afirma la versión 1. □

Versión 2

$$\forall y > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 < \frac{1}{n} < y.$$

Demostración. Sea $y > 0$. Por la Versión 1 del principio de Arquímedes aplicada a $x = 1/y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$n > \frac{1}{y}.$$
Como $n > 0$, al invertir la desigualdad obtenemos
$$0 < \frac{1}{n} < y.$$
Por lo tanto, para todo $y > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < y$, como queríamos demostrar. □

1.5. Sucesiones

Proposición 1.1. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real y sea $l \in \mathbb{R}$ tal que*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$
Entonces la sucesión (a_n) está acotada.

Demostración. Por hipótesis, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Esto significa que
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N : \ |a_n - l| < \varepsilon.$$

Tomamos ahora $\varepsilon = 1$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple
$$|a_n - l| < 1.$$

Por la desigualdad triangular,

$$|a_n| = |(a_n - l) + l| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$$

para todo $n \geq N$. Es decir, para todos los índices grandes,

$$|a_n| \leq |l| + 1.$$

Consideremos ahora los primeros términos de la sucesión:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}.$$

Se trata de un conjunto finito de números reales, por lo que el conjunto

$$\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|\}$$

tiene un máximo. Sea

$$M_0 = \text{máx}\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|\}$$

(en el caso $N = 1$ podemos tomar, por ejemplo, $M_0 = 0$).

Definimos ahora

$$M = \text{máx}\{M_0,\ |l| + 1\}.$$

Entonces:

- Si $n < N$, se cumple $|a_n| \leq M_0 \leq M$.
- Si $n \geq N$, se cumple $|a_n| \leq |l| + 1 \leq M$.

En ambos casos obtenemos

$$|a_n| \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, la sucesión (a_n) está acotada. □

Proposición 1.2. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real monótona creciente y acotada superiormente. Sea*

$$s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s.$$

Demostración. Como (a_n) está acotada superiormente, el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

tiene supremo $s \in \mathbb{R}$.

Queremos probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ |a_n - s| < \varepsilon.$$

Sea entonces $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por la propiedad caracterizadora del supremo aplicada al conjunto A, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$s - \varepsilon < a_N \leq s.$$

Como la sucesión (a_n) es monótona creciente, se cumple

$$a_N \leq a_n \leq s \quad \text{para todo } n \geq N.$$

De $a_n \leq s$ obtenemos $a_n - s \leq 0$, luego

$$|a_n - s| = s - a_n.$$

Además, de $a_N \leq a_n$ se sigue

$$s - a_n \leq s - a_N.$$

Juntando estas desigualdades,

$$|a_n - s| = s - a_n \leq s - a_N < s - (s - \varepsilon) = \varepsilon$$

para todo $n \geq N$.

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ encontramos $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $|a_n - s| < \varepsilon$, y esto significa exactamente que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. □

Proposición 1.3. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real monótona decreciente y acotada inferiormente. Sea*

$$i = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = i.$$

Demostración. Como (a_n) está acotada inferiormente, el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

tiene ínfimo $i \in \mathbb{R}$.

Queremos probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = i$, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \ |a_n - i| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por la propiedad caracterizadora del ínfimo aplicada al conjunto A, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$i \leq a_N < i + \varepsilon.$$

Como la sucesión (a_n) es monótona decreciente, se cumple

$$i \leq a_n \leq a_N \quad \text{para todo } n \geq N.$$

De $a_n \geq i$ se obtiene $a_n - i \geq 0$, luego

$$|a_n - i| = a_n - i.$$

Además, de $a_n \leq a_N$ se sigue

$$a_n - i \leq a_N - i.$$

Por lo tanto,

$$|a_n - i| = a_n - i \leq a_N - i < (i + \varepsilon) - i = \varepsilon$$

para todo $n \geq N$.

Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ encontramos $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $|a_n - i| < \varepsilon$, lo cual prueba que $\lim_{n\to\infty} a_n = i$. $\square$

Proposición 1.4 (Equivalencia del supremo). *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente, y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$s = \sup A$$

si y sólo si se cumplen:

(i) s es cota superior de A, es decir, $a \leq s$ para todo $a \in A$;

(ii) existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \in A$ para todo n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s.$$

Demostración. Supongamos primero que $s = \sup A$. Entonces, por definición de supremo, s es cota superior de A, con lo cual se cumple (i).

Nos queda probar (ii). Usamos la caracterización del supremo que ya vimos: para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que

$$s - \varepsilon < a \leq s.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicamos esta propiedad con $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Obtenemos así un elemento $a_n \in A$ tal que

$$s - \frac{1}{n} < a_n \leq s.$$

Esto define una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A.

Veamos ahora que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Entonces, si $n \geq N$, se tiene $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$, y por la construcción de (a_n) se cumple

$$s - \frac{1}{n} < a_n \leq s.$$

De aquí, $s - \varepsilon = s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$, luego

$$0 \leq s - a_n < \varepsilon,$$

lo que implica

$$|a_n - s| = s - a_n < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; |a_n - s| < \varepsilon,$$

es decir, $\lim_{n \to \infty} a_n = s$. Esto prueba (ii).

Recíprocamente, supongamos que se cumplen (i) y (ii). Entonces s es cota superior de A. Para ver que $s = \sup A$, basta probar que s es la menor de las cotas superiores de A. Sea M otra cota superior de A. Queremos ver que $s \leq M$.

Supongamos, buscando una contradicción, que $s > M$. Definimos

$$\varepsilon = \frac{s - M}{2} > 0.$$

Como $\lim_{n \to \infty} a_n = s$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, se cumple

$$|a_n - s| < \varepsilon.$$

En particular, para $n \geq N$ tenemos

$$a_n > s - \varepsilon = s - \frac{s - M}{2} = \frac{2s - s + M}{2} = \frac{s + M}{2}.$$

Pero, como $s > M$, se tiene

$$\frac{s + M}{2} > M,$$

de modo que

$$a_n > \frac{s + M}{2} > M$$

para todo $n \geq N$. Sin embargo, $a_n \in A$ y M es cota superior de A, luego debería cumplirse $a_n \leq M$ para todo n, lo que contradice la desigualdad anterior.

Esta contradicción muestra que no puede ocurrir $s > M$, por lo que necesariamente $s \leq M$. Como M era una cota superior cualquiera de A, concluimos que s es la menor de las cotas superiores de A, es decir, $s = \sup A$.

Queda así demostrada la equivalencia. $\square$

Proposición 1.5. *Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión real y sea $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de (a_n), donde $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Si*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l,$$

entonces

$$\lim_{j \to \infty} a_{n_j} = l.$$

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Por definición de límite, esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N : \ |a_n - l| < \varepsilon.$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$ fijo. Por la hipótesis anterior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \ \Rightarrow \ |a_n - l| < \varepsilon.$$

Como $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, podemos elegir $J \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_J \geq N.$$

Entonces, para todo $j \geq J$ se tiene

$$n_j \geq n_J \geq N.$$

Aplicando la propiedad de arriba a $n = n_j$, obtenemos

$$|a_{n_j} - l| < \varepsilon \quad \text{para todo } j \geq J.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists J \in \mathbb{N} \ \forall j \geq J : \ |a_{n_j} - l| < \varepsilon,$$

lo cual significa exactamente que

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = l.$$

□

2. Unidad 2: Cardinalidad

2.1. Conjuntos coordinables y cardinal

Definición 2.1. Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que son *coordinables* (o *equipotentes*, o que tienen el mismo cardinal) si existe una función biyectiva $f : X \to Y$. En este caso escribimos

$$X \sim Y.$$

Proposición 2.2. *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia en la clase de todos los conjuntos.*

Demostración. Debemos probar que la relación $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexividad. Sea X un conjunto cualquiera. Consideramos la función identidad

$$\mathrm{id}_X : X \to X, \quad \mathrm{id}_X(x) = x.$$

La función identidad es inyectiva (si $\mathrm{id}_X(x) = \mathrm{id}_X(y)$, entonces $x = y$) y sobreyectiva (para todo $x \in X$ existe $x \in X$ tal que $\mathrm{id}_X(x) = x$). Luego es biyectiva, y por la definición de $\sim$ se tiene $X \sim X$. Por lo tanto, $\sim$ es reflexiva.

Simetría. Sean X e Y conjuntos tales que $X \sim Y$. Por definición, existe una biyección $f : X \to Y$. Toda función biyectiva tiene inversa $f^{-1} : Y \to X$, y dicha inversa es también biyectiva. Por lo tanto, existe una biyección de Y en X, es decir, $Y \sim X$. Luego, $\sim$ es simétrica.

Transitividad. Sean X, Y, Z conjuntos tales que $X \sim Y$ y $Y \sim Z$. Entonces existen biyecciones

$$f : X \to Y, \qquad g : Y \to Z.$$

Consideramos la composición

$$g \circ f : X \to Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Como composición de funciones biyectivas, $g \circ f$ es también biyectiva: la composición de funciones inyectivas es inyectiva y la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva. En consecuencia, existe una biyección de X en Z, es decir, $X \sim Z$. Esto muestra que $\sim$ es transitiva.

Como $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva, concluimos que $\sim$ es una relación de equivalencia. $\square$

Definición 2.3. Definimos el *cardinal* de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = \mathrm{Card}(X) := \{Y \mid X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales les damos nombres especiales:

- $\#\mathbb{N} = \aleph_0$ (cardinal numerable),
- $\#\mathbb{R} = \mathfrak{c}$ (el *continuo*),
- $\#\{1, 2, \ldots, n\} = n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.4. Para $n \in \mathbb{N}$, llamamos

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$$

al *intervalo inicial* del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

Definición 2.5. Un conjunto A es *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \sim I_n.$$

Definición 2.6. Un conjunto A es *infinito* si no es finito.

Definición 2.7. Un conjunto A es *numerable* si $A \sim \mathbb{N}$. Equivalente y simbólicamente, si

$$\#A = \aleph_0.$$

Definición 2.8. Decimos que un conjunto A es *a lo sumo numerable* (o *contable*) si es finito o numerable. Es decir, A es a lo sumo numerable si cumple

$$A \sim I_n \quad \text{para algún } n \in \mathbb{N} \quad \text{o bien} \quad A \sim \mathbb{N}.$$

Proposición 2.9. *Sea A un conjunto numerable y sea $B \subseteq A$. Entonces B es a lo sumo numerable.*

Demostración. Si B es finito, por definición ya es a lo sumo numerable y no hay nada que probar. Supongamos entonces que B es infinito. Veremos que en ese caso B es numerable.

Como A es numerable, por definición existe una biyección

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A.$$

Consideremos la sucesión $(f(1), f(2), f(3), \dots)$ de elementos de A y vamos a "extraer" de ella una enumeración de los elementos de B.

Definimos, por inducción, una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturales de la siguiente manera.

En primer lugar, como B es infinito, en particular es no vacío y existe algún $b_1 \in B$. Como f es sobreyectiva, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n_1) = b_1$. Además, podemos elegir n_1 como el mínimo de los naturales n que satisfacen $f(n) \in B$:

$$n_1 = \operatorname{mín}\{\, n \in \mathbb{N} : f(n) \in B \,\}.$$

Este mínimo existe porque el conjunto entre llaves es no vacío y está contenido en $\mathbb{N}$.

Supuesto definido n_k para algún $k \in \mathbb{N}$, definimos n_{k+1} así. Como B es infinito, el conjunto

$$B_k := B \setminus \{f(n_1), f(n_2), \dots, f(n_k)\}$$

no es vacío (si fuera vacío, B tendría a lo sumo k elementos y sería finito). Entonces existe $b_{k+1} \in B_k$. Nuevamente, como f es sobreyectiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = b_{k+1}$. Además, podemos elegir m de manera que $m > n_k$ (basta tomar algún índice de b_{k+1} mayor que todos $n_1, \dots, n_k$). Definimos

$$n_{k+1} = \operatorname{mín}\{\, n \in \mathbb{N} : n > n_k,\ f(n) \in B_k \,\}.$$

Este mínimo existe porque el conjunto entre llaves es no vacío y contenido en los naturales mayores que n_k. De la definición se deduce que

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots,$$

es decir, (n_k) es estrictamente creciente.

Definimos ahora una función

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow B, \qquad g(k) = f(n_k).$$

Veamos que g es biyectiva.

Inyectividad. Sean $k, \ell \in \mathbb{N}$ tales que $g(k) = g(\ell)$, es decir, $f(n_k) = f(n_\ell)$. Como f es inyectiva, se sigue que $n_k = n_\ell$. Pero la sucesión (n_k) es estrictamente creciente, luego de $n_k = n_\ell$ se deduce $k = \ell$. Por lo tanto, g es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $b \in B$. Como f es sobreyectiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = b$. En el proceso de construcción de la sucesión (n_k), en algún paso k el elemento b aparece por primera vez entre los valores de f; es decir, existe un único k tal que n_k es el mínimo índice con $f(n_k) = b$ y $n_k > n_{k-1}$ (para $k = 1$ entendemos que no hay condición anterior). Por la definición de g, se tiene entonces

$$g(k) = f(n_k) = b.$$

De este modo, para todo $b \in B$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(k) = b$, y por lo tanto g es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección $g : \mathbb{N} \to B$, lo cual muestra que B es numerable. Recordando que al principio separamos el caso en que B es finito, concluimos que, en todos los casos, B es a lo sumo numerable. $\square$

Teorema 2.10. *Sea A un conjunto infinito. Entonces existe un subconjunto $B \subseteq A$ tal que B es numerable.*

Demostración. Como A es infinito, en particular es no vacío, de modo que podemos elegir un elemento $a_1 \in A$.

Supondremos construidos elementos distintos $a_1, \dots, a_n \in A$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto

$$F_n = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Si $A \setminus F_n$ fuera vacío, tendríamos $A = F_n$, es decir, A sería finito, lo cual contradice la hipótesis de que A es infinito. Por lo tanto,

$$A \setminus F_n \neq \varnothing,$$

y podemos elegir un elemento

$$a_{n+1} \in A \setminus F_n.$$

En particular, $a_{n+1} \in A$ y $a_{n+1} \notin \{a_1, \dots, a_n\}$, por lo que los elementos $a_1, \dots, a_{n+1}$ siguen siendo todos distintos.

De este modo, por inducción, obtenemos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tales que

$$a_n \neq a_m \quad \text{si } n \neq m.$$

Definimos ahora

$$B = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Claramente $B \subseteq A$, por construcción.

Consideremos la función

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow B, \qquad f(n) = a_n.$$

Inyectividad. Si $f(n) = f(m)$, entonces $a_n = a_m$, y como la sucesión (a_n) tiene todos sus términos distintos, se sigue que $n = m$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $b \in B$. Por definición de B, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b = a_n$. Entonces $f(n) = a_n = b$, de modo que todo elemento de B es imagen de algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, f es sobreyectiva.

Concluimos que $f : \mathbb{N} \to B$ es una biyección, es decir, B es numerable. Como además $B \subseteq A$, hemos encontrado un subconjunto numerable de A, tal como queríamos. $\square$

2.2. Orden entre cardinales

Recordemos que, por definición,

$$\#A = \#B \iff A \sim B$$

es decir, si y sólo si existe una biyección $f : A \to B$.

Definición 2.11. Sean X e Y conjuntos. Decimos que

$$\#X \leq \#Y$$

si existe una función inyectiva $f : X \to Y$.

Definición 2.12. Decimos que

$$\#X < \#Y$$

si se cumplen:

(i) $\#X \leq \#Y$, es decir, existe una inyección $f : X \to Y$;

(ii) $X \not\sim Y$, es decir, no existe biyección entre X e Y.

Proposición 2.13. *Sean X e Y conjuntos. Existe una función inyectiva $f : X \to Y$ si y sólo si existe una función sobreyectiva $g : Y \to X$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que existe una función inyectiva $f : X \to Y$. Distinguimos dos casos.

Si $X = \varnothing$, entonces f es la única función posible $\varnothing \to Y$. En este caso, la única función de Y a X es la función vacía $g : Y \to \varnothing$, que es sobreyectiva sólo si $Y = \varnothing$. En muchas aplicaciones se descarta el caso trivial $X = \varnothing$, así que supongamos ahora que $X \neq \varnothing$.

Como $X \neq \varnothing$, elegimos un elemento fijo $x_0 \in X$. Definimos $g : Y \to X$ de la siguiente manera:

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{si existe } x \in X \text{ tal que } f(x) = y, \\ x_0 & \text{si no existe tal } x. \end{cases}$$

La inyectividad de f garantiza que, cuando y está en la imagen de f, el elemento x tal que $f(x) = y$ es único, de modo que g está bien definida.

Veamos que g es sobreyectiva. Sea $x \in X$. Como f es función de X en Y, tenemos $f(x) \in Y$, y por definición de g,

$$g(f(x)) = x.$$

Luego todo $x \in X$ es imagen de algún elemento de Y (por ejemplo, de $f(x)$), y por lo tanto g es sobreyectiva.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que existe una función sobreyectiva $g : Y \to X$. Para cada $x \in X$ consideremos el conjunto de sus preimágenes:

$$Y_x = \{\, y \in Y : g(y) = x \,\}.$$

Como g es sobreyectiva, Y_x es no vacío para todo $x \in X$.

Elegimos, para cada $x \in X$, un elemento $y_x \in Y_x$ (es decir, $g(y_x) = x$), y definimos

$$f : X \to Y, \qquad f(x) = y_x.$$

Probemos que f es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces

$$y_{x_1} = y_{x_2}.$$

Aplicando g a ambos lados obtenemos

$$g(y_{x_1}) = g(y_{x_2}),$$

es decir,

$$x_1 = x_2,$$

ya que por definición de y_x se cumple $g(y_x) = x$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Hemos probado en un sentido que de una inyectiva $X \to Y$ obtenemos una sobreyectiva $Y \to X$, y en el otro que de una sobreyectiva $Y \to X$ obtenemos una inyectiva $X \to Y$. Esto completa la demostración. $\square$

2.3. Conjunto de partes y teorema de Cantor

Definición 2.14. Dado un conjunto X, llamamos *conjunto de partes* de X al conjunto

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}.$$

Teorema 2.15 (Cantor)**.** *Sea X un conjunto. Entonces*

$$\#X < \#\mathcal{P}(X).$$

Demostración. Recordemos que, por la definición de orden entre cardinales,

$$\#X < \#\mathcal{P}(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{existe una inyección } f : X \to \mathcal{P}(X), \\ \text{no existe biyección entre } X \text{ y } \mathcal{P}(X). \end{cases}$$

(1) Existe una inyección $X \to \mathcal{P}(X)$.
Definimos

$$f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X), \qquad f(x) = \{x\}.$$

Claramente $f(x) \subseteq X$ para todo x, luego $f(x) \in \mathcal{P}(X)$. Si $f(x) = f(y)$, entonces $\{x\} = \{y\}$ y por lo tanto $x = y$. Así, f es inyectiva, y obtenemos

$$\#X \leq \#\mathcal{P}(X).$$

(2) No existe biyección entre X y $\mathcal{P}(X)$.
Basta ver que *no existe ninguna función sobreyectiva* $g : X \to \mathcal{P}(X)$.
Procedemos por absurdo. Supongamos que existe una función

$$g : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

sobreyectiva. Consideremos el subconjunto

$$B = \{x \in X : x \notin g(x)\}.$$

Por definición, $B \subseteq X$, de modo que $B \in \mathcal{P}(X)$.

Como g es sobreyectiva, debe existir algún elemento $a \in X$ tal que

$$g(a) = B.$$

Estudiemos ahora si a pertenece o no a B:

- Supongamos que $a \in B$. Por la definición de B, esto significa que $a \notin g(a)$. Pero $g(a) = B$, luego $a \notin B$, lo que contradice $a \in B$.

- Supongamos que $a \notin B$. Entonces, por la definición de B, se tiene $a \in g(a)$. Como $g(a) = B$, esto implica $a \in B$, contradiciendo $a \notin B$.

En ambos casos llegamos a una contradicción. Por lo tanto, nuestra suposición inicial es falsa: no existe función sobreyectiva $g : X \to \mathcal{P}(X)$.

Concluimos que no existe biyección entre X y $\mathcal{P}(X)$. Junto con (1), esto implica

$$\#X < \#\mathcal{P}(X),$$

como queríamos demostrar. □

2.4. Suma y resta de conjuntos numerables

Proposición 2.16. *Sea X un conjunto infinito. Entonces existe un subconjunto $Z \subset X$, con Z numerable, tal que*

$$X \sim X \setminus Z.$$

Demostración. Como X es infinito, por el teorema anterior existe un subconjunto numerable infinito $C \subset X$. Como C es numerable, existe una biyección

$$\varphi : \mathbb{N} \to C.$$

Escribimos $c_n = \varphi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que

$$C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}.$$

Definimos ahora dos subconjuntos disjuntos de C:

$$Z = \{c_{2n} : n \in \mathbb{N}\}, \qquad D = \{c_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces $C = D \cup Z$ y $D \cap Z = \varnothing$. Además, tanto D como Z son numerables (son imágenes de $\mathbb{N}$ por las aplicaciones $n \mapsto c_{2n-1}$ y $n \mapsto c_{2n}$, respectivamente).

Sea

$$Y = X \setminus C.$$

Entonces tenemos una partición

$$X = Y \cup D \cup Z \quad \text{(unión disjunta)}.$$

Por otra parte,

$$X \setminus Z = Y \cup D.$$

Definimos una aplicación $f : X \to X \setminus Z$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in Y \cup D, \\ c_{2n-1}, & \text{si } x = c_{2n} \in Z \text{ para algún } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Veamos que f es biyectiva.

Inyectividad. - Si $x_1, x_2 \in Y \cup D$ y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$ porque f actúa como la identidad en $Y \cup D$.

- Si $x_1 = c_{2n_1}$ e $x_2 = c_{2n_2}$ pertenecen a Z y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$c_{2n_1-1} = f(c_{2n_1}) = f(c_{2n_2}) = c_{2n_2-1},$$

de donde $2n_1 - 1 = 2n_2 - 1$ y luego $n_1 = n_2$, es decir $x_1 = x_2$.

- No puede ocurrir que $x_1 \in Y \cup D$ y $x_2 \in Z$ tengan la misma imagen, porque las imágenes de $Y \cup D$ están en $Y \cup D$ y las de Z están contenidas en D; pero Y y D son disjuntos.

En todos los casos, de $f(x_1) = f(x_2)$ se deduce $x_1 = x_2$, luego f es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $y \in X \setminus Z = Y \cup D$.

- Si $y \in Y$, entonces $f(y) = y$, así que y es imagen de sí mismo.

- Si $y \in D$, digamos $y = c_{2n-1}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(c_{2n}) = c_{2n-1} = y$, de modo que y es imagen de $c_{2n} \in Z$.

En consecuencia, todo elemento de $X \setminus Z$ es imagen de algún elemento de X, y f es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección $f : X \to X \setminus Z$ con $Z \subset X$ numerable, por lo que $X \sim X \setminus Z$. □

Proposición 2.17. *Sea B un conjunto y sea A un conjunto numerable. Suponemos que $B \setminus A$ es infinito. Entonces*

$$B \sim B \setminus A.$$

Demostración. Podemos reemplazar A por $A \cap B$, que sigue siendo numerable y cumple

$$B \setminus (A \cap B) = B \setminus A.$$

Por simplicidad, suponemos desde ahora que $A \subseteq B$.

Como A es numerable, existe una biyección

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \to A,$$

es decir, podemos escribir

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Por hipótesis, $B \setminus A$ es infinito. Entonces, por el teorema "conjunto infinito contiene un subconjunto numerable", existe un subconjunto numerable infinito

$$C \subseteq B \setminus A.$$

Tomamos una biyección

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \to C, \quad C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}.$$

Definimos ahora una aplicación $f : B \to B \setminus A$ por:

$$f(x) = \begin{cases} c_n, & \text{si } x = a_n \in A \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ x, & \text{si } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Observemos primero que f está bien definida: si $x \in A$, entonces $f(x) = c_n \in C \subseteq B \setminus A$; si $x \in B \setminus A$, entonces $f(x) = x \in B \setminus A$. En cualquier caso, $f(x) \in B \setminus A$.

Inyectividad. - Si $x_1, x_2 \in B \setminus A$ y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$ porque f actúa como la identidad en $B \setminus A$.

- Si $x_1 = a_n$ y $x_2 = a_m$ pertenecen a A y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $c_n = c_m$, y como la sucesión (c_n) tiene todos sus términos distintos, se sigue $n = m$ y por lo tanto $x_1 = x_2$.

- No puede ocurrir que $x_1 \in A$ y $x_2 \in B \setminus A$ tengan la misma imagen, porque $f(x_1) \in C \subseteq B \setminus A$, mientras que $f(x_2) = x_2 \in B \setminus A \setminus C$, y C es disjunto de $B \setminus A \setminus C$.

En consecuencia, f es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $y \in B \setminus A$. Distinguimos dos casos:

- Si $y \in B \setminus (A \cup C)$, entonces $f(y) = y$, de modo que y es imagen de sí mismo.

- Si $y \in C$, digamos $y = c_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(a_n) = c_n = y$, de modo que y es imagen de $a_n \in A$.

Por lo tanto, todo elemento de $B \setminus A$ es imagen de algún elemento de B, y f es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección $f : B \to B \setminus A$, lo cual prueba que $B \sim B \setminus A$. $\square$

Proposición 2.18. *Sea X un conjunto infinito y sea A un conjunto numerable. Entonces*

$$X \sim X \cup A.$$

Demostración. Si $A \subseteq X$, entonces $X \cup A = X$ y la afirmación es trivial. Supongamos, por lo tanto, que A no está contenido en X. Definimos

$$A_0 = A \setminus X,$$

que es el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a X. Como A es numerable, también A_0 es numerable (subconjunto de un numerable). Además,

$$X \cup A = X \cup A_0$$

y la unión es disjunta, ya que $A_0 \cap X = \varnothing$.

Notemos que X es infinito, luego el conjunto $X \cup A_0$ también es infinito. Consideremos ahora el conjunto

$$B = X \cup A_0.$$

Entonces A_0 es numerable y

$$B \setminus A_0 = X.$$

Como X es infinito, también $B \setminus A_0$ es infinito. Podemos aplicar la proposición anterior con $A = A_0$ y este conjunto B: obtenemos

$$B \sim B \setminus A_0.$$

Pero $B = X \cup A_0$ y $B \setminus A_0 = X$, por lo que

$$X \cup A_0 \sim X.$$

Como $X \cup A = X \cup A_0$, concluimos que

$$X \cup A \sim X.$$

Por simetría de la relación de equipotencia, también escribimos $X \sim X \cup A$, como queríamos. $\square$

Corolario 2.19. *Un conjunto X es infinito si y sólo si es coordinable con un subconjunto propio suyo, es decir, si y sólo si existe $Y \subsetneq X$ tal que $X \sim Y$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que X es infinito. Por la proposición anterior, existe un subconjunto numerable $Z \subset X$ tal que $X \sim X \setminus Z$. Como $Z \neq \varnothing$ (pues es numerable) y $Z \subset X$, se tiene $X \setminus Z \subsetneq X$. Por lo tanto, X es coordinable con el subconjunto propio $X \setminus Z$.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que existe un subconjunto propio $Y \subsetneq X$ tal que $X \sim Y$. Procedamos por absurdo: supongamos que X es finito. Sea $n = \#X$. Entonces $X \sim I_n$. Como Y es subconjunto propio de X, tiene un número m de elementos con $m < n$, de modo que $Y \sim I_m$.

Por transitividad de la relación de equipotencia, tendríamos

$$I_n \sim X \sim Y \sim I_m,$$

de donde se seguiría $I_n \sim I_m$. Pero por el teorema anterior, $I_n \sim I_m$ implica $n = m$, lo cual contradice $m < n$. Esta contradicción muestra que X no puede ser finito, luego X es infinito. $\square$

Teorema 2.20 (Cantor–Schröder–Bernstein). *Sean X e Y dos conjuntos. Si existe una función inyectiva $f : X \to Y$ y una función inyectiva $g : Y \to X$, entonces X e Y son coordinables, es decir, existe una biyección $h : X \to Y$.*

Equivalentemente, en términos de cardinales:

$$\#X \leq \#Y \text{ y } \#Y \leq \#X \quad \Longrightarrow \quad \#X = \#Y.$$

Lema 2.21. *El producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.*

Demostración. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(m, n) = 2^m 3^n.$$

Por el teorema fundamental de la aritmética, todo número natural tiene una única factorización en primos, de modo que distintos pares (m, n) producen distintos números $2^m 3^n$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Como hemos construido una inyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, se sigue que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es a lo sumo numerable. Además, es infinito, por lo que es numerable. $\square$

Teorema 2.22. *Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos numerables. Entonces la unión*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

es a lo sumo numerable. En particular, si A es infinita, entonces A es numerable.

Demostración. Como cada A_n es numerable, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una biyección

$$f_n : \mathbb{N} \to A_n.$$

Escribimos $a_{n,k} = f_n(k)$, de modo que

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \dots\}.$$

Definimos ahora una aplicación

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A, \qquad F(n,k) = a_{n,k}.$$

Para todo $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se tiene $a_{n,k} \in A_n \subseteq A$, luego F está bien definida. Además, por la definición de A, todo elemento de A es de la forma $a_{n,k}$ para algún $n, k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto F es sobreyectiva.

Por el lema anterior, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Entonces existe una biyectiva

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Consideremos la composición

$$h = F \circ g : \mathbb{N} \to A.$$

Como composición de una biyección con una sobreyección, h sigue siendo sobreyectiva: para todo $a \in A$ existe $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $F(n,k) = a$, y como g es biyectiva, existe $m \in \mathbb{N}$ con $g(m) = (n,k)$; entonces

$$h(m) = (F \circ g)(m) = F(n,k) = a.$$

Así hemos construido una función sobreyectiva $h : \mathbb{N} \to A$. Por la proposición que relaciona inyecciones y sobreyecciones entre cardinales, esto implica que A es a lo sumo numerable.

Si además A es infinito, por definición de "a lo sumo numerable" resulta que A es numerable. □