Demostraciones Análisis Avanzado

Lucas Dowhyj

Índice

1. Unidad 1: Infimo, supremo y sucesiones

1.1. Axioma de completitud

Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, existe $\sup A$.
Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente, existe $\inf A$.

1.2. Infimo

Sea $A \subset \mathbb{R}$, no vacío y acotado inferiormente.

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \leq a & \text{para todo } a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \text{ tal que } i \leq a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $i = \inf A$.

(i) Como i es el ínfimo de A, por definición i es cota inferior de A. Es decir, para todo $a \in A$ se cumple $i \leq a$.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos, buscando una contradicción, que no existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$. Entonces, para todo $a \in A$ se cumple $a \geq i + \varepsilon$, de modo que $i + \varepsilon$ es una cota inferior de A. Como además $\varepsilon > 0$, tenemos $i + \varepsilon > i$, lo que contradice que i es la mayor de las cotas inferiores de A. Por lo tanto, debe existir $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$.

Recíprocamente, supongamos que se verifican: (i) $i \leq a$ para todo $a \in A$; (ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$.

De (i) se sigue que i es cota inferior de A. Sea i' otra cota inferior de A. Queremos ver que $i' \leq i$. Supongamos, buscando una contradicción, que

$i' > i$. Sea $\varepsilon = i' - i > 0$. Por (ii) existe $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon$. Como $i + \varepsilon = i'$, obtenemos $a < i'$, lo cual contradice que i' es cota inferior de A. Por lo tanto $i' \leq i$ y, en consecuencia, $i = \inf A$. □

1.3. Supremo

Sea $A \subset \mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente.

$$s = \sup A \iff \begin{cases} s \geq a & \text{para todo } a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \text{ tal que } s - \varepsilon < a \leq s. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $s = \sup A$.

(i) Como s es el supremo de A, por definición s es cota superior de A. Es decir, para todo $a \in A$ se cumple $a \leq s$.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos, buscando una contradicción, que no existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$. Entonces, para todo $a \in A$ se cumple $a \leq s - \varepsilon$, y por lo tanto $s - \varepsilon$ es una cota superior de A. Como además $\varepsilon > 0$, tenemos $s - \varepsilon < s$, lo que contradice que s es la menor de las cotas superiores de A. Por lo tanto, debe existir $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

Supongamos que se cumplen:
(i) $a \leq s$ para todo $a \in A$
(ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

Entonces (i) dice que s es cota superior de A. Sea ahora s' otra cota superior de A. Queremos ver que $s \leq s'$. Supongamos, buscando una contradicción, que $s' < s$. Sea $\varepsilon = s - s' > 0$. Por (ii) existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$. Como $s - \varepsilon = s'$, obtenemos $s' < a$, lo cual contradice que s' es cota superior de A. Por lo tanto $s \leq s'$ y, en consecuencia, $s = \sup A$. □

1.4. Principio de Arquímedes

Versión 1

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \leq n.$$

Demostración. Supongamos por el absurdo que el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ está acotado superiormente. Como $\mathbb{N}$ es no vacío, por el axioma de completitud existe $s = \sup \mathbb{N}$.

Tomamos $\varepsilon = 1$. Por la propiedad caracterizadora del supremo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$s - 1 < n \leq s.$$

De $s - 1 < n$ se sigue que $n + 1 > s$. Como $n \in \mathbb{N}$, también $n + 1 \in \mathbb{N}$, y por lo tanto hemos encontrado un número natural estrictamente mayor que s, lo que contradice que s sea cota superior de $\mathbb{N}$.

Esta contradicción muestra que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente, es decir, para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$. En particular, dado $x \in \mathbb{R}$, tomando $M = x$ obtenemos un $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq x$, que es justamente lo que afirma la versión 1. $\square$

Versión 2

$$\forall y > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 < \frac{1}{n} < y.$$

Demostración. Sea $y > 0$. Por la Versión 1 del principio de Arquímedes aplicada a $x = 1/y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{y}.$$

Como $n > 0$, al invertir la desigualdad obtenemos

$$0 < \frac{1}{n} < y.$$

Por lo tanto, para todo $y > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < y$, como queríamos demostrar. $\square$

1.5. Sucesiones

Proposición 1.1. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real y sea $l \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

Entonces la sucesión (a_n) está acotada.

Demostración. Por hipótesis, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N : \ |a_n - l| < \varepsilon.$$

Tomamos ahora $\varepsilon = 1$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple

$$|a_n - l| < 1.$$

Por la desigualdad triangular,

$$|a_n| = |(a_n - l) + l| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$$

para todo $n \geq N$. Es decir, para todos los índices grandes,

$$|a_n| \leq |l| + 1.$$

Consideremos ahora los primeros términos de la sucesión:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}.$$

Se trata de un conjunto finito de números reales, por lo que el conjunto

$$\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|\}$$

tiene un máximo. Sea

$$M_0 = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|\}$$

(en el caso $N = 1$ podemos tomar, por ejemplo, $M_0 = 0$).

Definimos ahora

$$M = \max\{M_0,\ |l| + 1\}.$$

Entonces:

- Si $n < N$, se cumple $|a_n| \leq M_0 \leq M$.
- Si $n \geq N$, se cumple $|a_n| \leq |l| + 1 \leq M$.

En ambos casos obtenemos

$$|a_n| \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, la sucesión (a_n) está acotada. □

Proposición 1.2. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real monótona creciente y acotada superiormente. Sea*

$$s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s.$$

Demostración. Como (a_n) está acotada superiormente, el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

tiene supremo $s \in \mathbb{R}$.

Queremos probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ |a_n - s| < \varepsilon.$$

Sea entonces $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por la propiedad caracterizadora del supremo aplicada al conjunto A, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$s - \varepsilon < a_N \leq s.$$

Como la sucesión (a_n) es monótona creciente, se cumple

$$a_N \leq a_n \leq s \quad \text{para todo } n \geq N.$$

De $a_n \leq s$ obtenemos $a_n - s \leq 0$, luego

$$|a_n - s| = s - a_n.$$

Además, de $a_N \leq a_n$ se sigue

$$s - a_n \leq s - a_N.$$

Juntando estas desigualdades,

$$|a_n - s| = s - a_n \leq s - a_N < s - (s - \varepsilon) = \varepsilon$$

para todo $n \geq N$.

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ encontramos $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $|a_n - s| < \varepsilon$, y esto significa exactamente que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. ☐

Proposición 1.3. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión real monótona decreciente y acotada inferiormente. Sea*

$$i = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = i.$$

Demostración. Como (a_n) está acotada inferiormente, el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

tiene ínfimo $i \in \mathbb{R}$.

Queremos probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = i$, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \ |a_n - i| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por la propiedad caracterizadora del ínfimo aplicada al conjunto A, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$i \leq a_N < i + \varepsilon.$$

Como la sucesión (a_n) es monótona decreciente, se cumple

$$i \leq a_n \leq a_N \quad \text{para todo } n \geq N.$$

De $a_n \geq i$ se obtiene $a_n - i \geq 0$, luego

$$|a_n - i| = a_n - i.$$

Además, de $a_n \leq a_N$ se sigue

$$a_n - i \leq a_N - i.$$

Por lo tanto,

$$|a_n - i| = a_n - i \leq a_N - i < (i + \varepsilon) - i = \varepsilon$$

para todo $n \geq N$.

Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ encontramos $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $|a_n - i| < \varepsilon$, lo cual prueba que $\lim_{n\to\infty} a_n = i$. $\square$

Proposición 1.4 (Equivalencia del supremo)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente, y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$s = \sup A$$

si y sólo si se cumplen:

(i) s es cota superior de A, es decir, $a \leq s$ para todo $a \in A$;

(ii) existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \in A$ para todo n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s.$$

Demostración. Supongamos primero que $s = \sup A$. Entonces, por definición de supremo, s es cota superior de A, con lo cual se cumple (i).

Nos queda probar (ii). Usamos la caracterización del supremo que ya vimos: para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que

$$s - \varepsilon < a \leq s.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicamos esta propiedad con $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Obtenemos así un elemento $a_n \in A$ tal que

$$s - \frac{1}{n} < a_n \leq s.$$

Esto define una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A.

Veamos ahora que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Entonces, si $n \geq N$, se tiene $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$, y por la construcción de (a_n) se cumple

$$s - \frac{1}{n} < a_n \leq s.$$

De aquí, $s - \varepsilon = s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$, luego

$$0 \leq s - a_n < \varepsilon,$$

lo que implica

$$|a_n - s| = s - a_n < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \ |a_n - s| < \varepsilon,$$

es decir, $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. Esto prueba (ii).

Recíprocamente, supongamos que se cumplen (i) y (ii). Entonces s es cota superior de A. Para ver que $s = \sup A$, basta probar que s es la menor de las cotas superiores de A. Sea M otra cota superior de A. Queremos ver que $s \le M$.

Supongamos, buscando una contradicción, que $s > M$. Definimos

$$\varepsilon = \frac{s - M}{2} > 0.$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = s$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \ge N$, se cumple

$$|a_n - s| < \varepsilon.$$

En particular, para $n \ge N$ tenemos

$$a_n > s - \varepsilon = s - \frac{s - M}{2} = \frac{2s - s + M}{2} = \frac{s + M}{2}.$$

Pero, como $s > M$, se tiene

$$\frac{s + M}{2} > M,$$

de modo que

$$a_n > \frac{s + M}{2} > M$$

para todo $n \ge N$. Sin embargo, $a_n \in A$ y M es cota superior de A, luego debería cumplirse $a_n \le M$ para todo n, lo que contradice la desigualdad anterior.

Esta contradicción muestra que no puede ocurrir $s > M$, por lo que necesariamente $s \le M$. Como M era una cota superior cualquiera de A, concluimos que s es la menor de las cotas superiores de A, es decir, $s = \sup A$.

Queda así demostrada la equivalencia. $\square$

Proposición 1.5. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real y sea $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de (a_n), donde $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Si*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l,$$

entonces

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = l.$$

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Por definición de límite, esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \ge N:\ |a_n - l| < \varepsilon.$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$ fijo. Por la hipótesis anterior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |a_n - l| < \varepsilon.$$

Como $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, podemos elegir $J \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_J \geq N.$$

Entonces, para todo $j \geq J$ se tiene

$$n_j \geq n_J \geq N.$$

Aplicando la propiedad de arriba a $n = n_j$, obtenemos

$$|a_{n_j} - l| < \varepsilon \quad \text{para todo } j \geq J.$$

Por lo tanto,

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists J \in \mathbb{N} \; \forall j \geq J : \; |a_{n_j} - l| < \varepsilon,$$

lo cual significa exactamente que

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = l.$$

$\square$