

# Demostraciones Análisis Avanzado

Lucas Dowhyj

## Índice

<b>1. Unidad 1: Infimo, supremo y sucesiones</b>	<b>2</b>
1.1. Axioma de completitud . . . . .	2
1.2. Infimo . . . . .	2
1.3. Supremo . . . . .	3
1.4. Principio de Arquímedes . . . . .	3
1.5. Sucesiones . . . . .	4
<b>2. Unidad 2: Cardinalidad</b>	<b>9</b>
2.1. Conjuntos coordinables y cardinal . . . . .	9
2.2. Orden entre cardinales . . . . .	13
2.3. Conjunto de partes y teorema de Cantor . . . . .	14
2.4. Suma y resta de conjuntos numerables . . . . .	15
<b>3. Unidad 3: Espacios métricos</b>	<b>20</b>
3.1. Conjuntos abiertos . . . . .	20
3.2. Conjuntos cerrados . . . . .	24
3.3. Puntos de acumulación y frontera . . . . .	30
3.4. Métricas equivalentes . . . . .	34
3.5. Sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos . . . . .	37
<b>4. Unidad 4: Funciones continuas</b>	<b>39</b>
4.1. Definición y caracterizaciones de continuidad . . . . .	39
4.2. Continuidad uniforme . . . . .	44
4.2.1. Isometrías . . . . .	47
4.2.2. Homeomorfismos . . . . .	47
4.2.3. Conjuntos densos . . . . .	48
<b>5. Unidad 5: Compacidad</b>	<b>49</b>
5.1. Definiciones básicas . . . . .	49
5.2. Compacidad y puntos de acumulación . . . . .	50
5.3. Compacidad, completitud y total acotación . . . . .	51
5.4. Propiedades estructurales de compactos y T.T.A. . . . .	52
5.5. Funciones continuas sobre compactos . . . . .	53

<b>6. Unidad 6: Espacios normados</b>	<b>55</b>
<b>7. Unidad 7: Sucesiones de funciones</b>	<b>55</b>
7.1. Convergencia puntual y uniforme . . . . .	55
7.2. Límite uniforme de funciones continuas . . . . .	55
7.3. Pasaje al límite bajo el signo integral . . . . .	56
7.4. Convergencia de derivadas . . . . .	56
7.5. Sucesiones uniformemente de Cauchy . . . . .	57
<b>8. Unidad 8: Medida de Lebesgue</b>	<b>58</b>
8.1. Conjuntos nulos . . . . .	58
8.2. $\sigma$ -álgebras y conjuntos medibles de Lebesgue . . . . .	58
8.3. Medida de Lebesgue . . . . .	59
8.4. Propiedades básicas de la medida de Lebesgue . . . . .	59
8.5. Regularidad de la medida de Lebesgue . . . . .	61
8.6. Continuidad de la medida . . . . .	62

## 1. Unidad 1: Infimo, supremo y sucesiones

### 1.1. Axioma de completitud

Dado  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío y acotado superiormente, existe  $\sup A$ .  
Dado  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío y acotado inferiormente, existe  $\inf A$ .

### 1.2. Infimo

Sea  $A \subset \mathbb{R}$ , no vacío y acotado inferiormente.

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \leq a & \text{para todo } a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ tal que } i \leq a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

*Demostración.* Supongamos que  $i = \inf A$ .

(i) Como  $i$  es el infimo de  $A$ , por definición  $i$  es cota inferior de  $A$ . Es decir, para todo  $a \in A$  se cumple  $i \leq a$ .

(ii) Sea  $\varepsilon > 0$ . Supongamos, buscando una contradicción, que no existe  $a \in A$  tal que  $i \leq a < i + \varepsilon$ . Entonces, para todo  $a \in A$  se cumple  $a \geq i + \varepsilon$ , de modo que  $i + \varepsilon$  es una cota inferior de  $A$ . Como además  $\varepsilon > 0$ , tenemos  $i + \varepsilon > i$ , lo que contradice que  $i$  es la mayor de las cotas inferiores de  $A$ . Por lo tanto, debe existir  $a \in A$  tal que  $i \leq a < i + \varepsilon$ .

Recíprocamente, supongamos que se verifican: (i)  $i \leq a$  para todo  $a \in A$ ; (ii) para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $a \in A$  tal que  $i \leq a < i + \varepsilon$ .

De (i) se sigue que  $i$  es cota inferior de  $A$ . Sea  $i'$  otra cota inferior de  $A$ . Queremos ver que  $i' \leq i$ . Supongamos, buscando una contradicción, que  $i' > i$ . Sea  $\varepsilon = i' - i > 0$ . Por (ii) existe  $a \in A$  tal que  $i \leq a < i + \varepsilon$ . Como

$i + \varepsilon = i'$ , obtenemos  $a < i'$ , lo cual contradice que  $i'$  es cota inferior de  $A$ . Por lo tanto  $i' \leq i$  y, en consecuencia,  $i = \inf A$ .  $\square$

### 1.3. Supremo

Sea  $A \subset \mathbb{R}$ , no vacío y acotado superiormente.

$$s = \sup A \iff \begin{cases} s \geq a & \text{para todo } a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ tal que } s - \varepsilon < a \leq s. \end{cases}$$

*Demostración.* Supongamos que  $s = \sup A$ .

(i) Como  $s$  es el supremo de  $A$ , por definición  $s$  es cota superior de  $A$ . Es decir, para todo  $a \in A$  se cumple  $a \leq s$ .

(ii) Sea  $\varepsilon > 0$ . Supongamos, buscando una contradicción, que no existe  $a \in A$  tal que  $s - \varepsilon < a \leq s$ . Entonces, para todo  $a \in A$  se cumple  $a \leq s - \varepsilon$ , y por lo tanto  $s - \varepsilon$  es una cota superior de  $A$ . Como además  $\varepsilon > 0$ , tenemos  $s - \varepsilon < s$ , lo que contradice que  $s$  es la menor de las cotas superiores de  $A$ . Por lo tanto, debe existir  $a \in A$  tal que  $s - \varepsilon < a \leq s$ .

Supongamos que se cumplen:

(i)  $a \leq s$  para todo  $a \in A$

(ii) para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $a \in A$  tal que  $s - \varepsilon < a \leq s$ .

Entonces (i) dice que  $s$  es cota superior de  $A$ . Sea ahora  $s'$  otra cota superior de  $A$ . Queremos ver que  $s \leq s'$ . Supongamos, buscando una contradicción, que  $s' < s$ . Sea  $\varepsilon = s - s' > 0$ . Por (ii) existe  $a \in A$  tal que  $s - \varepsilon < a \leq s$ . Como  $s - \varepsilon = s'$ , obtenemos  $s' < a$ , lo cual contradice que  $s'$  es cota superior de  $A$ . Por lo tanto  $s \leq s'$  y, en consecuencia,  $s = \sup A$ .  $\square$

### 1.4. Principio de Arquímedes

#### Versión 1

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \leq n.$$

*Demostración.* Supongamos por el absurdo que el conjunto de los naturales  $\mathbb{N}$  está acotado superiormente. Como  $\mathbb{N}$  es no vacío, por el axioma de completitud existe  $s = \sup \mathbb{N}$ .

Tomamos  $\varepsilon = 1$ . Por la propiedad caracterizadora del supremo, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$s - 1 < n \leq s.$$

De  $s - 1 < n$  se sigue que  $n + 1 > s$ . Como  $n \in \mathbb{N}$ , también  $n + 1 \in \mathbb{N}$ , y por lo tanto hemos encontrado un número natural estrictamente mayor que  $s$ , lo que contradice que  $s$  sea cota superior de  $\mathbb{N}$ .

Esta contradicción muestra que  $\mathbb{N}$  no está acotado superiormente, es decir, para todo  $M \in \mathbb{R}$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > M$ . En particular, dado

$x \in \mathbb{R}$ , tomando  $M = x$  obtenemos un  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq x$ , que es justamente lo que afirma la versión 1.  $\square$

## Versión 2

$$\forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 < \frac{1}{n} < y.$$

*Demostración.* Sea  $y > 0$ . Por la Versión 1 del principio de Arquímedes aplicada a  $x = 1/y$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > \frac{1}{y}.$$

Como  $n > 0$ , al invertir la desigualdad obtenemos

$$0 < \frac{1}{n} < y.$$

Por lo tanto, para todo  $y > 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < \frac{1}{n} < y$ , como queríamos demostrar.  $\square$

## 1.5. Sucesiones

**Proposición 1.1.** *Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión real y sea  $l \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l.$$

*Entonces la sucesión  $(a_n)$  está acotada.*

*Demostración.* Por hipótesis,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ . Esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N : |a_n - l| < \varepsilon.$$

Tomamos ahora  $\varepsilon = 1$ . Entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$  se cumple

$$|a_n - l| < 1.$$

Por la desigualdad triangular,

$$|a_n| = |(a_n - l) + l| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$$

para todo  $n \geq N$ . Es decir, para todos los índices grandes,

$$|a_n| \leq |l| + 1.$$

Consideremos ahora los primeros términos de la sucesión:

$$a_1, a_2, \dots, a_{N-1}.$$

Se trata de un conjunto finito de números reales, por lo que el conjunto

$$\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$$

tiene un máximo. Sea

$$M_0 = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$$

(en el caso  $N = 1$  podemos tomar, por ejemplo,  $M_0 = 0$ ).

Definimos ahora

$$M = \max\{M_0, |l| + 1\}.$$

Entonces:

- Si  $n < N$ , se cumple  $|a_n| \leq M_0 \leq M$ .
- Si  $n \geq N$ , se cumple  $|a_n| \leq |l| + 1 \leq M$ .

En ambos casos obtenemos

$$|a_n| \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, la sucesión  $(a_n)$  está acotada. □

**Proposición 1.2.** *Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión real monótona creciente y acotada superiormente. Sea*

$$s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s.$$

*Demostración.* Como  $(a_n)$  está acotada superiormente, el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

tiene supremo  $s \in \mathbb{R}$ .

Queremos probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$ , es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - s| < \varepsilon.$$

Sea entonces  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Por la propiedad caracterizadora del supremo aplicada al conjunto  $A$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$s - \varepsilon < a_N \leq s.$$

Como la sucesión  $(a_n)$  es monótona creciente, se cumple

$$a_N \leq a_n \leq s \quad \text{para todo } n \geq N.$$

De  $a_n \leq s$  obtenemos  $a_n - s \leq 0$ , luego

$$|a_n - s| = s - a_n.$$

Además, de  $a_N \leq a_n$  se sigue

$$s - a_n \leq s - a_N.$$

Juntando estas desigualdades,

$$|a_n - s| = s - a_n \leq s - a_N < s - (s - \varepsilon) = \varepsilon$$

para todo  $n \geq N$ .

Por lo tanto, para todo  $\varepsilon > 0$  encontramos  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$  se cumple  $|a_n - s| < \varepsilon$ , y esto significa exactamente que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$ .  $\square$

**Proposición 1.3.** *Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión real monótona decreciente y acotada inferiormente. Sea*

$$i = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

*Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = i.$$

*Demostración.* Como  $(a_n)$  está acotada inferiormente, el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

tiene ínfimo  $i \in \mathbb{R}$ .

Queremos probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = i$ , es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - i| < \varepsilon.$$

Sea  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Por la propiedad caracterizadora del ínfimo aplicada al conjunto  $A$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$i \leq a_N < i + \varepsilon.$$

Como la sucesión  $(a_n)$  es monótona decreciente, se cumple

$$i \leq a_n \leq a_N \quad \text{para todo } n \geq N.$$

De  $a_n \geq i$  se obtiene  $a_n - i \geq 0$ , luego

$$|a_n - i| = a_n - i.$$

Además, de  $a_n \leq a_N$  se sigue

$$a_n - i \leq a_N - i.$$

Por lo tanto,

$$|a_n - i| = a_n - i \leq a_N - i < (i + \varepsilon) - i = \varepsilon$$

para todo  $n \geq N$ .

Entonces, para todo  $\varepsilon > 0$  encontramos  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$  se cumple  $|a_n - i| < \varepsilon$ , lo cual prueba que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = i$ .  $\square$

**Proposición 1.4** (Equivalencia del supremo). *Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un conjunto no vacío y acotado superiormente, y sea  $s \in \mathbb{R}$ . Entonces*

$$s = \sup A$$

*si y sólo si se cumplen:*

- (I) *s es cota superior de  $A$ , es decir,  $a \leq s$  para todo  $a \in A$ ;*
- (II) *existe una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $a_n \in A$  para todo  $n$ , tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s.$$

*Demostración.* Supongamos primero que  $s = \sup A$ . Entonces, por definición de supremo,  $s$  es cota superior de  $A$ , con lo cual se cumple (i).

Nos queda probar (ii). Usamos la caracterización del supremo que ya vimos: para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $a \in A$  tal que

$$s - \varepsilon < a \leq s.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , aplicamos esta propiedad con  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ . Obtenemos así un elemento  $a_n \in A$  tal que

$$s - \frac{1}{n} < a_n \leq s.$$

Esto define una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $A$ .

Veamos ahora que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Elegimos  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ . Entonces, si  $n \geq N$ , se tiene  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ , y por la construcción de  $(a_n)$  se cumple

$$s - \frac{1}{n} < a_n \leq s.$$

De aquí,  $s - \varepsilon = s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$ , luego

$$0 \leq s - a_n < \varepsilon,$$

lo que implica

$$|a_n - s| = s - a_n < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - s| < \varepsilon,$$

es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$ . Esto prueba (ii).

Recíprocamente, supongamos que se cumplen (i) y (ii). Entonces  $s$  es cota superior de  $A$ . Para ver que  $s = \sup A$ , basta probar que  $s$  es la menor de las cotas superiores de  $A$ . Sea  $M$  otra cota superior de  $A$ . Queremos ver que  $s \leq M$ .

Supongamos, buscando una contradicción, que  $s > M$ . Definimos

$$\varepsilon = \frac{s - M}{2} > 0.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq N$ , se cumple

$$|a_n - s| < \varepsilon.$$

En particular, para  $n \geq N$  tenemos

$$a_n > s - \varepsilon = s - \frac{s - M}{2} = \frac{2s - s + M}{2} = \frac{s + M}{2}.$$

Pero, como  $s > M$ , se tiene

$$\frac{s + M}{2} > M,$$

de modo que

$$a_n > \frac{s + M}{2} > M$$

para todo  $n \geq N$ . Sin embargo,  $a_n \in A$  y  $M$  es cota superior de  $A$ , luego debería cumplirse  $a_n \leq M$  para todo  $n$ , lo que contradice la desigualdad anterior.

Esta contradicción muestra que no puede ocurrir  $s > M$ , por lo que necesariamente  $s \leq M$ . Como  $M$  era una cota superior cualquiera de  $A$ , concluimos que  $s$  es la menor de las cotas superiores de  $A$ , es decir,  $s = \sup A$ .

Queda así demostrada la equivalencia.  $\square$

**Proposición 1.5.** *Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión real y sea  $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  una subsucesión de  $(a_n)$ , donde  $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l,$$

*entonces*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = l.$$

*Demostración.* Supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ . Por definición de límite, esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N : |a_n - l| < \varepsilon.$$

Sea ahora  $\varepsilon > 0$  fijo. Por la hipótesis anterior, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon.$$

Como  $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, podemos elegir  $J \in \mathbb{N}$  tal que

$$n_J \geq N.$$

Entonces, para todo  $j \geq J$  se tiene

$$n_j \geq n_J \geq N.$$

Aplicando la propiedad de arriba a  $n = n_j$ , obtenemos

$$|a_{n_j} - l| < \varepsilon \quad \text{para todo } j \geq J.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists J \in \mathbb{N} \forall j \geq J : |a_{n_j} - l| < \varepsilon,$$

lo cual significa exactamente que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = l.$$

□

## 2. Unidad 2: Cardinalidad

### 2.1. Conjuntos coordinables y cardinal

**Definición 2.1.** Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos. Decimos que son *coordinables* (o *equipotentes*, o que tienen el mismo cardinal) si existe una función biyectiva  $f : X \rightarrow Y$ . En este caso escribimos

$$X \sim Y.$$

**Proposición 2.2.** La relación  $\sim$  es una relación de equivalencia en la clase de todos los conjuntos.

*Demostración.* Debemos probar que la relación  $\sim$  es reflexiva, simétrica y transitiva.

**Reflexividad.** Sea  $X$  un conjunto cualquiera. Consideramos la función identidad

$$\text{id}_X : X \rightarrow X, \quad \text{id}_X(x) = x.$$

La función identidad es inyectiva (si  $\text{id}_X(x) = \text{id}_X(y)$ , entonces  $x = y$ ) y sobreyectiva (para todo  $x \in X$  existe  $y \in X$  tal que  $\text{id}_X(y) = x$ ). Luego es biyectiva, y por la definición de  $\sim$  se tiene  $X \sim X$ . Por lo tanto,  $\sim$  es reflexiva.

**Simetría.** Sean  $X$  e  $Y$  conjuntos tales que  $X \sim Y$ . Por definición, existe una biyección  $f : X \rightarrow Y$ . Toda función biyectiva tiene inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ , y dicha inversa es también biyectiva. Por lo tanto, existe una biyección de  $Y$  en  $X$ , es decir,  $Y \sim X$ . Luego,  $\sim$  es simétrica.

**Transitividad.** Sean  $X, Y, Z$  conjuntos tales que  $X \sim Y$  y  $Y \sim Z$ . Entonces existen biyecciones

$$f : X \rightarrow Y, \quad g : Y \rightarrow Z.$$

Consideramos la composición

$$g \circ f : X \rightarrow Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Como composición de funciones biyectivas,  $g \circ f$  es también biyectiva: la composición de funciones inyectivas es inyectiva y la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva. En consecuencia, existe una biyección de  $X$  en  $Z$ , es decir,  $X \sim Z$ . Esto muestra que  $\sim$  es transitiva.

Como  $\sim$  es reflexiva, simétrica y transitiva, concluimos que  $\sim$  es una relación de equivalencia.  $\square$

**Definición 2.3.** Definimos el *cardinal* de un conjunto  $X$  como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con  $X$ :

$$\#X = \text{Card}(X) := \{Y \mid X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales les damos nombres especiales:

- $\#\mathbb{N} = \aleph_0$  (cardinal numerable),
- $\#\mathbb{R} = \mathfrak{c}$  (el *continuo*),
- $\#\{1, 2, \dots, n\} = n$  para  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definición 2.4.** Para  $n \in \mathbb{N}$ , llamamos

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

al *intervalo inicial* del conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales.

**Definición 2.5.** Un conjunto  $A$  es *finito* si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$A \sim I_n.$$

**Definición 2.6.** Un conjunto  $A$  es *infinito* si no es finito.

**Definición 2.7.** Un conjunto  $A$  es *numerable* si  $A \sim \mathbb{N}$ . Equivalente y simbólicamente, si

$$\#A = \aleph_0.$$

**Definición 2.8.** Decimos que un conjunto  $A$  es *a lo sumo numerable* (o *contable*) si es finito o numerable. Es decir,  $A$  es a lo sumo numerable si cumple

$$A \sim I_n \quad \text{para algún } n \in \mathbb{N} \quad \text{o bien} \quad A \sim \mathbb{N}.$$

**Proposición 2.9.** *Sea  $A$  un conjunto numerable y sea  $B \subseteq A$ . Entonces  $B$  es a lo sumo numerable.*

*Demostración.* Si  $B$  es finito, por definición ya es a lo sumo numerable y no hay nada que probar. Supongamos entonces que  $B$  es infinito. Veremos que en ese caso  $B$  es numerable.

Como  $A$  es numerable, por definición existe una biyección

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A.$$

Consideremos la sucesión  $(f(1), f(2), f(3), \dots)$  de elementos de  $A$  y vamos a “extraer” de ella una enumeración de los elementos de  $B$ .

Definimos, por inducción, una sucesión estrictamente creciente  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de números naturales de la siguiente manera.

En primer lugar, como  $B$  es infinito, en particular es no vacío y existe algún  $b_1 \in B$ . Como  $f$  es sobreyectiva, existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $f(n_1) = b_1$ . Además, podemos elegir  $n_1$  como el mínimo de los naturales  $n$  que satisfacen  $f(n) \in B$ :

$$n_1 = \min\{ n \in \mathbb{N} : f(n) \in B \}.$$

Este mínimo existe porque el conjunto entre llaves es no vacío y está contenido en  $\mathbb{N}$ .

Supuesto definido  $n_k$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ , definimos  $n_{k+1}$  así. Como  $B$  es infinito, el conjunto

$$B_k := B \setminus \{f(n_1), f(n_2), \dots, f(n_k)\}$$

no es vacío (si fuera vacío,  $B$  tendría a lo sumo  $k$  elementos y sería finito). Entonces existe  $b_{k+1} \in B_k$ . Nuevamente, como  $f$  es sobreyectiva, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $f(m) = b_{k+1}$ . Además, podemos elegir  $m$  de manera que  $m > n_k$  (basta tomar algún índice de  $b_{k+1}$  mayor que todos  $n_1, \dots, n_k$ ). Definimos

$$n_{k+1} = \min\{ n \in \mathbb{N} : n > n_k, f(n) \in B_k \}.$$

Este mínimo existe porque el conjunto entre llaves es no vacío y contenido en los naturales mayores que  $n_k$ . De la definición se deduce que

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots,$$

es decir,  $(n_k)$  es estrictamente creciente.

Definimos ahora una función

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow B, \quad g(k) = f(n_k).$$

Veamos que  $g$  es biyectiva.

**Inyectividad.** Sean  $k, \ell \in \mathbb{N}$  tales que  $g(k) = g(\ell)$ , es decir,  $f(n_k) = f(n_\ell)$ . Como  $f$  es inyectiva, se sigue que  $n_k = n_\ell$ . Pero la sucesión  $(n_k)$  es estrictamente creciente, luego de  $n_k = n_\ell$  se deduce  $k = \ell$ . Por lo tanto,  $g$  es inyectiva.

**Sobreyectividad.** Sea  $b \in B$ . Como  $f$  es sobreyectiva, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f(n) = b$ . En el proceso de construcción de la sucesión  $(n_k)$ , en algún paso  $k$  el elemento  $b$  aparece por primera vez entre los valores de  $f$ ; es decir, existe un único  $k$  tal que  $n_k$  es el mínimo índice con  $f(n_k) = b$  y  $n_k > n_{k-1}$  (para  $k = 1$  entendemos que no hay condición anterior). Por la definición de  $g$ , se tiene entonces

$$g(k) = f(n_k) = b.$$

De este modo, para todo  $b \in B$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $g(k) = b$ , y por lo tanto  $g$  es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección  $g : \mathbb{N} \rightarrow B$ , lo cual muestra que  $B$  es numerable. Recordando que al principio separamos el caso en que  $B$  es finito, concluimos que, en todos los casos,  $B$  es a lo sumo numerable.  $\square$

**Teorema 2.10.** *Sea  $A$  un conjunto infinito. Entonces existe un subconjunto  $B \subseteq A$  tal que  $B$  es numerable.*

*Demostración.* Como  $A$  es infinito, en particular es no vacío, de modo que podemos elegir un elemento  $a_1 \in A$ .

Supondremos construidos elementos distintos  $a_1, \dots, a_n \in A$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Consideremos el conjunto

$$F_n = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Si  $A \setminus F_n$  fuera vacío, tendríamos  $A = F_n$ , es decir,  $A$  sería finito, lo cual contradice la hipótesis de que  $A$  es infinito. Por lo tanto,

$$A \setminus F_n \neq \emptyset,$$

y podemos elegir un elemento

$$a_{n+1} \in A \setminus F_n.$$

En particular,  $a_{n+1} \in A$  y  $a_{n+1} \notin \{a_1, \dots, a_n\}$ , por lo que los elementos  $a_1, \dots, a_{n+1}$  siguen siendo todos distintos.

De este modo, por inducción, obtenemos una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $A$  tales que

$$a_n \neq a_m \quad \text{si } n \neq m.$$

Definimos ahora

$$B = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Claramente  $B \subseteq A$ , por construcción.

Consideremos la función

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow B, \quad f(n) = a_n.$$

*Inyectividad.* Si  $f(n) = f(m)$ , entonces  $a_n = a_m$ , y como la sucesión  $(a_n)$  tiene todos sus términos distintos, se sigue que  $n = m$ . Por lo tanto,  $f$  es inyectiva.

*Sobreyectividad.* Sea  $b \in B$ . Por definición de  $B$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $b = a_n$ . Entonces  $f(n) = a_n = b$ , de modo que todo elemento de  $B$  es imagen de algún  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto,  $f$  es sobreyectiva.

Concluimos que  $f : \mathbb{N} \rightarrow B$  es una biyección, es decir,  $B$  es numerable. Como además  $B \subseteq A$ , hemos encontrado un subconjunto numerable de  $A$ , tal como queríamos.  $\square$

## 2.2. Orden entre cardinales

Recordemos que, por definición,

$$\#A = \#B \iff A \sim B$$

es decir, si y sólo si existe una biyección  $f : A \rightarrow B$ .

**Definición 2.11.** Sean  $X$  e  $Y$  conjuntos. Decimos que

$$\#X \leq \#Y$$

si existe una función inyectiva  $f : X \rightarrow Y$ .

**Definición 2.12.** Decimos que

$$\#X < \#Y$$

si se cumplen:

- (I)  $\#X \leq \#Y$ , es decir, existe una inyección  $f : X \rightarrow Y$ ;
- (II)  $X \not\sim Y$ , es decir, no existe biyección entre  $X$  e  $Y$ .

**Proposición 2.13.** Sean  $X$  e  $Y$  conjuntos. Existe una función inyectiva  $f : X \rightarrow Y$  si y sólo si existe una función sobreyectiva  $g : Y \rightarrow X$ .

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que existe una función inyectiva  $f : X \rightarrow Y$ . Distinguimos dos casos.

Si  $X = \emptyset$ , entonces  $f$  es la única función posible  $\emptyset \rightarrow Y$ . En este caso, la única función de  $Y$  a  $X$  es la función vacía  $g : Y \rightarrow \emptyset$ , que es sobreyectiva sólo si  $Y = \emptyset$ . En muchas aplicaciones se descarta el caso trivial  $X = \emptyset$ , así que supongamos ahora que  $X \neq \emptyset$ .

Como  $X \neq \emptyset$ , elegimos un elemento fijo  $x_0 \in X$ . Definimos  $g : Y \rightarrow X$  de la siguiente manera:

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{si existe } x \in X \text{ tal que } f(x) = y, \\ x_0 & \text{si no existe tal } x. \end{cases}$$

La inyectividad de  $f$  garantiza que, cuando  $y$  está en la imagen de  $f$ , el elemento  $x$  tal que  $f(x) = y$  es único, de modo que  $g$  está bien definida.

Veamos que  $g$  es sobreyectiva. Sea  $x \in X$ . Como  $f$  es función de  $X$  en  $Y$ , tenemos  $f(x) \in Y$ , y por definición de  $g$ ,

$$g(f(x)) = x.$$

Luego todo  $x \in X$  es imagen de algún elemento de  $Y$  (por ejemplo, de  $f(x)$ ), y por lo tanto  $g$  es sobreyectiva.

( $\Leftarrow$ ) Recíprocamente, supongamos que existe una función sobreyectiva  $g : Y \rightarrow X$ . Para cada  $x \in X$  consideremos el conjunto de sus preimágenes:

$$Y_x = \{y \in Y : g(y) = x\}.$$

Como  $g$  es sobreyectiva,  $Y_x$  es no vacío para todo  $x \in X$ .

Elegimos, para cada  $x \in X$ , un elemento  $y_x \in Y_x$  (es decir,  $g(y_x) = x$ ), y definimos

$$f : X \rightarrow Y, \quad f(x) = y_x.$$

Probemos que  $f$  es inyectiva. Sean  $x_1, x_2 \in X$  tales que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Entonces

$$y_{x_1} = y_{x_2}.$$

Aplicando  $g$  a ambos lados obtenemos

$$g(y_{x_1}) = g(y_{x_2}),$$

es decir,

$$x_1 = x_2,$$

ya que por definición de  $y_x$  se cumple  $g(y_x) = x$ . Por lo tanto,  $f$  es inyectiva.

Hemos probado en un sentido que de una inyectiva  $X \rightarrow Y$  obtenemos una sobreyectiva  $Y \rightarrow X$ , y en el otro que de una sobreyectiva  $Y \rightarrow X$  obtenemos una inyectiva  $X \rightarrow Y$ . Esto completa la demostración.  $\square$

### 2.3. Conjunto de partes y teorema de Cantor

**Definición 2.14.** Dado un conjunto  $X$ , llamamos *conjunto de partes* de  $X$  al conjunto

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}.$$

**Teorema 2.15** (Cantor). *Sea  $X$  un conjunto. Entonces*

$$\#X < \#\mathcal{P}(X).$$

*Demostración.* Recordemos que, por la definición de orden entre cardinales,

$$\#X < \#\mathcal{P}(X) \iff \begin{cases} \text{existe una inyección } f : X \rightarrow \mathcal{P}(X), \\ \text{no existe biyección entre } X \text{ y } \mathcal{P}(X). \end{cases}$$

(1) **Existe una inyección  $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ .**

Definimos

$$f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad f(x) = \{x\}.$$

Claramente  $f(x) \subseteq X$  para todo  $x$ , luego  $f(x) \in \mathcal{P}(X)$ . Si  $f(x) = f(y)$ , entonces  $\{x\} = \{y\}$  y por lo tanto  $x = y$ . Así,  $f$  es inyectiva, y obtenemos

$$\#X \leq \#\mathcal{P}(X).$$

(2) **No existe biyección entre  $X$  y  $\mathcal{P}(X)$ .**

Basta ver que *no existe ninguna función sobreyectiva  $g : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$* .

Procedemos por absurdo. Supongamos que existe una función

$$g : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

sobreyectiva. Consideraremos el subconjunto

$$B = \{x \in X : x \notin g(x)\}.$$

Por definición,  $B \subseteq X$ , de modo que  $B \in \mathcal{P}(X)$ .

Como  $g$  es sobreyectiva, debe existir algún elemento  $a \in X$  tal que

$$g(a) = B.$$

Estudiemos ahora si  $a$  pertenece o no a  $B$ :

- Supongamos que  $a \in B$ . Por la definición de  $B$ , esto significa que  $a \notin g(a)$ . Pero  $g(a) = B$ , luego  $a \notin B$ , lo que contradice  $a \in B$ .
- Supongamos que  $a \notin B$ . Entonces, por la definición de  $B$ , se tiene  $a \in g(a)$ . Como  $g(a) = B$ , esto implica  $a \in B$ , contradiciendo  $a \notin B$ .

En ambos casos llegamos a una contradicción. Por lo tanto, nuestra suposición inicial es falsa: no existe función sobreyectiva  $g : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ .

Concluimos que no existe biyección entre  $X$  y  $\mathcal{P}(X)$ . Junto con (1), esto implica

$$\#X < \#\mathcal{P}(X),$$

como queríamos demostrar. □

## 2.4. Suma y resta de conjuntos numerables

**Proposición 2.16.** *Sea  $X$  un conjunto infinito. Entonces existe un subconjunto  $Z \subset X$ , con  $Z$  numerable, tal que*

$$X \sim X \setminus Z.$$

*Demostración.* Como  $X$  es infinito, por el teorema anterior existe un subconjunto numerable infinito  $C \subset X$ . Como  $C$  es numerable, existe una biyección

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow C.$$

Escribimos  $c_n = \varphi(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , de modo que

$$C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}.$$

Definimos ahora dos subconjuntos disjuntos de  $C$ :

$$Z = \{c_{2n} : n \in \mathbb{N}\}, \quad D = \{c_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces  $C = D \cup Z$  y  $D \cap Z = \emptyset$ . Además, tanto  $D$  como  $Z$  son numerables (son imágenes de  $\mathbb{N}$  por las aplicaciones  $n \mapsto c_{2n-1}$  y  $n \mapsto c_{2n}$ , respectivamente).

Sea

$$Y = X \setminus C.$$

Entonces tenemos una partición

$$X = Y \cup D \cup Z \quad (\text{unión disjunta}).$$

Por otra parte,

$$X \setminus Z = Y \cup D.$$

Definimos una aplicación  $f : X \rightarrow X \setminus Z$  por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in Y \cup D, \\ c_{2n-1}, & \text{si } x = c_{2n} \in Z \text{ para algún } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Veamos que  $f$  es biyectiva.

**Inyectividad.** - Si  $x_1, x_2 \in Y \cup D$  y  $f(x_1) = f(x_2)$ , entonces  $x_1 = x_2$  porque  $f$  actúa como la identidad en  $Y \cup D$ .

- Si  $x_1 = c_{2n_1}$  e  $x_2 = c_{2n_2}$  pertenecen a  $Z$  y  $f(x_1) = f(x_2)$ , entonces

$$c_{2n_1-1} = f(c_{2n_1}) = f(c_{2n_2}) = c_{2n_2-1},$$

de donde  $2n_1 - 1 = 2n_2 - 1$  y luego  $n_1 = n_2$ , es decir  $x_1 = x_2$ .

- No puede ocurrir que  $x_1 \in Y \cup D$  y  $x_2 \in Z$  tengan la misma imagen, porque las imágenes de  $Y \cup D$  están en  $Y \cup D$  y las de  $Z$  están contenidas en  $D$ ; pero  $Y$  y  $D$  son disjuntos.

En todos los casos, de  $f(x_1) = f(x_2)$  se deduce  $x_1 = x_2$ , luego  $f$  es inyectiva.

**Sobreyectividad.** Sea  $y \in X \setminus Z = Y \cup D$ .

- Si  $y \in Y$ , entonces  $f(y) = y$ , así que  $y$  es imagen de sí mismo.

- Si  $y \in D$ , digamos  $y = c_{2n-1}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f(c_{2n}) = c_{2n-1} = y$ , de modo que  $y$  es imagen de  $c_{2n} \in Z$ .

En consecuencia, todo elemento de  $X \setminus Z$  es imagen de algún elemento de  $X$ , y  $f$  es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección  $f : X \rightarrow X \setminus Z$  con  $Z \subset X$  numerable, por lo que  $X \sim X \setminus Z$ .  $\square$

**Proposición 2.17.** *Sea  $B$  un conjunto y sea  $A$  un conjunto numerable. Suponemos que  $B \setminus A$  es infinito. Entonces*

$$B \sim B \setminus A.$$

*Demostración.* Podemos reemplazar  $A$  por  $A \cap B$ , que sigue siendo numerable y cumple

$$B \setminus (A \cap B) = B \setminus A.$$

Por simplicidad, suponemos desde ahora que  $A \subseteq B$ .

Como  $A$  es numerable, existe una biyección

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow A,$$

es decir, podemos escribir

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Por hipótesis,  $B \setminus A$  es infinito. Entonces, por el teorema “conjunto infinito contiene un subconjunto numerable”, existe un subconjunto numerable infinito

$$C \subseteq B \setminus A.$$

Tomamos una biyección

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow C, \quad C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}.$$

Definimos ahora una aplicación  $f : B \rightarrow B \setminus A$  por:

$$f(x) = \begin{cases} c_n, & \text{si } x = a_n \in A \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ x, & \text{si } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Observemos primero que  $f$  está bien definida: si  $x \in A$ , entonces  $f(x) = c_n \in C \subseteq B \setminus A$ ; si  $x \in B \setminus A$ , entonces  $f(x) = x \in B \setminus A$ . En cualquier caso,  $f(x) \in B \setminus A$ .

**Inyectividad.** - Si  $x_1, x_2 \in B \setminus A$  y  $f(x_1) = f(x_2)$ , entonces  $x_1 = x_2$  porque  $f$  actúa como la identidad en  $B \setminus A$ .

- Si  $x_1 = a_n$  y  $x_2 = a_m$  pertenecen a  $A$  y  $f(x_1) = f(x_2)$ , entonces  $c_n = c_m$ , y como la sucesión  $(c_n)$  tiene todos sus términos distintos, se sigue  $n = m$  y por lo tanto  $x_1 = x_2$ .

- No puede ocurrir que  $x_1 \in A$  y  $x_2 \in B \setminus A$  tengan la misma imagen, porque  $f(x_1) \in C \subseteq B \setminus A$ , mientras que  $f(x_2) = x_2 \in B \setminus A \setminus C$ , y  $C$  es disjunto de  $B \setminus A \setminus C$ .

En consecuencia,  $f$  es inyectiva.

**Sobreyectividad.** Sea  $y \in B \setminus A$ . Distinguimos dos casos:

- Si  $y \in B \setminus (A \cup C)$ , entonces  $f(y) = y$ , de modo que  $y$  es imagen de sí mismo.

- Si  $y \in C$ , digamos  $y = c_n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f(a_n) = c_n = y$ , de modo que  $y$  es imagen de  $a_n \in A$ .

Por lo tanto, todo elemento de  $B \setminus A$  es imagen de algún elemento de  $B$ , y  $f$  es sobreyectiva.

Hemos construido una biyección  $f : B \rightarrow B \setminus A$ , lo cual prueba que  $B \sim B \setminus A$ .  $\square$

**Proposición 2.18.** *Sea  $X$  un conjunto infinito y sea  $A$  un conjunto numerable. Entonces*

$$X \sim X \cup A.$$

*Demostración.* Si  $A \subseteq X$ , entonces  $X \cup A = X$  y la afirmación es trivial. Supongamos, por lo tanto, que  $A$  no está contenido en  $X$ . Definimos

$$A_0 = A \setminus X,$$

que es el conjunto de los elementos de  $A$  que no pertenecen a  $X$ . Como  $A$  es numerable, también  $A_0$  es numerable (subconjunto de un numerable). Además,

$$X \cup A = X \cup A_0$$

y la unión es disjunta, ya que  $A_0 \cap X = \emptyset$ .

Notemos que  $X$  es infinito, luego el conjunto  $X \cup A_0$  también es infinito. Consideremos ahora el conjunto

$$B = X \cup A_0.$$

Entonces  $A_0$  es numerable y

$$B \setminus A_0 = X.$$

Como  $X$  es infinito, también  $B \setminus A_0$  es infinito. Podemos aplicar la proposición anterior con  $A = A_0$  y este conjunto  $B$ : obtenemos

$$B \sim B \setminus A_0.$$

Pero  $B = X \cup A_0$  y  $B \setminus A_0 = X$ , por lo que

$$X \cup A_0 \sim X.$$

Como  $X \cup A = X \cup A_0$ , concluimos que

$$X \cup A \sim X.$$

Por simetría de la relación de equipotencia, también escribimos  $X \sim X \cup A$ , como queríamos.  $\square$

**Corolario 2.19.** *Un conjunto  $X$  es infinito si y sólo si es coordinable con un subconjunto propio suyo, es decir, si y sólo si existe  $Y \subsetneq X$  tal que  $X \sim Y$ .*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $X$  es infinito. Por la proposición anterior, existe un subconjunto numerable  $Z \subset X$  tal que  $X \sim X \setminus Z$ . Como  $Z \neq \emptyset$  (pues es numerable) y  $Z \subset X$ , se tiene  $X \setminus Z \subsetneq X$ . Por lo tanto,  $X$  es coordinable con el subconjunto propio  $X \setminus Z$ .

( $\Leftarrow$ ) Recíprocamente, supongamos que existe un subconjunto propio  $Y \subsetneq X$  tal que  $X \sim Y$ . Procedamos por absurdo: supongamos que  $X$  es finito. Sea  $n = \#X$ . Entonces  $X \sim I_n$ . Como  $Y$  es subconjunto propio de  $X$ , tiene un número  $m$  de elementos con  $m < n$ , de modo que  $Y \sim I_m$ .

Por transitividad de la relación de equipotencia, tendríamos

$$I_n \sim X \sim Y \sim I_m,$$

de donde se seguiría  $I_n \sim I_m$ . Pero por el teorema anterior,  $I_n \sim I_m$  implica  $n = m$ , lo cual contradice  $m < n$ . Esta contradicción muestra que  $X$  no puede ser finito, luego  $X$  es infinito.  $\square$

**Teorema 2.20** (Cantor–Schröder–Bernstein). *Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos. Si existe una función inyectiva  $f : X \rightarrow Y$  y una función inyectiva  $g : Y \rightarrow X$ , entonces  $X$  e  $Y$  son coordinables, es decir, existe una biyección  $h : X \rightarrow Y$ .*

Equivalentemente, en términos de cardinales:

$$\#X \leq \#Y \text{ y } \#Y \leq \#X \implies \#X = \#Y.$$

**Lema 2.21.** *El producto cartesiano  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es numerable.*

*Demostración.* Consideremos la aplicación  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por

$$f(m, n) = 2^m 3^n.$$

Por el teorema fundamental de la aritmética, todo número natural tiene una única factorización en primos, de modo que distintos pares  $(m, n)$  producen distintos números  $2^m 3^n$ . Por lo tanto,  $f$  es inyectiva.

Como hemos construido una inyección de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  en  $\mathbb{N}$ , se sigue que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es a lo sumo numerable. Además, es infinito, por lo que es numerable.  $\square$

**Teorema 2.22.** *Sea  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de conjuntos numerables. Entonces la unión*

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

*es a lo sumo numerable. En particular, si  $A$  es infinita, entonces  $A$  es numerable.*

*Demostración.* Como cada  $A_n$  es numerable, para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe una biyección

$$f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n.$$

Escribimos  $a_{n,k} = f_n(k)$ , de modo que

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \dots\}.$$

Definimos ahora una aplicación

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A, \quad F(n, k) = a_{n,k}.$$

Para todo  $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  se tiene  $a_{n,k} \in A_n \subseteq A$ , luego  $F$  está bien definida. Además, por la definición de  $A$ , todo elemento de  $A$  es de la forma  $a_{n,k}$  para algún  $n, k \in \mathbb{N}$ , y por lo tanto  $F$  es sobreyectiva.

Por el lema anterior,  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es numerable. Entonces existe una biyectiva

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Consideremos la composición

$$h = F \circ g : \mathbb{N} \rightarrow A.$$

Como composición de una biyección con una sobreyeción,  $h$  sigue siendo sobreyectiva: para todo  $a \in A$  existe  $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tal que  $F(n, k) = a$ , y como  $g$  es biyectiva, existe  $m \in \mathbb{N}$  con  $g(m) = (n, k)$ ; entonces

$$h(m) = (F \circ g)(m) = F(n, k) = a.$$

Así hemos construido una función sobreyectiva  $h : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Por la proposición que relaciona inyecciones y sobreyeciones entre cardinales, esto implica que  $A$  es a lo sumo numerable.

Si además  $A$  es infinito, por definición de “a lo sumo numerable” resulta que  $A$  es numerable.  $\square$

### 3. Unidad 3: Espacios métricos

#### 3.1. Conjuntos abiertos

**Definición 3.1.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico. Un subconjunto  $U \subseteq E$  se dice *abierto* si

$$\forall x \in U \exists r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subseteq U,$$

donde

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$$

es la bola abierta de centro  $x$  y radio  $r$ .

**Proposición 3.2.** *Sea  $(E, d)$  un espacio métrico,  $x_0 \in E$  y  $r > 0$ . Entonces la bola abierta  $B(x_0, r)$  es un conjunto abierto.*

*Demostración.* Debemos ver que para todo punto  $x \in B(x_0, r)$  existe un radio  $\varepsilon > 0$  tal que

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, r).$$

Sea  $x \in B(x_0, r)$ . Por definición de bola abierta,

$$d(x, x_0) < r.$$

Definimos

$$\varepsilon = r - d(x, x_0).$$

Entonces  $\varepsilon > 0$  porque  $d(x, x_0) < r$ .

Tomemos ahora un punto cualquiera  $y \in B(x, \varepsilon)$ ; es decir,

$$d(x, y) < \varepsilon.$$

Aplicando la desigualdad triangular, obtenemos

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0).$$

Sustituyendo las cotas anteriores,

$$d(y, x_0) < \varepsilon + d(x, x_0) = (r - d(x, x_0)) + d(x, x_0) = r.$$

Por lo tanto,  $d(y, x_0) < r$ , lo que significa que  $y \in B(x_0, r)$ .

Como  $y$  fue elegido arbitrariamente en  $B(x, \varepsilon)$ , hemos probado

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, r).$$

Y esto vale para todo  $x \in B(x_0, r)$ , con el  $\varepsilon$  definido como arriba. Por definición de conjunto abierto,  $B(x_0, r)$  es abierto.  $\square$

**Definición 3.3.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y sea  $A \subseteq E$ . El *interior* de  $A$  es el conjunto

$$A^\circ = \{x \in A : \exists r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subseteq A\}.$$

Equivalente:  $A^\circ$  es el conjunto de los puntos interiores de  $A$ .

**Proposición 3.4.** *Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $A, A_1, A_2 \subseteq E$ . Se tienen las siguientes propiedades:*

(I)  $A^\circ \subseteq A$ .

(II) Si  $A_1 \subseteq A_2$ , entonces  $A_1^\circ \subseteq A_2^\circ$

(III)  $A^\circ$  es un conjunto abierto.

(IV) Si  $G$  es abierto y  $G \subseteq A$ , entonces  $G \subseteq A^\circ$ .

*Demostración.* (i) Por definición,

$$A^\circ = \{x \in A : \exists r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subseteq A\}.$$

En particular, todo  $x \in A^\circ$  pertenece a  $A$ , luego  $A^\circ \subseteq A$ .

(ii) Supongamos que  $A_1 \subseteq A_2$  y sea  $x \in A_1^\circ$ . Entonces, por definición de interior, existe  $r > 0$  tal que

$$B(x, r) \subseteq A_1.$$

Como  $A_1 \subseteq A_2$ , se tiene también

$$B(x, r) \subseteq A_2,$$

de modo que  $x$  es punto interior de  $A_2$ , es decir,  $x \in A_2^\circ$ . Hemos probado que  $A_1^\circ \subseteq A_2^\circ$ .

(iii) Queremos ver que  $A^\circ$  es abierto. Sea  $x \in A^\circ$ . Entonces existe  $r > 0$  tal que

$$B(x, r) \subseteq A.$$

Por la proposición ya demostrada,  $B(x, r)$  es un conjunto abierto. En particular, como  $x \in B(x, r)$  y  $B(x, r)$  es abierto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, r).$$

Como además  $B(x, r) \subseteq A$ , obtenemos

$$B(x, \varepsilon) \subseteq A.$$

Por definición de interior, esto implica que  $x \in A^\circ$  y, de hecho, para todo  $y \in B(x, \varepsilon)$  se cumple  $y \in A^\circ$ . Por lo tanto,  $B(x, \varepsilon) \subseteq A^\circ$ .

Hemos visto que para todo  $x \in A^\circ$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subseteq A^\circ$ , lo cual significa que  $A^\circ$  es abierto.

(iv) Sea  $G$  un conjunto abierto tal que  $G \subseteq A$ , y sea  $x \in G$ . Como  $G$  es abierto, existe  $r > 0$  tal que

$$B(x, r) \subseteq G.$$

De la inclusión  $G \subseteq A$  se deduce

$$B(x, r) \subseteq A.$$

Luego  $x$  es punto interior de  $A$ , es decir,  $x \in A^\circ$ . Como  $x$  era un punto arbitrario de  $G$ , concluimos que  $G \subseteq A^\circ$ .  $\square$

**Proposición 3.5.** *Sea  $(E, d)$  un espacio métrico. Entonces se verifican:*

- (I) *La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
- (II) *La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

*Demostración.* (i) Sea  $(G_i)_{i \in I}$  una familia cualquiera de conjuntos abiertos en  $E$  (indexada por un conjunto  $I$  no necesariamente numerable) y definamos

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i.$$

Queremos ver que  $G$  es abierto.

Sea  $x \in G$ . Entonces existe algún índice  $i_0 \in I$  tal que  $x \in G_{i_0}$ . Como  $G_{i_0}$  es abierto, existe  $r > 0$  tal que

$$B(x, r) \subseteq G_{i_0}.$$

De aquí se deduce

$$B(x, r) \subseteq G_{i_0} \subseteq G.$$

Por lo tanto, para todo  $x \in G$  hemos encontrado un radio  $r > 0$  con  $B(x, r) \subseteq G$ . Por definición,  $G$  es abierto.

(ii) Sea  $G_1, \dots, G_n$  una familia finita de conjuntos abiertos en  $E$  y definimos

$$H = \bigcap_{k=1}^n G_k.$$

Probemos que  $H$  es abierto.

Tomemos  $x \in H$ . Entonces  $x \in G_k$  para todo  $k = 1, \dots, n$ . Como cada  $G_k$  es abierto, existe  $r_k > 0$  tal que

$$B(x, r_k) \subseteq G_k \quad \text{para cada } k = 1, \dots, n.$$

Definimos

$$r = \min\{r_1, \dots, r_n\}.$$

Entonces  $r > 0$  y, para todo  $k$ ,

$$B(x, r) \subseteq B(x, r_k) \subseteq G_k.$$

De aquí se sigue

$$B(x, r) \subseteq \bigcap_{k=1}^n G_k = H.$$

Por lo tanto, para cada  $x \in H$  existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subseteq H$ , lo que muestra que  $H$  es abierto.  $\square$

*Observación.* El resultado sobre intersección de abiertos es, en general, válido sólo para intersecciones finitas. Una intersección infinita de abiertos puede no ser abierta.

Por ejemplo, en  $(\mathbb{R}, d_{\text{eucl}})$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  el conjunto

$$G_n = \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$$

es un abierto. Consideremos la intersección

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right).$$

Es fácil ver que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}.$$

El conjunto  $\{0\}$  no es abierto en  $\mathbb{R}$  con la métrica usual, ya que si tomamos cualquier  $r > 0$ , la bola  $B(0, r) = (-r, r)$  contiene puntos distintos de 0, de modo que nunca se cumple  $B(0, r) \subseteq \{0\}$ . Por lo tanto, la intersección numerable de los abiertos  $G_n$  no es abierta.

### 3.2. Conjuntos cerrados

**Definición 3.6.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $A \subseteq E$ . Un punto  $x \in E$  se llama *punto de adherencia* (o *punto de clausura*) de  $A$  si

$$\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

**Definición 3.7.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $A \subseteq E$ . La *clausura* (o *adherencia*) de  $A$  es el conjunto

$$\overline{A} = \{x \in E : x \text{ es punto de adherencia de } A\}.$$

**Definición 3.8.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico. Un subconjunto  $F \subseteq E$  se dice *cerrado* si su complemento  $E \setminus F$  es un conjunto abierto.

**Proposición 3.9.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico,  $x_0 \in E$  y  $r > 0$ . Entonces la bola cerrada

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E : d(x, x_0) \leq r\}$$

es un conjunto cerrado.

*Demostración.* Por definición,  $\overline{B}(x_0, r)$  es cerrada si su complemento  $E \setminus \overline{B}(x_0, r)$  es abierto. Sea

$$x \in E \setminus \overline{B}(x_0, r).$$

Entonces  $d(x, x_0) > r$ . Definimos

$$\varepsilon = \frac{d(x, x_0) - r}{2}.$$

Como  $d(x, x_0) > r$ , se tiene  $\varepsilon > 0$ .

Mostremos que

$$B(x, \varepsilon) \subseteq E \setminus \overline{B}(x_0, r).$$

Sea  $y \in B(x, \varepsilon)$ , es decir,

$$d(x, y) < \varepsilon.$$

Por la desigualdad triangular,

$$d(y, x_0) \geq d(x, x_0) - d(x, y).$$

Luego

$$d(y, x_0) > d(x, x_0) - \varepsilon = d(x, x_0) - \frac{d(x, x_0) - r}{2} = \frac{d(x, x_0) + r}{2}.$$

Como  $d(x, x_0) > r$ , se tiene

$$\frac{d(x, x_0) + r}{2} > \frac{r + r}{2} = r,$$

de modo que  $d(y, x_0) > r$ . En particular,  $d(y, x_0) \not\leq r$ , así que  $y \notin \overline{B}(x_0, r)$ .

Hemos probado que todo  $y \in B(x, \varepsilon)$  pertenece al complemento de la bola cerrada:

$$B(x, \varepsilon) \subseteq E \setminus \overline{B}(x_0, r).$$

Por lo tanto, para cada  $x$  del complemento existe un  $\varepsilon > 0$  tal que la bola  $B(x, \varepsilon)$  está contenida en dicho complemento. Esto significa que  $E \setminus \overline{B}(x_0, r)$  es abierto.

Concluimos que  $\overline{B}(x_0, r)$  es cerrado. □

**Proposición 3.10** (Caracterización de la clausura mediante cerrados). *Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $A \subseteq E$ . Entonces:*

(I)  $A \subseteq \overline{A}$ .

(II)  $\overline{A}$  es un conjunto cerrado.

(III) Si  $F$  es un conjunto cerrado con  $A \subseteq F$ , entonces  $\overline{A} \subseteq F$ .

En particular,  $\overline{A}$  es el menor conjunto cerrado que contiene a  $A$ , y se puede escribir

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq E : F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}.$$

*Demostración.* (i) Sea  $x \in A$ . Entonces, para cualquier  $r > 0$ , se tiene  $x \in B(x, r)$ , y por lo tanto  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ . Es decir,  $x$  es punto de adherencia de  $A$ , y por definición  $x \in \overline{A}$ . Luego  $A \subseteq \overline{A}$ .

(ii) Probemos que  $\overline{A}$  es cerrado mostrando que  $E \setminus \overline{A}$  es abierto.

Sea  $x \in E \setminus \overline{A}$ . Entonces  $x$  no es punto de adherencia de  $A$ , es decir, existe  $r > 0$  tal que

$$B(x, r) \cap A = \emptyset.$$

Mostraremos que  $B(x, r/2) \subseteq E \setminus \overline{A}$ .

Sea  $y \in B(x, r/2)$ , de modo que  $d(x, y) < r/2$ . Tomemos  $s = r/2$ . Consideremos un punto  $z \in B(y, s)$ ; entonces  $d(y, z) < s = r/2$ . Por la desigualdad triangular,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

luego  $z \in B(x, r)$ . Como  $B(x, r) \cap A = \emptyset$ , se sigue que  $z \notin A$ . En consecuencia,

$$B(y, s) \cap A = \emptyset.$$

Esto significa que  $y$  no es punto de adherencia de  $A$ , es decir,  $y \notin \overline{A}$ .

Como  $y$  fue un punto arbitrario de  $B(x, r/2)$ , hemos probado que  $B(x, r/2) \subseteq E \setminus \overline{A}$ . Por lo tanto,  $E \setminus \overline{A}$  es abierto, y en consecuencia  $\overline{A}$  es cerrado.

(iii) Sea  $F$  un conjunto cerrado tal que  $A \subseteq F$ . Debemos probar que  $\overline{A} \subseteq F$ .

Sea  $x \in E \setminus F$ . Como  $F$  es cerrado, su complemento  $E \setminus F$  es abierto. Entonces existe  $r > 0$  tal que

$$B(x, r) \subseteq E \setminus F.$$

Como  $A \subseteq F$ , se tiene  $A \cap (E \setminus F) = \emptyset$ , y en particular

$$B(x, r) \cap A = \emptyset.$$

Esto muestra que  $x$  no es punto de adherencia de  $A$ , es decir,  $x \notin \overline{A}$ . Hemos probado

$$E \setminus F \subseteq E \setminus \overline{A}.$$

Tomando complementos,

$$\overline{A} \subseteq F.$$

Esto vale para todo conjunto cerrado  $F$  que contiene a  $A$ , con lo cual queda demostrado que  $\overline{A}$  es el menor cerrado que contiene a  $A$ , y en particular

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq E : F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}.$$

□

**Proposición 3.11.** *Un conjunto  $F \subseteq E$  es cerrado si y sólo si*

$$F = \overline{F}.$$

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Si  $F$  es cerrado y  $F$  contiene a  $\overline{F}$ , por la proposición anterior,  $\overline{F} \subseteq F$ . Por otra parte, siempre se cumple  $F \subseteq \overline{F}$ . De aquí se deduce  $F = \overline{F}$ .

( $\Leftarrow$ ) Si  $F = \overline{F}$ , como sabemos que  $\overline{F}$  es cerrado, se sigue que  $F$  es cerrado.  $\square$

**Proposición 3.12** (Caracterización secuencial de la clausura). *Sea  $(E, d)$  un espacio métrico,  $A \subseteq E$  y  $x \in E$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$$(I) \quad x \in \overline{A}.$$

$$(II) \quad \text{Existe una sucesión } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ con } a_n \in A \text{ para todo } n \text{ tal que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

*Demostración.* ( $i \Rightarrow ii$ ) Supongamos que  $x \in \overline{A}$ . Por definición de clausura, esto significa que para todo  $r > 0$  se cumple

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos el radio  $r_n = \frac{1}{n} > 0$ . Como  $B(x, r_n) \cap A \neq \emptyset$ , podemos elegir un punto

$$a_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A.$$

Así definimos una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de puntos de  $A$  que satisface

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que  $a_n \rightarrow x$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Elegimos  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Si  $n \geq N$ , entonces

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(a_n, x) < \varepsilon,$$

lo cual significa que  $a_n \rightarrow x$ . Esto prueba (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (i)) Recíprocamente, supongamos que existe una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $a_n \in A$  para todo  $n$  tal que  $a_n \rightarrow x$ . Debemos probar que  $x \in \overline{A}$ , es decir, que

$$\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Sea  $r > 0$ . Como  $a_n \rightarrow x$ , por definición de límite existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq N$ ,

$$d(a_n, x) < r.$$

En particular, tomando  $n = N$ , tenemos  $a_N \in B(x, r)$ . Como además  $a_N \in A$  por construcción de la sucesión, se obtiene

$$a_N \in B(x, r) \cap A,$$

y por lo tanto  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

Como esto vale para todo  $r > 0$ , concluimos que  $x$  es punto de adherencia de  $A$ , es decir,  $x \in \overline{A}$ .  $\square$

**Proposición 3.13.** *Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $F \subseteq E$ . Entonces  $F$  es cerrado si y sólo si se verifica:*

$$\text{si } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F \text{ y } x_n \rightarrow x \text{ en } E, \text{ entonces } x \in F.$$

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $F$  es cerrado y sea  $(x_n)$  una sucesión de puntos de  $F$  tal que  $x_n \rightarrow x$  en  $E$ . Supongamos, por absurdo, que  $x \notin F$ . Entonces  $x \in E \setminus F$ .

Como  $E \setminus F$  es abierto (porque  $F$  es cerrado), existe  $r > 0$  tal que

$$B(x, r) \subseteq E \setminus F.$$

Por la convergencia de  $(x_n)$  a  $x$ , sabemos que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Tomamos  $\varepsilon = r$ . Entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$ , se cumple  $d(x_n, x) < r$ , es decir,  $x_n \in B(x, r)$ . Pero  $B(x, r) \subseteq E \setminus F$ , luego  $x_n \notin F$  para todo  $n \geq N$ . Esto contradice el hecho de que  $x_n \in F$  para todos los  $n$ , por hipótesis. Por lo tanto, debe ser  $x \in F$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos ahora que se cumple la propiedad secuencial: toda sucesión de puntos de  $F$  que converge en  $E$  tiene su límite en  $F$ . Queremos ver que  $F$  es cerrado, es decir, que  $E \setminus F$  es abierto.

Tomemos un punto  $x \in E \setminus F$ . Supongamos, por absurdo, que  $E \setminus F$  no es abierto. Entonces no existe ningún  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subseteq E \setminus F$ . En particular, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el radio  $r = \frac{1}{n}$  no sirve, es decir:

$$B\left(x, \frac{1}{n}\right) \not\subseteq E \setminus F.$$

Esto significa que para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe algún punto

$$x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap F.$$

Por construcción,  $x_n \in F$  y, además,

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De aquí se deduce que  $x_n \rightarrow x$  en el espacio métrico  $(E, d)$ .

Pero, por hipótesis secuencial, el límite de cualquier sucesión de puntos de  $F$  que converge en  $E$  debe pertenecer a  $F$ , de modo que  $x \in F$ . Esto contradice que  $x \in E \setminus F$ .

Por lo tanto, nuestra suposición era falsa: para cada  $x \in E \setminus F$  debe existir  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subseteq E \setminus F$ , lo que muestra que  $E \setminus F$  es abierto. En consecuencia,  $F$  es cerrado.  $\square$

**Proposición 3.14.** *Sea  $(E, d)$  un espacio métrico. Entonces se verifican:*

(I)  $\emptyset$  y  $E$  son conjuntos cerrados.

(II) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

(III) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

*Demostración.* (i) Notemos que

$$E \setminus \emptyset = E \quad \text{y} \quad E \setminus E = \emptyset.$$

Como ya sabemos que  $E$  y  $\emptyset$  son abiertos, por definición de conjunto cerrado se sigue que  $\emptyset$  y  $E$  son cerrados.

(ii) Sea  $(F_i)_{i \in I}$  una familia cualquiera de conjuntos cerrados en  $E$ , indexada por un conjunto  $I$  arbitrario, y consideremos

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Queremos probar que  $F$  es cerrado.

Usamos la relación entre complementos, uniones e intersecciones:

$$E \setminus F = E \setminus \left( \bigcap_{i \in I} F_i \right) = \bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i).$$

Cada  $F_i$  es cerrado, así que  $E \setminus F_i$  es abierto para todo  $i$ . Por lo tanto, la unión  $\bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i)$  es abierta (por la propiedad ya demostrada para uniones arbitrarias de abiertos). En consecuencia,  $E \setminus F$  es abierto, lo que implica que  $F$  es cerrado.

(iii) Sean  $F_1, \dots, F_n$  conjuntos cerrados en  $E$  y consideremos

$$H = \bigcup_{k=1}^n F_k.$$

Entonces

$$E \setminus H = E \setminus \left( \bigcup_{k=1}^n F_k \right) = \bigcap_{k=1}^n (E \setminus F_k).$$

Como cada  $F_k$  es cerrado,  $E \setminus F_k$  es abierto para todo  $k$ . La intersección finita de abiertos es abierta, por lo tanto  $\bigcap_{k=1}^n (E \setminus F_k)$  es abierta. De aquí se deduce que  $E \setminus H$  es abierto y, por definición,  $H$  es cerrado.  $\square$

### 3.3. Puntos de acumulación y frontera

**Definición 3.15.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $A \subseteq E$ . Un punto  $x \in E$  se llama *punto de acumulación* (o *punto límite*) de  $A$  si

$$\forall r > 0 \quad (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Denotamos por  $A'$  al conjunto de todos los puntos de acumulación de  $A$ .

**Proposición 3.16** (Caracterización secuencial de puntos de acumulación). *Sea  $(E, d)$  un espacio métrico,  $A \subseteq E$  y  $x \in E$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *x es punto de acumulación de A, es decir  $x \in A'$ .*

(II) *Existe una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $a_n \in A \setminus \{x\}$  para todo  $n$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Supongamos que  $x \in A'$ . Entonces, por definición, para todo  $r > 0$  se cumple

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tomamos  $r_n = \frac{1}{n}$  y elegimos

$$a_n \in (B(x, r_n) \setminus \{x\}) \cap A.$$

Entonces  $a_n \in A \setminus \{x\}$  y  $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Elegimos  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ . Si  $n \geq N$ , entonces

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por definición de límite,  $a_n \rightarrow x$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i)) Recíprocamente, supongamos que existe una sucesión  $(a_n)$  con  $a_n \in A \setminus \{x\}$  para todo  $n$  y  $a_n \rightarrow x$ . Sea  $r > 0$ . Como  $a_n \rightarrow x$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq N$ ,

$$d(a_n, x) < r.$$

En particular,  $a_N \in B(x, r)$ , y como  $a_N \neq x$  se tiene  $a_N \in B(x, r) \setminus \{x\}$ . Además,  $a_N \in A$ .

Por lo tanto,

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

para todo  $r > 0$ , lo que significa que  $x$  es punto de acumulación de  $A$ , es decir,  $x \in A'$ .  $\square$

**Teorema 3.17.** *Sea  $A \subseteq E$  un subconjunto de un espacio métrico  $(E, d)$ . Entonces*

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

*Demostración.* Primero probamos la inclusión  $\overline{A} \subseteq A \cup A'$ . Sea  $x \in \overline{A}$ . Si  $x \in A$ , ya está. Supongamos que  $x \notin A$ . Como  $x \in \overline{A}$ , por definición de clausura se cumple

$$\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Pero como  $x \notin A$ , esto implica automáticamente que

$$\forall r > 0 \quad (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset,$$

es decir,  $x$  es punto de acumulación de  $A$ ,  $x \in A'$ . En cualquiera de los dos casos,  $x \in A \cup A'$ . Por lo tanto

$$\overline{A} \subseteq A \cup A'.$$

Ahora probamos la inclusión inversa  $A \cup A' \subseteq \overline{A}$ . Si  $x \in A$ , ya vimos que siempre se cumple  $A \subseteq \overline{A}$ , así que  $x \in \overline{A}$ .

Si  $x \in A'$ , entonces para todo  $r > 0$  se tiene

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

En particular, esto implica  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$  para todo  $r > 0$ , de modo que  $x$  es punto de adherencia de  $A$ , es decir,  $x \in \overline{A}$ .

En ambos casos  $x \in \overline{A}$ , por lo que

$$A \cup A' \subseteq \overline{A}.$$

Concluimos que  $\overline{A} = A \cup A'$ .  $\square$

**Corolario 3.18.** *Sea  $A \subseteq E$ . Entonces  $A$  es cerrado si y sólo si*

$$A' \subseteq A.$$

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Si  $A$  es cerrado, por definición  $A = \overline{A}$ . Por el teorema anterior,

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Luego

$$A = A \cup A'.$$

Esto sólo puede ocurrir si  $A' \subseteq A$ .

( $\Leftarrow$ ) Recíprocamente, supongamos que  $A' \subseteq A$ . Del teorema anterior tenemos

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Como  $A' \subseteq A$ , se obtiene

$$\overline{A} = A.$$

Pero un conjunto es cerrado si y sólo si coincide con su clausura, por lo que  $A$  es cerrado.  $\square$

**Definición 3.19.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $A \subseteq E$ . Un punto  $x \in E$  se llama *punto frontera* (o *punto de borde*) de  $A$  si para todo  $r > 0$  se cumple

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset.$$

El conjunto de todos los puntos frontera de  $A$  se denota por  $\partial A$  y se llama *frontera* (o *borde*) de  $A$ .

**Proposición 3.20.** *Para todo  $A \subseteq E$  se verifica*

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

*Demostración.* Sea  $x \in \partial A$ . Entonces, por definición de punto frontera, para todo  $r > 0$ ,

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset.$$

En particular, la primera condición implica que  $x$  es punto de adherencia de  $A$ , es decir  $x \in \overline{A}$ . Por otra parte, la segunda condición impide que exista algún  $r > 0$  con  $B(x, r) \subseteq A$ , luego  $x$  no es punto interior de  $A$ , es decir  $x \notin A^\circ$ . Por lo tanto  $x \in \overline{A} \setminus A^\circ$ .

Recíprocamente, sea  $x \in \overline{A} \setminus A^\circ$ . Entonces  $x \in \overline{A}$ , de modo que para todo  $r > 0$ ,

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Además,  $x \notin A^\circ$ , es decir, no existe ningún  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subseteq A$ . Por lo tanto, para todo  $r > 0$  se tiene

$$B(x, r) \not\subseteq A,$$

lo que significa que para todo  $r > 0$  existe  $y \in B(x, r)$  tal que  $y \notin A$ , es decir,

$$B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset.$$

Juntando ambas condiciones,  $x$  es punto frontera de  $A$ , es decir  $x \in \partial A$ .

Hemos probado ambas inclusiones, así que  $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ .  $\square$

**Proposición 3.21.** *Sea  $A \subseteq E$ . Entonces:*

(I)  *$\partial A$  es un conjunto cerrado.*

(II) *Se tiene la descomposición*

$$E = A^\circ \dot{\cup} \partial A \dot{\cup} (E \setminus \overline{A}),$$

*donde las uniones son disjuntas.*

(III) *Se verifica*

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

*Demostración.* (i) Por la proposición anterior,

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (E \setminus A^\circ).$$

Sabemos que  $\overline{A}$  es cerrado. Como  $A^\circ$  es abierto, su complemento  $E \setminus A^\circ$  es cerrado. La intersección de conjuntos cerrados es cerrada, luego  $\partial A$  es cerrado.

(ii) Por definición de interior, clausura y frontera, se tiene

$$A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}.$$

Además, por la proposición anterior,

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

Entonces

$$\overline{A} = A^\circ \dot{\cup} \partial A.$$

Por otra parte, el complemento de  $\overline{A}$  es  $E \setminus \overline{A}$ , y es abierto. Así, todo punto de  $E$  pertenece o bien a  $\overline{A}$  o bien a  $E \setminus \overline{A}$ , y dentro de  $\overline{A}$  está exactamente en  $A^\circ$  o en  $\partial A$ . Esto da la descomposición

$$E = A^\circ \dot{\cup} \partial A \dot{\cup} (E \setminus \overline{A}).$$

(iii) De la igualdad del teorema anterior  $\overline{A} = A \cup A'$  y del hecho de que  $\partial A \subseteq \overline{A}$ , se deduce en particular que

$$A \subseteq \overline{A} \quad \text{y} \quad \partial A \subseteq \overline{A}.$$

Por lo tanto,

$$A \cup \partial A \subseteq \overline{A}.$$

Recíprocamente, sea  $x \in \overline{A}$ . Si  $x \in A$ , ya está. Si  $x \notin A$ , como  $x \in \overline{A}$ , para todo  $r > 0$  se cumple  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ . Además, como  $x \notin A$ , se tiene  $x \in E \setminus A$ , luego para todo  $r > 0$  se cumple  $x \in B(x, r) \cap (E \setminus A)$ , o sea

$$B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset.$$

Por definición, esto significa que  $x \in \partial A$ . En cualquier caso,  $x \in A \cup \partial A$ , con lo cual

$$\overline{A} \subseteq A \cup \partial A.$$

Concluimos que  $\overline{A} = A \cup \partial A$ .  $\square$

### 3.4. Métricas equivalentes

Sea  $E$  un conjunto y  $d_1, d_2$  dos métricas en  $E$ .

**Definición 3.22.** Decimos que las métricas  $d_1$  y  $d_2$  en  $E$  son *equivalentes* si inducen los mismos conjuntos abiertos, es decir, si para todo  $U \subseteq E$  se cumple:

$$U \text{ es abierto en } (E, d_1) \iff U \text{ es abierto en } (E, d_2).$$

**Proposición 3.23** (Caracterización secuencial). *Sean  $d_1, d_2$  dos métricas en  $E$ . Son equivalentes si y sólo si para toda sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $E$  y todo  $x \in E$  se verifica*

$$x_n \rightarrow x \text{ en } (E, d_1) \iff x_n \rightarrow x \text{ en } (E, d_2).$$

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $d_1$  y  $d_2$  son equivalentes, es decir, tienen los mismos conjuntos abiertos.

Recordemos que, en un espacio métrico, una sucesión  $(x_n)$  converge a  $x$  si y sólo si se verifica la siguiente propiedad topológica:

$$\forall U \text{ abierto con } x \in U, \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : x_n \in U.$$

Sea  $(x_n)$  una sucesión en  $E$  y  $x \in E$ . Supongamos que  $x_n \rightarrow x$  en  $(E, d_1)$ . Entonces, para todo abierto  $U$  de  $(E, d_1)$  con  $x \in U$ , existe  $N$  tal que, si  $n \geq N$ , se cumple  $x_n \in U$ .

Como  $d_1$  y  $d_2$  tienen los mismos abiertos, ese mismo conjunto  $U$  es abierto también en  $(E, d_2)$ . La condición anterior es exactamente la definición de convergencia de  $(x_n)$  a  $x$  en  $(E, d_2)$ . Por lo tanto,  $x_n \rightarrow x$  en  $(E, d_2)$ .

La implicación recíproca se demuestra igual, intercambiando el rol de  $d_1$  y  $d_2$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos ahora que las sucesiones convergentes son las mismas para  $d_1$  y  $d_2$ .

Queremos ver que los conjuntos abiertos también coinciden. Sea  $U \subseteq E$  abierto en  $(E, d_1)$ , y probemos que es abierto en  $(E, d_2)$ .

Para eso, basta ver que si  $(x_n)$  es una sucesión en  $E \setminus U$  que converge a algún  $x \in E$  respecto de  $d_2$ , entonces  $x \in E \setminus U$  (es decir,  $x \notin U$ ). En efecto, esta propiedad caracteriza a los cerrados, y al tomar complementos caracteriza a los abiertos.

Sea entonces  $(x_n)$  una sucesión con  $x_n \in E \setminus U$  para todo  $n$  y  $x_n \rightarrow x$  en  $(E, d_2)$ . Por hipótesis, las sucesiones convergentes son las mismas en ambas métricas, así que también  $x_n \rightarrow x$  en  $(E, d_1)$ .

Como  $U$  es abierto en  $(E, d_1)$ , su complemento  $E \setminus U$  es cerrado en  $(E, d_1)$ . Por la caracterización secuencial de cerrados, si una sucesión de puntos de  $E \setminus U$  converge (en  $d_1$ ), su límite debe pertenecer a  $E \setminus U$ . En particular,  $x \in E \setminus U$ , es decir,  $x \notin U$ .

Hemos probado que el complemento de  $U$  es cerrado también con la métrica  $d_2$ , luego  $U$  es abierto en  $(E, d_2)$ . El mismo argumento, cambiando el rol de  $d_1$  y  $d_2$ , muestra la implicación inversa. Por lo tanto, los abiertos de  $d_1$  coinciden con los de  $d_2$ , y las métricas son equivalentes.  $\square$

**Definición 3.24.** Decimos que dos métricas  $d_1, d_2$  en  $E$  son *fuertemente equivalentes* si existen constantes  $c_1, c_2 > 0$  tales que

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

**Proposición 3.25.** Si  $d_1$  y  $d_2$  son fuertemente equivalentes, entonces son equivalentes (en el sentido de que inducen los mismos conjuntos abiertos).

*Demostración.* Sea  $U$  un abierto de  $(E, d_1)$  y tomemos  $x \in U$ . Por definición de abierto, existe  $r > 0$  tal que

$$B_{d_1}(x, r) \subseteq U,$$

donde  $B_{d_1}(x, r) = \{y : d_1(x, y) < r\}$ .

Consideremos ahora la bola en la métrica  $d_2$

$$B_{d_2}(x, c_1 r) = \{y \in E : d_2(x, y) < c_1 r\}.$$

Si  $y \in B_{d_2}(x, c_1 r)$ , entonces  $d_2(x, y) < c_1 r$ , y usando la desigualdad  $c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y)$  obtenemos

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) < c_1 r \implies d_1(x, y) < r.$$

Luego  $y \in B_{d_1}(x, r)$ , y por lo tanto

$$B_{d_2}(x, c_1 r) \subseteq B_{d_1}(x, r) \subseteq U.$$

Hemos mostrado que para todo  $x \in U$  existe un radio  $c_1 r > 0$  tal que la bola  $d_2$ -abierta correspondiente está contenida en  $U$ , de modo que  $U$  es abierto en  $(E, d_2)$ .

La implicación recíproca (todo abierto  $d_2$ -abierto es  $d_1$ -abierto) se prueba exactamente igual usando la otra desigualdad  $d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$ . Concluimos que  $d_1$  y  $d_2$  tienen los mismos abiertos, es decir, son métricas equivalentes.  $\square$

*Observación.* En espacios de dimensión finita (por ejemplo,  $\mathbb{R}^n$ ), todas las normas son fuertemente equivalentes. En particular, las métricas inducidas por las normas  $d_1, d_2, d_\infty$  en  $\mathbb{R}^n$  son equivalentes, y por lo tanto tienen los mismos abiertos, los mismos cerrados, las mismas sucesiones convergentes, etc.

**Teorema 3.26.** *Sean  $d$  y  $d'$  dos métricas sobre un mismo conjunto  $E$ . Las métricas  $d$  y  $d'$  son (topológicamente) equivalentes si y sólo si para todo  $x \in E$  y todo  $r > 0$  existen  $r_1, r_2 > 0$  tales que*

$$B_{d'}(x, r_1) \subseteq B_d(x, r) \quad y \quad B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r),$$

donde

$$B_d(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}, \quad B_{d'}(x, r) = \{y \in E : d'(x, y) < r\}.$$

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $d$  y  $d'$  son métricas equivalentes, es decir, inducen los mismos conjuntos abiertos.

Sea  $x \in E$  y  $r > 0$  arbitrarios. Entonces  $B_d(x, r)$  es un abierto en  $(E, d)$ ; como los abiertos de  $(E, d)$  y  $(E, d')$  coinciden,  $B_d(x, r)$  es también abierto en  $(E, d')$ .

Por definición de abierto en la métrica  $d'$ , existe  $r_1 > 0$  tal que

$$B_{d'}(x, r_1) \subseteq B_d(x, r).$$

Para obtener la otra inclusión, usamos el mismo argumento intercambiando el rol de  $d$  y  $d'$ : como  $B_{d'}(x, r)$  es abierto en  $(E, d')$  y las familias de abiertos coinciden,  $B_{d'}(x, r)$  es abierto en  $(E, d)$ . Luego existe  $r_2 > 0$  tal que

$$B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r).$$

Así se verifica la condición del enunciado.

( $\Leftarrow$ ) Recíprocamente, supongamos que para todo  $x \in E$  y todo  $r > 0$  existen  $r_1, r_2 > 0$  tales que

$$B_{d'}(x, r_1) \subseteq B_d(x, r) \quad y \quad B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r).$$

Queremos probar que los abiertos de  $(E, d)$  y  $(E, d')$  coinciden.

Sea  $U \subseteq E$  un conjunto abierto en  $(E, d)$ . Sea  $x \in U$ . Como  $U$  es abierto para  $d$ , existe  $r > 0$  tal que

$$B_d(x, r) \subseteq U.$$

Por hipótesis, existe  $r_2 > 0$  tal que

$$B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r).$$

Aplicando de nuevo la hipótesis, pero ahora a la bola  $d'$ -abierta  $B_{d'}(x, r)$ , podemos elegir  $r_3 > 0$  con

$$B_{d'}(x, r_3) \subseteq B_d(x, r_2).$$

Por lo tanto,

$$B_{d'}(x, r_3) \subseteq B_d(x, r_2) \subseteq B_d(x, r) \subseteq U.$$

Hemos encontrado, para cada  $x \in U$ , un radio  $r_3 > 0$  tal que  $B_{d'}(x, r_3) \subseteq U$ , lo que significa que  $U$  es abierto en  $(E, d')$ .

El argumento recíproco (si  $U$  es abierto en  $(E, d')$  entonces lo es en  $(E, d)$ ) se obtiene exactamente igual, usando de nuevo la hipótesis para pasar de bolas  $d'$ -abiertas a bolas  $d$ -abiertas. Concluimos que las familias de conjuntos abiertos de  $(E, d)$  y  $(E, d')$  coinciden, es decir,  $d$  y  $d'$  son métricas equivalentes.  $\square$

### 3.5. Sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos

**Definición 3.27.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $A \subseteq E$ . Decimos que  $A$  es *acotado* si existen  $x \in E$  y  $r > 0$  tales que

$$A \subset B(x, r),$$

donde  $B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$  es la bola abierta de centro  $x$  y radio  $r$ .

**Definición 3.28.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$  una sucesión. Decimos que  $(x_n)$  es *acotada* si existen  $x \in E$  y  $r > 0$  tales que

$$x_n \in B(x, r) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Equivalente: el conjunto  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  es acotado en  $E$ .

**Definición 3.29.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$  una sucesión. Decimos que  $(x_n)$  es una *sucesión de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

**Teorema 3.30.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ . Entonces:

- (1) Si  $(x_n)$  es de Cauchy, entonces es acotada.
- (2) Si  $(x_n)$  es convergente en  $E$ , entonces es de Cauchy.

(3) Si  $(x_n)$  es de Cauchy y tiene alguna subsucesión convergente, entonces  $(x_n)$  es convergente (en  $E$ ) y converge al mismo límite que esa subsucesión.

*Demostración.* (1) Supongamos que  $(x_n)$  es de Cauchy. Tomamos  $\varepsilon = 1$  en la definición. Entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, si  $n, m \geq n_0$ , se cumple

$$d(x_n, x_m) < 1.$$

En particular, para todo  $n \geq n_0$ ,

$$d(x_n, x_{n_0}) < 1.$$

Sea ahora

$$M = \max\{d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0}), 1\}$$

(si  $n_0 = 1$ , simplemente tomamos  $M = 1$ ). Entonces  $M > 0$  y, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$d(x_n, x_{n_0}) \leq M.$$

Por lo tanto,

$$x_n \in B(x_{n_0}, M) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

lo que muestra que la sucesión  $(x_n)$  es acotada.

(2) Supongamos que  $(x_n)$  converge en  $E$  a algún  $x \in E$ ; es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon/2.$$

(Escribimos  $\varepsilon/2$  para simplificar las cuentas que siguen.)

Sea ahora  $\varepsilon > 0$  fijo. Tomamos  $n_0$  como arriba. Si  $n, m \geq n_0$ , por la desigualdad triangular:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos mostrado que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que, si  $n, m \geq n_0$ , se cumple  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ; es decir,  $(x_n)$  es de Cauchy.

(3) Supongamos que  $(x_n)$  es de Cauchy y que existe una subsucesión  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_{n_k} \rightarrow x \in E$ .

Debemos probar que  $x_n \rightarrow x$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $(x_{n_k})$  converge a  $x$ , existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que, si  $k \geq K$ ,

$$d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2.$$

Como  $(x_n)$  es de Cauchy, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, si  $n, m \geq n_0$ ,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon/2.$$

Definimos

$$N = \max\{n_0, n_K\}.$$

Sea ahora  $n \geq N$ . Entonces  $n \geq n_0$  y  $n_K \geq n_0$ , por lo que aplicando la propiedad de Cauchy con  $m = n_K$  obtenemos:

$$d(x_n, x_{n_K}) < \varepsilon/2.$$

Por otra parte, como  $n_K \geq K$ , tenemos

$$d(x_{n_K}, x) < \varepsilon/2.$$

Usando la desigualdad triangular,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos probado que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon,$$

lo cual significa que  $x_n \rightarrow x$  en  $(E, d)$ .  $\square$

**Definición 3.31.** Un espacio métrico  $(E, d)$  se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy en  $E$  es convergente a un punto de  $E$ .

**Proposición 3.32.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico completo y sea  $F \subseteq E$  un subconjunto cerrado. Entonces el subespacio métrico  $(F, d)$  es completo.

*Demostración.* Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $F$  (con la métrica  $d$  restringida). Como  $F \subseteq E$ , también es una sucesión de Cauchy en  $E$ . Dado que  $(E, d)$  es completo, existe  $x \in E$  tal que  $x_n \rightarrow x$  en  $E$ .

Como  $F$  es cerrado en  $E$  y todos los  $x_n$  están en  $F$ , por la caracterización secuencial de cerrados se tiene necesariamente  $x \in F$ . Por lo tanto,  $(x_n)$  converge a un punto de  $F$ , y así  $(F, d)$  es completo.  $\square$

## 4. Unidad 4: Funciones continuas

### 4.1. Definición y caracterizaciones de continuidad

Sea  $(E, d_E)$  y  $(F, d_F)$  espacios métricos, y sea  $A \subseteq E$ . Consideramos funciones  $f : A \rightarrow F$ .

**Definición 4.1** (Continuidad en un punto). Sea  $x_0 \in A$ . Decimos que  $f$  es *continua en  $x_0$*  si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in A, d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

**Definición 4.2** (Continuidad en un conjunto). Decimos que  $f$  es *continua en  $A$*  si es continua en todo punto  $x_0 \in A$ . En particular, cuando  $A = E$ , diremos simplemente que  $f : E \rightarrow F$  es *continua*.

**Definición 4.3** (Continuidad secuencial en un punto). Sea  $x_0 \in A$ . Decimos que  $f$  es *secuencialmente continua en  $x_0$*  si para toda sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  tal que

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ en } (E, d_E),$$

se cumple

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0) \text{ en } (F, d_F).$$

**Proposición 4.4** (Equivalencia  $\varepsilon-\delta$  / sucesiones). *Sea  $f : A \rightarrow F$  y  $x_0 \in A$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  *$f$  es continua en  $x_0$  (en el sentido  $\varepsilon-\delta$ ).*
- (II)  *$f$  es secuencialmente continua en  $x_0$ , es decir: para toda sucesión  $(x_n) \subseteq A$  con  $x_n \rightarrow x_0$  en  $(E, d_E)$ , se tiene  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  en  $(F, d_F)$ .*

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii)) Supongamos que  $f$  es continua en  $x_0$  en el sentido  $\varepsilon-\delta$ . Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  una sucesión tal que  $x_n \rightarrow x_0$  en  $(E, d_E)$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Por continuidad en  $x_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in A.$$

Como  $x_n \rightarrow x_0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, si  $n \geq N$ , se cumple

$$d_E(x_n, x_0) < \delta.$$

Aplicando la condición de continuidad a cada  $x_n$  con  $n \geq N$ , obtenemos

$$d_F(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Por definición de límite de sucesión en  $(F, d_F)$ , esto significa que  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Luego (ii) es verdadera.

(ii)  $\Rightarrow$  (i)) Supongamos ahora que  $f$  es secuencialmente continua en  $x_0$  y probemos que es continua en  $x_0$  en el sentido  $\varepsilon-\delta$ .

Razonamos por absurdo. Supongamos que  $f$  no es continua en  $x_0$ . Entonces existe algún  $\varepsilon_0 > 0$  tal que, para todo  $\delta > 0$ , existe  $x \in A$  con

$$d_E(x, x_0) < \delta \quad \text{pero} \quad d_F(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon_0.$$

En particular, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , aplicamos esta propiedad con  $\delta = \frac{1}{n}$  y obtenemos un punto  $x_n \in A$  tal que

$$d_E(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad d_F(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0.$$

De aquí se ve que  $x_n \rightarrow x_0$  en  $(E, d_E)$ , porque para todo  $\varepsilon > 0$  basta tomar  $N$  con  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ ; entonces si  $n \geq N$ ,

$$d_E(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Sin embargo, la sucesión  $(f(x_n))$  no puede converger a  $f(x_0)$  en  $(F, d_F)$ , ya que para todo  $n$  se tiene

$$d_F(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0,$$

y esto contradice la definición de límite. Esto contradice la hipótesis de continuidad secuencial en  $x_0$ .

Por lo tanto, nuestra suposición era falsa y  $f$  debe ser continua en  $x_0$  en el sentido  $\varepsilon-\delta$ .  $\square$

**Definición 4.5** (Imagen inversa). Sea  $f : A \rightarrow F$  y  $B \subseteq F$ . Definimos la *imagen inversa* de  $B$  por  $f$  como

$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}.$$

**Teorema 4.6** (Continuidad y abiertos). *Sea  $f : A \rightarrow F$  una función entre espacios métricos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I)  *$f$  es continua en  $A$ .*

(II) *Para todo abierto  $G \subseteq F$ , el conjunto  $f^{-1}(G)$  es abierto en el subespacio  $A$  (es decir,  $f^{-1}(G) = A \cap U$  para algún abierto  $U$  de  $E$ ).*

(III) *Si  $A = E$ , entonces (ii) dice simplemente: para todo abierto  $G \subseteq F$ ,  $f^{-1}(G)$  es abierto en  $E$ .*

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Supongamos que  $f$  es continua en  $A$  y sea  $G \subseteq F$  un conjunto abierto. Consideraremos  $f^{-1}(G) \subseteq A$ .

Tomemos  $x_0 \in f^{-1}(G)$ . Entonces  $f(x_0) \in G$ . Como  $G$  es abierto en  $(F, d_F)$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$B_{d_F}(f(x_0), \varepsilon) \subseteq G.$$

Como  $f$  es continua en  $x_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in A$ ,

$$d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

es decir,

$$x \in B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_{d_F}(f(x_0), \varepsilon) \subseteq G.$$

Por lo tanto,

$$B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A \subseteq f^{-1}(G).$$

Esto muestra que, en el subespacio  $A$ , el punto  $x_0$  tiene una “bola” (dada por  $B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A$ ) contenida en  $f^{-1}(G)$ . Por definición,  $f^{-1}(G)$  es abierto en  $A$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i)) Supongamos ahora que para todo abierto  $G \subseteq F$ , el conjunto  $f^{-1}(G)$  es abierto en el subespacio  $A$ .

Sea  $x_0 \in A$  y probemos que  $f$  es continua en  $x_0$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Consideramos el abierto

$$G = B_{d_F}(f(x_0), \varepsilon) \subseteq F.$$

Por hipótesis,  $f^{-1}(G)$  es abierto en  $A$ . En particular,  $x_0 \in f^{-1}(G)$  (porque  $f(x_0) \in G$ ), y como  $f^{-1}(G)$  es abierto en el subespacio  $A$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$B_{d_E}(x_0, \delta) \cap A \subseteq f^{-1}(G).$$

Entonces, si  $x \in A$  y  $d_E(x, x_0) < \delta$ , se tiene  $x \in A$  y  $x \in B_{d_E}(x_0, \delta)$ , por lo que  $x \in f^{-1}(G)$ ; esto significa que  $f(x) \in G$ , es decir,

$$d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Hemos probado exactamente la condición  $\varepsilon-\delta$  de continuidad de  $f$  en  $x_0$ . Como  $x_0$  es arbitrario en  $A$ ,  $f$  es continua en  $A$ .

La equivalencia con (iii) es sólo una simplificación de notación cuando  $A = E$ , ya que en ese caso “abierto en  $A$ ” coincide con “abierto en  $E$ ”.  $\square$

**Teorema 4.7** (Continuidad y cerrados). *Sea  $f : A \rightarrow F$  una función entre espacios métricos. Son equivalentes:*

(I)  *$f$  es continua en  $A$ .*

(II) *Para todo cerrado  $C \subseteq F$ , el conjunto  $f^{-1}(C)$  es cerrado en el subespacio  $A$ .*

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii)) Supongamos  $f$  continua en  $A$  y sea  $C \subseteq F$  un cerrado. Su complemento  $F \setminus C$  es abierto en  $F$ .

Por el teorema anterior,  $f^{-1}(F \setminus C)$  es abierto en  $A$ . Notemos que

$$A \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(F \setminus C).$$

Entonces el complemento de  $f^{-1}(C)$  en  $A$  es abierto en  $A$ , por lo que  $f^{-1}(C)$  es cerrado en  $A$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i)) Recíprocamente, supongamos que la preimagen de todo cerrado en  $F$  es cerrada en  $A$ .

Sea  $G \subseteq F$  un abierto. Entonces  $F \setminus G$  es cerrado en  $F$ , y por hipótesis

$$f^{-1}(F \setminus G)$$

es cerrado en  $A$ . Su complemento en  $A$ ,

$$A \setminus f^{-1}(F \setminus G),$$

es abierto en  $A$ . Pero

$$A \setminus f^{-1}(F \setminus G) = f^{-1}(G).$$

Concluimos que  $f^{-1}(G)$  es abierto en  $A$  para todo abierto  $G$  de  $F$ . Por el teorema anterior, esto implica que  $f$  es continua en  $A$ .  $\square$

**Teorema 4.8** (Continuidad y clausura de la imagen). *Sea  $f : E \rightarrow E'$  una función entre espacios métricos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (I)  *$f$  es continua en  $E$ .*
- (II) *Para todo subconjunto  $A \subseteq E$  se cumple*

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii)) Supongamos que  $f$  es continua en  $E$  (en cada punto de  $E$ ).

Sea  $A \subseteq E$  y sea  $x \in \overline{A}$ . Por la caracterización secuencial de la clausura, existe una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  tal que

$$a_n \rightarrow x \quad \text{en } E.$$

Como  $f$  es continua en  $x$ , se tiene

$$f(a_n) \rightarrow f(x) \quad \text{en } E'.$$

Además, cada  $f(a_n)$  pertenece a  $f(A)$ , luego por la caracterización secuencial de la clausura en  $E'$  concluimos que

$$f(x) \in \overline{f(A)}.$$

Esto vale para todo  $x \in \overline{A}$ , por lo tanto

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i)) Supongamos ahora que para todo  $A \subseteq E$  se cumple

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Queremos probar que  $f$  es continua en  $E$ .

Usaremos el criterio de continuidad en términos de cerrados:  $f$  es continua si y sólo si, para todo conjunto cerrado  $C \subseteq E'$ , la preimagen  $f^{-1}(C)$  es cerrada en  $E$ .

Sea entonces  $C \subseteq E'$  un cerrado y definamos

$$A = f^{-1}(C) = \{x \in E : f(x) \in C\}.$$

Tenemos  $A \subseteq E$  y, en particular,  $f(A) \subseteq C$ . De la hipótesis aplicada a este conjunto  $A$  se obtiene

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Como  $f(A) \subseteq C$ , se cumple

$$\overline{f(A)} \subseteq \overline{C} = C$$

(porque  $C$  es cerrado). Por lo tanto,

$$f(\overline{A}) \subseteq C.$$

Tomando preimagen por  $f$  de ambos lados,

$$f^{-1}(f(\overline{A})) \subseteq f^{-1}(C) = A.$$

En particular, como  $\overline{A} \subseteq f^{-1}(f(\overline{A}))$  (siempre se cumple  $B \subseteq f^{-1}(f(B))$  para cualquier función y cualquier conjunto  $B$ ), obtenemos

$$\overline{A} \subseteq A.$$

Pero siempre se tiene  $A \subseteq \overline{A}$ , por definición de clausura. Luego

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq A,$$

de donde se deduce  $\overline{A} = A$ . Es decir,  $A$  es cerrado en  $E$ .

Hemos probado que, para todo cerrado  $C \subseteq E'$ , la preimagen  $f^{-1}(C)$  es cerrada en  $E$ . Por el criterio de continuidad mediante cerrados, esto implica que  $f$  es continua en  $E$ .

Así queda demostrada la equivalencia entre (i) y (ii).  $\square$

## 4.2. Continuidad uniforme

Sea  $f : E \rightarrow E'$  entre espacios métricos  $(E, d)$  y  $(E', d')$ .

**Definición 4.9** (Continuidad uniforme, versión con bolas). Decimos que  $f$  es *uniformemente continua* en  $E$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } f(B_d(x, \delta)) \subseteq B_{d'}(f(x), \varepsilon) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Es decir: dado  $\varepsilon > 0$  se puede elegir un mismo  $\delta > 0$  (válido para todos los puntos  $x$ ) de modo que, siempre que  $y$  esté  $\delta$ -cerca de  $x$ , las imágenes  $f(y)$  y  $f(x)$  estén  $\varepsilon$ -cerca.

**Definición 4.10** (Definición equivalente, versión  $\varepsilon-\delta$ ). Equivalente y más usada:  $f$  es *uniformemente continua* en  $E$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x, y \in E, d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Aquí  $\delta$  depende sólo de  $\varepsilon$ , no de los puntos  $x, y$ .

**Proposición 4.11.** *Las dos definiciones anteriores de continuidad uniforme son equivalentes.*

*Demostración.* Supongamos primero la definición con bolas. Sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $\delta > 0$  el correspondiente en esa definición. Si  $x, y \in E$  y  $d(x, y) < \delta$ , entonces  $y \in B_d(x, \delta)$  y, por la hipótesis,

$$f(y) \in f(B_d(x, \delta)) \subseteq B_{d'}(f(x), \varepsilon),$$

es decir,  $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ . Esto da la definición  $\varepsilon-\delta$ .

Recíprocamente, supongamos que vale la definición  $\varepsilon-\delta$ . Fijamos  $\varepsilon > 0$  y tomamos el correspondiente  $\delta > 0$ . Sea  $x \in E$  y  $y \in B_d(x, \delta)$ , entonces  $d(x, y) < \delta$  y por la hipótesis

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

es decir,  $f(y) \in B_{d'}(f(x), \varepsilon)$ . Por lo tanto,

$$f(B_d(x, \delta)) \subseteq B_{d'}(f(x), \varepsilon) \quad \text{para todo } x \in E,$$

que es la definición con bolas.  $\square$

**Proposición 4.12** (Criterio secuencial para *no* continuidad uniforme). *Sea  $f : E \rightarrow E'$ . Entonces  $f$  **no** es uniformemente continua en  $E$  si y sólo si existen  $\varepsilon_0 > 0$  y sucesiones  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $E$  tales que*

$$d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{pero} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $f$  no es uniformemente continua. Entonces existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  no se cumple la condición de continuidad uniforme, es decir:

$$\forall \delta > 0 \exists x, y \in E \text{ con } d(x, y) < \delta \text{ y } d'(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , aplicamos esto con  $\delta = \frac{1}{n}$ , obteniendo puntos  $x_n, y_n \in E$  tales que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0.$$

Entonces  $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , mientras que las distancias entre las imágenes están siempre acotadas inferiormente por  $\varepsilon_0$ . Esto da las sucesiones pedidas.

( $\Leftarrow$ ) Recíprocamente, supongamos que existen  $\varepsilon_0 > 0$  y sucesiones  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  en  $E$  tales que

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0 \quad \forall n.$$

Supongamos, por absurdo, que  $f$  fuera uniformemente continua. Tomemos  $\varepsilon = \varepsilon_0$  en la definición de continuidad uniforme. Entonces existiría  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x, y \in E$ ,

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon_0.$$

Como  $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq N$ ,

$$d(x_n, y_n) < \delta.$$

Aplicando la condición de uniformidad, tendríamos

$$d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon_0 \quad \text{para todo } n \geq N,$$

lo que contradice la hipótesis  $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$  para todo  $n$ .

Por lo tanto,  $f$  no puede ser uniformemente continua.  $\square$

**Definición 4.13** (Aplicación de Lipschitz). Sea  $C > 0$ . Decimos que  $f : E \rightarrow E'$  es *Lipschitz* (o  $C$ -*Lipschitz*) si

$$d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

**Teorema 4.14.** *Sea  $f : E \rightarrow E'$ . Si existe  $C > 0$  tal que*

$$d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in E,$$

*entonces  $f$  es uniformemente continua en  $E$ .*

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Definimos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{C} > 0.$$

Si  $x, y \in E$  satisfacen  $d(x, y) < \delta$ , entonces

$$d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) < C\delta = \varepsilon.$$

Esto es exactamente la definición de continuidad uniforme (con  $\delta = \varepsilon/C$ ). Por lo tanto  $f$  es uniformemente continua.  $\square$

#### 4.2.1. Isometrías

**Definición 4.15.** Sea  $f : E \rightarrow E'$  entre espacios métricos  $(E, d)$  y  $(E', d')$ . Decimos que  $f$  es una *isometría* si

$$d(x, y) = d'(f(x), f(y)) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

**Proposición 4.16.** Sea  $f : E \rightarrow E'$  una isometría. Entonces:

(I)  $f$  es inyectiva.

(II)  $f$  es 1-Lipschitz, luego uniformemente continua.

*Demostración.* (i) Si  $f(x) = f(y)$ , entonces

$$d(x, y) = d'(f(x), f(y)) = d'(f(x), f(x)) = 0,$$

lo que implica  $x = y$ . Por lo tanto,  $f$  es inyectiva.

(ii) De la definición de isometría se tiene directamente

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \leq 1 \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in E,$$

es decir,  $f$  es 1-Lipschitz. Por el teorema anterior, toda aplicación Lipschitz es uniformemente continua, así que  $f$  lo es.  $\square$

*Observación.* Si  $f : E \rightarrow E'$  es una isometría *biyectiva*, entonces su inversa  $f^{-1} : E' \rightarrow E$  también es una isometría: para  $u, v \in E'$ , escribiendo  $u = f(x)$  y  $v = f(y)$  con  $x, y \in E$ , se tiene

$$d(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = d(x, y) = d'(f(x), f(y)) = d'(u, v).$$

En particular,  $f^{-1}$  también es uniformemente continua.

#### 4.2.2. Homeomorfismos

**Definición 4.17.** Sea  $f : E \rightarrow E'$  una función entre espacios métricos. Decimos que  $f$  es un *homeomorfismo* si:

(I)  $f$  es biyectiva,

(II)  $f$  es continua,

(III) la inversa  $f^{-1} : E' \rightarrow E$  es continua.

**Definición 4.18.** Dos espacios métricos  $(E, d)$  y  $(E', d')$  se dicen *homeomorfos* si existe un homeomorfismo  $f : E \rightarrow E'$ .

**Proposición 4.19.** Si  $f : E \rightarrow E'$  es un homeomorfismo, entonces:

(I)  $G \subseteq E$  es abierto si y sólo si  $f(G)$  es abierto en  $E'$ .

(II)  $F \subseteq E$  es cerrado si y sólo si  $f(F)$  es cerrado en  $E'$ .

*Demostración.* (i) Si  $G$  es abierto en  $E$  y  $f$  es continua, entonces  $f(G)$  es abierto en  $E'$  si y sólo si  $f^{-1}$  es continua, porque  $G = f^{-1}(f(G))$  y  $f^{-1}$  es continua por hipótesis.

Formalmente: como  $f$  es biyectiva,  $G = f^{-1}(H)$  para  $H = f(G)$ . La continuidad de  $f^{-1}$  implica que, si  $H$  es abierto en  $E'$ , entonces  $G$  es abierto en  $E$ . Inversamente, dado  $G$  abierto en  $E$ ,  $H = f(G)$  es abierto en  $E'$  porque  $H$  es la imagen inversa de un abierto por  $f^{-1}$  (que es continua).

(ii) Se deduce de (i) aplicando el resultado a los complementos:  $F$  es cerrado en  $E$  si y sólo si  $E \setminus F$  es abierto, y la imagen por  $f$  de  $E \setminus F$  es el complemento de  $f(F)$  en  $E'$ .  $\square$

*Observación.* En general, una aplicación biyectiva y continua *no* tiene por qué tener inversa continua, es decir, no todo biectivo continuo es un homeomorfismo. El requisito  $f^{-1}$  continua es esencial en la definición.

#### 4.2.3. Conjuntos densos

**Definición 4.20.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico. Un subconjunto  $D \subseteq E$  se dice *denso en  $E$*  si

$$\overline{D} = E.$$

Equivalente: todo punto de  $E$  es límite de una sucesión de puntos de  $D$ .

**Proposición 4.21.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $D \subseteq E$ . Son equivalentes:

(I)  $D$  es denso en  $E$ , es decir,  $\overline{D} = E$ .

(II) Para todo abierto no vacío  $G \subseteq E$  se cumple

$$G \cap D \neq \emptyset.$$

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Supongamos  $\overline{D} = E$ . Sea  $G$  un abierto no vacío en  $E$ . Como  $G \subseteq E = \overline{D}$ , y  $G$  es abierto, se cumple  $G \cap D \neq \emptyset$  (porque todo abierto que intersecta la clausura de un conjunto debe intersectar al conjunto mismo).

Más formalmente: si  $G \cap D = \emptyset$ , entonces  $G \subseteq E \setminus D$ , y el complemento  $E \setminus D$  sería un cerrado que contiene a  $G$ , contradiciendo que  $G \subseteq \overline{D}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Supongamos que todo abierto no vacío  $G$  verifica  $G \cap D \neq \emptyset$ . Si existiera  $x \in E \setminus \overline{D}$ , entonces  $x$  estaría en el abierto  $E \setminus \overline{D}$ , que por definición de clausura no intersecta a  $D$ . Esto contradice (ii). Por lo tanto,  $E \setminus \overline{D} = \emptyset$ , es decir,  $\overline{D} = E$ .  $\square$

## 5. Unidad 5: Compacidad

### 5.1. Definiciones básicas

**Definición 5.1** (Conjunto compacto). Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $K \subseteq E$ . Decimos que  $K$  es *compacto* si para toda familia de abiertos  $\{G_i\}_{i \in I}$  de  $E$  tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i,$$

existe un subíndice finito  $i_1, \dots, i_n \in I$  con

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}.$$

Es decir, todo recubrimiento abierto de  $K$  admite un subcubrimiento finito.

**Definición 5.2** (Compacidad secuencial). Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $K \subseteq E$ . Decimos que  $K$  es *secuencialmente compacto* si para toda sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $x_n \in K$  para todo  $n$ , existe una subsucesión  $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  y un punto  $x \in K$  tales que

$$x_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x.$$

**Definición 5.3** (Conjunto totalmente acotado). Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $A \subseteq E$ . Decimos que  $A$  es *totalmente acotado* (T.T.A.) si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1, \dots, x_{n(\varepsilon)} \in E \text{ tales que } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n(\varepsilon)} B(x_k, \varepsilon),$$

donde  $B(x_k, \varepsilon) = \{y \in E : d(x_k, y) < \varepsilon\}$ .

**Definición 5.4** (Punto de acumulación). Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $A \subseteq E$ . Un punto  $x \in E$  se llama *punto de acumulación* (o punto límite) de  $A$  si

$$\forall r > 0 \quad (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Denotamos por  $A'$  al conjunto de puntos de acumulación de  $A$ .

**Proposición 5.5** (Caracterización secuencial de puntos de acumulación). *Sea  $A \subseteq E$  y  $x \in E$ . Entonces*

$$x \in A' \iff \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x\} \text{ tal que } a_n \rightarrow x.$$

## 5.2. Compacidad y puntos de acumulación

**Teorema 5.6** (Equivalencias de compacidad en espacios métricos). *Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $K \subseteq E$ . Son equivalentes:*

(I)  *$K$  es compacto.*

(II)  *$K$  es secuencialmente compacto.*

(III) *Todo subconjunto infinito  $A \subseteq K$  tiene al menos un punto de acumulación en  $K$ , es decir,  $A' \cap K \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Sea  $(x_n)$  una sucesión en  $K$ . Si el conjunto de valores  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  es finito, alguna de sus constantes se repite infinitas veces y obtenemos una subsucesión constante, luego convergente.

Si  $A$  es infinito, como  $K$  es compacto, también lo es  $\bar{A}$ , y por tanto  $A$  tiene un punto de acumulación  $x \in K$ . Por la caracterización secuencial de puntos de acumulación, existe una subsucesión  $(x_{n_j})$  con  $x_{n_j} \rightarrow x \in K$ . En ambos casos,  $(x_n)$  admite una subsucesión convergente en  $K$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Sea  $A \subseteq K$  infinito. Elegimos una sucesión de puntos distintos  $(x_n) \subseteq A$  (por ejemplo, una enumeración inyectiva de  $A$ ). Por (ii), existe una subsucesión  $(x_{n_j})$  y un punto  $x \in K$  tales que  $x_{n_j} \rightarrow x$ . Como todos los  $x_{n_j} \in A$ , la caracterización secuencial de puntos de acumulación dice que  $x \in A'$ . Por tanto  $A' \cap K \neq \emptyset$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (ii). Sea  $(x_n)$  una sucesión en  $K$  y sea  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ . Si  $A$  es finito, como antes obtenemos una subsucesión constante y convergente.

Si  $A$  es infinito, por (iii) existe  $x \in A' \cap K$ . Entonces, por la caracterización secuencial de puntos de acumulación, existe una subsucesión  $(x_{n_j})$  de  $(x_n)$  tal que  $x_{n_j} \rightarrow x \in K$ . En todo caso,  $(x_n)$  admite una subsucesión convergente en  $K$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Probamos la contrarrecíproca. Supongamos que  $K$  no es compacto. Entonces existe un recubrimiento abierto  $\{G_i\}_{i \in I}$  de  $K$  que no admite subcubrimiento finito.

Construimos inductivamente una sucesión  $(x_n)$  en  $K$  del siguiente modo:

- Elegimos  $x_1 \in K$  y un índice  $i_1$  con  $x_1 \in G_{i_1}$ . - Supuesto elegido  $x_1, \dots, x_n$  con índices  $i_1, \dots, i_n$  tales que  $x_k \in G_{i_k}$ , como  $K \not\subseteq \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$  existe  $x_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$ . Elegimos  $i_{n+1}$  con  $x_{n+1} \in G_{i_{n+1}}$ .

Entonces cada  $x_n$  pertenece a un abierto nuevo de la familia, distinto de los anteriores. Sea  $(x_{n_j})$  una subsucesión cualquiera. Si fuera convergente, digamos  $x_{n_j} \rightarrow x \in K$ , algún abierto  $G_i$  contendría a  $x$  y a todos los términos suficientemente avanzados de la subsucesión; en particular, ese solo  $G_i$  cubriría casi todos los  $x_n$ , y un número finito de abiertos de la familia cubriría  $K$ , contradiciendo la elección de  $\{G_i\}$  sin subcubrimiento finito. Luego  $(x_n)$  no posee subsucesión convergente, y  $K$  no es secuencialmente compacto.

La contrarrecíproca muestra que (ii) implica (i).  $\square$

### 5.3. Compacidad, completitud y total acotación

**Teorema 5.7.** *Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $K \subseteq E$ . Entonces:*

- (I) *Si  $K$  es compacto, entonces  $K$  es completo y totalmente acotado.*
- (II) *Si  $K$  es completo y totalmente acotado, entonces  $K$  es compacto.*

*En particular,*

$$K \text{ compacto} \iff K \text{ completo y totalmente acotado.}$$

*Demostración.* (i) Si  $K$  es compacto, por el teorema anterior es secuencialmente compacto. Toda sucesión de Cauchy en  $K$  admite una subsucesión convergente; un argumento estándar muestra que la sucesión completa converge al mismo límite, que pertenece a  $K$ , de modo que  $K$  es completo.

Para ver que  $K$  es T.T.A., sea  $\varepsilon > 0$  y consideremos la familia de bolas  $\{B(x, \varepsilon) : x \in K\}$ , que es un recubrimiento abierto de  $K$ . Por compacidad, existe un subcubrimiento finito  $K \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$ , que es precisamente la definición de T.T.A.

(ii) Supongamos que  $K$  es completo y totalmente acotado. Sea  $(x_n)$  una sucesión en  $K$ . Por total acotación, usando el clásico método de “subsucesiones encajadas”, se puede extraer una subsucesión  $(x_{n_j})$  que resulta ser de Cauchy. Como  $K$  es completo, esa subsucesión converge en  $K$ . Así, toda sucesión en  $K$  tiene una subsucesión convergente en  $K$ , es decir,  $K$  es secuencialmente compacto. Por el teorema anterior,  $K$  es compacto.  $\square$

**Proposición 5.8.** *Si  $(E, d)$  es un espacio métrico y  $K \subseteq E$  es compacto, entonces  $K$  es cerrado y acotado.*

*Demostración.* Ya vimos que todo compacto es totalmente acotado, luego es acotado.

Resta ver que es cerrado. Sea  $\bar{K}$  la clausura de  $K$ . Si  $x \in \bar{K}$ , existe una sucesión  $(x_n) \subseteq K$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Como  $K$  es compacto, es secuencialmente compacto, por lo que  $(x_n)$  admite una subsucesión convergente con límite en  $K$ ; la unicidad del límite en espacios métricos fuerza que ese límite sea  $x$ , por lo que  $x \in K$ . Se obtiene  $\bar{K} \subseteq K$ , y como siempre  $K \subseteq \bar{K}$ , concluimos  $\bar{K} = K$ , es decir,  $K$  es cerrado.  $\square$

**Teorema 5.9** (Heine–Borel en  $\mathbb{R}^m$ ). *Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^m$  con la métrica euclídea usual. Entonces*

$$K \text{ es compacto} \iff K \text{ es cerrado y acotado.}$$

#### 5.4. Propiedades estructurales de compactos y T.T.A.

**Proposición 5.10** (Subconjunto cerrado de un compacto). *Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $K \subseteq E$  compacto. Si  $F \subseteq K$  es cerrado (en  $E$ ), entonces  $F$  es compacto.*

*Demostración.* Sea  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un recubrimiento abierto de  $F$  en  $E$ . Como  $F$  es cerrado,  $E \setminus F$  es abierto. Entonces

$$\{G_\alpha : \alpha \in A\} \cup \{E \setminus F\}$$

es un recubrimiento abierto de  $K$ . Por compacidad, existe una subfamilia finita que recubre  $K$ , y por lo tanto  $F$  queda cubierto por una subfamilia finita de los  $G_\alpha$ . Así,  $F$  es compacto.  $\square$

**Corolario 5.11.** *La intersección arbitraria de subconjuntos compactos de un espacio métrico es un conjunto compacto (en particular,  $\emptyset$  es compacto).*

*Demostración.* Si  $\{K_i\}_{i \in I}$  son compactos, cada uno es cerrado en  $E$ . La intersección  $K = \bigcap_{i \in I} K_i$  es cerrada y satisface  $K \subseteq K_{i_0}$  para cualquier índice fijo  $i_0$ . Como  $K$  es un subconjunto cerrado de  $K_{i_0}$ , por la proposición anterior  $K$  es compacto. El caso  $K = \emptyset$  también es compacto por definición.  $\square$

**Proposición 5.12** (Propiedades de conjuntos totalmente acotados). *Sea  $(E, d)$  un espacio métrico.*

(I) *Si  $A \subseteq B \subseteq E$  y  $B$  es T.T.A., entonces  $A$  es T.T.A.*

(II) *Si  $A$  es T.T.A., entonces  $\overline{A}$  es T.T.A.*

(III) *Si  $A$  y  $B$  son T.T.A., entonces  $A \cup B$  es T.T.A. (en general, la unión finita de conjuntos T.T.A. es T.T.A.).*

(IV) *Si  $A$  es T.T.A., entonces  $A$  es acotado.*

*Demostración.* (i) y (iii) se obtienen directamente de la definición observando que un recubrimiento finito de  $B$  o de  $A$  y  $B$  provee uno de  $A$  o de  $A \cup B$ .

(ii) Dado  $\varepsilon > 0$ , se cubre  $A$  con finitas bolas  $B(x_k, \varepsilon/2)$ ; se comprueba que la clausura de cada una de ellas queda incluida en  $B(x_k, \varepsilon)$ , y se deduce que  $\overline{A}$  queda cubierta por la unión finita  $\bigcup_k B(x_k, \varepsilon)$ .

(iv) Tomando  $\varepsilon = 1$ , se ve que  $A$  queda contenido en la unión finita de bolas de radio 1, por lo que todo punto de  $A$  está a distancia acotada de cualquiera de sus centros; esto da una cota global para  $A$ .  $\square$

**Proposición 5.13** (Imagen de T.T.A. por función uniformemente continua). *Sean  $(E, d)$  y  $(E', d')$  espacios métricos,  $A \subseteq E$  totalmente acotado y  $f : E \rightarrow E'$  uniformemente continua. Entonces  $f(A)$  es totalmente acotado en  $(E', d')$ .*

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Por uniformidad de  $f$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall x, y \in E.$$

Como  $A$  es T.T.A., existen  $x_1, \dots, x_n$  con

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \delta).$$

Entonces

$$f(A) \subseteq \bigcup_{k=1}^n f(B(x_k, \delta)) \subseteq \bigcup_{k=1}^n B_{d'}(f(x_k), \varepsilon).$$

Hemos cubierto  $f(A)$  con finitas bolas de radio  $\varepsilon$ ; como  $\varepsilon$  era arbitrario,  $f(A)$  es T.T.A.  $\square$

### 5.5. Funciones continuas sobre compactos

**Teorema 5.14** (Imagen continua de un compacto). *Sean  $(E, d)$  y  $(E', d')$  espacios métricos y sea  $f : E \rightarrow E'$  continua. Si  $K \subseteq E$  es compacto, entonces  $f(K)$  es compacto en  $E'$ .*

*Demostración.* Sea  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un recubrimiento abierto de  $f(K)$  en  $E'$ . Para cada  $\alpha$  definimos  $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$ , que es abierto en  $E$  por continuidad de  $f$ . Además,

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha,$$

pues si  $x \in K$  entonces  $f(x) \in f(K) \subseteq \bigcup V_\alpha$ .

Como  $K$  es compacto, existe un subcubrimiento finito  $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$ . Aplicando  $f$ ,

$$f(K) \subseteq \bigcup_{j=1}^n f(U_{\alpha_j}) \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_{\alpha_j},$$

que es un subcubrimiento finito de  $f(K)$ . Así,  $f(K)$  es compacto.  $\square$

**Corolario 5.15** (Teorema de Weierstrass). *Sea  $K \subseteq E$  compacto y  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Entonces:*

(I)  *$f$  es acotada en  $K$ : existe  $c > 0$  tal que  $|f(x)| \leq c$  para todo  $x \in K$ ;*

(II)  *$f$  alcanza su máximo y su mínimo en  $K$ , es decir, existen  $x_{\min}, x_{\max} \in K$  con*

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \forall x \in K.$$

*Demostración.* Por el teorema anterior,  $f(K)$  es compacto en  $\mathbb{R}$ . Todo compacto no vacío de  $\mathbb{R}$  es cerrado y acotado, de modo que admite supremo e ínfimo que pertenecen al conjunto; eso da el máximo y el mínimo. La acotación se deduce de la existencia de supremo y de ínfimo.  $\square$

**Teorema 5.16** (Continuidad uniforme en compactos). *Sean  $(E, d)$  y  $(E', d')$  espacios métricos y sea  $f : E \rightarrow E'$  continua. Si  $E$  es compacto, entonces  $f$  es uniformemente continua.*

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Para cada  $x \in E$ , por continuidad de  $f$  en  $x$  existe  $\delta_x > 0$  tal que

$$d(x, y) < \delta_x \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall y \in E.$$

La familia de bolas  $B(x, \delta_x)$  (o  $B(x, \delta_x/2)$ ) es un cubrimiento abierto de  $E$ . Por compacidad, existe un subcubrimiento finito

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \delta_{x_k}).$$

Definimos

$$\delta = \min_{1 \leq k \leq n} \delta_{x_k} > 0.$$

Si  $x, y \in E$  satisfacen  $d(x, y) < \delta$ , entonces ambos pertenecen a alguna de las bolas del subcubrimiento (por ejemplo, a la de centro  $x_k$  que contiene a  $x$ ), y como en esa bola vale la condición de continuidad con  $\delta_{x_k} \geq \delta$ , obtenemos  $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ . Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

y  $f$  es uniformemente continua.  $\square$

**Corolario 5.17** (Funciones continuas sobre compacto son cerradas). *Sean  $(E, d)$  y  $(E', d')$  espacios métricos,  $E$  compacto y  $f : E \rightarrow E'$  continua. Entonces  $f$  es una aplicación cerrada: si  $G \subseteq E$  es cerrado, entonces  $f(G)$  es cerrado en  $E'$ .*

*Demostración.* Si  $G$  es cerrado en  $E$ , entonces  $G$  es compacto (cerrado en un compacto). Por el teorema de la imagen de un compacto,  $f(G)$  es compacto en  $E'$ . En un espacio métrico, todo compacto es cerrado, así que  $f(G)$  es cerrado.  $\square$

**Corolario 5.18** (Homeomorfismos desde compactos). *Sean  $(E, d)$  y  $(E', d')$  espacios métricos, con  $E$  compacto, y sea  $f : E \rightarrow E'$  continua y biyectiva. Entonces  $f$  es un homeomorfismo, es decir,  $f^{-1} : E' \rightarrow E$  es continua.*

*Demostración.* Del corolario anterior,  $f$  es una aplicación cerrada. Sea  $F' \subseteq E'$  cerrado. Como  $f$  es biyectiva, se tiene

$$f^{-1}(F') \subseteq E.$$

Además

$$E' \setminus F' \text{ es abierto} \Rightarrow f^{-1}(E' \setminus F') = E \setminus f^{-1}(F') \text{ es abierto en } E,$$

por continuidad de  $f$ . Por lo tanto  $f^{-1}(F')$  es cerrado en  $E$ . La preimagen por  $f^{-1}$  de todo cerrado de  $E$  es cerrada, lo que equivale a la continuidad de  $f^{-1}$ . Luego  $f$  es un homeomorfismo.  $\square$

## 6. Unidad 6: Espacios normados

## 7. Unidad 7: Sucesiones de funciones

### 7.1. Convergencia puntual y uniforme

**Definición 7.1** (Convergencia puntual). Sean  $(E, d)$  y  $(E', d')$  espacios métricos y sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones  $f_n : E \rightarrow E'$ . Decimos que  $(f_n)$  converge puntualmente a una función  $f : E \rightarrow E'$  si

$$\forall x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} d'(f_n(x), f(x)) = 0.$$

Equivalentemente,

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

En este caso escribimos  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  puntualmente, o simplemente  $f_n \rightarrow f$  puntualmente en  $E$ .

**Definición 7.2** (Convergencia uniforme). Con la notación anterior, diremos que  $(f_n)$  converge uniformemente a  $f$  en  $E$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in E : d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

En este caso escribimos  $f_n \rightrightarrows f$  en  $E$ .

### 7.2. Límite uniforme de funciones continuas

**Teorema 7.3.** Sea  $(E, d)$ ,  $(E', d')$  espacios métricos y sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones continuas  $f_n : E \rightarrow E'$ , que converge uniformemente a  $f : E \rightarrow E'$ . Entonces  $f$  es continua.

*Demostración.* Sea  $x_0 \in E$  y sea  $\varepsilon > 0$  dado. Como  $f_n \rightrightarrows f$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$d'(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in E, \forall n \geq N.$$

En particular,

$$d'(f_N(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como  $f_N$  es continua en  $x_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomemos ahora un  $x \in E$  con  $d(x, x_0) < \delta$ . Entonces

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(x_0)) &\leq d'(f(x), f_N(x)) + d'(f_N(x), f_N(x_0)) + d'(f_N(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon > 0$  era arbitrario, esto prueba que  $f$  es continua en  $x_0$ . Dado que  $x_0$  era un punto cualquiera de  $E$ ,  $f$  es continua en todo  $E$ .  $\square$

### 7.3. Pasaje al límite bajo el signo integral

**Proposición 7.4.** *Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  con  $a < b$  y sean  $f_n, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas tales que  $f_n \Rightarrow f$  en  $[a, b]$ . Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Como  $f_n \Rightarrow f$  en  $[a, b]$ , por definición de convergencia uniforme existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\forall n \geq N \ \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Fijemos  $n \geq N$ . Entonces, para todo  $t \in [a, b]$ ,

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Integrando en el intervalo  $[a, b]$  y usando la desigualdad triangular para integrales, obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| &= \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hemos probado que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| < \varepsilon,$$

lo cual es precisamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

□

### 7.4. Convergencia de derivadas

**Proposición 7.5.** *Sean  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de clase  $C^1$  en  $[a, b]$ , tales que*

- $f_n \rightarrow f$  puntualmente en  $[a, b]$ ;

- $f'_n \rightrightarrows g$  en  $[a, b]$ .

Entonces  $f$  es derivable en  $[a, b]$  y

$$f' = g.$$

*Demostración.* Sea  $x_0 \in [a, b]$  fijo. Por el Teorema Fundamental del Cálculo aplicado a cada  $f_n$ , para todo  $x \in [a, b]$  se cumple

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

Tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  en ambos lados:

- Por la convergencia puntual  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  y  $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$ , el lado izquierdo converge a  $f(x) - f(x_0)$ .

- Por la proposición anterior (pasaje al límite bajo el integral) y la convergencia uniforme de  $f'_n$  a  $g$ , el lado derecho converge a  $\int_{x_0}^x g(t) dt$ .

Por lo tanto,

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x g(t) dt \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Definamos

$$F(x) := f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

La función  $F$  es de clase  $C^1$  en  $[a, b]$  y satisface  $F' = g$ . Además, la igualdad anterior muestra que  $f(x) = F(x)$  para todo  $x$ . Luego  $f$  es derivable y  $f' = g$ .  $\square$

## 7.5. Sucesiones uniformemente de Cauchy

**Definición 7.6** (Sucesión uniformemente de Cauchy). Sea  $(E, d)$  un espacio métrico,  $A \subseteq E$  y  $(E', d')$  otro espacio métrico. Una sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones  $f_n : A \rightarrow E'$  se dice *uniformemente de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 \forall x \in A : d'(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon.$$

**Teorema 7.7.** Sea  $A \subseteq E$  y  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente de Cauchy. Entonces existe una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f_n \rightrightarrows f$  en  $A$ .

*Demostración.* Fijemos  $x \in A$ . Consideremos la sucesión numérica

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}.$$

De la definición de sucesión uniformemente de Cauchy se deduce en particular que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } m, n \geq n_0.$$

Es decir, para cada  $x \in A$ , la sucesión  $(f_n(x))$  es de Cauchy en  $\mathbb{R}$ . Como  $\mathbb{R}$  es completo, existe el límite

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}.$$

Así definimos una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Resta ver que  $f_n \rightrightarrows f$  en  $A$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Por ser  $(f_n)$  uniformemente de Cauchy, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0, \quad \forall x \in A.$$

Fijemos  $n \geq n_0$  y  $x \in A$  arbitrarios. Tomando el límite cuando  $m \rightarrow \infty$  en la desigualdad anterior, obtenemos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ya que  $f_m(x) \rightarrow f(x)$  para cada  $x$ .

Como la cota  $\varepsilon$  es independiente de  $x$  y vale para todo  $n \geq n_0$ , concluimos que

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Esto es precisamente  $f_n \rightrightarrows f$  en  $A$ . □

## 8. Unidad 8: Medida de Lebesgue

### 8.1. Conjuntos nulos

**Definición 8.1** (Conjunto nulo). Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Decimos que  $A$  es un *conjunto nulo* si para todo  $\varepsilon > 0$  existen intervalos abiertos contables  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tales que

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{long}(U_n) < \varepsilon.$$

### 8.2. $\sigma$ -álgebras y conjuntos medibles de Lebesgue

**Definición 8.2** ( $\sigma$ -álgebra). Sea  $X$  un conjunto y sea  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Decimos que  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra si se verifica:

- (I)  $X \in \mathcal{A}$ ;
- (II) si  $A \in \mathcal{A}$ , entonces  $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$ ;
- (III) si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ , entonces

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{y} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

**Definición 8.3** (Conjuntos medibles de Lebesgue). Sea  $\mathcal{M}$  la  $\sigma$ -álgebra generada por los intervalos abiertos y los conjuntos nulos de  $\mathbb{R}$ . A  $\mathcal{M}$  la llamamos  $\sigma$ -álgebra de conjuntos medibles de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ .

Si  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ , denotamos por  $\mathcal{M}(I)$  a la  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos medibles de Lebesgue de  $I$ .

### 8.3. Medida de Lebesgue

**Teorema 8.4** (Existencia y unicidad de la medida de Lebesgue). *Existe una única función*

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$$

*tal que:*

(I) *si  $A = (a, b)$  es un intervalo abierto acotado, entonces*

$$\mu(A) = b - a;$$

(II) *si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ , entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n);$$

(III) *si, además, los  $A_n$  son dos a dos disjuntos, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n);$$

(IV) *para todo  $A \in \mathcal{M}$  se cumple la propiedad de regularidad exterior:*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{ abierto}\}.$$

*La función  $\mu$  se llama medida de Lebesgue.*

### 8.4. Propiedades básicas de la medida de Lebesgue

En esta subsección trabajamos, salvo aclaración en contrario, en el intervalo  $I = [0, 1]$  con la medida de Lebesgue, y escribimos  $\mathcal{M}(I)$  para la  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos medibles de  $I$ .

**Teorema 8.5** (Propiedades básicas). *Sea  $\mu : \mathcal{M}(I) \rightarrow [0, +\infty]$  la medida de Lebesgue. Entonces:*

(I) Monotonía: *si  $A, B \in \mathcal{M}(I)$  y  $A \subseteq B$ , entonces*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

- (II) Conjuntos nulos: *si  $A \subseteq \mathbb{R}$  es un conjunto nulo, entonces  $A \in \mathcal{M}$  y  $\mu(A) = 0$ . Recíprocamente, si  $A \in \mathcal{M}$  y  $\mu(A) = 0$ , entonces  $A$  es un conjunto nulo.*
- (III) Invariancia por traslaciones: *dados  $A \in \mathcal{M}$  y  $c \in \mathbb{R}$ , se tiene  $A + c := \{x + c : x \in A\} \in \mathcal{M}$  y*

$$\mu(A + c) = \mu(A).$$

*Idea de la demostración.* La monotonía se obtiene escribiendo  $B$  como unión disjunta de  $A$  y  $B \setminus A$  y usando la  $\sigma$ -aditividad. Las afirmaciones sobre conjuntos nulos se deducen de la relación entre definición de conjunto nulo y la regularidad exterior. La invariancia por traslaciones se prueba primero en intervalos (donde es obvia) y luego se extiende a  $\mathcal{M}$  usando que ésta es la  $\sigma$ -álgebra generada por intervalos y conjuntos nulos, y que la traslación preserva nulos.  $\square$

**Proposición 8.6.** *Sea  $I = [0, 1]$  y sea  $\mu$  la medida de Lebesgue en  $\mathcal{M}(I)$ . Si  $A, B \in \mathcal{M}(I)$ , entonces:*

$$(I) \quad A \setminus B \in \mathcal{M}(I);$$

(II)

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B).$$

*En particular,*

$$\mu(A^c) = 1 - \mu(A), \quad A^c = I \setminus A.$$

*Demostración.* (i) Como  $\mathcal{M}(I)$  es una  $\sigma$ -álgebra, es cerrada por complementos e intersecciones. Observamos que

$$A \setminus B = A \cap B^c,$$

por lo que  $A \setminus B \in \mathcal{M}(I)$ .

(ii) Notamos que

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$$

y que  $(A \setminus B)$  y  $B$  son disjuntos. Por  $\sigma$ -aditividad,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B).$$

La igualdad  $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$  se obtiene aplicando esta fórmula con  $A$  y  $A^c$  observando que  $I = A \cup A^c$  y  $\mu(I) = 1$ .  $\square$

### 8.5. Regularidad de la medida de Lebesgue

**Proposición 8.7** (Regularidad exterior). *Sea  $A \in \mathcal{M}(I)$ . Entonces*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{ abierto en } I\}.$$

*Esbozo.* Esta propiedad forma parte de la construcción misma de la medida de Lebesgue (en el teorema de existencia). La desigualdad

$$\mu(A) \leq \inf\{\mu(U)\}$$

se sigue de la monotonía: si  $A \subseteq U$ , entonces  $\mu(A) \leq \mu(U)$ . En la construcción de la medida se verifica además que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un abierto  $U \supseteq A$  tal que  $\mu(U) < \mu(A) + \varepsilon$ , lo que da la igualdad.  $\square$

**Proposición 8.8** (Regularidad interior). *Sea  $A \in \mathcal{M}(I)$ . Entonces*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A, F \text{ cerrado en } I\}.$$

*Demostración.* Por monotonía, si  $F \subseteq A$  entonces  $\mu(F) \leq \mu(A)$ , de donde

$$\sup\{\mu(F) : F \subseteq A, F \text{ cerrado}\} \leq \mu(A).$$

Para la otra desigualdad, sea  $\varepsilon > 0$ . Por regularidad exterior aplicada a  $A^c$ , existe un abierto  $U \supseteq A^c$  tal que

$$\mu(U) < \mu(A^c) + \varepsilon.$$

Tomando complementos en  $I$ , el conjunto

$$F := U^c = I \setminus U$$

es cerrado y satisface  $F \subseteq A$ .

Además, por la proposición anterior,

$$\mu(F) = \mu(I) - \mu(U).$$

Como  $\mu(I) = 1$  y  $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$ , obtenemos

$$\mu(F) = 1 - \mu(U) > 1 - (\mu(A^c) + \varepsilon) = \mu(A) - \varepsilon.$$

Por lo tanto, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un cerrado  $F \subseteq A$  tal que  $\mu(F) > \mu(A) - \varepsilon$ , lo que implica

$$\mu(A) \leq \sup\{\mu(F) : F \subseteq A, F \text{ cerrado}\}.$$

$\square$

**Proposición 8.9** (Regularidad fuerte). *Sea  $A \in \mathcal{M}(I)$  y  $\varepsilon > 0$ . Entonces existen un cerrado  $C$  y un abierto  $U$  tales que*

$$C \subseteq A \subseteq U \quad y \quad \mu(A) - \varepsilon < \mu(C) \leq \mu(A) \leq \mu(U) < \mu(A) + \varepsilon.$$

*Además,  $U$  puede elegirse como una unión numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos.*

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Por regularidad interior, existe un cerrado  $C \subseteq A$  tal que

$$\mu(C) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por regularidad exterior, existe un abierto  $U \supseteq A$  tal que

$$\mu(U) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aquí se obtiene

$$\mu(A) - \varepsilon < \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(C) \leq \mu(A) \leq \mu(U) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} < \mu(A) + \varepsilon.$$

El hecho de que cualquier abierto  $U \subseteq I$  puede escribirse como unión numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos es un resultado clásico de análisis real (se prueba usando que  $U$  es una unión numerable de componentes conexas, que en  $\mathbb{R}$  son intervalos). Aplicándolo a este  $U$ , se obtiene la última afirmación.  $\square$

## 8.6. Continuidad de la medida

**Teorema 8.10** (Continuidad de la medida). *Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(I)$ . Entonces:*

(I) (*Continuidad desde abajo*) Si

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$$

$$y \quad A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \text{ entonces}$$

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(II) (*Continuidad desde arriba*) Si

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_n \supseteq \cdots$$

$$y \quad B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n, \text{ con } \mu(B_1) < \infty, \text{ entonces}$$

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

*Demostración.* (i) Definimos

$$C_1 = A_1, \quad C_n = A_n \setminus A_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Entonces los conjuntos  $C_n$  son dos a dos disjuntos y

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Por  $\sigma$ -aditividad,

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n).$$

Además, para cada  $n$ ,

$$\mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n C_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(C_k).$$

La sucesión de sumas parciales converge a la suma infinita, luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) = \mu(A).$$

(ii) Definimos

$$A_n = B_1 \setminus B_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Entonces  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  y

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = B_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = B_1 \setminus B.$$

Aplicando (i) a la familia  $(A_n)$ ,

$$\mu(B_1 \setminus B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)),$$

donde usamos que  $A_n = B_1 \setminus B_n$  y  $\mu(B_1) < \infty$ . Entonces

$$\mu(B_1) - \mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)).$$

Restando  $\mu(B_1)$  en ambos lados se obtiene

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

□