문제 **1.** 타임지에 최근호에 실린 소비자 구매에서 남편과 아내의 상대적 영향력에 관한 연구에 따르면**,** 가족이 신차를 구매할 때 약 **70%**는 남편이 자동차 메이커를 선택하는 데 가장 큰 영향력을 행사하는 것으로 나타났다**.** 새 차를 구입하기로 한 네 가족이 있는 상황을 가정하자**.**

a. 네 가족 중 정확히 두 가족에서 남편이 자동차 메이커를 선택하는 데 주된 영향력을 행사할 확률은**?**

풀이: 4 가족 중 2 가족이 남편이 선택하는 이항분포를 생각하면 된다.

$$4C2\cdot(0.7)^2\cdot(0.3)^2=6\cdot0.49\cdot0.09=0.2646$$

b. 네 가족 중 적어도 두 가족에서 남편이 자동차 제조사를 선택하는데 주된 영향력을 행사할 확률은**?**

풀이: 4 가중 중 0 가족, 1 가족이 남편이 선택하는 확률을 구하고 이 둘을 1에서 뺀 값을 구하자.

$$1-4C0\cdot(0.3)^4+4C1\cdot(0.3)^3\cdot(0.7)^1=1-0.0081+0.0756=0.9163$$

c. 남편이 네 가족 모두에서 자동차 메이커를 선택할 확률은**?**

풀이:

$$4C4\cdot(0.7)^4=0.2401$$

문제 **2.** 재정난으로 인한 미국의 은행 폐쇄는 **1960**년부터 **1981**년까지 매년 평균 **7.2**건의 비율로 발생했다**.** 주어진 기간동안의 폐쇄 횟수 **X**가 푸아송 확률 분포를 갖는다고 가정하자**.**

1) **4**개월 동안 은행이 문을 닫지 않을 확률**?**

풀이:

$$\lambda=0.6\cdot4=2.4;\ x=0$$

$$\frac{e^{-2.4}\cdot2.4^0}{0!}=e^{-2.4}\simeq0.0907$$

2) **1**년 동안 은행이 세 번 이상 문을 닫을 확률은**?**

풀이:

전체 확률 1에서 0, 1, 2번 닫을 확률을 뺀다.

0번 닫을 확률

$\frac{e^{-7.2}\cdot 7.2^0}{0!} = e^{-7.2} \simeq 0.0007465858$

1번 닫을 확률

$\frac{e^{-7.2}\cdot 7.2^1}{1!} = e^{-7.2} \cdot 7.2 \simeq 0.0053764218$

2번 닫을 확률

$\frac{e^{-7.2}\cdot 7.2^2}{2!} = e^{-7.2} \cdot 7.2^2 \cdot \frac{1}{2} \simeq 0.019318319$

$1 - 0.0007465858 - 0.0053764218 - 0.019318319 = 0.97456$

문제 **3.** 푸아송 분포의 **MGF**를 구하고**,** 이를 이용하여 평균과 분산을 구하시오**.**

풀이:

지수함수의 급수 전개를 사용한다.

$e^a = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!}$ (테일러 급수, 맥클로린 급수 참조)

$M_x(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$

자 이제 평균을 구하기 위해서는 MGF의 t에 대한 1차 미분을 구해야 한다.

$M'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$

여기서 t = 0일 때를 구하면

$M'(0) = \lambda e^0 e^{\lambda(e^0-1)} = \lambda$

따라서 평균은 λ 이다.

분산을 구하기 위해서는 제곱의 평균 값을 알아야 하고, 해당 값은 MGF의 t에 대한 2차 미분으로 구할 수 있다.

$M''(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda e^t \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$

$M''(0) = \lambda e^0 e^{\lambda(e^0-1)} + \lambda e^0 \lambda e^0 e^{\lambda(e^0-1)} = \lambda + \lambda^2$

분산은 $E[X^2] - E[X]^2$이므로

$\lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$이다.

문제 **4.** 철수는 베이커리를 운영합니다**.** 하루 평균 **17**개의 케이크를 판매하지만**,** 매일 판매되는 케이크의 개수는 다릅니다**.** 케이크의 가격은 **25,000**원이고 만드는 데 **5,000**원의 비용이 듭니다**.** 철수는 혼자서 빵집을 운영하기 때문에 빵집을 열기 전에 케이크를 준비하고 당일에 판매하지 못한 케이크는 모두 버립니다**.** 수익을 극대화하려면 얼마나 많은 케이크를 준비해야 할까요**? R**을 이용하여 준비한 케이크의 수에 따라 수익이 어떻게 달라지는지 확인해 보고**,** 최적의 해가 무엇인지 찾아보세요**.**

풀이:

문제를 정리하면 아래와 같다.

문제 상황

하루 수요:
X ~ Poisson(lambda = 17)

케이크 관련 비용 및 가격:
- 케이크 1개 제작 비용: 5,000원 (**C_cost**)
- 케이크 1개 판매 가격: 25,000원 (**C_price**)
- 한 개 판매 시 당일 이윤:

C_margin = 25,000 – 5,000 = 20,000원

기타 조건:
- 당일 판매하지 못한 케이크는 재고로 이월하지 않고, 모두 폐기 (가치 0)

운영 방식:
- 철수는 하루에 케이크를 **Q**개 준비하고 장사를 시작함.
- 실제 판매량은 **min(X, Q)** (여기서 X는 하루 수요)

이익 계산

제작 비용: 5,000 × **Q**
당일 매출: 25,000 × **min(X, Q)**
당일 이윤: (25,000 × **min(X, Q)**) – (5,000 × **Q**)
기대이윤:
E[Profit(**Q**)] = 25,000 × E[**min(X, Q)**] – 5,000 × **Q**
→ 목표는 최대 기대이윤을 주는 **Q**(하루 준비할 케이크 수)를 찾는 것

코드 구현

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt

def poisson_pmf(k, lam):
    return (lam**k) * math.exp(-lam) / math.factorial(k)

def expected_min(Q, lam=17, max_k=60):
    # E[min(X, Q)] = Σ min(k, Q) * P(X=k), k=0..∞ (실제로는 0..max_k까지만)
    val = 0.0
    for k in range(max_k+1):
        val += min(k, Q) * poisson_pmf(k, lam)
    return val

def expected_profit(Q, lam=17):
    # 기대이윤 = 25,000 * E[min(X, Q)] - 5,000 * Q
    em = expected_min(Q, lam)
    revenue = 25000 * em
    cost = 5000 * Q
    return revenue - cost

# 주요 변수
lam = 17

# Q 후보를 0부터 50까지 순회하여 기대이윤을 계산
Q_candidates = range(0, 51)
profit_list = []
max_profit = -1e9
best_Q = None

for q in Q_candidates:
    ep = expected_profit(q, lam)
    profit_list.append(ep)
    if ep > max_profit:
        max_profit = ep
        best_Q = q

# 결과 출력
print("최적 Q =", best_Q)
print("최대 기대이윤 =", max_profit)

# 그래프 시각화
```

```python
plt.plot(Q_candidates, profit_list, label="Expected Profit")
plt.scatter(best_Q, max_profit, s=50)  # 최적 Q 지점 표시
plt.text(best_Q, max_profit, f"  Best Q={best_Q}", fontsize=9)  # 간단한 주석

plt.title("Expected Profit by Number of Cakes (Q)")
plt.xlabel("Number of Cakes (Q)")
plt.ylabel("Expected Profit (Won)")
plt.legend()
plt.show()
```

```
(6.86x) (base)  kimdawoon@gimdaun-ui-MacBook-
최적 Q = 20
최대 기대이윤 = 310196.45757401735
```