문제 **1.** 평균과 분산**,** 조작된 주사위가 있어 각 눈금의 크기에 비례하여 나올 확률이 달라진다**. (**예**: 1**이 나올 확률보다 **3**이 나올 확률이 **3**배 큼**)** 주사위를 굴려 나오는 눈금값을 **X**라고 했을 때**, E(X)**와 **Var(X)**를 구하시오**.**

풀이: 확률이 주사위의 눈금의 크기에 비례한다고 하면,

1 → x
2 → 2x
3 → 3x
4 → 4x
5 → 5x
6 → 6x

이 확률분포 함수의 전체 확률은 1이므로 21x = 1, x = 1/21이다.

따라서 Random Variable에 따른 확률은 아래와 같다.

x	1	2	3	4	5	6
P(x)	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

E(x) = 1/21 + 4/ 21 + 3/21 + 16/21 + 25/21 + 36/21 = 4.33

Var(X) = E(x^2) - E(x)^2

x^2	1	4	9	16	25	36
P(x)	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

E(x^2) = 1/21 + 8/21 + 27/21 + 64/21 + 125/21 + 216/21 = 441/21 = 21

Var(X) = 21 - (4.33)^2 = 21 - 18.7489 = 2.251

문제 **2.** 결합확률**,** 연속형 확률변수 **X, Y**의 결합밀도함수가 아래와 같다고 하자**.**

$f_{X,Y}(x, y) = \frac{6}{5}(x + y^2),\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1.$

1. X와 Y의 주변확률밀도함수를 각각 구하시오.

$$f_X(x) = \sum_{y\in R} f(x,y) = \int_0^1 \frac{6}{5}(x + y^2)dy = \frac{6}{5}x + \frac{2}{5},\ 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \sum_{x\in R} f(x,y) = \int_0^1 \frac{6}{5}(x + y^2)dx = \frac{6}{5}y^2 + \frac{3}{5}, 0 < y < 1$$

2. X와 Y의 공분산을 구하시오.

$$COV(X,Y) = E(XY) - \mu_x\mu_y = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E[X] = \int_0^1 xf_X(x)dx = \int_0^1 x(\frac{6}{5}x + \frac{2}{5})dx = \int_0^1 \frac{6}{5}x^2 + \frac{2}{5}xdx = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$E[Y] = \int_0^1 yf_Y(y)dy = \int_0^1 y(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}y^2)dy = \int_0^1 \frac{6}{5}y^3 + \frac{3}{5}ydy = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$

$$E[XY] = \int_0^1\int_0^1 xyf_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 xy\frac{6}{5}(x + y^2)dxdy = \int_0^1 \frac{2}{5}y + \frac{3}{5}y^2dy = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{7}{20} - \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = 0.35 - 0.36 = -0.01$$