

HW_1

회귀모형에 대한 추론

아래는 어느 중소기업의 월별 광고비(**X**, 단위: 백만원)와 매출액(**Y**, 단위: 백만원)에 대한 12개월 관측치이다.

관측번호	X (광고비)	Y (매출액)
1	5	16
2	10	28
3	15	33
4	20	45
5	25	55
6	30	60
7	35	75
8	40	80
9	45	96
10	50	100
11	55	115
12	60	120

1. 최소제곱법(**OLS**)으로 회귀모형의

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i$$

계수를 추정하고 그 값을 제시하라.

$$\text{모형: } Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i$$

표본 평균

$$\bar{x} = 32.5, \bar{y} = 69.1$$

기울기

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) / \Sigma(x-\bar{x})^2 \\ &\approx 1.9168\end{aligned}$$

절편

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \bar{y} - \beta_1 \bar{x} \\ &\approx 6.288\end{aligned}$$

따라서 추정식:

$$\hat{Y} = 6.29 + 1.92 \cdot X$$

2. 기울기에 β_1 대해

$$H_0 : \beta_1 = 0 \text{ vs. } H_a : \beta_1 \neq 0$$

검정을 실시하고, 유의수준 **5%**에서 해석하라

- 잔차제곱합 $SSE = \sum (y - \hat{y})^2 \approx 268.9$
- 오차분산 추정치 $\sigma^2 = SSE/(n-2) \approx 26.89$
- β_1 의 표준오차
 $SE(\beta_1) = \sqrt{[\sigma^2 / \sum (x - \bar{x})^2]} \approx 0.0430$
- t-통계량
 $t = \beta_1 / SE(\beta_1) \approx 44.56$ (자유도 10)

임계값 $t_{0.025, 10} \approx \pm 2.228$.

$|t|$ 가 임계값을 훨씬 초과 $\rightarrow H_0: \beta_1 = 0$ 기각.

3. 광고비 $X = 30$ 일 때,
a. 평균 매출액에 대한 **95%** 신뢰구간

점추정치

$$\hat{Y}_0 = 6.29 + 1.92 \times 30 \approx 63.79 \text{ 백만 원}$$

$$SE(\text{평균}) = \sigma \sqrt{1/n + (x_0 - \bar{x})^2 / \sum (x - \bar{x})^2} \approx 0.750$$

$$\text{CI: } \hat{Y}_0 \pm t_{0.025, 10} \cdot SE(\text{평균})$$

→ [62.12 , 65.46] 백만 원

- b. 개별 매출액 예측을 위한 **95%** 예측구간을 계산하고 해석하라

$$SE(\text{예측}) = \sigma \sqrt{1 + 1/n + (x_0 - \bar{x})^2 / \sum (x - \bar{x})^2} \approx 2.679$$

$$\text{PI: } \hat{Y}_0 \pm t_{0.025, 10} \cdot SE(\text{예측})$$

→ [57.82 , 69.76] 백만 원