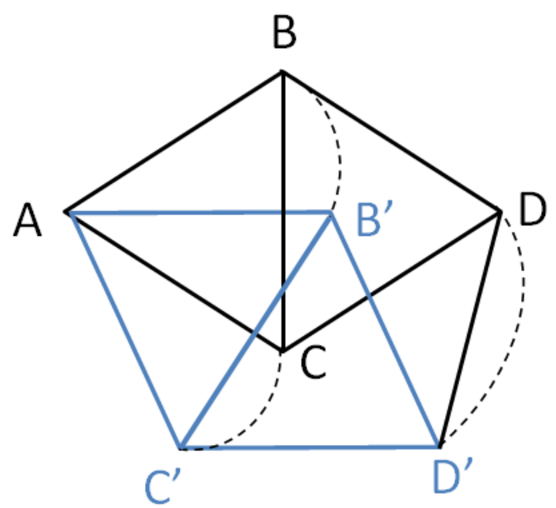
# Графы. HW#4

Тураев Тимур, 504 (SE)

**1.4** Проведем 9 горизонтальных и 3 вертикальные прямые. У нас образуется 9 горизонтальных троек. Покрасить три точки в два цвета можно $2^3 = 8$ различными способами. Следовательно, по принципу Дирихле среди 9 троек найдутся хотя бы две, покрашенные одинаково.

Рассмотрим эти две одинаково покрашенные тройки точек – таким образом, две горизонтальные прямые мы выбрали. Рассмотрим одну из этих троек. Опять же по принципу Дирихле среди трех точек найдутся хотя бы две, покрашенные одинаково – без потери общности, пусть эти две точки лежат на вертикальных прямых с номерами 1 и 2. Но поскольку обе тройки покрашены одинаково, то и во второй тройке на вертикальных прямых с номерами 1 и 2 будут лежать две точки покрашенные в тот же цвет, что и в первой тройке. Что и требовалось доказать.

**5.5** Возьмем 4 точки $A, B, C, D$ как показано на рисунке.

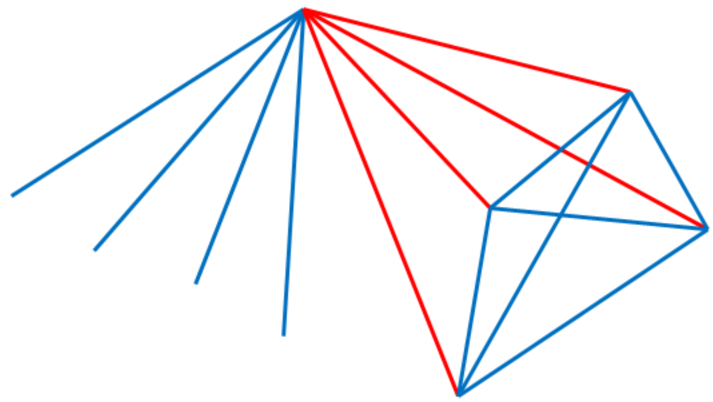



При этом пары точек $AB = AC = BC = BC = CD = 1$ – расположены на расстоянии 1. По принципу Дирихле хотя бы две из этих точек покрашены в одинаковый цвет. Если эти две точки образуют одну из перечисленных пар, то задача решена. В противном случае точки $A$ и $D$ должны быть покрашены в один цвет, например, в цвет 1. Тогда “повернем” ромб $ABDC$ относительно точки $A$ так, что в полученном ромбе $AB'D'C'$ расстояние $DD' = 1$. Рассуждая аналогично придем к выводу, что либо задача решена, либо точки $A$ и $D'$ покрашены в цвет 1. Следовательно, точки $D$ и $D'$ покрашены в один цвет. Однако по построению расстояние между ними равно 1 – и задача решена.

**5.6** $R(3, 4)$– значит надо гарантированно найти либо красную 3-клику, либо синюю 4-клику. Покажем, как это сделать в полном графе на 9 вершинах.

Рассмотрим произвольную вершину графа, например с номером 1. Она связана восемью ребрами со всеми остальными.

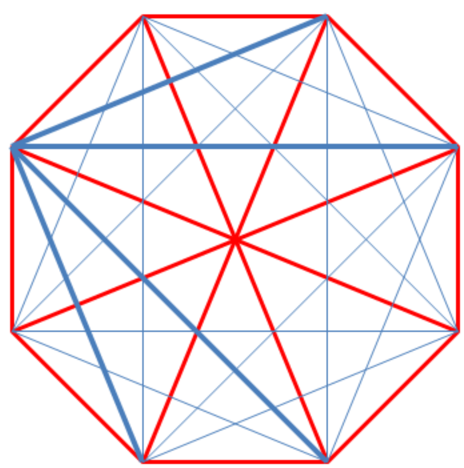
- Пусть 4 из них покрашены в красный цвет, а 4 в синий. Если мы концы хотя бы двух ребер соединим красным ребром, то получим красный треугольник (красную 3-клику). Если же все концы соединим синими ребрами, то получим синюю 4-клику:



- В случае если красных ребер больше 4 ситуация ровно та же: достаточно зафиксировать любые четыре красные ребра и свести задачу к предыдущей.
- Пусть красных ребер не больше двух, следовательно, синих 6 или более. Пусть концы 6 синих ребер – вершины с номерами $2, 3, 4, 5, 6, 7$. Они в графе образуют полную 6-клику. Как мы знаем, в полном графе на 6 вершинах найдется одноцветный треугольник. Если это красный треугольник – это нам подходит. Пусть это синий треугольник на вершинах с номерами $2, 3, 4$. Вспомним, что вершина 1 соединена с каждой из них синими ребрами – получаем синюю 4-клику.
- Наконец пусть из вершины выходят 3 красных ребра и 5 синих. Рассмотрим все остальные восемь вершин. Если хотя бы для одной из них соотношение ребер другое, то, как мы уже доказали, в этом случае задача будет решена. Тогда остается рассмотреть, что будет если изо всех вершин выходит по 3 красных и 5 синих ребра. Каждая вершина является началом и концом трех красных ребер. Всего вершин 9. Следовательно, всего красных ребер в графе: $\frac{3\cdot 9}{2} = \frac{27}{2} = 13,5$. Но нецелого числа ребер быть не может, следовательно и такая раскраска в графе невозможна.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные раскраски и показали, что в полном графе на 9 вершинах всегда найдется либо красная 3-клика, либо синяя 4-клика.

Покажем теперь, что для полного графа на 8 вершинах условие выполнено не будет. Приведем контрпример:



По построению красных 3-клик быть не может. Так как граф симметричен, рассмотрим лишь одну ее вершину и 4 исходящих из нее синих ребра. Видно, что и синюю 4-клику мы построить не сможем - всегда будет мешать красное ребро.

Таким образом, $R(3, 4) = 9$. Что и требовалось доказать.

**5.7** $R(3,5)$ – значит надо гарантированно найти либо красную 3-клику, либо синюю 5-клику. Воспользуемся теоремой Эрдеша-Секереша, что для любых $p, q \geqslant 3$ справедливо

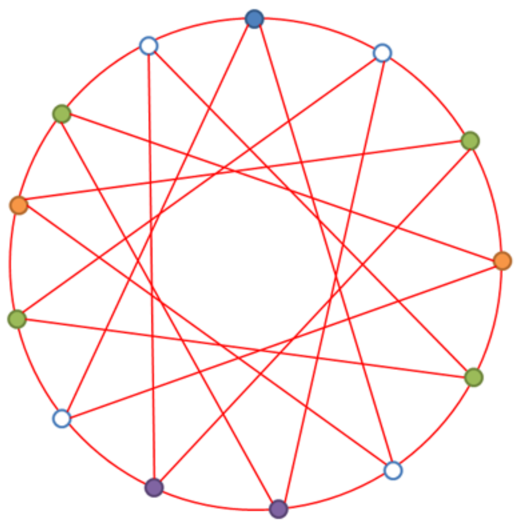
$$R(p,q) \leqslant R(p-1,q) + R(p,q-1)$$

В нашем случае:

$$R(3,5) \leqslant R(2,5) + R(3,4) = 5 + 9 = 14$$

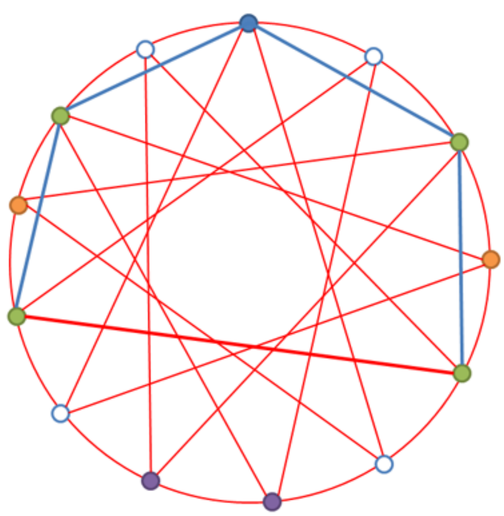
Покажем что для графа на 13 вершинах можно привести такую раскраску, что в графе нельзя будет найти красную 3-клику или синюю 5-клику.

Раскрасим некоторые ребра графа в красный цвет, как показано на рисунке:



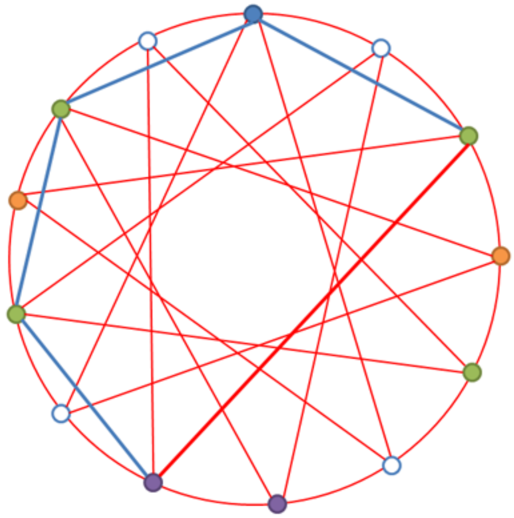
Видно что красных треугольников нет. Будем пытаться построить синюю 5-клику. Выберем какую-либо вершину (на рисунке выше она закрашена синим). Сразу заметим, что незакрашенные вершины включать в синюю клику нельзя, поскольку он соединены с синей вершиной красными ребрами.

Покажем, что не включать какую-либо из фиолетовых вершин нельзя. Действительно, попробуем построить пятиугольник, избегая красных ребер. Единственный вариант: брать вершины через одну, т.е. все зеленые, но и это в итоге приведет даст красное ребро:

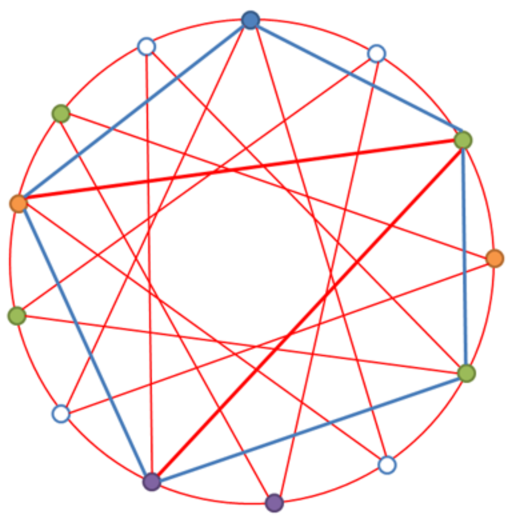


Значит, фиолетовая быть должна. В силу симметрии можно выбрать любую – выберем левую.

Попробуем соединить синюю вершину с зеленой – получим в итоге красное ребро:



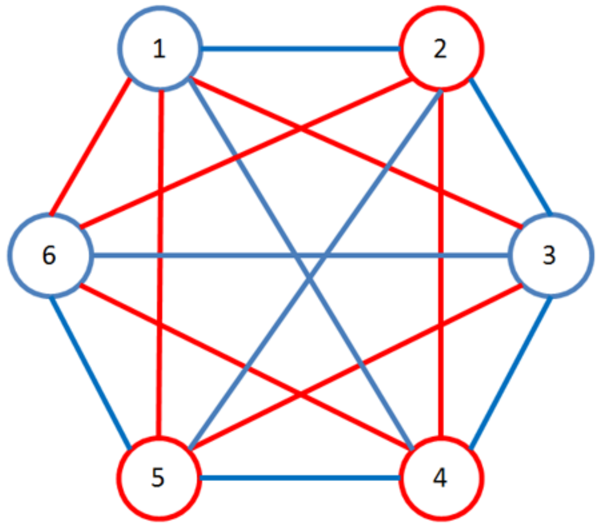
Теперь попробуем последний вариант: соединить синюю с оранжевой. Но и здесь тоже получаем красное ребро:



Таким образом, для графа на 13 вершинах можно привести контрпример. Следовательно, $R(3,5) = 14$.

**5.8** Поскольку в задаче фигурирует три числа, которые должны быть покрашены в один цвет, задачу хотелось свести к нахождению одноцветного треугольника, что связано с числами Рамсея. При этом стороны треугольника должны как-то коррелировать с условием $a+b=c$. После многочисленных попыток правильно расположить числа на ребрах или на вершинах, чтобы всегда нашлась нужная покраска, в итоге получилось следующее.

Рассмотрим на примере. Возьмем $k = 2$, а $N = R(3,3) = 6$. Покрасим числа 1, 3, 6 в синий цвет, а 2, 4, 5 в красный. Возьмем полный граф на 6 вершины. И покрасим вершины соответственно их номерам, т.е. вершины с номерами 1, 3, 6 в синий цвет, а 2, 4, 5 в красный. Далее будем красить все ребра следующим образом. Ребро $(u,v)$ покрасим в тот цвет, в который покрашена вершина с номером $|u-v|$:




В этом графе гарантированно найдется одноцветный треугольник. Например, 2_4_6. Это означает по построению, что вершины с номерами $4-2=2, 6-4=2, 6-2=4$ покрашены в один цвет. Соответственно, положив $a=2, b=2, c=4$, получим $a+b=c$, что нам и требуется.

Ровно то же справедливо и для любых других $k$. Здесь надо брать $N=R(3,\ldots,3)$ (число троек равно $k$) и проводить аналогичные рассуждения.

Остается показать, что такое $N=R(3,\ldots,3)$ всегда существует. Но об этом говорится в теореме Рамсея. Следовательно, наше доказательство закончено.