Теория графов. HW#6

Тураев Тимур, 504 (SE)

0. *Во всех последующих задачах будет активно использоваться задача 6.18 (про существование k-веера в k-связном графе). Меня на прошлом занятии не было, но, говорят, что эта задача была решена.*

Если это не так, то решается-то она довольно просто.

Берем такой k-связный граф, выбираем согласно условию вершину x, множество Y, состоящее из не менее чем k вершин графа, не содержащее x. Далее, добавляем в граф новую вершину y и соединяем ребрами ее с какими-нибудь k вершинами из множества Y.

Согласно задаче 6.17 (которая точно была решена), граф остается k-связным. По теореме Менгера в этом графе между вершинами x и y существует k непересекающихся путей (здесь и далее под «непересекающимися» путями будем понимать пути, не имеющие общих внутренних точек). Очевидно, что эти пути будут проходить через те выбранные k вершин во множестве Y и заканчиваться «новыми» ребрами, ведущими в вершину y.

Затем удалим вершину y из графа и получим то что требуется: k-веер из x в Y.

1. *С помощью теоремы Менгера докажите, что k-мерный гиперкуб k-связен.*

Найдем в k-гиперкубе k непересекающихся путей из произвольно выбранных вершин x и y. Если это удастся, то по глобальной теореме Менгера k-гиперкуб k-связен.

Решать будем, используя метод математической индукции.

База индукции: $k = 2$
Для $k = 1$ и $k = 2$ все очевидно.
Предположение индукции Пусть условия задачи верны для $k - 1 > 0$
Индукционный переход
Докажем верность для $k > 1$.

Выделим какие-либо 2 вершины в графе x и y. Нужно рассмотреть 2 случая: когда эти вершины лежат на одной гиперграни и когда они лежат на разных. Необходимо, дабы избежать маханий руками, как-то формализовать тот факт, что вершины лежат на одной гиперграни или не лежат.

Предлагается следующее: давайте введем k-мерную систему координат с центром в вершине x, с осями, проходящими по ребрам куба, а сами ребра будут длиной 1. Тогда, все вершины графа будут иметь координаты, представимые в виде k-вектора, элементы которого есть числа 0 и 1. Координаты вершины x тогда будут $(0, 0, \dots, 0)$

Тогда тот факт хорошо формализуется: вершины x и y лежат на одной гиперграни, если у них совпадает хотя бы одна координата; и не лежат – если ни одна координата не совпадает. Отсюда следует важное наблюдение: для вершины $x(0, 0, \dots, 0)$ существует ровно одна вершина, не лежащая с ней ни на одной гиперграни: это вершина $y(1, 1, \dots, 1)$.

Все готово для рассмотрения случаев:

1. Пусть вершины x и y лежат в какой-то одной гиперграни. Тогда, пусть K – это $k-1$-гиперкуб, в котором лежат обе рассматриваемые вершины, а K' – вторая копия K в k-гиперкубе G, в котором ни одна из вершин x и y не лежит. (известно, что k-гиперкуб получается копированием двух $k - 1$ гиперкубов). По предположению индукции, в K есть $k - 1$ непересекающийся простой путь между вершинами x и y. Пусть x' и y' – соседние вершины x и y соответственно в гиперкубе K'. В этом гиперкубе есть $k - 1 > 0$ путей между x' и y', выберем один и дополним его ребрами (x, x') и (y, y') – получим k-ый путь между рассматриваемыми вершинами в графе G. Непересекаемость очевидна. Первая часть доказана.

2. Пусть вершины x и y - противоположные вершины, их координаты известны. Перечислим k непересекающихся путей из x в y. Ясно, что движение по ребрам куба есть смена каких-либо координат.

   Первый путь будет таким: сменим сначача координату X (первую координату), затем вторую, затем третью и так до k-ой.

   Второй путь: сменим сначала вторую координату, затем третью, и так далее, затем k-у, затем первую.

   В общем случае i-й путь будет таким: сменим i-ю координату, затем $i + 1$ координату и так по циклу до $i - 1$.

Всего получится, ясно, ровно k путей. Но их непересекаемость не так очевидна: предположим обратное. Тогда среди всех внутренних вершин найдутся две одинаковых. Выберем таких два «плохих» пути и среди одинаковых выберем первую пару. (Заметим, что алгоритм постороения пути одноначно определяет последующую и предыдущую вершины.) Значит, мы можем найти какая вершина предшествовала одинаковой. Однако так как мы выбрали первую пару одинаковых (то есть предыдущие вершины были разными, но пришли в одинаковые), то получим противоречие: по одинаковых вершинам однозначно восстанавливаются предыдущие в каждом из путей: оказывается, тчо и предыдущие тоже были однаковыми.

Вторая часть доказана.

Рассмотрены оба случая и в обоих случаях предоставлено k непересекающихся путей между произвольными вершинами x и y в графе G.

2. *Докажите, что простой граф G двусвязен тогда и только тогда, когда для любой тройки различных вершин (x, y, z) в G есть простой путь из x в z, проходящий через y.*

- $\Rightarrow$ Пусть дан двусвязный граф G. По задаче 0, в этом графе существует 2-веер из вершины y в множество $Y = \{x, z\}$, состоящих из двух непересекающихся путей $y \leftrightarrow x$ и $y \leftrightarrow z$. Таким образом, построен простой путь из x в z, проходящий через y.

- $\Leftarrow$ Пусть для любой тройки различных вершин (x, y, z) в G есть простой путь из x в z, проходящий через y: $x \to y \to z$.

  Возьмем тройку (y, x, z). Тогда в графе существует простой путь из y в z, проходящий через x: $y \to x \to z$. Отсюда получаем, что существует цикл, который содержит все вершины (x, y, z), а значит, по теореме 6.16 конспекта, граф G является двусвязным.

3. *Пусть G k-связен и $k \geqslant 2$. Докажите, что в графе G для любого подмножества $S \subseteq V(G)$ мощности $|S| = k$ найдется простой цикл, на котором лежат все вершины из множества S.*

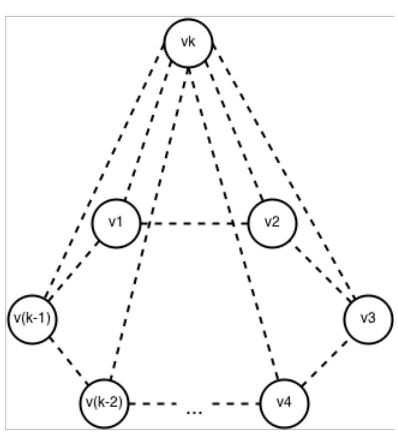
Будем доказывать по индукции.

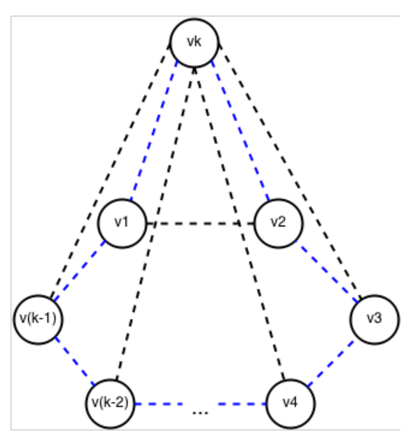
База индукции. $k = 2$. Верно по теореме 6.16 конспекта.

Предположение индукции. Пусть утверждение верно для некоторого $k - 1$.

Индукционный переход. Рассмотрим k-связный граф G. Пусть множество S состоит из вершин $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Рассмотрим вершины $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$. По предположению индукции, существует цикл C, проходящий через эти вершины. Рассмотрим два случая.

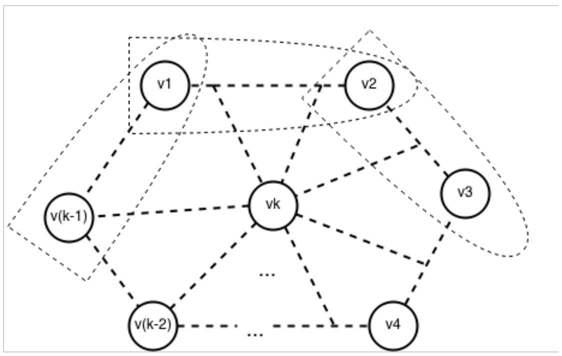
1. Длина цикла $|C| = k - 1$. Следовательно, все вершины $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1} \in C$ соединены ребрами. Так как G k-связен, то он и $(k-1)$-связен. Тогда существует $(k-1)$-веер из вершины v_k во множество вершин $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$, т.е. существует $k - 1$ попарно непересекающихся простых путей, ведущих в вершины $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$. Тогда можно выбрать две вершины, например, v_1 и v_2 и вместо ребра $\{v_1, v_2\} \in C$ взять путь $(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_2)$, включающий два пути веера, а остальные ребра цикла C оставить. Получим новый простой цикл C', проходящий через вершины $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

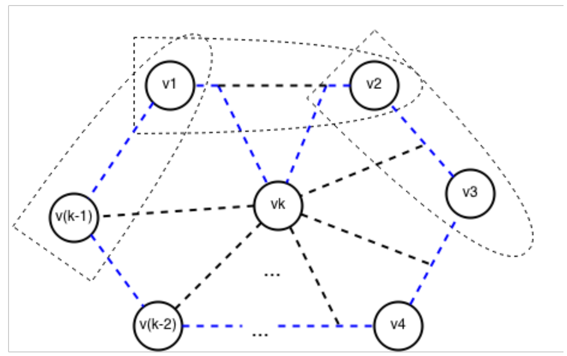




2. Длина цикла $|C| \geqslant k$. Значит в нем есть не менее k вершин. Так как G k-связен, существует k-веер из вершины v_k в k вершин цикла C, не обязательно совпадающие с $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$, – обозначим эти вершины через $x_1, x_2, \ldots, x_k \in C$. Т.е.

существует k попарно непересекающихся простых путей, ведущих в вершины $x_1, x_2, \ldots, x_k \in C$. Пройдем по циклу C в одну сторону и разобьем его вершины на $k-1$ непересекающийся блок: $[v_1, \ldots, v_2), \ldots, [v_{k-2}, \ldots, v_{k-1}), [v_{k-1}, v_1)$ (вершина v_i включена в блок, а вершина v_{i+1} – нет, она является началом следующего). Так как блоков – $k-1$, а путей в веере – k, то по принципу Дирихле, найдется хотя бы один блок, в котором будут заканчиваться два пути веера. Пусть без потери общности $x_i, x_j \in [v_1, \ldots, v_2)$. Тогда вместо пути $(v_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, v_2) \in C$ возьмем путь $(v_1, \ldots, x_i, \ldots, v_k, \ldots, x_j, \ldots, v_2)$, включающий два пути веера, а остальную часть цикла C оставим. Получим новый простой цикл C', проходящий через вершины $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.





Задача решена.