Графы. HW#2

Тураев Тимур, 504 (SE)

13 октября 2013 г.

2.6. *Пусть у нас имеется улица с односторонним движением, на которой расположено n парковочных мест. На эту улицу последовательно заезжают машины с порядковыми номерами от 1 до n. Каждая i-я машина по прибытии едет вначале к своему любимому парковочному месту $f(i)$. Если это место оказывается свободным, то она занимает его. В противном случае она пытается занять первое следующее за ним свободное место. В случае, если таковового не оказывается, процесс парковки считается завершившимся неудачей. Функция $f : [n] \to [n]$ называется парковочной функцией, если задаваемая ею парковка всех n машин прошла успешно.*

Теорема. *Доказать, что количество всех различных парковочных функций равно* $(n+1)^{(n-1)}$

Доказательство. (a) Слегка поменяем процесс парковки: пусть номера мест идут с нуля и введем еще одно, n-е парковочное место, причем оно будет самым обычным: на него можно парковаться; а также введем такое правило: если машина хочет запарковаться на место с номером n, которое оказалось занятым, то оно занимает место с номером 1. Если оно занято - то место с номером 2 и т.д. Можно считать, что мы "закольцевали"парковку (или же можем считать, что условие "следующее за ним"мы берем по модулю $n+1$)

Очевидно, что с новыми правилами парковки, при попытке запарковать n машин, во-первых, всегда это удастся, а во-вторых, всегда будет оставаться одно пустое место.

Также очевидно, что если какое-то место стало занятым, то оно уже не освободится.

И, наконец, третье замечание: очевидно, что n-значная функция f будет функцией парковки тогда и только тогда, когда новая, $n+1$-значная функция повлечет за собой ровно одно пустое место - n-е.

Предположим, нам задана следующая последовательность: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Пусть она оставляет пустым место номер k. Тогда очевидно, что последовательность $(a_1 + i, a_2 + i, \dots, a_n + i)$ оставляет пустым место с номером $(k+i)(\mod n+1)$. Тогда понятно, что если мы рассмотрим множество последовательностей вида $\{(a_1, a_2, \dots, a_n), (a_1+1, a_2+1, \dots, a_n+1), \dots, (a_1+n, a_2+n, \dots, a_n+n)\}$ (все суммы по модулю $n+1$), то ровно одна последовательность из всего множества оставит пустым место с номером n, а значит ровно одна будет функцией парковки.

Получается, что всевозможные последовательности (а их, как нетрудно догадаться, $(n+1)^n$) делятся на классы, описание которых дано выше - и лишь один элемент из класса нам удовлетворяет. Откуда следует, что число функций парковки равно $\dfrac{(n+1)^n}{n+1} = (n+1)^{(n-1)}$

(b) Можно попытаться построить неочевидную биекцию между всеми функциями парковки и всеми помеченными (корневыми) деревьями из n+1 вершины, тем самым доказав, что их число равно числу таких деревьев, которых по теореме Кэли, ровно $(n+1)^{(n-1)}$.

Дерево будет строиться так: сначала посмотрим на получающуюся перестановку - она нам говорит о том, какая машина где находится. Потом возьмем "обратную": она будет нам говорить какая именно машина находится на каждом месте. Добавим в конце последовательности число (машину с номером) $n+1$. По этой перестановке можно построить дерево: для каждого элемента ищем ближайшее справа большее его. У получившегося дерева ровно один корень - это вершина с номером $n+1$. По этому дереву легко восстановить исходную перестановку - просто вызвать DFS и оформить preorder walk (self-leftSubtree-rightSubtree) - потом перевернуть получившуюся последовательность. Однако трудности начинаются с доказательством биекции между измененным деревом и изначальной функцией парковки.

Так что комбинаторное доказательство, мне кажется, более понятно, чем графовое, с поиском биекции. Или я просто не вижу более простого доказательства.

□

2.9. *Рассмотрим произвольное отображение $f : X \to Y$ множества $X = \{2, 3, \dots, n-1\}$ в n-элементное множество чисел $Y = [n]$. По этому отображению можно построить (несвязный) ориентированный* *граф D с ребрами вида $(i, f(i))$. Указать способ однозначного построения по такому орграфу неориентированного помеченного дерева, доказав тем самым, что количество таких деревьев равно $n^{(n-2)}$*

Способ построения следующий: добавим в множество X два фиктивных элемента 1 и n; и пусть они всегда отображаются в элементы множества Y: 1 и n соответственно.

Запишем соответствующее преобразование в виде перестановки, причем на первой строчке будут стоять элементы, принадлежащие множеству X, а на второй - множеству Y. Дальше нарисуем орграф так, как это сказано в условии. Заметим, что введя фиктивные переменные, мы получили в графе как минимум 2 петли: на первой вершине и на n-ой.

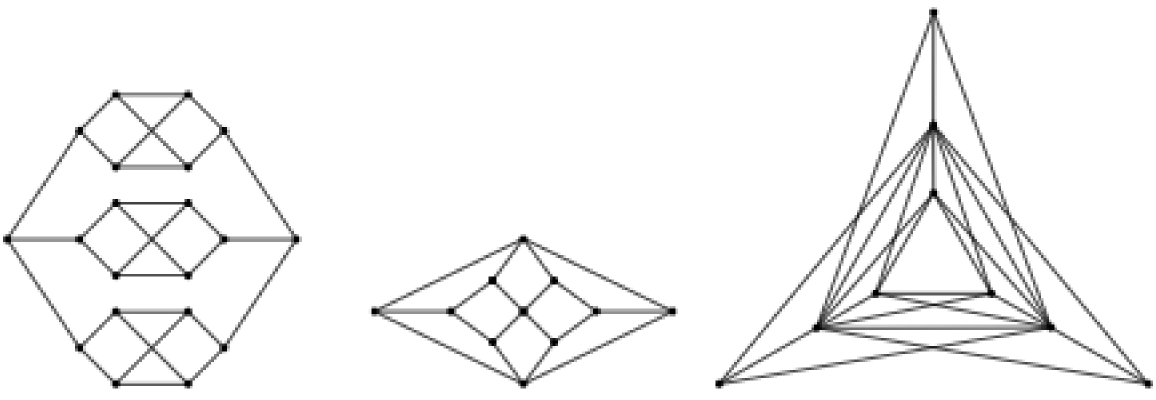
Далее: соберем все вершины из второй строки (множество Y), входящие хотя бы в один цикл и создадим новую перестановку, причем отсортируем их в возрастающем порядке элементов множества X (то есть по первой строке). Пусть первая строка будет такой: $(a, b, c, \ldots, z)$. Тогда вторая строка будет: $(f(a), f(b), f(c), \ldots, f(z))$. Назовем это множество M. Заметим, это перестановка и, если нам окажутся известны образы (и их порядок), то однозначно восстанавливается и множество: просто приписываем сверху строку, которая есть отсортированная строка образов.

Далее построим дерево таким образом: нарисуем вершины $f(a), f(b), f(c), \ldots, f(z)$ в данном порядке в виде пути от $f(a)$ до $f(z)$ (назовем его P) и "навесим"на этот путь P остальные вершины из исходного дерева, удаляя при этом стрелки на концах ребер (то есть из ориентированных ребер делая неориентированные). Дерево построено.

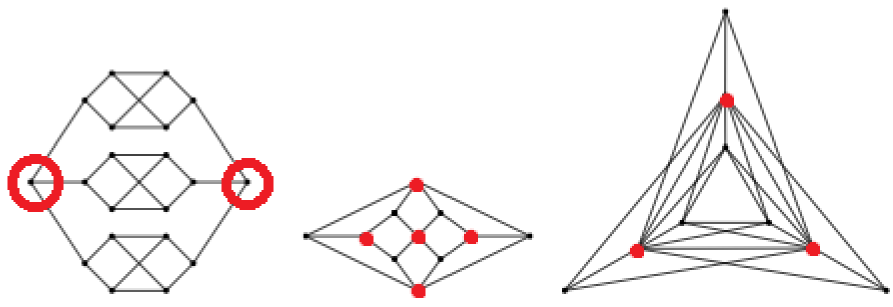
Так как в графе есть как минимум 2 цикла: петли на первой и последней вершинах, то наш путь будет содержать как минимум 2 вершины и всегда эти вершины (первая и последняя) будут его концами. Очевидным становится способ восстановления орграфа (и, соответственно, отображения) по данному дереву: мы просто проходим все шаги в обратном порядке. Так как дерево помеченное, однозначно восстанавливается наш путь P, и по предыдущему замечанию он равен пути между вершинами 1 и n. Из этого пути однозначно восстанавливается множество M (описано выше). Остальные вершины восстанавливаются из дерева тоже однозначно: как единственно возможный путь из вершны до "главного"пути P.

Таким образом мы указали способ однозначного построения по орграфу неориентированного помеченного дерева, доказав тем самым, что количество таких деревьев равно $n^{(n-2)}$

3.11. *Используя необходимое условие существование гамильтонова цикла (для существования г.ц. необходимо, чтобы для любого непустого подмножества вершин выполнялось условие: число компонент связности, получающихся после удаления из графа этого подмножества, не превосходит числа вершин в этом подмножестве), доказать, что в графах на рисунке ниже нет гамильтоновых циклов*



(a) (b) (c)



(a) (b) (c)

(a) Удалим вершины, обведенные в красный круг. Очевидно, что останется граф, в котором три компоненты связности. А удаляли мы две вершины. Необходимое условие не выполняется, значит гамильтонова цикла нет.

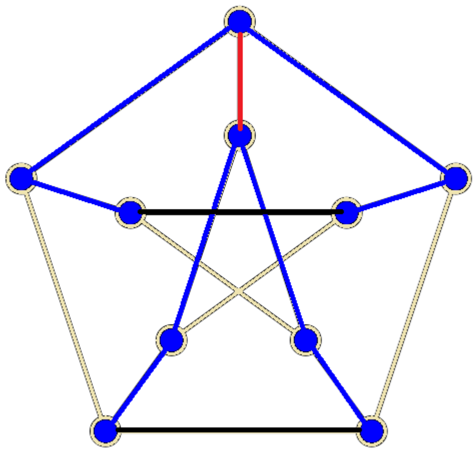
(b) Удалим красные вершины. Очевидно, что остается граф, состоящий из шести висячих вершин, то есть граф, в котором 6 компонент связности. А удалили мы 5 вершин. Необходимое условие не выполняется, значит гамильтонова цикла нет.

(c) Удалим красные вершины. Очевидно, что остается граф, состоящий из трех висячих вершин и полного графа на три вершины (в центре), то есть граф, в котором 4 компоненты связности. А удалили мы 3 вершины. Необходимое условие не выполняется, значит гамильтонова цикла нет.

3.12. *Доказать, что в графе Петерсена гамильтонова цикла нет.*
Назовем ребра, составляющие внешний пентагон - внешними ребрами, ребра, составляющие внутреннюю пентаграмму - внутренними. Остальные ребра - мостами (не путать с мостом - ребром, удаление которого влечет увеличение числа компонент связности).
Предположим, гамильтонов цикл там есть. Так как это цикл, то он должен вернуться в исходную вершину, а значит должен проходить четное число раз по мостам - 2 или 4.

(a) Предположим, в цикле ровно 2 моста. Тогда их концы, как в пентаноне, так и в пентаграмме, должны быть соединены путями длины 4 (так как длина гамильтонова цикла есть 10). Тогда эти концы должны быть смежными как в пентагоне, так и в пентаграмме, что невозможно (это легко проверить).

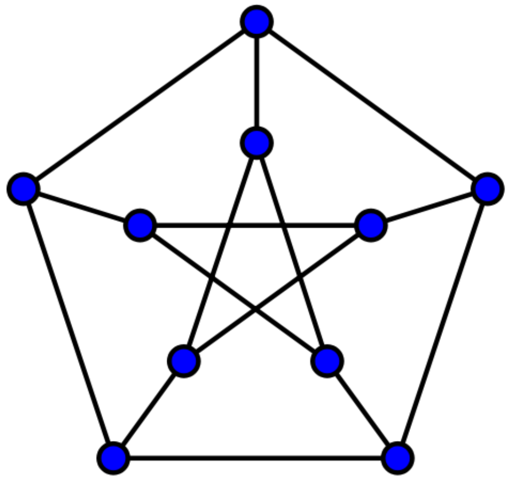
(b) Предположим, в цикле ровно 4 моста. Рассмотрим пару вершин, являющиеся концами невыбранного моста: в графе должны быть ребра, инцидентные этим двум вершинам, чтобы можно было до них добраться и выбраться. В итоге, мы уже выбрали 8 (4 моста и по 2 ребра на каждый конец неиспользуемого моста) из 10 ребер возможного цикла. Легко понять, что какие бы мы два ребра не добавили – никакого гамильтонова цикла не будет.
Можно еще заметить, что в таком случае на внешнем и внутреннем цикле должно быть по 3 ребра (они выделены синим), включая пару для концов неиспользуемого моста (на рисунке этот мост – красный). Такой граф только один – но он состоит из двух циклов длины 5, причем они лежат в разных компонентах связности (это необходимо, чтобы не образовалось "листьев": вершин степени 1)



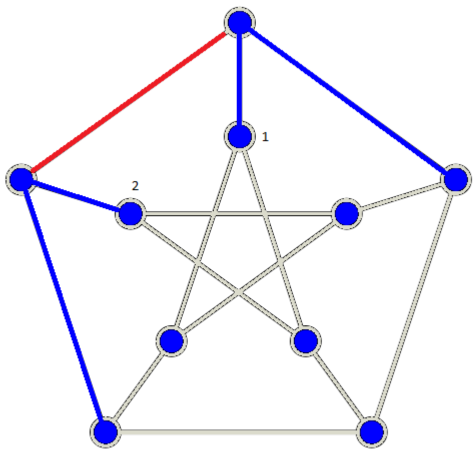
3.13. *Возможно ли удалить в графе Петерсена ребра так, чтобы в полученном графе G существовал эйлеров цикл?*

(a) Так как граф Петерсена состоит из "двух"циклов, можно удалить все ребра, принадлежащие внутренней пентаграмме и удалить ребра между внутренней пентаграммой и внешним пентагоном - после удаления висячих вершин получится граф C_5 (циклический граф на 5 вершин) - в нем очевидно есть эйлеров цикл.

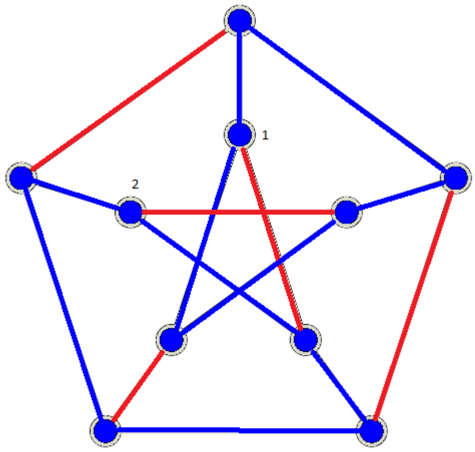
(b) Можно привести еще более сильный пример: в графе Петерсена нельзя удалить ребра так, чтобы он оставался связным и в нем существовал бы эйлеров цикл.



Назовем ребра, составляющие внешний пентагон - внешними ребрами, ребра, составляющие внутреннюю пентаграмму - внутренними. Остальные ребра - мостами (не путать с мостом - ребром, удаление которого влечет увеличение числа компонент связности).
Отметим, что если в нашем графе существует эйлеров цикл, то в нем степени всех вершин равны двум. (вообще-то они должны быть четными, но мы можем лишь удалять ребра, а поэтому, степени могут только уменьшаться: а так как в графе Петерсона у всех вершин степень 3, то в "эйлеровом"графе у всех вершин должны быть степени 2). Значит, по лемме о рукопожатиях, в этом графе должно быть $2 * 10/2 = 10$ ребер.
Очевидно, что хотя бы одно из внешних ребер должно быть удалено (в противном случае у всех вершин на пентагоне степень станет УЖЕ равной двум, что повлечет обязательное удаление всех мостов - а значит граф станет несвязным)
В силу симметрии мы можем удалить любое внешнее ребро (отмечено красным). Синим отмечены ребра, которые обязаны быть в графе (чтобы степени соответствующих вершин были равны двум):



Отметим, что в силу симметрии, мы можем удалить любое еще не рассмотренное ребро, выходящее из вершин 1 или 2 (причем и вершину можем выбрать любую):



Затем аналогично отмечаем ребра, которые обязаны быть в графе в силу его регулярности. Легко заметить, что больше свободы выбора у нас нет - помечание ребра красным сразу влечет еще два синих (обязательных) ребра и так далее.
Видим, что получился несвязный граф. Значит, в силу симметрии, связного эйлерова графа, полученного из графа Петерсона удалением ребер, не существует.

3.14. *Доказать теорему Хватала.*

Теорема Хватала. *Пусть G есть простой граф построенный на $n > 2$ вершинах. Рассмотрим упорядоченную по неубыванию последовательность $(d_1, \dots, d_n)$ степеней $d_k := deg(x_k)$ вершин графа G. Будем называть ее просто "последовательность степеней". Предположим, что не существует индекса $k < n/2$, для которого одновременно выполняются неравенства $d_k \leqslant k$ и $d_{n-k} < (n-k)$. Тогда в G существует гамильтонов цикл.*

Доказательство. Докажем сначала 100500 лемм

Лемма об условии. *Условие эквивалентно требованию истинности импликации*

$$\forall k \in \mathbb{N} : (d_k \le k < n/2 \to d_{n-k} \ge n-k)$$

Доказательство. Становится очевидным после небольшого разбора случаев. Не существует индекса, для которого выполняются сразу 2 условия означает, что для любого индекса ложно либо первое, либо второе, либо оба сразу. А это эквивалентно истинности импликации, где второе неравенство обращено (импликация ложна только когда посылка истинна, а заключение ложно). □

Лемма о добавлении ребра в граф. *Пусть граф G' получен из графа G добавлением нового ребра e. Тогда последовательность степеней графа G' мажорирует последовательность степеней графа G.*

Доказательство.

Подлемма. *Если в неубывающей последовательности $(d_1, \dots, d_n)$ увеличить на единицу число d_i, а затем привести последовательность к неубывающему виду (поставив число $d_i + 1$ на свое место j), то новая полученная последовательность будет мажорировать исходную.*

Доказательство. Если число никуда двигать не нужно, то есть $j = i$, то утверждение подлеммы, очевидно, выполняется. Пусть $j \neq i$

- Рассмотрим элементы с номерами $s = \overline{1, i-1}$: они не изменились, следовательно мажорируются собой
- Рассмотрим элементы с номерами $s = \overline{i, j-1}$: они сдвинулись направо, то есть s-ый номер полученной последовательности равен $s+1$-ому исходной, поэтому исходные элементы мажорируются элементами новой последовательности.
- Рассмотрим элементы с номером j: $d'_j \geqslant d'_{j-1} = d_j$
- Рассмотрим элементы с номерами $s = \overline{j+1, n}$: они не изменились, следовательно мажорируются собой

□

При добавлении ребра в граф степени ровно двух вершин увеличиваются на единицу: поэтому для доказательстав леммы просто дважды применим утверждение подлеммы.

□

Лемма о левой части. $d_k \le k \Leftrightarrow |\{v \in V(G) | d_v \le k\}| \ge k$.

Доказательство. (a) Необходимость ($\Rightarrow$).

Имеем:

- $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_k$
- $d_k \le k$
- $|\{d_1, d_2, \ldots, d_k\}| = k$

Тогда: $\{d_1, d_2, \ldots, d_k\} \subseteq \{v \in VG | d_v \le k\} \Rightarrow |\{v \in V(G) | d_v \le k\}| \ge k$

(b) Достаточность ($\Leftarrow$).

Имеем:

- $|\{v \in VG | d_v \le k\}| = k + p$
- $p \ge 0$

Расположим вершины в неубывающем порядке их степеней.
Тогда: $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_k \le \ldots \le d_{k+p} \le k \Rightarrow d_k \le k$

□

Лемма о правой части. $d_{n-k} \ge n - k \Leftrightarrow |\{v \in V(G) | d_v \ge n - k\}| \ge k + 1$.

Доказательство. (a) Необходимость ($\Rightarrow$).

Имеем:

- $d_{n-k} \ge n - k$
- $d_{n-k} \le d_{n-k+1} \le \ldots \le d_n$
- $|\{d_{n-k}, d_{n-k+1}, \ldots, d_n\}| = k + 1$

Тогда: $\{d_{n-k}, d_{n-k+1}, \ldots, d_n\} \subseteq \{v \in VG | d_v \ge n - k\} \Rightarrow \{v \in V(G) | d_v \ge n - k\} \ge k + 1$

(b) Достаточность ($\Leftarrow$).

Имеем:

- $|\{v \in VG | d_v \ge n - k\}| = k + 1 + p$
- $p \ge 0$

Расположим вершины в невозрастающем порядке их степеней.
Тогда: $d_n \ge d_{n-1} \ldots \ge d_{n-k} \ge \ldots \ge d_{n-k-p} \ge n - k \Rightarrow d_{n-k} \ge n - k$

□

Лемма о действии расширения графа на импликацию. *Если импликация (в первой лемме) верна для некоторой последовательности степеней d, то она остается верной и для неубывающей последовательности d′, мажорирующей d.*

Доказательство. Разберем случаи:

- Пусть $d'_k > k$. Тогда посылка импликации ложна, следовательно импликация верна вне зависимости от заключения.
- Пусть $d'_k \le k,\ d'_{n-k} \ge d_{n-k} \ge n - k$. Тогда и посылка и заключение импликации истинны.

Значит, импликация, истинная для некоторой последовательности степеней, истинна и для мажорирующей последовательности. □

Леммы закончились, можно доказывать теорему. **От противного.**
Пусть существует граф с числом вершин не меньше трех, для которого выполняются условия импликации, но в котором нет гамильтонова цикла. Будем добавлять в него ребра до тех пор, пока не получим максимально возможный граф G, в котором нет гамильтонова цикла. По лемме о добавлении ребра в граф и лемме о действии расширения графа на импликацию, импликация остается верной для графа G.
Выберем две несмежные вершины u и v графа G, такие что $\deg u + \deg v$ максимально. Будем считать, что $\deg u \le \deg v$. Добавив к G новое ребро $e = (u, v)$, получим гамильтонов граф $G + e$. Рассмотрим

гамильтонов цикл графа $G + e$: в нём обязательно присутствует ребро e. Отбрасывая ребро e, получим гамильтонову (u, v)-цепь в графе G: $u = u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_n = v$.
Пусть $S = \{i | e_i = u_1 u_{i+1} \in E(G)\}, T = \{i | f_i = u_i u_n \in E(G)\}$. Пересечение этих двух подмножеств пусто: действительно, пусть $j \in S \cap T$, тогда $u_1 \to u_{j+1} \to \ldots \to u_n \to u_j \to u_{j-1} \to \ldots \to u_1$ - гамильтонов цикл, противоречие.
Из определений S и T следует, что $S \cup T \subseteq \{1, 2, ..., n-1\} \Rightarrow 2 \deg u \leq \deg u + \deg v = |S| + |T| = |S \cup T| < n$. Значит, $\deg u < n/2$.
Так как $S \cap T = \emptyset$, ни одна вершина u_j не смежна с $v = u_n$ (для $j \in S$). В силу выбора u и v, получим, что $\deg u_j \leq \deg u$. Пусть $k = \deg u = |S|$. Значит, $\exists k$ вершин, степень которых не превосходит k.
По лемме о левой части: $d_k \leq k < n/2$. В силу импликации: $d_{n-k} \geq n - k$.
По лемме о правой части: $\exists k + 1$ вершин, степень которых не меньше $n - k$.
Так как $k = \deg u$, то вершина u может быть смежна максимум с k из этих $k + 1$ вершин. Значит, существует вершина w, не являющаяся смежной с u и для которой $\deg w \geq n - k$. Тогда получим, что $\deg u + \deg w \geq k + (n - k) = n > \deg u + \deg v$, что противоречит тому, что вершины u и v выбраны так, что их суммарная степень максильмана.
Получили противоречие. Теорема доказана. $\square$