Теория графов. HW#7

Тураев Тимур, 504 (SE)

7.2 *Найти количество V_1-насыщенных паросочетаний в полном двудольном графе $K_{n,m}$*

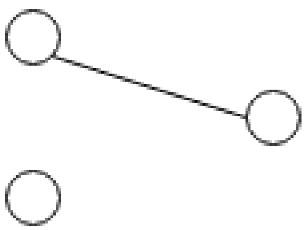
Будем считать, что $n \leqslant m$, в противном случае их, очевидно, 0.

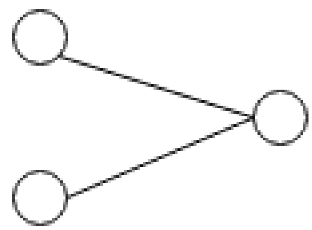
Ясно, что первую вершину (из n) можно покрыть одним из m ребер, вторую - $m-1$ ребрами, поэтому ответ: убывающий факториал $(m)_n = \frac{m!}{(m-n)!}$

Если $n = m$, то число (уже совершенных) паросочетаний согласуется с примером 7.3 из лекций: $m!$

7.4 *Найдите минимальный пример двудольного графа, в котором существует паросочетание, наибольшее по включению (то есть в него нельзя больше добавить ни одно ребро), но не являющееся максимальным.*

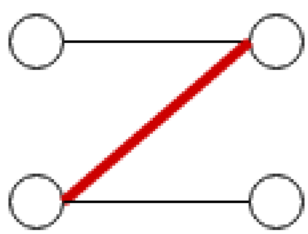
- Ясно, что таких двудольных графов на 2-х вершинах, нет.
- Небольшой перебор показывает, что не существует и графов на трех вершихнах, удовлетворяющих условию: непустых графов существует 2 типа:





Ясно, что в таких графах любое наибольшее по включению паросочетание будет максимальным.

- А вот граф на четырех вершинах существует, он и будет минимальным.



Видно, что выделенное красным паросочетание является наибольшим по включению, но не максимальным: в этом графе существует совершенное паросочетание (черные ребра).

7.7 *Имеется колода из nm карт, по одной карте для каждого значения масти из $[m]$ и для каждого значения достоинства из $[n]$. Карты разложены в таблицу с n строками и m столбцами, по одной карте в каждой ячейке. Докажите, что можно найти m карт, которые имеют разные масти и лежат в разных столбцах.*

Построим двудольный граф $K_{x,y}$, где вершины в левой доле (X) - будут обозначать номера столбцов, а вершины в правой (Y) - масти. Каждую пару вершин (x, y) соеденим p кратными ребрами, где p - число раз, которое показывает сколько раз масть y встретилась в столбце x. *Кстати, так как каждая колонка содержит n карт, а каждая масть представлена n достоинствами, то получится n-регулярный двудольный граф.*

Формализуем требование задачи: чтобы доказать, что можно найти m карт, которые имеют разные масти и лежат в разных столбцах, достаточно доказать, что в нашем графе существует X-насыщенное паросочетание.

Применим теорему Холла: выберем какое-нибудь подмножество колонок $U \in X, |U| = k$. В k колонках лежит ровно nk карт. А так как существует n карт каждой масти, то множество U содержит по меньшей мере k различных мастей. Иными словами, $k = |U| \leqslant |N(U)| \leqslant k$.

Условия теоремы Холла выполнены, значит X-насыщенное паросочетание найдется, а значит, можно найти m карт, которые имеют разные масти и лежат в разных столбцах.