Графы. HW#1

Тураев Тимур, 504 (SE)

24 сентября 2013 г.

1 *Пусть матрица A есть матрица смежности графа G. Показать, что элемент $a_{i,j}^k$ k-ой степени матрицы A определяет количество путей длины k из вершины i в вершину j.*
Очевидно, что матрица смежности представляет собой ответ на задачу при $k = 1$ – она содержит количество путей длины 1 между каждой парой вершин. Пусть для некоторого k ответ найден – обозначим через d_k его матрицу. Тогда очевидно, что

$$d_{k+1}[i][j] = \sum_{p=1}^{n} d_k[i][p] \cdot A[p][j],$$

так как мы считаем число путей добраться до каждой вершины, а потом от этой каждой - до нужной нам. Но это есть не что иное, как определение произведения матриц d_k и A. Значит, элемент $a_{i,j}^k$ матрицы A^k есть число путей длины k из вершины i в вершину j.

2 *Доказать, что в определении связанности двух вершин можно вместо понятия пути использовать как понятие маршрута, так и понятие простого пути.*

(a) Докажем, что если между двумя различными вершинами существует путь, то существует и простой путь (обратное утверждение тривиально). Предположим, что в пути существует повторяющаяся вершина:

$$x_0, x_1, \ldots x_k, y_0, y_1, \ldots, y_p, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$$

Тогда можно удалить из пути подпуть $y_0, y_1, \ldots, y_p, x_k$ и получить путь

$$x_0, x_1, \ldots x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n,$$

в котором уже нет повторяющейся вершины x_k. Если в пути еще есть повторяющиеся вершины – делаем еще шаг алгоритма. В итоге получится путь из различных вершин, т.е. простой путь.

(b) Доказательство того, что если между двумя различными вершинами существует маршртут, то существует и простой путь, аналогично предыдущему - мы высекаем из марштура подмаршрут, который проходит по одному и тому же ребру.

3 *Пусть в графе G ровно две вершины имеют нечетную степень. Доказать, что они являются связанными.*
Предположим обратное. Тогда, граф G состоит как минимум из двух компонент связности. Рассмотрим ту компоненту связности, где находится первая вершина. В этом подграфе всего 1 вершина нечетной степени, остальные четной. Получили противоречие с леммой о рукопожатиях – в любом конечном графе четное число вершин нечетной степени.
Значит, наше предположение о несвязности неверно и эти две вершины связаны.

4 *Доказать или опровергнуть следующее утверждение: объединение двух различных маршрутов, соединяющих две вершины, содержит простой цикл.*
Это неверное утверждение. Пусть у нас есть граф из двух вершин x_0 и x_1, соединенных ребром e. Рассмотрим такие маршруты:
маршрут1: x_0, e, x_1
маршрут2: x_0, e, x_1, e, x_0
Объединение маршрутов даст маршрут 2, в котором, очевидно, никакого цикла нет.

5 *Доказать или опровергнуть следующее утверждение: объединение двух различных простых путей, соединяющих две вершины, содержит простой цикл.*
Пусть есть две вершины a и b и 2 различных простых пути между ними. Так как данные простые пути различны, то найдется такая вершина x_k (возможно, начальная, a), на которой будет "развилка". Аналогично строится догадка, что среди оставшихся вершин найдется такая (возможно, конечная, b) вершина,

где пути сойдутся - y_k. Рассмотрим следующий путь: от x_k до y_k по первому простому пути, затем обратно к x_k по второму. Получили замкнутый путь, т.е. цикл. Получение простого цикла (цикла, в котором повторяются начальные и конечные вершины) из цикла очень простое - удалим из цикла какое-нибудь ребро - получим путь. Применим к этому пути задачу 2. Получим простой путь. Восстановим ребро - получим, очевидно, простой цикл.

6 *Доказать, что в простом графе, содержащем $m \geqslant (n-1)$ ребер, существует как минимум $m-n+1$ циклов.*
ВОПРОС. В простом графе или связном? Для связного графа доказательство тривиальное - граф не дерево, значит есть цикл, значит можем удалить ребро, входящее только в этот цикл - получили опять не-дерево. Повторяем $m-n+1$ раз, пока не получим дерево.

7 *В теории было доказано, что любой граф на n вершинах, имеющий меньше $(n-1)$-го ребра, обязательно является несвязным. В случае, когда $|E(G)| \geqslant (n-1)$ граф G может быть как связным, так и несвязным. Сколько ребер должен иметь простой граф на n вершинах, чтобы он гарантированно был связным?*
Докажем такую лемму.

Лемма. *Для любого графа G с n вершинами, m ребрами и p компонентами связности верно следующее неравенство:*

$$m \leqslant \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$$

Доказательство. Так как это оценка сверху, то можем считать каждую компоненту связности полным графом – такой простой связный граф содержит максимальное возможное число ребер на фиксированном числе вершин.
Рассмотрим две компоненты связности C_i и C_j. И пусть $|V(C_i)| = i$, $|V(C_j)| = j$ и $i \geqslant j > 1$. Заметим, что если заменить бо́льшую компоненту связности на полный граф с $i+1$ вершиной, а меньшую на полный граф с $j-1$ вершинами, то число вершин, очевидно, не изменится. Определим, что будет с числом ребер:

$$\left(\frac{i(i+1)}{2} + \frac{(j-1)(j+1)}{2}\right) - \left(\frac{i(i-1)}{2} + \frac{j(j-1)}{2}\right) = i - j + 1 > 0$$

Число ребер увеличится. Ясно теперь, что максимально возможное число ребер в графе может быть тогда, когда он состоит из $(p-1)$-ой висячей вершины и полного графа из $(n-p+1)$-ой вершины. У такого графа $\frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$ ребер. Оценка доказана. □

Следствие. *Любой граф G с n вершинами и более чем $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ ребрами связен.*

Доказательство. Это очевидно, так как по лемме у графа с $p = 2$ максимальное число ребер $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$, а у нас их больше. □

8 *Доказать, что количество корневых лесов, построенных на n вершинах, равно $(n+1)^{(n-1)}$.* Можно комбинаторно, а можно применить интеллект.
Возьмем любой корневой лес. Введем в этот граф новую вершину, назовем ее "связующей". Соеденим связующую вершину со всеми выделенными корнями всех деревьев в нашем лесу. Очевидно, что получится связный граф, да еще и без циклов. Назовем его "связующее дерево".
Очевидно также, что каждому лесу соответствует ровно одно связующее дерево. И так как все леса были различны, то и все связующие деревья будут различными (ввод новой вершины не может сделать разные графы одинаковыми, иначе будут одинаковые подграфы, а значит исходные деревья были одинаковыми - противоречие). Таким образом, мы можем пересчитать все корневые леса через корневые деревья (наше связующее дерево и есть корневое – в нем "отмечена"связующая вершина). А их число мы знаем по теореме Кэли – $(n+1)^{(n-1)}$

9 *Доказать, что в связном графе два максимальных простых пути имеют общую вершину.*
Предположим обратное: в связном графе есть два максимальных простых пути, которые не имеют ни одной общей вершины:

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

$$y_0, y_1, \dots, y_k$$

Рассмотрим две вершины x_n и y_0: так как граф связный, существует простой путь, соединяющий эти две вершины, причем либо напрямую ребром с одной из вершиной из первого пути, либо с вершинами, которых нет ни в первом, ни во втором пути. Но это значит, что наши максимальные пути не являются максимальными, получили противоречие. Значит, два максимальных простых пути имеют хотя бы одну общую вершину.