Матлогика. HW#5

Тураев Тимур, 504 (SE)

1 *Доказать, что существует $k \in \mathbb{N}$, такое что неразрешимо множество*

$$H^k = \{x | \langle k \rangle (x) \neq \bot\}$$

На самом деле не очень понятно как решать. Примеры из лекции и из практики мне ясны, а вот как приложить их к этому примеру, я не знаю…

2 *Сигнатура $(f^1, =^2)$, носитель $\mathbb{Z}$, нормальная интерпретация, $[f](x) = x + 2$. Невыразимый предикат $y = x + 1$. Найдите автоморфизм, относительно которого данный предикат неустойчив.*

Предлагается такой автоморфизм: $x \to x \bmod 2$. То есть автоморфизм, сохраняющий четность. Это действительно автоморфизм (проверить легко). Предикат $y = x + 1$, ясно, неустойчив: $+1$ в правой части меняет четность.

3 *Сигнатура $(=^2, P^2)$, носитель $\mathbb{N}_+$, нормальная интерпретация, $[P](x, y) = x|y$. Невыразимый предикат $x = 2$. Найдите автоморфизм, относительно которого данный предикат неустойчив.*

Предлагается такой автоморфизм: $x \to 2x$. Это действительно автоморфизм (проверить легко). Предикат $x = 2$, ясно, неустойчив: из того, что $x = 2$ не следует что $2x = 2$ внутри носителя $\mathbb{N}_+$

4 *Построить дерево вывода.*

$$\vdash \exists y \forall x Q(x, y) \to \exists x Q(x, x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Q(x, x) \vdash Q(x, x)}}{Q(x, x) \vdash \exists x_0.\, Q(x_0, x_0),}\,(\exists r)}{\forall x_0.\, Q(x_0, x), \vdash \exists x_0.\, Q(x_0, x_0),}\,(\forall l)}{\exists y.\, \forall x.\, Q(x, y) \vdash \exists x.\, Q(x, x),}\,(\exists l)}{\vdash (\exists y.\, \forall x.\, Q(x, y)) \to (\exists x.\, Q(x, x))}\,(\to r)$$

5 *Построить дерево вывода.*

$$\vdash \exists x (P(y) \lor P(f(z)) \to P(x))$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(y) \vdash P(y), \exists x.\, P(y) \lor P(f(z)) \to P(x),} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(y) \lor P(f(z)), P(f(z)) \vdash P(y), P(f(z))}}{P(f(z)) \vdash P(y), P(y) \lor P(f(z)) \to P(f(z))}\,(\to r)}{P(f(z)) \vdash P(y), \exists x.\, P(y) \lor P(f(z)) \to P(x),}\,(\exists r)}{P(y) \lor P(f(z)) \vdash P(y), \exists x.\, P(y) \lor P(f(z)) \to P(x),}\,(\lor l)}{\vdash P(y) \lor P(f(z)) \to P(y), \exists x.\, P(y) \lor P(f(z)) \to P(x),}\,(\to r)}{\dfrac{\vdash \exists x.\, P(y) \lor P(f(z)) \to P(x), \exists x.\, P(y) \lor P(f(z)) \to P(x),}{\vdash \exists x.\, P(y) \lor P(f(z)) \to P(x),}}\,(\exists r)$$

6 *Построить дерево вывода.*

$$\vdash \exists x \forall y (P(x) \to P(y))$$

$$
\begin{array}{cl}
\hline
\mathrm{P(y), P(x) \vdash P(x), P(x_0)} & \\
\hline
\mathrm{P(x) \vdash P(y) \to P(x), P(x_0)} & (\to r) \\
\hline
\mathrm{\vdash P(y) \to P(x), P(x) \to P(x_0)} & (\to r) \\
\hline
\mathrm{\vdash P(y) \to P(x), \forall y_0.\, P(x) \to P(y_0)} & (\forall r) \\
\hline
\mathrm{\vdash P(y) \to P(x), \exists x_0.\, \forall y_0.\, P(x_0) \to P(y_0),} & (\exists r) \\
\hline
\mathrm{\vdash \forall y_0.\, P(y) \to P(y_0), \exists x.\, \forall y_0.\, P(x) \to P(y_0),} & (\forall r) \\
\hline
\mathrm{\vdash \exists x.\, \forall y.\, P(x) \to P(y), \exists x.\, \forall y.\, P(x) \to P(y),} & (\exists r) \\
\hline
\mathrm{\vdash \exists x.\, \forall y.\, P(x) \to P(y),} &
\end{array}
$$