Матлогика. HW#5

Тураев Тимур, 504 (SE)

1 *Доказать, что существует $k \in \mathbb{N}$, такое что неразрешимо множество*

$$H^k = \{x | \langle k \rangle (x) \neq \perp\}$$

На самом деле не очень понятно как решать. Примеры из лекции и из практики мне ясны, а вот как приложить их к этому примеру, я не знаю...

2 *Сигнатура $(f^1, =^2)$, носитель $\mathbb{Z}$, нормальная интерпретация, $[f](x) = x + 2$. Невыразимый предикат $y = x + 1$. Найдите автоморфизм, относительно которого данный предикат неустойчив.*

Предлагается такой автоморфизм: если x четное, то $x \to x + 2$, иначе $x \to x$. Или короче (но запутаннее): $x \to x + 2 - (x \bmod 2) * 2$. То есть ко всем четным прибавить 2. Это действительно автоморфизм (проверить легко). Предикат $y = x + 1$, ясно, неустойчив: слева и справа числа разной четности и прибавление числа 2 приведет к неверной формуле.

3 *Сигнатура $(=^2, P^2)$, носитель $\mathbb{N}_+$, нормальная интерпретация, $[P](x, y) = x|y$. Невыразимый предикат $x = 2$. Найдите автоморфизм, относительно которого данный предикат неустойчив.*

Предлагается такой автоморфизм: разложим x на простые множители. Затем, заменим все двойки в этом разложении на тройки, а все тройки – на двойки. (формально для числа 1 нет разложения на простые, то просто дополним по определению $1 \to 1$) Более формально $x = 2^a \cdot 3^b \cdot k \to 2^b \cdot 3^a \cdot k$, где $2 \nmid k \wedge 3 \nmid k$ Предикат $x = 2$, ясно, неустойчив, так как $2 \to 3$

4 *Построить дерево вывода.*

$$\vdash \exists y \forall x Q(x, y) \to \exists x Q(x, x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Q(x, x) \vdash Q(x, x)}}{Q(x, x) \vdash \exists x_0.\, Q(x_0, x_0),}\;(\exists r)}{\forall x_0.\, Q(x_0, x), \vdash \exists x_0.\, Q(x_0, x_0),}\;(\forall l)}{\exists y.\, \forall x.\, Q(x, y) \vdash \exists x.\, Q(x, x),}\;(\exists l)}{\vdash (\exists y.\, \forall x.\, Q(x, y)) \to (\exists x.\, Q(x, x))}\;(\to r)$$

5 *Построить дерево вывода.*

$$\vdash \exists x(P(y) \vee P(f(z)) \to P(x))$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(y) \vdash P(y), \exists x.\, P(y) \vee P(f(z)) \to P(x),} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(y) \vee P(f(z)), P(f(z)) \vdash P(y), P(f(z))}}{P(f(z)) \vdash P(y), P(y) \vee P(f(z)) \to P(f(z))}\;(\to r)}{P(f(z)) \vdash P(y), \exists x.\, P(y) \vee P(f(z)) \to P(x),}\;(\exists r)}{P(y) \vee P(f(z)) \vdash P(y), \exists x.\, P(y) \vee P(f(z)) \to P(x),}\;(\vee l)}{\vdash P(y) \vee P(f(z)) \to P(y), \exists x.\, P(y) \vee P(f(z)) \to P(x),}\;(\to r)}{\vdash \exists x.\, P(y) \vee P(f(z)) \to P(x), \exists x.\, P(y) \vee P(f(z)) \to P(x),}\;(\exists r)}{\vdash \exists x.\, P(y) \vee P(f(z)) \to P(x),}$$

6 *Построить дерево вывода.*

$$\vdash \exists x \forall y (P(x) \to P(y))$$

$$
\begin{array}{cl}
\hline
P(y), P(x) \vdash P(x), P(x_0) & \\
\hline
P(x) \vdash P(y) \to P(x), P(x_0) & (\to r) \\
\hline
\vdash P(y) \to P(x), P(x) \to P(x_0) & (\to r) \\
\hline
\vdash P(y) \to P(x), \forall y_0.\, P(x) \to P(y_0) & (\forall r) \\
\hline
\vdash P(y) \to P(x), \exists x_0.\, \forall y_0.\, P(x_0) \to P(y_0), & (\exists r) \\
\hline
\vdash \forall y_0.\, P(y) \to P(y_0), \exists x.\, \forall y_0.\, P(x) \to P(y_0), & (\forall r) \\
\hline
\vdash \exists x.\, \forall y.\, P(x) \to P(y), \exists x.\, \forall y.\, P(x) \to P(y), & (\exists r) \\
\hline
\vdash \exists x.\, \forall y.\, P(x) \to P(y), &
\end{array}
$$