

4.2 Дано $2n-1$ коробок с черными и белыми шарами. В i -ой коробке находится w_i белых и b_i черных шаров. Требуется выбрать n коробок, чтобы суммарное число белых и черных шаров в выбранных коробках было не меньше половины.

Лемма. Если в отсортированном по убыванию массиве нечетной длины выбрать элементы с индексами 1, 3, 5 ... $2N-1$ (нумерация с единицы), то их сумма будет не меньше половины суммы всех элементов массива.

Доказательство: Заметим, что мы выбираем сумму «нечетных» элементов. Тогда утверждается, что сумма всех нечетных не меньше суммы нечетных пополам плюс сумма четных пополам. Или: половина суммы нечетных не меньше половине суммы четных. Или: сумма нечетных не меньше суммы четных.

А это уже понятно почему: каждое нечетное число не меньше четного соседа справа. А нечетных больше на одно. И главное – все они неотрицательны.

Отсортируем массив по убыванию белых шаров.

Далее применяем лемму – выбираем все нечетные ящики. Мы получили важную вещь – мы выбрали ящики так, чтобы белых в них было не меньше половины и теперь будем двигать указатели так, чтобы ситуацию НЕ ухудшить. А не ухудшить (с точки зрения белых шаров) мы можем просто: при движении указателя направо ситуация не ухудшается (потому что справа стоят числа не меньше чем слева – мы же отсортировали по убыванию).

Указатель тут – это помеченный ящик.

Так и будем делать: для каждого указателя будем двигать его влево, пока не встретим другой указатель и будем искать, а есть ли где-то на этом пути черный ящик лучше этого указателя. Начинать будем с самого левого указателя. Его двигать некуда – он и так первый. Второй указатель можно лишь двинуть на один влево и проверить не больше ли второй элемент в массиве черных третьего.

Таким образом мы неухудшаем ситуацию для белых и только улучшаем ситуацию для черных – черными мы проходим все(!) возможные позиции.

Очевидно, что сложность этого этапа – линия, потому что суммарно все указатели пройдут не больше длины массива.

Итоговая сложность – $O(2N-1) + O((2N-1)\log(2N-1)) = O(N\log N)$