Графы. HW#3

Тураев Тимур, 504 (SE)

24 октября 2013 г.

1.17. *Доказать, что либо у графа, либо у его дополнения диаметр не больше 3. В частности, один из графов обязательно связен.*
Докажем, что, если дан граф G, в котором $diam(G) \geqslant 3$, то $diam(\overline{G}) \leqslant 3$.
Пусть u и v - две вершины в графе G, расстояние между которыми не меньше 3. Выберем произвольно две вершины x и y в графе G и докажем, что расстоние между ними в графе-дополнении будет не больше 3.
Заметим, что вершина x не смежна хотя бы с одной из вершин u или v (в противном случае получим, что у нас есть путь uxv длиной 2). Без потери общности можем считать, что вершина x не смежна с u.

1. Пусть вершина y не смежна с u, тогда в графе-дополнении все три вершины становятся смежными и у нас появляется путь xuy длиной 2.
2. Пусть вершина y смежна с u, тогда она не смежна с v (по тем же соображениям). Тогда в графе-дополнении появляется путь $xuvy$ длиной 3. (так как вершины u и v были не смежны в графе G, значит будут смежны в графе $\overline{G}$)

Таким образом, любые две вершины x и y будут находиться друг от друга на расстоянии не больше 3 в графе $\overline{G}$ - он и будет связным.

3.15. *Пусть для некоторой пары несмежных вершин x и y в простом графе G выполняется неравенство $deg(x) + deg(y) \geqslant n = |V(G)| > 2$. Доказать, что в графе G существует гамильтонов цикл тогда и только тогда, когда он существует в графе $G + \{x, y\}$.*

- $\Rightarrow$ Очевидно, если в графе G был цикл, то добавление ребра в в граф не изменит этот цикл.
- $\Leftarrow$ Пусть в графе $G + \{x, y\}$ имеется гамильтонов цикл. Предположим, он не проходит по ребру $\{x, y\}$, тогда, удалив это ребро, мы сохраним цикл.
  Пусть этот цикл проходит по ребру $\{x, y\}$. Удалив это ребро, получим гамильтонов путь из вершины x в вершину y. Применим лемму 3.8: она говорит о том, что если есть гамильтонов путь между двумя несмежными вершинами в графе, то достаточным условием существования гамильтонова цикла в этом графе является выполнение неравенства $deg(x) + deg(y) \geqslant n = |V(G)| > 2$, что нам и дано.

4.3. *Подмножество U множества вершин графа называется независимым, если никакие две вершины этого подмножества не являются смежными. Обозначим через $\alpha(G)$ количество вершин в максимальном независимом подмножестве графа G. Доказать, что для любого графа G, построенного на n врешинах, справедливо неравенство $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geqslant n, n = |V(G)|$*
Все вершины графа G могут быть разбиты на $\chi(G)$ монохроматических классов. Каждый класс, очевидно, представляет собой независимое множество вершин, а значит его размер не превышает $\alpha(G)$. Очевидно, это выполняется и для максимального по мощности монохроматического класса. Его размер не меньше чем $\dfrac{|V(G)|}{\chi(G)}$ (это очевидно следует из противоречивости противоположного утверждения: в этом случае получится, что общее число вершин $|V(G)| < |V(G)|$). Отсюда: $\alpha(G) \geqslant \dfrac{|V(G)|}{\chi(G)}$ или $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geqslant |V(G)|$.

4.5. *Доказать, что для любого простого графа G на n вершинах $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1$ и $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geqslant n$*

1. Докажем по индукции. База: $n = 1$. Очевидно, что $\chi(G) = \chi(\overline{G}) = 1$
   Предположение индукции: выберем в графе какую-нибудь вершину v. Тогда $\chi(G - v) + \chi(\overline{G - v}) \leqslant n$
   Индукционный переход. Заметим, что $\chi(G) \leqslant \chi(G - v) + 1$ и $\chi(\overline{G}) \leqslant \chi(\overline{G - v}) + 1$. Это очевидно: при добавлении в граф новой вершины, число цветов, необходимых для покраски не может увеличиться больше чем на 1.
   Рассмотрим степень вершины v. Если $deg(v) < \chi(G - v)$, то новый цвет нам и не понадобится, а поэтому $\chi(G) = \chi(G - v)$, следовательно $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant \chi(G - v) + \chi(\overline{G - v}) + 1 \leqslant n + 1$

Аналогичные рассуждения можно провести и для дополнения G: если $deg(v) > (n-1) - \chi(\overline{G-v})$, то $\chi(\overline{G}) = \chi(\overline{G-v})$, следовательно $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant \chi(G-v) + 1 + \chi(\overline{G-v}) \leqslant n+1$ Остался случай, когда $deg(v) \geqslant \chi(G-v)$ и $deg(v) \leqslant (n-1) - \chi(\overline{G-v})$: но тогда выделив из неравенств хроматические числа получим, что $\chi(G-v) + \chi(\overline{G-v}) \leqslant n-1$, следовательно $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant \chi(G-v) + 1 + \chi(\overline{G-v}) + 1 \leqslant n-1+2 = n+1$

2. $\chi(\overline{G}) \geqslant \alpha(G)$, так как наибольшей антиклике соответствует клика в графе-дополнении, а значит, для ее покраски нужно не меньше $\alpha(G)$ цветов. Применяем результат задачи 4.3, получаем, что $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geqslant n$

4.8. *Доказать, что если в ориентированном графе нет путей длины, большей, чем m (в частности, нет циклов), то $\chi(G) \leqslant m+1$*

Докажем, что граф, в котором нет пути длины большей чем m, можно корректно покрасить в не более чем $m+1$ цвет. Это будет означать, что хроматическое число этого графа не превышает $m+1$.

Алгоритм: покрасим каждую вершину в цвет, равный длине максимального пути, который заканчивается в этой вершине. Очевидно, что все истоки получат цвет ноль. Рассмотрим какое-нибудь ориентированное ребро (x, y): легко понять, что оно соединяет вершины, значения цветов которых строго возрастают – действительно, если длина максимального пути, который заканчивается в вершине x равна, скажем, A, то в вершине y эта длина не может быть меньше A и не может быть равна A - так как всегда существует путь длиной по крайней мере $A+1$. (к слову, длина в вершине y не обязательно равна $A+1$ – в этой вершине может заканчиваться какой-либо другой очень длинный путь). Итак, цвет конца ребра всегда больше цвета его начала – значит, такая раскраска всегда корректна.

Так как по условию в графе G нет путей длины больше, чем m, то длина максимального пути в этом графе $k \leqslant m$, значит этот путь состоит ровно из $k+1$ вершины, причем первая является истоком (в противном случае существовал бы путь длины больше, чем k), а это значит, что максимальный цвет, который может быть использован алгоритмом - k. Значит, всего цветов мы используем не больше $k+1$ (не забудем про нулевой цвет). Отсюда заключаем, что $\chi(G) \leqslant k+1 \leqslant m+1$.

4.9. *Обозначим через $K^*_{n,n}$ граф, полученный из полного двудольного графа $K_{n,n}$ с блоками $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ удалением ребер x_i, y_i. Предположим, что граф $K^*_{n,n}$ окрашивается с помощью описанного в пункте 2 жадного алгоритма. Предъявить два способа начального упорядочивания вершин этого графа, для одного из которых алгоритм окрасит вершины в два цвета, а для второго — в n цветов.*

1. В два цвета: $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$. Алгоритм сначала покрасит весь блок X в цвет 1, т.к. каждая следующая вершина в этом блоке будет несмежна ни с какой из предыдущих, а поэтому всем проставится минимальный из возможных цветов – 1. Затем, проходя по блоку Y алгоритм проставит каждой вершине цвет 2, так как у каждой вершины будет ровно $n-1$ сосед с меньшим номером и цветом 1, а значит минимальный неиспользуемый - это 2.
2. В n цветов: $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n\}$. Рассуждения похожие: сначала вершине x_1 проставится цвет 1, равно как и вершине y_1 (поскольку они несмежны). Вершине x_2 – цвет 2, так как у нее будет ровно одна смежная вершина с меньшим номером, которая покрашена в цвет 1. Аналогично вершина y_2 получит цвет 2. Вообще, вершина x_i будет покрашена в цвет i, поскольку у нее будет ровно $i-1$ сосед с меньшим номером (все лежат в противоположном блоке) и у каждого из них цвет от 1 до $i-1$, поэтому вершина x_i получит цвет i. Значит, весь граф будет покрашен в n цветов.

4.10. *Доказать, что в любом графе G существует такое линейное упорядочение его вершин, при котором жадный алгоритм раскраски окрасит вершины графа ровно в $\chi(G)$ цветов.*

Такой обход действительно существует. Представим, что граф G уже покрашен в $\chi(G)$ цветов. Корректно перекрасим все вершины, покрашенные не в первый цвет – в первый. Если этого сделать больше нельзя, то это значит, что каждая вершина имеет в соседях вершину первого цвета (иначе мы бы смогли покрасить ее в первый цвет, ничего не сломав). Дальше, перекрасим все вершины, которые имею цвет не меньше второго - во второй. И так далее. Число цветов уменьшиться не может, по причине покраски в $\chi(G)$ цветов. Больше тоже быть не может: мы не вводим новых цветов.

Теперь ясно в каком порядке нужно отсортировать вершины так, чтобы жадный алгоритм покрасил этот граф ровно в $\chi(G)$ цветов: вначале выдадем все вершины цвета 1 (виртуального), затем - 2 и так далее. Алгоритм пойдет по вершинам и поставит им цвет 1, так как все они несмежны друг с другом (образуют антиклику), затем всем вершинам, которые были "покрашены"(виртуально) во второй цвет - корректно окрасятся во второй, т.к. во-первых все они не смежны, а также у каждой есть в соседях вершины уже покрашенные в первый цвет. И так далее. Очевидно, что алгоритм окрасит весь граф в $\chi(G)$ цветов.

4.17. *Пусть $G_2 = K_2$, а графы $G_k, k > 2$, получаются из графов G_{k-1} с помощью описанной в теореме 4.17 процедуры. Подсчитать количество вершин в графе G_k.*

Согласно теореме 4.17, на каждом шаге число вершин удваивается и увеличивается на единицу. Значит, рекуррентное соотношение выглядит так: $|G_{n+1}| = 2 \cdot |G_n| + 1$, $|G_2| = 2$. Линейное неоднородное рекуррентное соотношение первого порядка мы решать умеем (делали на практике по комбинаторике). Введем новую переменную $\tilde{a}_n = a_n + c$:

$$\tilde{a}_{n+1} - c = 2 \cdot \tilde{a_n} - 2c + 1$$

$$\tilde{a}_{n+1} = 2 \cdot \tilde{a_n} - c + 1$$

Выберем $c = 1$ (т.е. $\tilde{a_2} = a_2 + c = 2 + 1 = 3$), чтобы получить однородное рекуррентное соотношение. Его решением будет:

$$\tilde{a}_n = 2^{n-2} \cdot \tilde{a_2}, \tilde{a_2} = 2$$

Значит решением исходного неоднородного рекуррентного соотношения будет

$$|G_n| = 3 \cdot 2^{n-2} - 1, n \in [2, +\infty)$$