Комбинаторика. HW#4

Тураев Тимур, 504 (SE)

7.2 *Вывести рекуррентное соотношение для подсчета всех слабо связных орграфов. Пользуясь им, сосчитать количество таких орграфов, построенных на пяти вершинах.*

Всего простых орграфов 2^{n^2-n}. Из них надо вычесть все несвязные орграфы (под ними будем понимать несвязные неориентированные версии ориентированных графов). Действуя прямо по аналогии с началом пункта 7 коспекта получаем, что их число «похоже» на

$$a_n = 2^{n^2-n} - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot a_k \cdot 2^{(n-k)^2-(n-k)}$$

Но это неправда: каждый граф тут будет посчитан несколько раз, причем это число зависит от k и n. Сделаем такой трюк: что такое сумма? На нее можно смотреть как на разбиение всех несвязных графов на 2 (упорядоченных) блока – в первом слабосвязный граф, во втором какой угодно. Давайте помечать «ведущую» вершину в левом блоке (в этом блоке лежит слабосвязный граф). Ее мы можем выбрать k способами. Формула становится такой:

$$a_n = 2^{n^2-n} - \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \binom{n}{k} \cdot a_k \cdot 2^{(n-k)^2-(n-k)}$$

А теперь заметим, что каждый граф (где сумма) мы посчитали ровно n раз: действительно, рассмотрим какой-нибудь несвязный граф, в нем пусть r блоков. Каждый блок будет когда-нибудь «левым», его мы посчитаем ровно k_{r_i} раз, значит всего мы посчитаем этот граф таким числом спобосовв: сумма по всем k_{r_i}, а это в точности число n.

И итоговая правильная формула:

$$a_n = 2^{n^2-n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \binom{n}{k} \cdot a_k \cdot 2^{(n-k)^2-(n-k)}$$

Подсчет дает: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 54, a_4 = 3834, a_5 = 1027080$

7.4 *Доказать, что имеется $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ звездных многоугольников на n вершинах.*

Пусть n четное.

После серии рисунков достаточно очевидно, что существуют так называемые «элементарные графы»: это такие графы, которые полностью определяются одним ребром. Всего таких графов столько, сколько можно провести различных ребер из какой-нибудь зафиксированной вершины, скажем из вершины 1. Ясно, что всего таких ребер можно провести ровно $n/2$: следующее ребро в вершину с номером $n/2+1$ порождате тот же граф, что и ребро в вершину $n/2-1$ (ну это ясно из теории чисел и модульной арифметики). Также ясно, что все такие элементарные графы можно друг с другом «складывать» и получать новый звездчатый многоугольник: это сработает только тогда, когда все элементарные графы реберно непересекающиеся. Если это так, то искомое число это просто число всех подмножеств множества элементарный графов, то есть $2^{n/2}$.

Вот доказать факт, что элементарные графы не пересекаются уже интереснее. Предположим, это не так, значит у каких-то двух различных элементарных графов совпадает хотя бы 1 ребро. Так как они элементарны, то есть полностью определются одним ребром, то совпадают у них и подграфы, порожденные этим ребром. Пометим эти совпавшие ребра.

Получили противоречие: либо это все-таки не такие уж и различные графы, либо у какого-нибудь графа есть еще «непомеченные» ребра, а тут уже противоречие с тем, что он элементарный.

Таким образом все элементарные графы не пересекаются, значит можно строить их всевозможные реберные объединения.

Замечание. В случае нечетного n все практически то же самое, только порождающих ребер там будет $(n-1)/2$ или, что то же самое, $\lfloor n/2 \rfloor$

7.5 *Выразить производящую функцию для сильно связных турниров в терминах производящей функции для всех турниров.*

Пусть всего турниров на n вершинах t_n, а сильно связных s_n. Тогда имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$t_n = s_n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} s_i \cdot t_{n-i}$$

Действительно, все турниры это либо один большой сильно связный турнир, либо сильносвязный на i вершинах плюс остальная часть, которая представляет собой просто турнир. Переходя к производящим функциям получим (свертка превращается в произведение):

$$T(z) = S(z) + S(z) \cdot T(z)$$

Вообще говоря, результат можно было получить сразу исходя из смысла сложения и произведения производящих функций, ну да ладно. Отсюда искомая $S(z)$:

$$S(z) = \frac{T(z)}{1 + T(z)} = 1 - \frac{1}{1 + T(z)}$$

8.2 *Перечислить помеченные деревья, вершины которых имеют только степени 1 и 3*

Не, не пошла.