Комбинаторика. HW#2

Тураев Тимур, 504 (SE)

3.8 *Доказать комбинаторно, что количество способов разбиения натурального числа n на слагаемые, при котором любое число входит в это разбиение не более одного раза, равно количеству разбиений n на нечетные слагаемые*

Существует биекция между разбиением числа на различные слагаемые и разбиением числа на только нечетные слагаемые: каждое четное число в первом разбиении можно разложить в сумму 2^k нечетных чисел (просто делим число на 2 пока делится).

В другую сторону: возьмем пару одинаковых чисел и запишем вместо нее их сумму. И так далее, пока все числа не станут различными.

Почему это будет биекцией?

Ясно, что любое число можно единственным образом представить в виде $2^k \cdot a$, где a – нечетное число. Поэтому рассмотрим обратное отображение: из суммы нечетных в сумму различных чисел. Предположим, получили 2 разных представления. Это возможно, если в одном случае мы получили какое-то число $2^k \cdot a$, а в другом сумму различных (например двух) четных чисел $2^r \cdot a + 2^q \cdot b$, $r \neq q, r < q < k$. То есть

$$2^k \cdot a = 2^r \cdot a + 2^q \cdot b$$
$$2^k = 2^r + 2^q$$
$$2^{k-q} = 2^{r-q} + 1$$

Слева четное число, справа четным может быть только тогда, когда $r = q$, получили противоречие, значит отображение биективно, значит число таких способов одинаково.

4.2 *С использованием диаграмм Ферре показать, что количество разбиений числа $2n + m$ на ровно $n + m$ слагаемых одинаково при любом $m \geqslant 0$*

Рассмотрим диаграмму Ферре разбиения числа $2n+m$ на ровно $n+m$ слагаемых. Заметим, что в самом левом столбце ровно $n+m$ точек. Удалим их. Получим диаграмму Ферре разбиения числа $2n+m-n-m = n$ на не более n слагаемых. Отображение биективно, поэтому искомое число: $P_n(n) = p_n(2n)$ (по формуле 19 конспекта)

4.6 *Доказать, что $p(n)^2 < p(n^2 + 2n)$ при $n \geqslant 1$.*

Докажем инъективность отображения.

Возьмем пару любых разбиений числа n на слагаемые (их число – как раз левая часть неравенства). Теперь сделаем над первым разбиением следующее действие: приплюсуем справа слагаемые равные нулю так, чтобы общее число слагаемых стало ровно n. Затем, прибавим к каждому из n полученных слагаемых число n.

Далее, припишем справа наше второе разбиение. Что получилось? Получилось разбиение числа $n+n^2+n = n^2+2n$ на не менее чем n слагаемых, причем первые n слагаемых не меньше n. *Очевидно, это отображение биективно: разобъем слагаемые на 2 группы: в первой n слагаемых, во втором остальные, вычтем из первых n слагаемых n, уберем лишние нули – получим исходную пару разбиений.*

Но также очевидно, что существует еще тонна других разбиений числа $n^2 + 2n$ в которые переход в принципе невозможен, например, разбиение на меньшее число слагаемых.

Значит, отображение инъективно.

4.8 *Выразить через $p(n)$ количество таких разбиений, в которых равны три наибольшие части.*

Искомое число: $ans = p(n) - A(n) - B(n)$, где $A(n)$ – число таких разбиений, где наибольшая часть встречается ровно 2 раза, а $B(n)$ – число таких разбиений, где наибольшая часть встречается ровно 1 раз.

$B(n)$ найти просто – двойственная диаграмма Ферре описывает все разбиения числа n где обязательно есть единичка. Удалив ее, получим все разбиения числа $n-1$. Добавим к каждому – получим нужное. Значит, $B(n) = p(n-1)$

Что такое $A(n)$? Из двойственной диаграммы ясно, что это такое число разбиений числа n, в котором есть хотя бы одна двойка и нет единиц. А как их сосчитать? Давайте уберем эту двойку (которая точно есть) – получим всевозможные разбиения числа $n-2$ без единиц. А их число мы знаем (это все разбиения в которых две наибольшие части равны), это фактически задача с практики: их число $p(n-2)-p(n-3)$.

Собираем все в одну кучу: $ans = p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-3)$

4.9 *С использованием диаграмм Ферре показать, что количество разбиений числа n ровно на k частей равно количеству разбиений числа $n + k(k-1)/2$ ровно на k неравных частей.*

Построим диаграмму Ферре разбиения числа n ровно на k частей – в ней ровно k строк. Добавим в первую строчку $k-1$ точку, во вторую – $k-2$ и так далее. Получим диаграмму Ферре разбиения числа числа $n + k(k-1)/2$ на ровно k частей. *Очевидно, это отображение биективно: любое разбиение такого числа на k различных частей требует того, чтобы в первой строке нашлась хотя бы $k-1$ точка, во второй – $k-2$ и так далее.*

Убедимся, что все полученные части различны. Предположим, это не так, нашлись две одинаковые строчки: пусть в верхей из них было a точек, туда добавили $k-i$ точек, а в нижней было b точек, а добавили в нее $k-j$ точек, причем $a \geqslant b, i < j$. Тогда

$$a + k - i = b + k - j$$

$$a - i = b - j$$

$$a - b = i - j$$

Слева число неотрицательное, а справа отрицательное. Противоречие, значит все части различны.