Алгоритмы. HW#10

Тураев Тимур, 504 (SE)

1 *Может ли первая команда стать чемпионом*

Построим такую сеть: $< s, t, G, T, U, V, W >$, где s – это исток, а t – сток. Множество вершин G – это всевозможные игры между двумя командами (их число $\binom{n}{2}$). Множество вершин T – это все команды.

Ребра U соединяют сток с G, причем ребро есть только тогда, когда игры еще не сыграна. Пропускная способность таких ребер – 1.

Ребра V соединяют G с T: из вершины $g_{i,j}$ выходят 2 ребра в вершины t_i и t_j. Пропускная способность таких ребер – бесконечность. Ясно, что в каждую вершину t_i входит ровно $n-1$ ребро.

Ребра W соединяют вершины T с вершиной t, со стоком. Причем пропускная способность ребра (t_1, t) равна бесконечности, а пропускные способности остальных ребер (вида (t_i, t)) равны тому числу игр, которая команда i может выигрыть, ничего не испортив при этом для команды 1.

Теперь ясно, что максимальный поток в такой сети даст нужное нам расписание. И ответом на задачу будет «да» тогда, когда максимальный поток будет равен числу игр, которые осталось сыграть. Или, другими словами, все ребра выходящие из истока должны быть насыщены.

Остался вопрос как найти пропускную способность ребер W. Пусть осталось сыграть K игр (это число легко найти, считывая таблицу). Предположим, первая команда все их выигрывает, тогда максимальное число побед, которые может одержать команда i (то есть пропускная способдность ребра (t_i, t)) равно $K - 1 - M$, где M – число побед, которые уже одержала команда i.

2 *Задача про сетку*

Хочется, чтобы через каждую вершину проходил максимум один путь, для этого естественно желание повесить пропускную способность не только на ребра, но и на вершины.

Давайте так и сделаем: пусть у каждой вершины v будет какая-то пропускная способность d, тогда задача поиска максимального потока в такой сети сводится к обычной следующим образом: разобьем вершину v на 2 обычные вершины: v_1 и v_2 и проведем между ними ребро с пропускной способностью d. Дополнительно, для каждого ребра в исходном графе (u, v) с пропуской способностью c проведем ребро в новом графе вида $(u, v1)$ с тем же весом c, аналогично для всех ребер вида (v, u). Достаточно очевидно, что задача поиска максимального потока в исходном графе даст соответствующий максимальный поток в таком графе.

Сведем нашу задачу к такой: пусть сетка это граф, где вершины – узлы сетка, а ребра – отрезки сетки. Введем новую вершину s – исток – и соединим ее ребрами со всеми выделенными вершинами и вершину t – сток – и соединим ее со всеми вершинами на границе, то есть с вершинами степени меньше 4. Далее, как в предыдущем пункте, разобьем каждую вершину на две и назначим всем ребрами в графе вес 1.

Достаточно очевидно, что максимальный поток соответствуют непересекающимся путям в исходном графе, а его величина – их числу. Если величина потока меньше, чем было отмеченных вершин, то задача не имеет решения.

Размер получившейся сети, очевидно, $O(n \cdot m)$ – число вершин стало в 2 раза больше (и еще плюс две), а число ребер стало $2|E| + |V|$.

3 *Докажите, что после каждой итерации поиска блокирующего потока расстояние между стоком и истоком увеличивается хотя бы на единицу.*