Комбинаторика. HW#6

Тураев Тимур, 504 (SE)

11.5 *Доказать, что в случае произвольного натурального числа n цикловой индекс группы D_n симметрий правильного n-угольника определяется по формуле*

Запишем цикловый индекс по определению:

$$Z_{D_n}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{2n}\sum_{\sigma\in\Sigma_G} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{\sigma\in C_n} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n} + \sum_{\sigma\in D_n'} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n}\right)$$

Мы разбили сумму на 2 суммы: по всем поворотам и по всем отражениям (и только по ним – это в формуле выше подгруппа D_n').

Для первой суммы все известно: упражение 11.4 (оно же – задание в классе, мы там выяснили что к чему и зачем: проходим по всем делителям n – это всевозможные длины циклов, а множитель в виде фукнции Эйлера говорит о том сколькими способами мы можем этот цикл получить – фактически число порождающих элементов циклической группы).

Осталось понять вторую сумму (рассмотрим пока для нечетных n). Какое бы мы отражение ни выбрали, схема его всегда одна и та же: линия симметрии проходит через какую-либо вершину и через середину противоположного ребра: эта вершина при отражении образует цикл длины 1, а все остальные – несколько (а именно $(n-1)/2$) циклов длины 2. Всего таких циклов ровно n (по числу вершин или ребер). Получается, вторая сумма (вместе с множителем перед скобкой) превращается в:

$$\frac{1}{2n}\cdot n\cdot x_1x_2^{(x-1)/2} = 1/2\cdot x_1x_2^{(x-1)/2}$$

С четным n все почти аналогично: за исключением того, что там половина циклов одного вида (2 цикла длины 1, а остальные длины 2 – это когда линия отражения проходит через вершину), а другая половина – другого (все циклы – это циклы длины 2 – это когда линия отражения проходит через середины ребер); но схема подсчета полностью аналогична.

В итоге получим требуемую формулу.

12.1 *Доказать, что количество геометрически различных способов окраски ожерелья в не более чем два цвета, при которых ровно k вершин окрашены в один цвет, определяется по формуле*

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{d|\gcd(n,k)}\varphi(d)\binom{n/d}{k/d}$$

Идея такая же, как в предыдущей задаче: число геометрически различных окрасок это число орбит группы X (группа покрасок ожерелья в 2 цвета с ровно k окрашенными вершинами) под действием группы $G = C_n$. Это число, как мы знаем, можно считать через перечисление циклов (в которые будут переходить геометрически неразличимые покраски ожерелий).

Итак, у нас есть правильный n-угольник, в котором будут помечены каким-то образом k вершин. Какие возможны при этом циклы? Цикл длины 1 есть всегда – его дает нам нейтральный элемент C_n. Когда возможен цикл длины 2? Ясно, что тогда, когда и k делится на 2 (чтобы можно было разбить все k помечаемых точек на 2 равных множества) и n делилось бы на 2: чтобы их можно было «разложить» на вершинах симметрично. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что цикл длины 3 возможен когда оба числа делятся на 3.

Таким образом, возможные циклы описываются всеми общими делителями n и k. Или, другими словами, всеми такими $d|\gcd(n,k)$.

Аналогично: число порождающих элементов цикла есть фукнция Эйлера его длины, с этим мы уже дважды разобрались.

Теперь осталась задача лишь выбрать эти k точек. «Цикл» длины d разбивает правильный n угольник на d секторов (размером n/d), в каждом из которых нам нужно выбрать по k/d окрашенных точек. Но так как мы строим цикл, то ясно, что выбрав какие-то k/d точек в одном секторе, мы однозначно определим выбор в других секторах – просто «скопировав» выбор первого сектора. Таким образом число раскрасок, которые перейдут в себя циклически (с длиной цикла d) есть $\varphi(d)\binom{n/d}{k/d}$

Получилась требуемая формула.