Комбинаторика. HW#5

Тураев Тимур, 504 (SE)

9.1 *Семь человек садятся за круглый стол. Считается, что способы рассадки этих людей совпадают, если при каждой такой рассадке любой человек имеет около себя одних и тех же соседей. Сколько возможных способов рассадки людей вокруг стола существует?*

1 способ. Посадим первого человека куда-нибудь. Далее нужно выбрать ему пару соседей, это можно сделать $\binom{n-1}{2}$ способами. Так как порядок рассадки соседенй неважен (по условию задачи), то рассадить их можно одним способом. Далее, на пустое место рядом с одним из соседей мы можем выбрать любого оставшегося человека и получим новую рассадку и так далее, пока все не усядутся.

Итоговая формула

$$\binom{n-1}{2} \cdot (n-3)! = \frac{(n-1)!}{2} = \frac{6!}{2} = 360$$

2 способ. Пусть $n \geqslant 3$ человек уже сидит. Приходит $n+1$-ый человек. Его мы можем посадить в любое из n мест-промежутков, и всегда будет получаться новая рассадка. Отсюда $a_{n+1} = n \cdot a_n$ и $a_3 = 1$. Решаем, получаем $a_n = \frac{(n-1)!}{2}$, $a_7 = 360$.

10.3 *Подсчитать с помощью леммы Бернсайда количество геометрически различных способов окраски граней куба в не более чем 7 цветов.*

Тут $|X| = 7^6$.

Группа симметрии куба состоит из 24 элементов.

- Нейтральный элемент. $|X^e| = |X| = 7^6$
- 6 90-градусных вращений вокруг оси, проходящей через центры противоположных граней куба. Тут фиксируются цвета граней, через которую провели ось вращения и фиксируется цвет всех остальных четырех граней. Поэтмоу всего есть 7 в кубе (каждую из трех "групп"граней можно покрасить в свой цвет) неподвижных точек. Вклад $6|X^a| = 6 \cdot 7^3$.
- 3 180-градусных вращений вокруг оси, проходящей через центры противоположных граней куба. Тут же фиксируются цвета граней, через которую провели ось вращения и фиксируется две группы по 2 грани (противоположные). Поэтмоу всего есть 7 в четвертой степени неподвижных точек. Вклад $3|X^b| = 3 \cdot 7^4$.
- 8 120-градусных вращений вокруг главных диагоналей. Тут фиксируется 2 группы граней: инцидентные каждому концу выбранной диагонали. Поэтмоу всего есть 7 в квадрате неподвижных точек. Вклад $8|X^c| = 8 \cdot 7^2$.
- 6 180-градусных вращений вокруг оси, проходящей через центры противоположных ребер. Тут фиксируется 3 группы граней, каждую можно покрасить в какой-либо цвет, поэтому вклад $6|X^d| = 6 \cdot 7^3$.

  Ответ:

$$|X/G| = \frac{1}{24}\left(7^6 + 6 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^4 + 8 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^3\right) = 5390$$