Lineare Algebra

Daniel

October 2024

Contents

1 Der Körper der Komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen haben viele Eigenschaften mit den reellen Zahlen gemeinsam besitzen darüber hinaus aber weitere Vorteilhafte Eigenschaften, die sich für die modernen Ingenieurwissenschaften als nützlich erwiesen haben.

In der Linearen Algebra werden komplexe Zahlen bei der Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren von Matrizen benötigt (mit zahlreichen Anwendungen). In der Numerischen Mathematik werden die Eigenschaften komplexer Zahlen benötigt, um effizient mit sehr großen natürlichen Zahlen rechnen zu können.

Die komplexen Zahlen bilden als algebraische Struktur einen Körper.
In der gesamten Linearen Algebra werden ihre Eigenschaften für das Rechnen in Körpern ausgenutzt.

1.0.1 Konstruktion der komplexen Zahlen

Aus der Schule bekannte Zahlenbereiche:

$$\mathbb{N} \quad \subseteq \quad \mathbb{Z} \quad \subseteq \quad \mathbb{Q} \quad \subseteq \quad \mathbb{R} \quad \subseteq \quad \mathbb{C}$$

Wir konstruieren einen Zahlenbereich $\mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

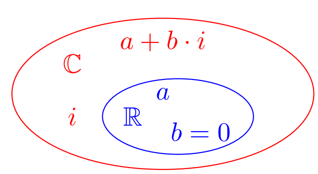
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- $x^2 = -1$ ist in $\mathbb{C}$ lösbar
- Es gelten die Rechengesetze aus $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$ ist so klein wie möglich

Definition:

i mit $i^2 = -1$ heißt imaginäre Einheit

Bemerkung:

- $i \subseteq \mathbb{C}$
- $a, b \in \mathbb{R}$



Definition:

$\mathbb{C} := \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge der komplexen Zahlen. Für $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$ heißt $Re(z) := a$ der Realteil von z und $Im(z) := b$ heißt der Imaginärteil von z

1.1 Komplexe Zahlen in arithmetischer Schreibweise

1.1.1 Rechenregeln

Der Körper der komplexen Zahlen ist $(\mathbb{C}; +, *)$.
Die komplexen Zahlen haben folgende Eigenschaften:

- $+$ ist assoziativ:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \text{für alle } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

- $+$ ist kommutativ:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

- $+$ hat ein neutrales Element 0:

$$z + 0 = 0 + z = z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

- Jedes Element $z \in \mathbb{C}$ hat ein Inverses -z bezüglich $+$:

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

- $*$ ist assoziativ:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad \text{für alle } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

- $*$ ist kommutativ:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

- $+$ hat ein neutrales Element 1:

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

- Jedes Element $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ hat ein Inverses z^{-1} bezüglich $*$:

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$$

- $*$ ist distributiv bezüglich $+$:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \quad \text{für alle } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

1.1.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b\}$ ist die Menge der komplexen Zahlen

- Addieren:
$$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$$
- Subtrahieren
$$(a + bi) - (c + di) := (a - c) + (b - d)i$$
- Multiplizieren
$$(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$$
- Dividieren
$$\frac{a + bi}{c + di} := \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \quad \text{für } c + di \neq 0$$

Um komplexe Zahlen in arithmetischer Form einfacher zu dividieren wird ein "Standardtrick" verwendet:

$$\begin{aligned}(1 + 2i) : (3 - 4i) &= \tfrac{(1+2i)}{(3-4i)} \\ &= \tfrac{(1+2i)}{(3-4i)} \cdot 1 \\ &= \tfrac{(1+2i)}{(3-4i)} \cdot \tfrac{3+4i}{3+4i} \\ &= \tfrac{(1+2i)\cdot(3+4i)}{(3-4i)\cdot(3+4i)} \\ &= \tfrac{-5+10i}{25} \\ &= -\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{5}i\end{aligned}$$

1.2 Konjugiert komplexe Zahlen

Definition:

Sei $z := a + bi \in \mathbb{C}$. Dann nennt man $\bar{z} := a - bi$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Bemerkung:

Man dividiert durch eine komplexe Zahl $z \neq 0$, indem man mit der konjugiert komplexen Zahl erweitert.

Bemerkung:

Sei $a + bi \in \mathbb{C}\backslash 0$, dann gilt:

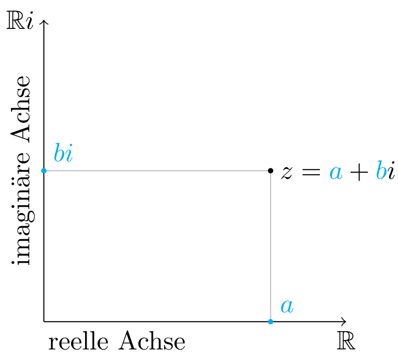
$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

1.3 GAUSS'sche Zahlenebene, kartesische Koordinaten, Polarkoordinaten

Bemerkung:

Komplexe Zahlen z kann man in der Form $z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$ darstellen. Diese Darstellung nennt man **arithmetische Darstellung** von z. Komplexe Zahlen kann man in arithmetischer Darstellung leicht addieren, sowie subtrahieren und aufwendiger multiplizieren, sowie dividieren.

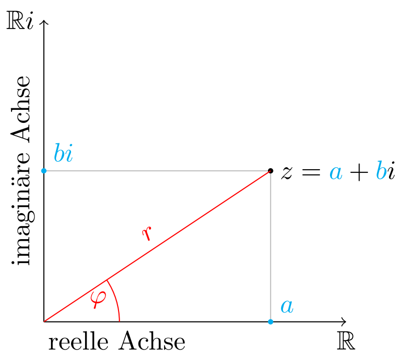
Um komplexe Zahlen leicht multiplizieren und dividieren zu können werden noch die trigonometrische Darstellung und die EULERsche Darstellung Komplexer Zahlen eingeführt.



$z = a + bi$ hat die

$\boxed{\text{kartesischen Koordinaten (a, b)}}$

a ist der Realteil von z
b ist der Imaginärteil von z



$z = a + bi$ hat die

$\boxed{\text{Polarkoordinaten } (r, \varphi)}$

r ist der Betrag von z: $|z| := r = \sqrt{a^2 + b^2}$

φ ist das Argument von z: $Arg(z) := \varphi \quad$ mit $\begin{array}{l} \sin(\varphi) = \frac{b}{r}, \\ \cos(\varphi) = \frac{a}{r} \end{array}$

Umrechnung $\boxed{\text{kartesischen Koordinaten (a, b)}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Polarkoordinaten } (r, \varphi)}$

- $(r, \varphi) \to (a, b)$: $a = r \cdot \cos(\varphi)$
  $b = r \cdot \sin(\varphi)$

- $(a, b) \to (r, \varphi)$: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
  Durch $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$ UND $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$ ist $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig bestimmt.
  Es genügt nicht, zur Bestimmung von φ nur eine dieser beiden Gleichungen zu betrachten.

Darstellung komplexer Zahlen $z \in \mathbb{C}$

- arithmetische Darstellung:
  (kartesische Koordinaten) $\boxed{z = a + bi}$
- trigonometrische Darstellung:
  (Polarkoordinaten) $\boxed{z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))}$
- EULERsche Darstellung:
  (Polarkoordinaten) $\boxed{z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}}$

1.4 Rechnen mit komplexen Zahlen in EULERscher Darstellung

Sei $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$

- Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i\varphi_1 + i\varphi_2}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}}$$

- Division: $z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i\varphi_1 - i\varphi_2}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

2 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen über einen Körper K

Betrachtet werden in diesem Kapitel ausschließlich die folgenden Körper:

- Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}; +, \cdot)$
- Körper der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}; +, \cdot)$
- endlicher Körper $(GF(2); +, \cdot)$ mit $GF(2) = \{0, 1\}$ und

Galois-Field

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

2.1 Lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme

Definition:

Sei K ein Körper, so heißt $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = b$ (mit $n \in \mathbb{N}$) eine lineare Gleichung in den Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ über K.

Kurz:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j = b$$

b wir als Absolutglied bezeichnet

Definition:

Sei K ein körper, so heißt $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n = b_i$ (mit $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, 2, 3, \ldots, m$) Lineares Gleichungssystem (LGS) in den Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ über K.

Kurz:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i$$

Ein LGS ist also die Zusammenfassung mehrerer linearer Gleichungen

2.1.1 Lösung eines linearen Gleichungssystems

Definition:

Das n-Tupel $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ mit $l_1, l_2, \dots, l_n \in K$ heißt Lösung des LGS, wenn sich beim Einsetzen eine wahre Aussage ergibt, d.h. wenn gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot l_j = b_i \text{ (mit } i = 1, 2, \dots, m)$$

Die Menge L aller Lösungen des LGS heißt Lösungsmenge des LGS.

Es gibt zwei Arten linearer Gleichungssysteme:

- homogenes LGS:

  $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = 0 \text{ (mit } i = 1, 2, \dots, m)$$

  Bemerkung:

  Ein homogenes LGS hat immer eine Lösung $(0, 0, \dots, 0)$

  Beweis:

  $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot 0 = 0$ mit $(i = 1, 2, \dots, m)$ ist eine wahre Aussage

  $\square$

- inhomogenes LGS:

  $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \text{ (mit } i = 1, 2, \dots, m)$$

  wobei (mindestens) ein $b_i \neq 0$

  Bemerkung:

  Ein inhomogenes LSG hat nicht die Lösung $(0, 0, \dots, 0)$

2.2 Matrizen

Definition:

Sei $m, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, so ist die $m \times n$ - Matrix A über dem Körper K eine Abbildung

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \to K : (i, j) \mapsto a_{ij}$$

Bemerkung:

Matrizen sind spezielle Abbildungen (Funktionen). $m \times n$-Matrizen lassen sich als rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten notieren:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Bemerkung:

$K^{m \times n}$ ist die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K

2.2.1 Spezielle Matrizen

- Eine $m \times n$-Matrix heißt quadratisch, wenn $m = n$ gilt. Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ wird auch n-reihige Matrix genannt.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  Bei der Hauptdiagonale gilt $i = j$

- Diagonalmatrix: $D = (a_{ij})_{n \times n}$ mit $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$
  Bis auf die Hauptdiagonale sind alle Werte in der Matrix 0

- Einheitsmatrix: $E = (a_{ij})_{n \times n}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$

  Diagonalmatrix, wobei alle Werte in der Hauptdiagonalen 1 sind

- Nullmatrix: $\mathbf{0}_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$ mit $a_{ij} = 0$ für all i, j
  Alle Werte in der Matrix sind 0

2.2.2 Rechnen mit Matrizen

- Addition: Sei $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$. Dann gilt:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Bemerkung:

Matrizen können nur addiert werden, wenn ihre Dimensionen übereinstimmen.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \implies A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Multiplikation: Sei $A = (a_{ij})_{m\times p}$, $B = (a_{ij})_{p\times n}$. Dann gilt:

$$A \cdot B := C \text{ mit } C = (c_{ij})_{m\times n} \text{ und } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Bemerkung:

Eine Matrix A kann mit einer Matrix B multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der Matrix A mit der Zeilenanzahl der Matrix B übereinstimmt.

Diese Definition der Multiplikation von Matrizen modelliert die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen von Verkorräumen

Bemerkung:

Zur Berechnung von c_{ij} benötigt man nur die i-te Zeile von A und die j-te Spalte von B:

$$a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ip} \cdot b_{pj} = c_{ij}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$

$A \cdot B$ ist eine Matrix mit 3 Zeilen und zwei Spalten:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10 + 2 \cdot 11 & 1 \cdot 12 + 2 \cdot 14 \\ 4 \cdot 10 + 5 \cdot 11 & 4 \cdot 12 + 5 \cdot 14 \\ 7 \cdot 10 + 8 \cdot 11 & 7 \cdot 12 + 8 \cdot 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 40 \\ 95 & 118 \\ 158 & 196 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A$ existiert nicht, da die Spaltenanzahl von B nicht mit der Zeilenanzahl von A übereinstimmt.

- Skalarmultiplikation: Sei $A = (a_{ij})_{m\times n}$, k (Skalar) $\in K$, dann gilt:

$$k \cdot A := (k \cdot a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

  Bemerkung:

  Eine Matrix wird mit einem Skalar multipliziert, indem man jedes Matrixelement mit diesem Skalar multipliziert

  Beispiel:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 15 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}$$

- Transponieren einer Matrix: Sei $A = (a_{ij})_{m\times n}$, dann gilt:

$$A^T := (b_{ij})_{n\times m} \text{ mit } b_{ij} = a_{ji}$$

  A^T heißt die zu A transponierte Matrix

  Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Rechenoperationen für Matrizen

- Addition (für alle $A, B, C \in K^{m\times n}$)
  - $A + B = B + A$ (Kommutativgesetz)
  - $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Assoziativgesetz)
  - $A + \mathbf{0} = A$ (Neutrales Element)
- Multiplikation
  - $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (Assoziativgesetz) (falls die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot C$ definiert sind)
  - Es gilt $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$ für alle $A \in K^{n\times n}$
    E_n ist die Einheitsmatrix mit n Zeilen und n Spalten
  - Es gilt $A \cdot \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n}$ für alle $A \in K^{m\times n}$

- Distributivgesetz (falls die entsprechenden Summen und Produkte existieren)
  - $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
  - $(B + C) \cdot A = (B \cdot A) + (C \cdot A)$
- Transponieren (falls die entsprechenden Summen und Produkte von Matrizen existieren)
  - $(A^T)^T = A$
  - $(A + B)^T = A^T + B^T$
  - $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$
  - $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Bemerkung:

Diese (und weitere) Eigenschaften füt das Rechnen mit Matrizen können aus der Definition der Rechenoperationen und Eigenschaften für das Rechnen im Körper K hergeleitet werden.

Beispiel: **Proposition:**

$a \cdot E_n = A$ gilt für alle $A \in K^{m \cdot n}$

Beweis:

Sei $A = (a_{ij})_{n\times n}$ und $E_n = (e_{ij})_{n\times n}$ mit $e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$.
$A \cdot E_n = (a_{ij})_{n\times n} \cdot (e_{ij})_{n\times n} = C$ mit $C = (c_{ij})_{n\times n}$. Dann gilt:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot e_{kj} = a_{ij} \cdot e_{jj} = a_{ij} \cdot 1 = a_{ij} \text{ für alle } i, j$$

Für alle $i \neq j$ gilt $e_{ij} = 0$, also $a_{ij} \cdot e_{jj} = 0$. Für alle $i = j$ gilt $e_{ij} = 1$, also $a_{ij} \cdot e_{jj} = a_{ij} \cdot 1 = a_{ij}$

Also gilt $C = A$ und daher $A \times E_n = A$

□

Bemerkung:

Es gibt Matrizen A, B mit $A \times B \neq B \times A$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Es gibt Matrizen A, B, C mit $A \times C = B \times C$ und $A \neq B$, weshalb nicht durch die Matrix C dividiert werden kann.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 Matrixschreibweise für LGS

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}}_{\text{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}}_{\text{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}}_{\text{b}}$$

Kurzform: $Ax = b$

ODER

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)_{m \times n}}_{\text{A | b}}$$

A Koeffizientenmatrix
x Spaltenvektor der Veränderlichen
b Spaltenvektor der Absolutglieder
$A \mid b$ erweiterte Koeffizientenmatrix

2.4 Lösungsmenge von LGS $A \mid b$

Bemerkung:

Jedes homogene LGS $Ax = \mathbf{0}$ ist lößbar. Für jedes $x = \mathbf{0}$
Es gibt lösbare und unlösbare inhomogene LGS $Ax = b$

Bemerkung:

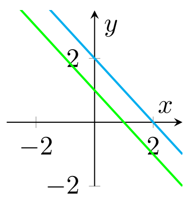
Um die Lösbarkeit von LGS $AX = b$ zu untersuchen und im Falle der Lösbarkeit die Lösungsmenge zu berechnen, gennügt die Darstellung des LGS durch die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$

Beispiel:

$$x + y = 1$$
$$x + y = 2$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

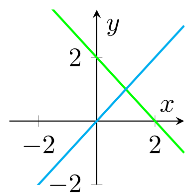


Lösungsmenge
$L = \emptyset$

$$x + y = 2$$
$$x - y = 0$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

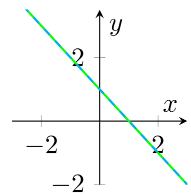


Lösungsmenge
$L = \{(1,1)\}$

$$x + y = 1$$
$$2x + 2y = 2$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$



Lösungsmenge
$L = \{(t, 1-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Bemerkung:

Es gibt LGS, aus denen man die Lösungsmenge leicht ablesen kann

Beispiel:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & -7 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ausführlich:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & & -7x_3 & +2x_4 & & +x_6 & & = & 0 \\ & x_2 & +2x_3 & -3x_4 & & -5x_6 & & = & 8 \\ & & & & x_5 & +5x_6 & & = & 15 \\ & & & & & & x_7 & = & 42 \\ & & & & & & 0 & = & 1 \end{array}$$

Wiederspruch!

$\implies L = \emptyset$

Bemerkung:

$L = \emptyset$, falls das LGS eine Gleichung der orm $0 = b_i$ mit $b_i \neq 0$ enthält

2.4.1 Zeilenstufenform von LGS

Allgemein gilt für LGS in Zeilenstufenform (ZSF):

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1 & & & & b_1 \\ & a_2 & & & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_r & b_r \\ & & & & b_{r+1} \\ & \mathbf{0} & & & \vdots \\ & & & & b_m \end{array}\right) \quad \text{mit } a_i \neq 0 \text{ für } i = 1, 2, \ldots, r$$

$(A \mid b)$ ist lösbar $\iff$ $b_{r+1} = b_{r+2} = \cdots = b_m = 0$

$(A \mid b)$ ist nicht lösbar $\iff$ Es gibt ein b_i mit $b_i \neq 0$ und $i \in \{r+1, r+2, \ldots, m\}$

Beispiel:
LGS über $\mathbb{R}$ mit einem Parameter a:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3-2a & a-6 \\ 0 & 0 & 3(a-3)(a-\frac{1}{3}) & -(a-3)(a-5) \end{array}\right)$$

- $L = \emptyset \iff 3(a-3)(a-\frac{1}{3}) = 0$ und $-(a-3)(a-5) \neq 0$
  $\iff a = \frac{1}{3}$
- $L = \emptyset \iff a \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{1}{3}\}$
  1. Fall: $a = 3$, unendlich viele Lösungen
  2. Fall: $a \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{1}{3}, 3\}$, genau eine Lösung

Beispiel:

$$(A \mid b) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & -7 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 42 \end{array}\right) \end{array} \quad \text{reduzierte ZSF}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= r \\ x_4 &= s \\ x_5 &= t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 7r - 2s - t &&= 7r - 2s - t \\ x_2 &= -2r + 3s + 5t &&= 8 - 2r + 3s + 5t \\ x_5 &= -5t &&= 15 - 5t \\ x_7 &= 42 &&= 42 \end{aligned}$$

$$L = \{(\overbrace{7r-2s-t}^{x_1}, \overbrace{8-2r+3s+5t}^{x_2}, \overbrace{r}^{x_3}, \overbrace{s}^{x_4}, \overbrace{15-5t}^{x_5}, \overbrace{t}^{x_6}, \overbrace{42}^{x_7}) \mid r,s,t \in \mathbb{R}\}$$

2.5 Elementare Zeilenumformungen

- Vertauschen zweier Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $k \in K\backslash\{0\}$
- Addieren des k-fachen ($k \in K$) einer Zeile zu einer anderen Zeile

Satz:

Bei Anwendung von elementaren Zeilenumformungen ändert sich die Lösungsmenge des LGS nicht

Proposition:

Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $k \in K\backslash\{0\}$ verändert die Lösungsmenge eines LGS nicht

Beweis:

Das LGS (S') entstehe aus dem LGS (S), indem die erste (da Zeilen beliebig vertauscht werden können, die i-te) Zeile mit $k \in K\backslash\{0\}$ multipliziert wird.

LGS (S):
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$
$(i = 1, 2, \ldots, m)$

LGS (S'):
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$
$(i = 1, 2, \ldots, m)$
mit $a'_{1j} = k \cdot a_{1j}, b'_1 = k \cdot b_1$
und $a'_{ij} = a_{ij}, b'_i = b_i$
für $j = 1, 2, \ldots, n$
und $i = 2, 3, \ldots, m$

Jede Lösung ($l_1, ..., l_n$) von S erfüllt $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j = b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ und ist gleichzeitig eine Lösung von S', denn:

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{1j}l_j = \sum_{j=1}^{n} k \cdot a_{1j}l_j = k \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{1j}l_j = k \cdot b_i = b'_i$$

Probe mit der ersten Gleichung. Alle anderen Gleichungen müssen nicht überprüft werden, da sie übereinstimmen

Jede Lösung ($l'_1, ..., l'_n$) von S' erfüllt $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j = b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ und ist gleichzeitig eine Lösung von S, denn:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}l'_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot a'_{ij} \cdot l'_j = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}l'_j = \frac{1}{k} \cdot b'_i = b_i$$

$\square$

2.6 Lößen von LGS nach Gauss/Jordan

$$(A \mid b) \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{array}{l}\text{LGS in ZSF}\\ \text{Lösbarkeitsentscheidung}\end{array} \xrightarrow{\text{Gauss/Jordan}} \text{LGS in reduzierter ZSF}$$

Bemerkung:

> Spalten dürfen beliebig vertauscht werden, wenn die Bezeichnungen der Unbekannten mitgenommen werden

Beispiel:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & x_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 8 \end{array}\right) \end{array}$$

Definition:

> Bei dem Eliminationsverfahren nach Gauss wird das LGS so umgeformt, dass alle Elemente unterhalb der Zeilenstufe Null sind $\Longrightarrow$ Zeilenstufenform.

Definition:

> Bei dem Eliminationsverfahren nach Gauß\Jordan wird ein LGS in ZSF mithilfe von Umformungen in die reduzierte ZSF gebracht, sodass sich Lösungen leicht ablesen lassen.

3 Vektorräume über einem Körper K

Definition:

Die Lineare Algebra ist die Theorie der Vektorräume und der Linearen Abbildungen.

Definition:

Vektoren sind Elemente von Vektorräumen.

Beispiel:

- $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$ (Logarithmusfunktion)
- $\{0, 8, 15\}$
- $\int_0^1 \sin(x) dx$

Bemerkung:

Die gemeinsamen Eigenschaften für das Rechnen mit diesen konkreten mathematischen Objekten werden in der linearen Algebra untersucht.

Definition:

Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum $(V; +; (k \mid k \in K))$ besteht aus

- einer nichtleeren Menge V
- einer Addition $+ : V \times V \to V$
- einer Skalarmultiplikation $(k \mid k \in K) : K \times V \to V$

mit den Eigenschaften (1) bis (10) - die Vektorraumaxiome.

Die Elemente von V heißen Vektoren.

Abkürzung: VR für Vektorraum

Beispiel:

- $\mathbb{R}$-VR: reeller Vektorraum
- $\mathbb{C}$-VR: komplexer Vektorraum

3.1 Vektorraumaxiome

1. Für je zwei Elemente $v_1, v_2 \in V$ ist $v_1 + v_2$ ein eindeutig bestimmtes Element von V.
2. $+$ ist assoziativ: $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ für alle $v_1, v_2, v_3 \in V$
3. $+$ ist kommutativ: $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ für alle $v_1, v_2 \in V$
4. $+$ hat ein neutrales Element 0: $v + 0 = v$ für alle $v \in V$
5. Jedes Element $v \in V$ hat ein inverses Element $-v$ bezüglich $+$: $v + (-v) = 0$
6. Für jedes $k \in K$ und jedes $v \in V$ ist kv ein eindeutig bestimmtes Element von V.
7. Es gilt: $1v = v$ für alle $v \in V$
8. Es gilt: $(k_1 k_2)v = k_1(k_2 v)$ für alle $k_1, k_2 \in K$ und alle $v \in V$
9. Es gilt: $(k_1 + k_2)v = k_1 v + k_2 v$ für alle $k_1, k_2 \in K$ und alle $v \in V$
10. Es gilt: $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$ für alle $k \in K$ und alle $v_1, v_2 \in V$

Bemerkung:

Die Axiome (1) bis (10) enthalten keinen Widerspruch, da es Modelle (Beispiele für VR) gibt, die diese Axiome erfüllen.

Beispiel:

- Körper sind Vektorräume über sich selbst: $\mathbb{R}$-VR, $\mathbb{C}$-VR, $GF(2)$-VR
- Sei K ein Körper. $K^{m \times n}$ mit der Matrizenaddition und der Skalarmultiplikation von Matrizen bildet einen K-VR mit dem Nullvektor $\mathbf{0}_{m \times n}$ (Nullmatrix)
- $R^n := R^{n \times 1} = \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}\}$
  $\mathbb{C}^n := \mathbb{C}^{n \times 1}$
  $GF(2)^n := GF(2)^{n \times 1}$
  sind spezielle VR $K^n := K^{n \times 1}$ (VR der <u>Spaltenvektoren</u>)
  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Nullvektor

- $\mathbb{R}$-VR R^2: $\overbrace{\underbrace{\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\}}_{\text{Trägermenge}};\ \underbrace{+, (k \mid k\in\mathbb{R})}_{\text{Operationssymbole}}}^{\text{Trägermenge}}$

- Sei A eine nichtleere Menge und K ein Körper.
  Der VR der Abbildungen ist $f: A \to K$ mit
  Addition: $f_1 + f_2 : x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$
  Skalarmultiplikation: $kf : x \mapsto k \cdot f(x)$
  $f: A \to K : a \mapsto 0_K$ ist der Nullvektor

- Sei A eine nichtleere Menge und $K = GF(2)$.

- Die Potenzmenge $P(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$ mit der
  Addition: $X + Y := X \vartriangle Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$
  Skalarmultiplikation: $1X := X$, $0X := \emptyset$
  bildet einen $GF(2)$-VR mit dem Nullvektor $\emptyset$

Bemerkung:

Nullvektor 0_v und Nullelement des Körpers 0_k sind eindeutig bestimmt.

Beweis:

Seien 0_{v_1} und 0_{v_2} Nullvektoren von V. Dann gilt:
$0_{v_1} + 0_{v_2} = 0_{v_1}$ (da 0_{v_2} Nullvektor)
$0_{v_1} + 0_{v_2} = 0_{v_2}$ (da 0_{v_1} Nullvektor)

Also gilt: $0_{v_1} = 0_{v_2}$

Analog für 0_k.

□

3.1.1 Rechenregeln für VR

- $kv = 0_v \iff k = 0$ oder $v = 0$ für alle $k \in K, v \in V$

- $(-k)v = -kv$ für alle $k \in K, v \in V$
  Insbesondere gilt: $(-1)v = -v$ für alle $v \in V$

3.2 Untervektorräume

Definition:

Unterstrukturen sind Teilmengen eines Grundraumes, die die gleichen Eigenschaften haben wie dieser Grundraum.

Definition:

Sei V ein k-VR und $U \subseteq V$.
U heißt Untervektorraum (UVR) von V, wenn gilt:

- $0_v \in U$
- U ist abgeschlossen bezüglich $+$: $a, b \in U \implies a + b \in U$
- U ist abgeschlossen bezüglich der Skalarmultiplikation:
  $a \in U, k \in K \implies ka \in U$

Bemerkung:

Jeder UVR von V erfüllt die Vektorraumaxiome und bildet daher selbst einen K-VR.

Beispiel: Sei V ein K-VR. Dann gilt:

- $\{0_v\}$ ist ein UVR von V und wird Nullraum genannt.
- V ist ein UVR von V.

Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$

$U_1 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ (Nullraum) ist ein UVR von $\mathbb{R}^3$

$U_2 = \{\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^3$

Satz:

Seien U_1 und U_2 UVR des VR V. Dann ist auch $U_1 \cap U_2$ ein UVR von V.

Beweis:

Wegen $U_1 \subseteq V, U_2 \subseteq V$ gilt auch $U_1 \cap U_2 \subseteq V$:

- Wegen $0_v \in U_1, 0_v \in U_2$ gilt auch $0_v \in U_1 \cap U_2$
- Seien $a, b \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt $a, b \in U_1$ und $a, b \in U_2$.
  Weil U_1, U_2 abgeschlossen bzgl. $+$ sind, gilt
  $a + b \in U_1, a + b \in U_2$. Dann gilt auch $a, b \in U_1 \cap U_2$.
  d.h. $U_1 \cap U_2$ ist abgeschlossen bzgl. $+$.
- Analog zeigt man:
  $U_1 \cap U_2$ ist abgeschlossen bzgl. der Skalarmultiplikation.

$\square$

3.3 Spannräume

Definition:

Sei V ein VR und $T \subseteq V$.
Den kleinsten UVR U von V mit $T \subseteq U$ nennt man den Spannraum $Span(T)$ von V

Bemerkung:

Der Spannraum $Span(T)$ wird auch kurz mit $\langle T \rangle$ bezeichnet.

Beispiel:

$$\text{Span}(\{\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\}) = \left\langle\{\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\}\right\rangle = \{\begin{pmatrix}t\\2t\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Bemerkung:

- $\text{Span}(V) = \langle V \rangle = V$
- $\text{Span}(\emptyset) = \langle \emptyset \rangle = \{0_v\}$ (Nullraum)
  Das Nullelement ist immer im Spannraum. Es gilt, dass $T \subseteq U$ für alle UVR U von V gilt.

Definition:

Sei V ein K-VR, $v_1, \dots, v_n \in V$ und $k_1, \dots, k_n \in K$.
Dann nennt man $k_1 v_1, \dots, k_n v_n$ eine Linearkombination (LK) der Vektoren $v_1, \dots, v_n$ mit den Koeffizienten $k_1, \dots, k_n$

Bemerkung:

Jeder UVR von V, der $v_1, \dots, v_n$ enthält, enthält auch sämtliche Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_n$ mit Koeffizienten uas K.

Seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann ist
$U := \{k_1, v_1 + \dots + k_n v_n \mid k_1, \dots, k_n \in K\}$ der kleinste UVR von V

- $U \subseteq V$
- $0_k v_1 + \dots + 0_k v_n = 0_v \in U$
- U ist abgeschlossen bzgl. $+$
- U ist abgeschlossen bzgl. Skalarmultiplikation

Sei V ein K-VR und $T := \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$
Dann gilt: $\text{Span}(T) = \{k_1, v_1 + \dots + k_n v_n \mid k_1, \dots, k_n \in K\}$
Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$

$$\text{Span}(\{\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\}) = \{a\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$

$U := \{ \begin{pmatrix} 2a \\ a+b \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist ein UVR von R^3.

Beweis:

$$U = \{a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Spann}(\underbrace{\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}}_{\subseteq \mathbb{R}^3})$$

Ein Spannraum ist nach Definition ein UVR. Also ist U ein UVR von $\mathbb{R}^3$.

$\square$

3.4 Erzeugendensysteme

Definition:

Sei V ein K-VR, $T \subseteq V$ und $V = \mathrm{Spann}(T)$.
Dann nenne man T ein Erzeugendensystem von V

Bemerkung:

Jeder Vektorraum V hat ein Erzeugendensystem.
Beispiel: $\mathrm{Spann}(V) = V$

Bemerkung:

Um einen VR zu beschreiben genügt es, für diesen VR ein Erzeugendensystem anzugeben.

- VR sind durch Angabe eines Erzeugendensystems eindeutig bestimmt.
- Für jeden VR V gibt es Erzeugendensysteme T_1, T_2 mit $T_1 \neq T_2$.

Sinnvoll ist es, möglichst kleine Erzeugendensysteme für einen Vektorraum anzugeben.

Beispiel: $T = \{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \}$

- $T \subseteq \mathbb{R}^3 \quad (\implies \langle T \rangle \subseteq \mathbb{R}^3)$
- Jeder Vektor $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ lässt sich als LK von Vektoren aus T darstellen, denn das LGS mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

  $$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{array} \right) \text{ ist lösbar } (\implies \mathbb{R}^3 \subseteq \langle T \rangle)$$

  Also gilt: $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Span}(\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \})$

  d.h T ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

3.5 Lineare Unabhängigkeit

Definition:

Sei V ein K-VR.
Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen linear unabhängig, wenn gilt:

$$\forall k1, \ldots, k_n \in K : k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n = 0_v \implies k_1 = \cdots = k_n = 0_k$$

Andernfalls heißen diese Vektoren linear abhängig.

Bemerkung:

Man spricht auch von linear unabhänhigen bzw. linear abhängigen Mengen ($\{v_1, \ldots, v_n\}$) bzw. Folgen von Vektoren ($(v1, \ldots, v_n)$, bei Folgen ist die Reihenfolge ist wichtig).

Bemerkung:

Sei V ein K-VR.
Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ sind linear abhängig, wenn gilt:

$$\exists k1, \ldots, k_n \in K : k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n = 0_v \land \exists i \in \{1, \ldots, n\} : k_i \neq 0_k$$

Ist ($k_i \neq 0$), so kann die Gleichung nach v_i aufgelöst werden.
Somit ist v_i eine Linearkombination der anderen Vektoren.

Bemerkung:

Sei V ein K-VR.
Für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt:

- Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, dann gibt es nur eine Linearkombination dieser Vektoren, die den Nullvektor ergibt:

$$0_k v_1 + \cdots + 0_k v_n = 0_v$$

- Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig, dann gibt mindestens zwei verschiedene Linearkombinationen dieser Vektoren, die den Nullvektor ergeben:

$$0_k v_1 + \cdots + 0_k v_n = 0_v$$
$$k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n = 0_v$$

mit $-k_i v_i = k_1 v_1 + \cdots + k_{i-1} v_{i-1} + k_{i+1} v_{i+1} + \cdots + k_n v_n$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$

- $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ sind linear abhängige Vektoren,
  denn $0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängige Vektoren,
  denn $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \implies k_1 = k_2 = k_3 = 0$

Bemerkung:

Für jeden K-VR V mit $v_1, v_2 \in V$ gilt:
v_1, v_2 sind linear abhängig $\iff \exists k \in K : v_2 = kv_1$

Beweis:

$(\implies)$: v_1, v_2 linear abhängig
$\implies \exists k_1, k_2 \in K : k_1 v_1 + k_2 v_2 = 0_v \wedge (k_1, k_2) \neq (0, 0)$ O.B.d.A sei $k_2 \neq 0_k$.
Dann gilt: $k_1 v_1 + k_2 v_2 = 0_v$

$$\begin{aligned}
\implies -k_1 v_1 + k_1 v_1 + k_2 v_2 &= -k_1 v_1 + 0_V \\
\implies k_2 v_2 &= -k_1 v_1 \\
\implies v_2 &= \frac{-k_1}{k_2} v_1
\end{aligned}$$

D.h. $v_2 = kv_1$ mit $k = \frac{-k_1}{k_2}$
$(\Longleftarrow)$: Sei $v_2 = kv_1$. Dann gilt:
$kv_1 + (-1)v_2 = kv_1 + (-1)kv_1 = kv_1 + (-k)v_1 = (k + (-k))v_1 = 0_K v_1 = 0_V$ und $(k, -1) \neq (0, 0)$.

Also sind v_1, v_2 linear abhängig.

$\square$

Bemerkung:

Für jeden K-VR V gilt: $\emptyset$ ist linear unabhängig.

Bemerkung:

Für jeden K-VR gilt: 0_v ist linear abhängig. Insbesondere ist jede Menge, die 0_v enthält, linear abhängig.
Beweis:

$1 \cdot 0_v = 0_k 0_v$
Es gilt sogar: $k0_v = 0_v$ für alle $k \in K$ und $|K| > 1$

$\square$

3.6 Basis und Dimension von Vektorräumen

Definition:

Sei V ein K-VR und $B \subseteq V$.
B heißt eine Basis von V, wenn gilt:

- B ist linear unabhängig
- $V = \text{Span}(B) = \langle B \rangle$

Bemerkung:

$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ist die Standardbasis von K^n.

Bemerkung:

Der Nullraum hat als Basis die leere Menge:

$$\{0_v\} = \langle \emptyset \rangle \qquad B = \emptyset$$

Beispiel:

- $\mathbb{R}^3$ hat die Standardbasis $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$.
- Für $\mathbb{R}$ ist $\{1\}$ eine Basis. Aber auch $\{-1\}, \{\pi\}$ usw. sind Basen von $\mathbb{R}$. $\{0\}$ ist keine Basis von $\{\mathbb{R}\}$
- Der $\mathbb{R}$-VC $\mathbb{C}$ hat als Basis $\{1, i\}$
- $R^{2\times 2}$ hat als Basis $\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\}$.
- Der $GF(2)$-VR $P(A)$ mit $A = \{1, \ldots, n\}$ hat als Basis $\{\{1\}, \{1, 2\}, \ldots, \{1, \ldots, n\}\}$ bzw. $\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{1, \ldots, n\}\}$

Bemerkung:

Sei V ein K-VR und B eine Basis von V.
Dann gilt:

- B ist ein minimales Erzeugendensystem von V:
  - B ist ein Erzeugendensystem von V
  - Jede echte Teilmenge von B ist kein Erzeugendensystem von V
- B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V:
  - B ist linear unabhängig
  - Durch $B \cup \{v\}$ $(v \in V, v \notin B)$ erhält man eine linear abhängige Menge.

3.6.1 Dimension eines VR

Satz:

Je zwei Basen eines endlichen Vektorraums haben die gleiche Anzahl von Elementen.

Definition:

Hat ein VR V eine Basis B mit $|B| = n$, dann wird die Anzahl der Basiselemente dieses VR die Dimension $\dim(V)$ von V genannt:

$$\dim(V) = n$$

Beispiel:

- $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathbb{C}^n) = \dim(GF(2)^n) = \dim(K^n) = n$
- $\dim(K^{m\times n}) = m \cdot n$

Bemerkung:

Ein Beispiel für einen unendlich-dimensionalen VR ist die reelle Polynomfunktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

4 Kern und Rang von Matrizen

4.1 Kern von Matrizen

Definition:

Sei K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$.
$\ker(A) := \{x \mid x \in K^n, Ax = 0_{K^m}\}$ heißt Kern der Matrix.

Bemerkung:

Der Kern einer Matrix ist ein UVR von K^n.

4.1.1 Kern eines homogenen LGS

Bemerkung:

Die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist ein VR:

$$L^* = \{x \mid x \in K^n, Ax = 0_{K^m}\}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$x_3 = t \in \mathbb{R} \quad x_2 = 0 \quad x_1 = -t$

$$\ker(A) = L^* = \{\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\} = \left\langle \{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \right\rangle$$

$\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ist eine Basis von $\ker(a)$; $\dim(\ker(A)) = 1$

4.1.2 Kern eines inhomogenen LGS

Inhomogenes LGS: $A_{m\times n} \cdot x_{n\times 1} = b_{m\times 1} \neq 0_{m\times 1}$
Lösungsmenge: $L = \{x \mid x \in K^n, Ax = b\} \subseteq K^n$

Bemerkung:

L ist kein UVR von K^n, denn $0_{K^n} \notin L$

Bemerkung:

1. Die Summe einer Lösung des inhomogenen LGS und einer Lösung des homogenen LGS ist wieder eine Lösung des inhomogenen LGS.
2. Je zwei Lösungen des inhomogenen LGS unterscheiden sich um eine Lösung des homogenen LGS.

Sei L die Lösungsmenge von $ax = b$,
$L*$ die Lösungsmenge von $Ax = 0_{K^m}$,
x_1 eine Lösung von $Ax = b$

Dann gilt:

$$L = \{x_1 + x^* \mid x^* \in L^*\} \text{ oder } L = x_1 + L^*$$

Beispiel:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$Ax = b$ hat die Lösungsmenge

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \mid t \in \mathbb{R}\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + L^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \ker(A)$$

4.2 Affine Teilräume

Definition:

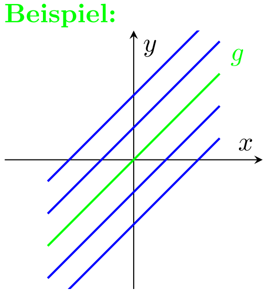
Sei V ein K-VR, U ein UVR von V, $v \in V$.
$T := v + U = \{v + u \mid u \in U\}$ heißt affiner Teilraum von V.
$\dim(T) := \dim(U)$ heißt Dimension des affinen Teilraums.

Bemerkung:

$$\begin{aligned} v + U \text{ ist ein UVR von} V &\iff v \in U \\ 0_v \in v + U &\iff v \in U \end{aligned}$$

Lösungsmengen von LGS $Ax = b$ mit $A \in K^{m \times n}$ sind affine Teilräume von K^n.

Beispiel:



Die Menge der Punkte von g ist ein $\underbrace{UVR}_{\text{spezieller affiner Teilraum}}$ von $\mathbb{R}^2$

Die Menge der Punkte jeder zu g parallelen Geraden bilde einen affinen Teilraum von R^2.

Definition:

Sei V ein K-VR, $\dim(V) = n$.

- 0-dimensionale affine Teilräume von V heißen Punkte
- 1-dimensionale affine Teilräume von V heißen Geraden
- 2-dimensionale affine Teilräume von V heißen Ebenen
- $n-1$-dimensionale affine Teilräume von V heißen Hyperebenen

Beispiel: Hyperebenen in $\mathbb{R}^2$ sind Geraden, in $\mathbb{R}^3$ sind es Ebenen.

4.3 Rang von Matrizen

4.3.1 Spaltenraum

Sei $A \in K^{m \times n}$, $A = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ (Spaltenvektoren von A)

- $\text{col}(A) := \langle \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \rangle$ heißt Spaltenraum von A
- $\text{col}(A) \in K^m$
- $\text{col}(A)$ ist ein UVR von K^m
- $\dim(\text{col}(A))$ heißt Spaltenrang von A

Bemerkung:

Der Spaltenrang von A ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A.

4.3.2 Zeilenraum

Sei $A \in K^{m \times n}$, $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$ (Zeilenvektoren von A)

- $\text{row}(A) := \langle\{z_1, z_2, \dots, z_m\}\rangle$ heißt Zeilenraum von A
- $\text{row}(A) \subseteq K^n$
- $\text{row}(A)$ ist ein UVR von K^n
- $\dim(\text{row}(A))$ heißt Zeilenrang von A

Bemerkung:

Der Zeilenrang von A ist die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A.

Satz:

Für jede Matrix A gilt:

$$\dim(\text{col}(A)) = \dim(\text{row}(A))$$

4.3.3 Rang einer Matrix

Definition:

Sei K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$. Dann nennt man

$$\text{rg}(A) := \dim(\text{col}(A)) = \dim(\text{row}(A))$$

den Rang von A.

Bemerkung:

$A \in K^{m \times n} \implies \text{rg}(A) \leq \min(m, n)$

Beispiel: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

A_1 hat den Spaltenrang $\dim(\left\langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \right\rangle) = 3$

A_1 hat den Zeilenrang $\dim(\langle\{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}\rangle) = 3$

$\text{rg}(A_1) = 3$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A_2 hat den Spaltenrang $\dim\left(\left\langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \right\rangle\right) = 2$

A_2 hat den Zeilenrang $\dim(\langle \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,0)\} \rangle) = 2$

$\mathrm{rg}(A_2) = 2$

4.3.4 Rangberechnung für Matrizen

Bemerkung:

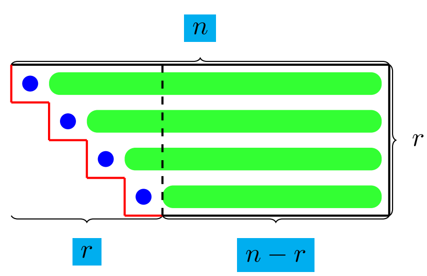
Elementare Zeilenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.

1. Bringe die Matrix $A \in K^{m \times n}$ mittels elementarer Zeilenumformungen in Zeilenstufenform
2. $\mathrm{rg}(A)$ ist die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen in der Zeilenstufenform

Beispiel:

- $$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{hat den Rang } 3$$
- $\mathrm{rg}(E_n) = n$
- $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$

Zeilenstufenform von $A_{m \times n}$



- $r = \mathrm{rg}(A)$ Zeilen
- $n - r$ ist die Anzahl der freien Parameter in der Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0_{K^m}$
  (also $\dim\ker(a) = n - r$)

4.3.5 Dimensionsformel für Matrizen

Achtung! Matrizen haben keine Dimension!

Satz:

$$A \in K^{m \times n} \implies \operatorname{rg}(A) + \dim \ker(A) = n$$

4.4 Lösbarkeitskriterium für LGS

$$Ax = b \text{ lösbar} \iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid b)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} Ax = b \text{ lösbar} &\iff \exists k_1, \dots, k_n \in K \text{ mit } A \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = b \\ &\iff \exists k_1, \dots, k_n \in K \text{ mit } k_1 s_1 + \cdots + k_n s_n = b \\ &\iff b \in \operatorname{col}(A) \\ &\iff \dim(\langle\{s_1, \dots, s_n\}\rangle) = \dim(\langle\{s_1, \dots, s_n, b\}\rangle) \\ &\iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid b) \end{aligned}$$

□

Beispiel:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$
- $\operatorname{rg}(A) = 1, \operatorname{rg}(A \mid b_1) = 1, \operatorname{rg}(A \mid b_2) = 2$
- $Ax = b_1$ ist lösbar, $Ax = b_2$ ist nicht lösbar

4.5 Reguläre Matrizen

Definition:

Sei K ein Körper.
eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt invertierbar, wenn es eine Matrix $A^{-1} \in K^{n \times n}$ gibt, sodass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$ gilt.
A^{-1} heißt dann die zu A inverse Matrix.

Bemerkung:

Invertierbare Matrizen werden auch reguläre Matrizen genannt.

Bemerkung:

Falls die Matrix A invertierbar ist, dann ist A^{-1} eindeutig bestimmt, denn:

$$A \cdot B = \boxed{B \cdot A} = E_n \wedge \boxed{A \cdot C} = C \cdot A = E_n$$
$$\implies B = B \cdot \boxed{E_n} = B \cdot \boxed{(A \cdot C)} = \boxed{(B \cdot A)} \cdot C = \boxed{E_n} \cdot C = C$$

Beispiel:

- Die Nullmatrix ist nicht invertierbar:
  Beweis:
  $$\text{Für alle Matrizen } A : 0 \cdot A = 0 \neq E_n$$
  $\square$
- $E_n^{-1} = E_n$
  Beweis:
  $$E_n \cdot E_n = E_n \implies E_n = E_n^{-1}$$
  $\square$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
  Beweis:
  $$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n \implies A = (A^{-1})^{-1}$$
  $\square$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
  Beweis:
  $$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} == A \cdot A^{-1} = E_n$$
  $\square$

Bemerkung:

Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$.
Zur Berechnung von A^{-1} (falls diese Matrix existiert), sind n LGS $Ax = e_i$ zu lösen, wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist.

4.5.1 Paralleles Lösen

Berechnung von A^{-1} durch paralleles Lösen von n LGS $(A \mid e_i)$:

1. Notiere $(A \mid E_n)$
2. Bringe $(A \mid E_n)$ mit elementaren Zeilenumformungen in ZSF
3. Enthält die umgeformte Matrix A eine Nullzeile, so existiert A^{-1} nicht. Andernfalls Bringe die Matrix in die reduzierte ZSF. Die Matrix hat nun die Form $(E_n \mid A^{-1})$.

Bemerkung:

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt:

- A ist invertierbar $\iff ad - bc \neq 0$
- A ist invertierbar $\implies \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

4.5.2 Äquivalente Aussagen für invertierbare Matrizen

Es sei $A \in K^{n\times n}$

- A ist eine invertierbare Matrix
- A^T ist eine invertierbare Matrix
- Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig
- Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig
- $\mathrm{rg}(A) = n$
- $\dim \mathrm{col}(A) = n$
- $\dim \mathrm{row}(A) = n$
- $\dim \ker(A) = 0$
- $\ker(A) = \{0_{K^m}\}$

5 Lineare Abbildungen

Definition:

Seien $(V; \oplus_v, (k \mid k \in K))$ und $(W; \oplus_w, (k \mid k \in K))$ zwei K-VR über denselben Körper K.
Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt lineare Abbildung,
wenn $\forall a, b \in V; k \in K$ gilt:

$$f(a \oplus_v b) = f(a) \oplus_w f(b)$$
$$f(k \cdot a) = k \cdot f(a)$$

Dies lässt sich auch zu folgender Eigenschaft zusammenfassen:

$$f(a \oplus_v kb) = f(a) \oplus_w kf(b)$$

Beispiel:

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : v \mapsto A \cdot v$ eine lineare Abbildung.
   Beweis:

   Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

   $$f(v_1 + v_2) = A \cdot (v_1 + v_2) = A \cdot v_1 + A \cdot v_2 = f(v_1) + f(v_2)$$
   $$f(k \cdot v_1) = A \cdot (k \cdot v_1) = k \cdot (A \cdot v_1) = k \cdot f(v_1)$$

   $\square$

2. Sei K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$.
   Dann ist $f : K^n \to K^m : v \mapsto Av$ eine lineare Abbildung.

3. Sei K ein Körper und $k \in K$.
   Dann ist $f : K \to K : v \mapsto kv$ eine lineare Abbildung.

Bemerkung:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to mx$ mit $m \in \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung, aber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to mx + n$ mit $m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ist <u>keine</u> lineare Abbildung.

5.1 Eigenschaften linearer Abbildungen

1. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung; $v_1, ..., v_n \in V$, $k_1, \ldots, k_n \in K$.
   Dann gilt:

   $$f(k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n) = k_1 \cdot f(v_1) + \cdots + k_n \cdot f(v_n)$$

2. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V.
   Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist injektiv } &\iff \{f(b_1), \ldots, f(b_n)\} \text{ ist linear unabhängig} \\ f \text{ ist surjektiv } &\iff \langle\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}\rangle = W \\ f \text{ ist bijektiv } &\iff \{f(b_1), \ldots, f(b_n)\} \text{ ist eine Basis von } W \end{aligned}$$

Definition:

Seien V, W K-VR und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.
$\ker(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$ heißt Kern von f.

Bemerkung:

$0_v \in \ker(f)$, denn $f(0_v) = f(0 \cdot 0_v) = 0 \cdot f(0_v) = 0_w$

Satz:

Seien $V, W,$ K-VR und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

$$f \text{ ist injektiv } \iff \ker(f) = \{0_v\}$$

Beweis:

$(\implies)$ Sei $a \in \ker(f)$.

$$\begin{aligned} &\implies & f(a) = 0_w \wedge f(0_v) = 0_w \\ &\implies & f(a) = f(0_v) \\ &\implies & a = 0_v \text{ (da } f \text{ injektiv)} \\ &\implies & \ker(f) = \{0_v\} \end{aligned}$$

$(\impliedby)$ Sei $\ker(f) = \{0_v\}$,
$a, b \in V$ und $f(a) = f(b)$. (zu zeigen: $a = b$)

$$\begin{aligned} &\implies f(a) + (-1 \cdot f(b)) = 1 \cdot f(b) + (-1 \cdot f(b)) \\ &\implies f(a + (-1 \cdot b)) = (1 + (-1)) \cdot f(b) = 0 \cdot f(b) = 0_w \\ &\implies a + (-1 \cdot b) \in \ker(f) = 0_v \\ &\implies a + (-1 \cdot b) + 1 \cdot b = 0_v + 1 \cdot b \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Sei $f : V \to W$ linear, so ist $\ker(f)$ ein UVR von V

5.1.1 Das Bild linearer Abbildungen

Definition:

Seien V, W K-VR und $f : v \to W$ eine lineare Abbildung.
$\mathrm{Im}(f)$:= $\{f(v) \mid v \in V\}$ nennt man Bild von f.

Bemerkung:

- $\mathrm{Im}(f) \subseteq W$
- $0_w \in \mathrm{Im}(f)$, denn $0_v \in V$ und $0_w = f(0_v) \in \mathrm{Im}(f)$

Bemerkung:

Sei $f : V \to W$ linear, so ist $\mathrm{Im}(f)$ ein UVR von W

5.1.2 Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Satz:

Seien V, W K-VR und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\dim(V) = n \implies \dim\ker(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = n$$

Bemerkung:

Für die lineare Abbildung $f : K^n \to K^m : v \mapsto Av$ $(A \in K^{m\times n})$ gilt:

$$\begin{aligned}\ker(f) :&= \{v \in K^n \mid f(v) = 0_{K^m}\}\\ &= \{v \mid v \in K, Av = 0_{K^m}\}\\ &= \ker(A)\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\dim\ker(f) = \dim\ker(A)$$

Aus der Dimensionsformel folgt daher wegen $\dim K^n = n$:

$$\dim\mathrm{Im}(f) = rg(A)$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A) = n &\iff \dim\ker(A) = 0\\ &\iff \ker(A) = \{0_{K^n}\}\\ &\iff |\ker(A)| = 1\\ &\iff \text{Es gibt keine freien Parameter}\\ &\ \text{in der Lösungsmenge von } Ax = 0_{K^m}\end{aligned}$$

Bemerkung:

Die lineare Abbildung $f : K^n \to K^m : v \mapsto Av$ $(A \in K^{n\times n})$ ist genau dann bijektiv, wenn $\mathrm{rg}(A) = n$ gilt.
Die zu f inverse Abbildung f^{-1} lässt sich mithilfe der zu A inversen Matrix angeben.

Beispiel:

- Die identische Abbildung bildet jeden Vektor auf sich selbst ab:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Die Nullabbildung bildet jeden Vektor auf den Nullvektor ab:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Jeder Vektor (a, b) wird auf den doppelten Vektor $(2a, 2b)$ abgebildet:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
- Senkrechte Projektion auf die x-Achse:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Senkrechte Projektion auf die Winkelhalbierende des ersten Quadranten:
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
- Linksdrehung um den Koordinatenursprung um den Winkel φ:
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$
- Spiegelung an der Geraden, die gegen die x-Achse um den Winkel φ geneigt ist:
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Jede lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basisvektoren bereits eindeutig bestimmt:

Sei $f : V \to W$ linear und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Kennt man $f(b_1), \dots, f(b_n)$, dann kann man für jeden Vektor $v \in V$ das Bild $f(v)$ wie folgt berechnen:

- v als Linearkombination der Basisvektoren darstellen:

$$v = k_1 b_1, \dots, k_n v_n$$

- $f(v) = f(k_1 b_1 + \cdots + k_n v_n) = k_1 f(b_1) + \cdots + k_n f(b_n)$

5.1.3 Abbildungsmatrizen

Es sei $f : K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung,

$(e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis von K^n und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$.

$$\begin{aligned} f(v) &= f(v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + v_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}) \\ &= f(v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n) = v_1 \cdot f(e_1) + \cdots + v_n \cdot f(e_n) \\ &= \underbrace{(f(e_1) \ \dots \ f(e_n))}_{A} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = A \cdot v \text{ mit } A \in K^{m \times n} \end{aligned}$$

Definition:

Die Matrix A mit $f(v) = a \cdot v$ für alle $v \in K^n$ heißt Abbildungsmatrix von f.

Bemerkung:

- Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ bestimmt eine lineare Abbildung:

$$f_A : K^n \to K^m : x \mapsto A \cdot x$$

- Jede lineare Abbildung $f : K^n \to K^m$ wird durch ihre Abbildungsmatrix A eindeutig bestimmt:

$$A := (f(e_1) \ \dots \ f(e_i) \ f(e_n))$$

mit $f(x) = A \cdot x$ für alle $x \in K^n$

5.1.4 Darstellungsmatrizen

V sei ein K-VR mit der angeordneten Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$
W sei ein K-VR mit der angeordneten Basis $C = (c_1, \dots, c_m)$
$f : V \to W$ sei eine beliebige lineare Abbildung von V in W.

Definition:

> $A_{BC}(f)$ nennt man die Darstellungsmatrix für $f : V \to W$ bezüglich der Basen B und C.

Bemerkung:

> Hat man die Matrix $A_{BC}(f)$ gefunden, dann kann man für Vektoren aus V das Bild $f(v)$ bestimmen, indem man mit Spaltenvektoren rechnet:
> $$A_{BC}(f) \cdot v_B = f(v)_C$$

Bemerkung:

> Gilt $V = K^n$ und $W = K^m$ für die lineare Abbildung $f : V \to W$ und sind B, C die Standardbasen für K^n bzw. K^m, dann ist die Abbildungsmatrix gleich der Darstellungsmatrix $A_{BC}(f)$.

Aufstellen der Darstellungsmatrix

1. Bestimme $f(b_1), \dots, f(b_n)$
2. Stelle $f(b_i)$ mit $i = 1, \dots, n$ bezüglich der Basis $C = (c_1, \dots, c_n)$ dar:
$$f(b_i) = a_{1i}c_1 + \dots + a_{mi}c_m, \text{ d.h. } f(b_i)_c = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$
3. Notiere die Darstellungsmatrix $A_{BC}(f)$ von f bzgl. B, C:
$$A_{BC}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Berechnung von $f(v)$ mit Hilfe der Darstellungsmatrix $A_{BC}(f)$

1. Stelle $V \in V$ bzgl. der Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ dar:
$$v = k_1 b_1 + \dots + k_n b_n, \text{ d.h. } v_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

2. Berechne $f(v)$:

   - Berechne $a_{BC}(f) \cdot v_B = A_{BC}(f) \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = f(v)_C$
   - $f(v) = l_1 c_1 + \cdots + l_m c_m$

Eigenschaften linearer Abbildungen können aus ihrer Darstellungsmatrix abgelesen werden.

Satz:

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix $A := A_{BC}(f) \in K^{m \times n}$. Dann gilt:

1. $v \in \ker(x) \iff v_B \in \ker(A) \iff v_B \in \ker(A_{BC}(f))$
2. $w \in \mathrm{Im}(f) \iff w_C \in \mathrm{Im}(f_A)$

Beweis:

Zu (1):
$v \in \ker(f) \iff f(v) = 0_w \iff f(v)_c = 0_{K^m} \iff A \cdot v_B = 0_{K^m} \iff v_B \in Ker(A)$

□

Basiswechselmatrix

- Die Basiswechselmatrix $A_{BB'}(id)$ ist die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $id : V \to V : v \mapsto v$, die den Übergang von einer Basis B zu einer Basis B' des K-VR V beschreibt.
- Ist $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$, dann gilt:

$$A_{BB'}(id) = (b_{1B'}, \ldots, b_{nB'})$$

- Mit der Basiswechselmatrix lassen sich die Koordinaten bezüglich der neuen Basis ausrechnen:

$$A_{BB'}(id) \cdot v_B = id(v)_{B'} = v_{B'}$$

- $A_{BB'}(id)$ ist eine quadratische Matrix und invertierbar.
  $A_{BB'}(id)^{-1} = A_{B'B}(id)$ beschreibt den Basiswechsel von B' zurück zu B.

Für die Basiswechselmatrix gilt:

$$A_{BB'}(id) = M(B')^{-1} \cdot M(B)$$

Ist B die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$, dann gilt: $A_{(e_1,\ldots,e_n)B'}(id) = M(B')^{-1}$ Ist B' die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$, dann gilt: $A_{B(e_1,\ldots,e_n)}(id) = M(B')$

6 Determinanten

6.1 Eigenschaften von Determinanten

Bemerkung:

Determinanten sind Abbildungen: $\det : K^{n \times n} \to K : A \mapsto \det(A)$

Determinanten sind durch folgende Eigenschaften festgelegt:

- det ist mulitlinear, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + k \cdot x \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + k \cdot det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

- det ist alternierend, d.h. hat A zwei gleiche Zeilen, dann gilt $\det(A) = 0$
- det ist normiert, d.h. $\det(E_n) = 1$

6.1.1 Berechnung der Determinante für $n = 2$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Bemerkung:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ linear abhängig } \iff \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 0$$

Beweis:

Ist $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, gilt die Behauptung. Andernfalls:
<u>Richtung $\Longrightarrow$:</u>

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ lin. abh.} &\Longrightarrow \exists k \in K \text{ mit } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix} \\ &\phantom{\Longrightarrow \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} = a \cdot kb - ka \cdot b = 0 \end{aligned}$$

<u>Richtung $\Longleftarrow$:</u>

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a\cdot d - b\cdot c = 0 \implies \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{d}{b}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a}{c}\cdot\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

□

Bemerkung:

det(A) gibt den Faktor an, um den sich bei der linearen Abbildung $f : x \mapsto Ax$ die "Fläche" von Figuren ändert.

Beispiel: $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 0\cdot 3 - 2\cdot 1 = -2$

6.1.2 Berechnung der Determinante für $n = 3$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Satz:

Der Satz von Sarrus besagt, dass die Determinante einer 3×3-Matrix gleich der Differenz der Produkte der Elemente entlang der Haupt- und Nebendiagonalen ist.

Die Matrix lässt sich folgendermaßen nach der ersten Zeile entwickeln:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a\cdot\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d\cdot\det\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g\cdot\det\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

Beispiel: $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 0\cdot 4\cdot 8 + 3\cdot 7\cdot 2 + 1\cdot 5\cdot 6 - 6\cdot 4\cdot 2 - 7\cdot 5\cdot 0 - 3\cdot 1\cdot 8 = 0$

$= +0\cdot\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = 0 - 3\cdot(-6) + 6\cdot(-3) = 0$

Definition:

Sei $A \in K^{n\times n}, A = (a_{ij})$.

- Für $n = 1$ gilt: $\det(A) := a_{11}$
- Für $n > 1$ gilt: $\det(A) := \sum_{i=1}^{n}((-1)^{i+1}\cdot a_{i1}\cdot\det(A_i 1))$
  Die 1 steht für die Entwicklung nach der 1-ten Spalte

Definition:

Die Adjunkte $A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist diejenige Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Bemerkung:

Die Vorzeichen erhält man nach der Schachbrettregel:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Die Vorzeichen wechseln sich entlang der Zeilen ab. Sie sind also alternierend

Satz:

Entwicklungssatz für Determinanten:

Sei $A \in K^{n\times n}$ mit $n > 0$ und $A = (a_{ij})$. Dann gilt:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}((-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}))$$

... ist die Entwicklung nach der i-ten Zeile.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}((-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}))$$

... ist die Entwicklung nach der j-ten Spalte.

Bemerkung:

In der Definition der Determinante wird nach der 1-ten Spalte entwickelt.

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der 3-ten Spalte:

$$= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -2 \cdot 16 = -32$$

oder Entwicklung nach der 4-ten Zeile:

$$= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot 16 + 1 \cdot 0 = -32$$

Bemerkung:

> Das Berechnen der Deterinanten durch Entwicklung nach Zeilen/Spalten ist kein effizientes Verfahren, ist bei kleinen oder schwach besetzten Matrizen, also Matrizen mit vielen Nullen, jedoch sinvoll anwendbar.

6.2 Spezielle Determinanten

1. Enthält $A \in K^{n \times n}$ eine Nullzeile oder -spalte, dann gilt $\det(A) = 0$
2. $det(E_n) = 1$
3. $\det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$
   $= a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn}$
4. $\det \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$
5. $\det(A) = \det(A^T)$

6.2.1 Umformungsregeln für Determinanten

- Entsteht B aus A durch Vertauschen zweier Spalten/Zeilen, dann gilt $\det(B) = -\det(A)$
- Stimmen in A zwei Spalten/Zeilen überein, dann gilt $\det(A) = 0$
- Entsteht B aus A durch Multiplikation einer Spalte/Zeile mit $k \in K$, dann gilt $\det(B) = k \cdot \det(A)$
- Entsteht B aus A, indem man zu einer Spalte/Zeile ein Vielfaches einer anderen Spalte/Zeile addiert, dann gilt $\det(B) = \det(A)$
- $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$ für $A \in K^{n \times n}$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ für $A, B \in K^{n \times n}$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} &= -\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= -\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \\
&= -\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= -(-1)\cdot 4 \cdot 4 = 16
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\cdot 12 = 16
\end{aligned}$$

Satz:

Der Multiplikationssatz besagt, dass die Determinante des Produktes von Matrizen gleich dem Produkt der Determinanten der Matrizen ist:

$$\forall A, B \in K^{n\times n} : \det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$$

Sei $A \in K^{n\times n}$ invertierbar, das heißt es existiert ein A^{-1}. Dann gilt:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
A\cdot A^{-1} = E_n \implies& \det(A\cdot A^{-1}) = \det(E_n) \\
\implies& \det(A)\cdot\det(A^{-1}) = 1 \\
\implies& \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung:

Insbesondere gilt: $A \in K^n \times n$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$

Satz:

Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} det(A) \neq 0 &\iff A^{-1} \text{ existiert} \\ &\iff \mathrm{rg}(A) = n \\ &\iff \dim\ker(A) = 0 \\ &\iff \ker(A) = \{0_{K^n}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det(A) \neq 0 &\iff A^{-1} \text{ existiert nicht} \\ &\iff \mathrm{rg}(A) < n \\ &\iff \dim\ker(A) > 0 \\ &\iff \ker(A) \neq \{0_{K^n}\} \end{aligned}$$

Satz:

Sei $A \in K^{n \times n}$ und $\det(A) \neq 0$. Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot ((-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}))$$

wobei A_{ij} aus A durch Streichen der i-ten Spalte und j-ten Zeile entsteht.

7 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

Bemerkung:

Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$.
Es gibt Vektoren $v \in K^n$ und Skalare $k \in K$ mit:

$$A \cdot v = k \cdot v$$

Die Richtung des Vektors v wird durch die Matrizenmultiplikation, also die Abbildung $f : K^n \to K^n$ mit $f(x) = A \cdot x$, nicht verändert.

Beispiel: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ hat folgende Eigenvektoren:

- $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, da $A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot v_1$
- $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, da $A \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot v_2$

Bemerkung:

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto A \cdot v$ lässt sich visuell als Abbildung eines Kreises auf eine Ellipse darstellen.

- Der Kreis hat den Radius $|v|$ mit dem Ursprung als Mittelpunkt
- Die Ellipse ist eine Streckung des Kreises in eine Richtung, berührt diesen also in zwei Punkten

Bemerkung:

In vielen Anwendungen ergeben sich Rechenvorteile, wenn solche Paare (k, v) bekannt sind.

Beispiel: Sei $A \cdot v_1 = k_1 \cdot v_1$ und $A \cdot v_2 = k_2 \cdot v_2$.
Falls v_1 und v_2 linear unabhängig sind, dann gilt auch:

$$\begin{aligned} A \cdot v &= A \cdot (c_1 v_1 + c_2 v_2) \\ &= A \cdot c_1 v_1 + A \cdot c_2 v_2 \\ &= c_1 \cdot A \cdot v_1 + c_2 \cdot A \cdot v_2 \\ &= c_1 \cdot k_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot k_2 \cdot v_2 \\ &= (c_1 \cdot k_1) \cdot v_1 + (c_2 \cdot k_2) \cdot v_2 \end{aligned}$$

Definition:

Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$.
$k \in K$ heißt Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $v \in K^n \backslash \{0_{K^n}\}$ mit

$$A \cdot v = k \cdot v$$

gibt. Der Vektor v heißt dann Eigenvektor von A zum Eigenwert k.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

- $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $k_1 = 4$, denn

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $k_2 = 1$, denn

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist kein Eigenvektor von A, denn

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für alle } k \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:

Reelle MAtrizen können auch komplexe Eigenwerte haben.

Beispiel: Di Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$
hat die Eigenwerte $k_1 = i$ und $k_2 = -1$:

- $A \cdot \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$
- $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} = -i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

7.1 Berechnung von Eigenwerten von $A \in K^{n\times n}$

$$\begin{aligned}
k \text{ ist Eigenwert von A} &\iff \text{Es existiert ein } v \neq 0 \text{ mit } A \cdot v = k \cdot v \\
&\iff \text{Es existiert ein } v \neq 0 \text{ mit} \\
&\qquad A \cdot v - k \cdot v = A \cdot v - k \cdot E_n \cdot v \\
&\qquad\qquad = (A - k \cdot E_n) \cdot v = 0 \\
&\iff |\ker(A - k \cdot E_n)| > 0 \\
&\iff \operatorname{rg}(A - k \cdot E_n) < n \\
&\iff (A - k \cdot E_n) \text{ existiert nicht} \\
&\iff \det(A - k \cdot E_n) = 0
\end{aligned}$$

Definition:

> Chi = $\chi_A(k) := \det(A - k \cdot E_n)$ ist eine Polynomfunktion in k.
>
> Zur Ermittlung der Eigenwerte von A berechnet man die Nullstellen von $\chi_A(k)$.
>
> $\chi_A(k)$ heißt charakteristisches Polynom von A.

Beispiel: $\chi_A(k) = (1-k)^3 \cdot (k-2) = 0$ fpr $A \in K^{4\times 4}$.
Die Eigenwerte lassen sich als Nullstellen ablesen:

- Der Eigenwert 1 hat die Vielfachheit 3: $K_1 = k_2 = k_3 = 1$
- Der Eigenwert 2 hat die Vielfachheit 1 (einfacher Eigenwert): $k_4 = 2$

Beispiel:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

  $0 = \det(A - k \cdot E_2) = \det \begin{pmatrix} 1-k & 3 \\ 0 & 4-k \end{pmatrix} = (1-k)\cdot(4-k) - 3 \cdot 0$

  $k_1 = 1$ und $k_2 = 4$ sind die Eigenwerte von A.
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

  $0 = \det(A - k \cdot E_2) = \det \begin{pmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} = k^2 + 1$

  $\implies k^2 = -1$
  $\implies k_1 = i$ und $k_2 = -i$ sind die Eigenwerte von A.

Bemerkung:

> Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$.
>
> - A hat höchstens n Eigenwerte.
> - Gilt $K = \mathbb{C}$, dann hat A genau n Eigenwerte, wenn man jeden Eigenwert mit seiner Vielfachheit zählt.

Bemerkung:

> Sind $k_1, \dots, k_n$ die Eigenwerte von $A \in K^{n\times n}$, dann gilt:
>
> - $\det(A) = k_1 \cdot \dots \cdot k_n$
> - $\mathrm{Spur}(A) = a_{11} + \dots + a_{nn} = k_1 + \dots + k_n$
> - $A = A^T$ und $K = \mathbb{R} \implies$ Alle Eigenwerte von A sind reell

7.2 Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenvektor k

Bemerkung:

k ist der Eigenvektor von A $\iff \exists v \neq 0_{K^n}$ mit $(A - k \cdot E_n) \cdot v = 0$
Zu berechnen ist der Kern von $A - k \cdot E_n$.

Definition:

Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$.
Ist $k \in K$ ein Eigenwert von A, dann nennt man $\ker(A - k \cdot E_n)$ den Eigenraum $\mathrm{Eig}_k(A)$ von A zum Eigenwert k.

Bemerkung:

Der Eigenraum von A zu k ist ein Untervektorraum von K^n. Der Eigenraum besteht aus den Eigenvektoren von A zu k und dem Nullvektor. Der Nullvektor ist kein Eigenvektor.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

- $k_1 = 4$: $\mathrm{Eig}_4(A) = \ker(A - 4 \cdot E_n)$
  $\begin{pmatrix} 1-4 & 3 \\ 0 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  spezielle Lösung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Dimension von $\mathrm{Eig}_4(A) : 2 - 1 = 1$
  $\Longrightarrow \mathrm{Eig}_4(A) = \left\langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \right\rangle$
- $k_2 = 1$: $\mathrm{Eig}_1(A) = \ker(A - 1 \cdot E_n)$
  $\begin{pmatrix} 1-1 & 3 \\ 0 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  spezielle Lösung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Dimension von $\mathrm{Eig}_1(A) : 2 - 1 = 1$
  $\Longrightarrow \mathrm{Eig}_1(A) = \left\langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \} \right\rangle$

Satz:

Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$.
$(k_1, \ldots, k_t)$ seien paarweise verschiedene Eigenwerte von A.
Sind $v_1, \ldots, v_t$ die zugehörigen Eigenvektoren,

$$\text{d.h. } A \cdot v_i = k_i \cdot v_i \text{ für } i = 1, \ldots, t,$$

dann sind $v_1, \ldots, v_t$ linear unabhängige Vektoren.

Beweis:

(für $t = 2$:)

Sei $c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 = 0_{K^n}$. Zu zeigen: $c_1 = c_2 = 0$

- Gleichung mit k multiplizieren:
$$\begin{aligned} & c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 &&= 0_{K^n} \\ \Longrightarrow \quad & c_1 \cdot k_1 v_1 + c_2 \cdot k_1 v_2 &&= 0_{K^n} \\ \Longrightarrow \quad & c_1 \cdot A v_1 + c_2 \cdot k_1 v_2 &&= 0_{K^n} \text{ (i)} \end{aligned}$$
- Gleichung mit A multiplizieren:
$$\begin{aligned} & A \cdot (c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2) &&= A \cdot 0_{K^n} \\ \Longrightarrow \quad & c_1 \cdot A v_1 + c_2 \cdot A v_2 &&= 0_{K^n} \\ \Longrightarrow \quad & c_1 \cdot A v_1 + c_2 \cdot k_2 v_2 &&= 0_{K^n} \text{ (ii)} \end{aligned}$$

LGS (i), (ii) lösen:

$$\begin{aligned} c_2 \cdot k_1 v_2 = c_2 \cdot k_2 v_2 &\Longrightarrow c_2 \cdot k_1 v_2 - c_2 \cdot k_2 v_2 = 0_{K^n} \\ &\Longrightarrow c_2 \cdot (k_1 - k_2) \cdot v_2 = 0_{K^n} \\ &\Longrightarrow c_2 = 0, \text{ da } k_1 - k_2 \neq 0 \text{ und } v_2 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 = 0_{K^n} \text{ und } c_2 = 0 &\Longrightarrow c_1 \cdot v_1 + 0_{K^n} \cdot v_2 = 0_{K^n} \\ &\Longrightarrow c_1 \cdot v_1 = 0_{K^n} \\ &\Longrightarrow c_1 = 0, \text{ da } v_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Also sind v_1, v_2 linear unabhängig.

$\square$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $1, 2, -1$

- $\mathrm{Eig}_1(A) = \left\langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \} \right\rangle$
- $\mathrm{Eig}_2(A) = \left\langle \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \} \right\rangle$
- $\mathrm{Eig}_{-1}(A) = \left\langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \right\rangle$

$\Longrightarrow \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$

Beispiel: Gesucht sind die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 = \chi_A(k) &= \det \begin{pmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -k & 1+k & 1+k \\ 1 & -1-k & 0 \\ 1 & 0 & -1-k \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 2-k & 0 & 0 \\ 1 & -1-k & 0 \\ 1 & 0 & -1-k \end{pmatrix} \\ &= (2-k) \cdot (-1-k)^2 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind $k_1 = 2$ und $k_2 = k_3 = -1$.

- $\mathrm{Eig}_2(A) = \ker(A - 2E_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \right\rangle$
- $\mathrm{Eig}_{-1}(A) = \ker(A + E_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \} \right\rangle$

Für diese Matrix A gilt:

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \text{ ist eine Basis des } \mathbb{R}^3$$

Bemerkung:

- Es gibt Matrizen $A \in K^{n \times n}$, so dass K^n eine Basis hat, die aus Eigenvektoren von A besteht.
  Eine solche Basis wird Eigenvektorbasis (bezüglich A) des K^n genannt.
- Nicht alle Matrizen habendiese Eigenschaft,
  z.B hat $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2}$ die Eigenwerte $k_1 = k_2 = 1$
  und $\mathrm{Eig}_1(A) = \left\langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \} \right\rangle$
  $\mathbb{R}^2$ hat keine Eigenvektorbasis bezüglich dieser Matrix A.

7.3 Diagonalisierbarkeit von Matrizen

Definition:

Sei $A \in K^{n \times n}$.
A heißt diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix S mit

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D$$

gibt, so dass D eine Diagonalmatrix ist.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar, denn für $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Satz:

Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. A ist diagonalisierbar
2. K^n hat eine Eigenvektorbasis bezüglich A
3. A hat n linear unabhängige Eigenvektoren

Beweis:

(von (2) $\implies$ (1)):
Es seine $v_1, \ldots, v_n$ die Elemente einer Eigenvektorbasis bezüglich A des K^n. Dann sind $V_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.
Sei $s := (v_1, \ldots, v_n)$. S^-1 existiert, da $\mathrm{rg}(S) = n$.

$$\begin{aligned} A \cdot S = \cdot(v_1, \ldots, v_n) &= (Av_1, \ldots, Av_n) \\ &= (kv_1, \ldots, kv_n) \\ &= \begin{pmatrix} k_1 v_{11} & \ldots & k_n v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 v_{n1} & \ldots & k_n v_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 1 & \ldots & v_1 n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n 1 & \ldots & v_n n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix} \\ &= S \cdot D \end{aligned}$$

$\implies S^{-1} \cdot A \cdot S = D$

$\square$

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{S} = (A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, A\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, A\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix})$$
$$= (2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, -1\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, -1\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix})$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{S}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}}_{D}$$

Bemerkung:

Es besteht kein Zusammenhang zwischen Diagonalisierbarkeit und Invertierbarkeit von Matrizen:

- $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar, aber nicht invertierbar.
- $A_2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ ist invertierbar, aber nicht diagonalisierbar.

7.4 Anwendungen und Beispiele

7.4.1 Schnelles Potenzieren für diagonalisierbare Matrizen A

Gesucht ist A^k

1. Diagonalisieren von A: $S^{-1}\cdot A\cdot S = D$
2. Potenzieren der DiagonalMatrix: $D = \begin{pmatrix}d_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n\end{pmatrix}$

$$D^k = \begin{pmatrix}k_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & k_n^k\end{pmatrix}$$

3. Berechnung von A^k in der Form:

$$\begin{aligned}A^k = (s\cdot D\cdot S^{-1})^k &= (S\cdot D\cdot S^{-1})\cdot S\cdot\dots\cdot S^{-1}\cdot(S\cdot D\cdot S^{-1})\\ &= S\cdot D\cdot(S^{-1}\cdot S)\cdot\dots\cdot(S^{-1}\cdot S)\cdot D\cdot S^{-1}\\ &= S\cdot D^k\cdot S^{-1}\end{aligned}$$

7.4.2 Langzeitverhalten diskreter dynamischer Systeme

Eine Zählung ergibt: $W_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

Entwicklung der Population in den folgenden Jahren:

$$w_{k+1} = A \cdot w_k \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,33 \\ 0,18 & 0 & 0 \\ 0 & 0,71 & 0,94 \end{pmatrix}, w_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

- A hat genau 3 Eigenwerte k_1, k_2, k_3
  Für zugehörige Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 gilt: $A \cdot v_i = k_i \cdot v_i$ für $i = 1, 2, 3$
- Darstellung vin w_0 als Linearkombination:

$$w_0 = r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 \text{ mit geeigneten } r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$$

-

$$\begin{aligned} w_1 = A \cdot w_0 &= A \cdot (r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3) \\ &= r_1 \cdot A v_1 + r_2 \cdot A v_2 + r_3 \cdot A v_3 \\ &= r_1 k_1 v_1 + r_2 k_2 v_2 + r_3 k_3 v_3 \\ w_2 = A \cdot w_1 &= A \cdot (r_1 k_1 v_1 + r_2 k_2 v_2 + r_3 k_3 v_3) \\ &= r_1 k_1 \cdot A v_1 + r_2 k_2 \cdot A v_2 + r_3 k_3 \cdot A v_3 \\ &= r_1 k_1^2 v_1 + r_2 k_2^2 v_2 + r_3 k_3^2 v_3 \\ &\vdots \\ w_n = A \cdot w_{n-1} &= r_1 k_1^n v_1 + r_2 k_2^n v_2 + r_3 k_3^n v_3 \end{aligned}$$

7.4.3 Explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n + f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} f_{n-(n-1)} \\ f_{n-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

  $k_1 + k_2 = 1$ und $k_1 \cdot k_2 = -1 \implies k_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

- Eigenvektorbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich A: $\{\begin{pmatrix} k_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

  Man kann den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination dieser Vektoren darstellen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2k_1 - 1} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2k_1 - 1} \begin{pmatrix} k_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f(n) \end{pmatrix} &= A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= A^n \cdot (\frac{1}{2k_1 - 1} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2k_1 - 1} \cdot \begin{pmatrix} k_2 \\ 1 \end{pmatrix}) \\
&= \frac{1}{2k_1 - 1} \cdot (A^n \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ 1 \end{pmatrix} - A^n \cdot \begin{pmatrix} k_2 \\ 1 \end{pmatrix}) \\
&= \frac{1}{2k_1 - 1} \cdot (k_1^n \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ 1 \end{pmatrix} - k - 2^n \cdot \begin{pmatrix} k_2 \\ 1 \end{pmatrix}) \\
\implies f_n &= \frac{1}{2k_1 - 1} \cdot (k_1^n - k_2^n) \\
\implies f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot ((\frac{1 + \sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1 - \sqrt{5}}{2})^n)(n \in \mathbb{N}, n \geq 0)
\end{aligned}$$

8 Euklidische Vektorräume

Definition:

Das SkalarProdukt in $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit:

$$u \bullet v = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 \cdot v_1 + \cdots + u_n \cdot v_n$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$

Bemerkung:

$u \bullet v = u^T \cdot v$, wobei bei $u \cdot v$ das SkalarProdukt und bei $u^T \cdot v$ die Matrixmultiplikation gemeint ist.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = (0\ 1\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Eigenschaften des Skalarprodukts:

1. ist bilinear:
   $(u_1 + u_2) \bullet v = u_1 \bullet v + u_2 \bullet v$ und $(ru) \bullet v = r(u \bullet v)$
   $u \bullet (v_1 + v_2) = u \bullet v_1 + u \bullet v_2$ und $u \bullet (rv) = r(u \bullet v)$
   für alle $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$
2. ist symmetrisch:
   $u \bullet v = v \bullet u$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$
3. ist positiv definit:
   $u \bullet u \geq 0$ für alle $u \in R^n$ und $u \bullet u = 0 \iff u = 0$

Definition:

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR.
Jede Abbildung $\bullet : V \times V \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften 1-3 wird ein SkalarProdukt auf V genannt.
Ist $\bullet$ ein Skalarprodukt, dann nennt man $(V; \cdot)$ einen euklidischen Vektorraum.

Definition:

Sei V der VR der reellen Polynomfunktionen.
Die Verknüpfung $\bullet$ mit

$$p(x) \bullet q(x) := \int_{-1}^{1} p(x)q(x) \cdot dx$$

ist ein Skalarprodukt(, da es die drei eigenschaften erfüllt).
Der Vektorraum $(V; \bullet)$ ist euklidisch.

Bemerkung:

Sei $(V;\bullet)$ ein euklidischer $\mathbb{R}$-VR und 0_V sein Nulllvektor. Dann gilt:

$$v \bullet 0_V = 0_{\mathbb{R}} \text{ für alle } v \in V$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\underbrace{v \bullet 0_V}_{\in\mathbb{R}} &= v \bullet (0_V + 0_V) \\
\Longrightarrow 0_R + (v \bullet 0_V) &= v \bullet 0_V + v \bullet 0_V \\
\Longrightarrow 0_R &= v \bullet 0_V
\end{aligned}$$

$\square$

8.1 Längenmessung in euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen

Definition:

Die Norm $||v||$ eines Vektors ist durch $||v|| := \sqrt{v \bullet v}$ definiert. Jeder Vektor v mit der Norm 1 wird ein Einheitsvektor genannt.

Beispiel: $|| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} || = \sqrt{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Beispiel: Sei $p(x) = x$.
$||p(x)|| = ||x|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x \cdot x \, dx} = \sqrt{[\frac{x^3}{3}]_{-1}^{1}} = \frac{1}{3} - (-\frac{1}{3}) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

8.2 Winkelmessung in euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen

Bemerkung:

Für $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ folgt $\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||}$ aus dem Kosinussatz.
diese Eigenschaft wird auf beliebige euklidische $\mathbb{R}$-VR mit einem Skalarprodukt $\cdot$ übertragen.

Definition:

Seien $u, v \in V \backslash \{0_V\}$.
Das eindeutig bestimmte $\alpha \in [0, \pi]$ mit $\cos\alpha = \frac{u \bullet v}{||u|| \cdot ||v||}$ heißt Winkel zwischen u und v.

Definition:

Sei $(V;\bullet)$ ein euklidischer $\mathbb{R}$-VR.
Vektoren $u, v \in V\backslash\{0_V\}$ heißen orthogonal, wenn

$$u \bullet v = 0_{\mathbb{R}}$$

gilt.
Bezeichnung: $u \perp v$

Beispiel:

- $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} = 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 = 0$
- $x \perp x^2$, denn $\int_{-1}^{1} x \cdot x^2 \, dx = [\frac{x^4}{4}]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

Bemerkung:

Der Satz des Pythagoras lässt sich für beliebige euklidische $\mathbb{R}$-VR verallgemeinern:

$$\forall u, v \in V : ||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 \iff u \perp v$$

Beispiel: $x \perp x^2 \implies ||x||^2 + ||x^2||^2 = ||x + x^2||^2$ gilt laut dem Satz des Pythagoras.

Satz:

Sind $u_1, \ldots, u_t$ paarweise orthogonale Vektoren, dann sind $u_1, \ldots, u_t$ linear unabhängig.

Beweis:

Sei $r_1 \cdot u_1 + \cdots + r_t \cdot u_t = 0_V$

$\implies \underbrace{r_1 u_1 \bullet u_i}_{0_{\mathbb{R}}} + \cdots + \underbrace{r_i u_i \bullet u_i}_{\in \mathbb{R}\backslash\{0_{\mathbb{R}}\}} + \cdots + \underbrace{r_t u_t \bullet u_i}_{0_{\mathbb{R}}} = \underbrace{0_V \bullet u_i}_{0_{\mathbb{R}}}$

$\implies r_i \underbrace{(u_i \bullet u_1)}_{\in \mathbb{R}\backslash\{0\}} = 0_{\mathbb{R}}$

$\implies r_i = 0_{\mathbb{R}}$ für $i = 1, \ldots, t$; d.h. $u_1, \ldots, u_t$ sind linear unabhängig.

$\square$

Beispiel: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ sind drei orthogonale Vektoren, denn:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$$

Diese drei Vektoren sind linear unabhängig, denn:

$$r_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + r_3 + \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\implies r_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r_2 \cdot 0 + r_2 \cdot 0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\implies r_1 \cdot 3 = 3r_1 = 0 \implies r_1 = 0$

Analog erhält man $r_2, r_3 = 0$

8.2.1 Orthogonalräume

Definition:

Sei $(v; \cdot)$ ein euklidischer $\mathbb{R}$-VR und U ein UVR von V.

$$U^\perp := \{v \mid v \in V, u \bullet v = 0_\mathbb{R} \text{ für alle } u \in U\}$$

heißt Orthogonalraum von U in V.

Bemerkung:

$U^\perp \subseteq V$ ist ein UVR von V, denn:

- $0_V \in U^\perp$
- $v_1, v_2 \in U^\perp \implies v_1 + v_2 \in U^\perp$
- $v \in U^\perp, r \in \mathbb{R} \implies r \cdot v \in U^\perp$

Bemerkung:

$U \cap U^\perp = \{0_V\}$ und $(U^\perp)^\perp = U$

Bemerkung:

Sei $(V; \cdot)$ ein euklidischer $\mathbb{R}$-VR und $U \subseteq V$ ein UVR. Dann gilt:

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

Bemerkung:

$U = \langle u_1, \dots, u_t \rangle \implies U^\perp = \{v \mid v \in V, u_1 \bullet v = \dots = u_t \bullet v = 0_\mathbb{R}\}$,
denn:

$$\begin{aligned}
u \in U \implies \exists k_1, \dots, k_t \in \mathbb{R}: \quad u =& k_1 u_1 + \dots + k_t u_t \\
\implies \quad u \bullet v =& (k_1 u_1 + \dots + k_t u_t) \bullet v \\
\implies \quad =& k_1 u_1 \bullet v + \dots + k_t u_t \bullet v \\
\implies \quad =& k_1 \bullet 0_\mathbb{R} + \dots + k_t \bullet 0_\mathbb{R} \\
\implies \quad =& 0_\mathbb{R} + \dots + 0_\mathbb{R} = 0_\mathbb{R}
\end{aligned}$$

8.2.2 Berechnung des Orthogonalraums

Gegeben: $U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

Gesucht: Orthogonalraum $U^\perp$

$U^\perp$ enthält alle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_\mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_\mathbb{R}$$

$\implies$ zu lösen ist das homogene LGS mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Es gilt also: $U^\perp = \ker(A)$

8.2.3 Orthogonalitätsregeln von Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- $\operatorname{row}(A)^\perp = \ker(A)$
- $\operatorname{row}(A^\perp)^\perp = \ker(A)$
- $\operatorname{col}(A)^\perp = \ker(A^\perp)$

8.3 Orthogonalbasen

Definition:

Eine Basis $\{b_1, \dots, b_t\}$ eines UVR U von $\mathbb{R}^n$ heißt eine Orthogonalbasis, wenn

$$\forall i, j \in \{1, \dots, t\}, i \neq j : b_i \bullet b_j = 0_{\mathbb{R}}$$

Beispiel:

- $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ist eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$.
- $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ist keine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$.

Satz:

Ist $\{b_1, \dots, b_t\}$ eine Orthogonalbasis von $\langle b_1, \dots, b_t \rangle$ und $v \in \langle b_1, \dots, b_t \rangle$, dann gilt:

$$v = \frac{v \bullet b_1}{b_1 \bullet b_1} \cdot b_1 + \dots + \frac{v \bullet b_t}{b_t \bullet b_t} \cdot b_t$$

Beweis:

Sei v als Linearkombination $v = r_1 b_1, \dots, r_t b_t$. Multipliziere mit b_i für $i \in \{1, \dots, t\}$.

$$\begin{aligned} v \bullet b_i &= r_1 b_1 \bullet b_1 + \dots + r_i b_i \bullet b_i + \dots + r_t b_t \bullet b_i \\ &= r_1(b_1 \bullet b_i) + \dots + r_i(b_i \bullet b_i) + \dots + r_t(b_t \bullet b_i) \\ &= r_i(b_i \bullet b_i) \end{aligned}$$

$\implies \forall i \in \{1, \dots, t\} : r_i = \frac{v \bullet b_i}{b_1 \bullet b_i}$.

$\square$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$r_1 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = 4,\ r_2 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = -4,\ r_3 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = 15$$

8.3.1 Orthonormalbasen

Definition:

> Eine Orthogornalbasis $\{b_1, \ldots, b_t\}$ heißt eine Orthonormalbasis, wenn $||b_i|| = 1$ für $i = 1, \ldots, t$ gilt.

Bemerkung:

> $||b_i|| = \sqrt{b_i \bullet b_i} = 1 \iff b_i \bullet b_i = 1$

Bemerkung:

> Ist $\{b_1, \ldots, b_t\}$ eine Orthogonalbasis, dann ist $\{\frac{b_1}{||b_1||}, \ldots, \frac{b_t}{||b_t||}\}$ eine Orthonormalbasis.

Beispiel: Orthogonalbasis $\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$ des $\mathbb{R}^3$

$\Longrightarrow$ Orthonormalbasis $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$ des $\mathbb{R}^3$

8.3.2 Orthogonale Projektion

Gegeben:

- euklidischer $\mathbb{R}$-VR $(V; \bullet)$
- UVR $U = \langle u \rangle$ von V
- Orthogonalraum $U^\perp$ von U in V
- $v \in V$

Gesucht: $\hat{v} \in U, w \in U^\perp$ mit $v = \hat{v} + w$

Ansatz: $\hat{v} = ru$ mit $r \in \mathbb{R}$

$v = ru + w \implies v \bullet u = (ru + w) \bullet u = r(u \bullet u) + \underbrace{w \bullet u}_{0_\mathbb{R}} \implies r = \frac{v \bullet u}{u \bullet u}$

Für $\hat{v} = \frac{v \bullet u}{u \bullet u} \cdot u$ und $w = v - \frac{v \bullet u}{u \bullet u} \cdot u$ gilt $v = \hat{v} + w$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt $\bullet$

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

<u>Gesucht:</u> $\hat{v} \in \langle u \rangle, w \in \langle u \rangle^\perp$ mit $v = \hat{v} + w$

$$\hat{v} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \langle u \rangle$$

$$w = v - \hat{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \in \langle u \rangle^\perp$$

Satz:

Sei U ein UVR des $\mathbb{R}^n$. Dann ist jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ in der Form $v = \hat{v} + w$ mit $v \in \langle U \rangle$ und $w \in \langle u \rangle^\perp$ darstellbar.

Bemerkung:

Kennt man eine Orthogonalbasis $\{b_1, \dots b_t\}$ von U, dann kann man $\hat{v}$ wie folgt berechnen:

$$\hat{v} = \frac{v \bullet b_1}{b_1 \bullet b_1} \cdot b_1 + \cdots + \frac{v \bullet b_t}{b_t \bullet b_t} \cdot b_t$$

Bemerkung:

Gilt $v \in V$, dann ist $\hat{v} = v$ und $w = 0_{\mathbb{R}^n}$

Beweis:

Sei $\{b_1, \dots, b_t\}$ eine Orthogonalbasis des UVR U von $\mathbb{R}^n$ und sei $\hat{v} = \frac{v \bullet b_1}{b_1 \bullet b_1} \cdot b_1 + \cdots + \frac{v \bullet b_t}{b_t \bullet b_t} \cdot b_t$

1. Offensichtlich gilt $v \in \langle b_1, \dots, b_t \rangle$.
2.

$$\begin{aligned} w \bullet b_i &= v \bullet b_i - \hat{v} \bullet b_i \\ &= v \bullet b_i - \left(\frac{v \bullet b_1}{b_1 \bullet b_1} b_1 + ... + \frac{v \bullet b_i}{b_i \bullet b_i} b_i + ... + \frac{v \bullet b_t}{b_t \bullet b_t} b_t\right) \bullet b_i \\ &= v \bullet b_i - (0_{\mathbb{R}} + \cdots + \frac{v \bullet b_i}{b_i \bullet b_i} b_i \bullet b_i + ... + 0_{\mathbb{R}}) \\ &= 0_{\mathbb{R}} \implies w \in \langle \{b_1, \dots, b_t\} \rangle^\perp = U^\perp \end{aligned}$$

□

Für $U = \langle b_1, \dots, b_t \rangle$ und $\hat{v} = \frac{v \bullet b_1}{b_1 \bullet b_1} \cdot b_1 + \cdots + \frac{v \bullet b_t}{b_t \bullet b_t} \cdot b_t$ schreibt man kurz:

$$\hat{v} = \mathrm{proj}_U(v)$$

Beispiel: $\mathrm{proj}_{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

8.3.3 Gram-Schmidt-Verfahren zur Konstruktion von Orthogonalbasen

Satz:

Sei $\{u_1, \ldots, u_t\}$ eine Basis eines UVR U des $\mathbb{R}^n$.
Dann kann eine Orthogonalbasis $\{b_1, \ldots, b_t\}$ von U folgendermaßen konstruiert werden:

$$\begin{aligned} b_1 &:= u_1 \\ b_2 &:= u_2 - \operatorname{proj}_{\langle b_1 \rangle} u_2 \\ b_3 &:= u_3 - \operatorname{proj}_{\langle b_1, b_2 \rangle} u_3 \\ &\vdots \\ b_t &:= u_t - \operatorname{proj}_{\langle b_1, \ldots, b_{t-1} \rangle} u_t \end{aligned}$$

Kurz:

$$\begin{aligned} b_1 &:= u_1 \\ b_{i+1} &:= u_{i+1} - \operatorname{proj}_{\langle b_1, \ldots, b_i \rangle} u_{i+1} \text{ für } i = 1, \ldots, t-1 \end{aligned}$$

Beispiel: $U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

- $\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$
- $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}$
- $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \boxed{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}$

$\Longrightarrow \{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \}$ ist eine Orthogonalbasis von U

Bemerkung:

Wendet man das Verfahren auf einen Vektor an, der linear abhängig von den bereits behandelten Vektoren ist, so erhält man den Nullvektor.