

Lineare Algebra

Daniel

October 2024

Contents

1	Der Körper der Komplexen Zahlen	3
	Einführung	3
	1.0.1 Konstruktion der komplexen Zahlen	3
1.1	Komplexe Zahlen in arithmetischer Schreibweise	4
	1.1.1 Rechenregeln	4
	1.1.2 Rechnen mit komplexen Zahlen	5
1.2	Konjugiert komplexe Zahlen	5
1.3	GAUSS'sche Zahlenebene, kartesische Koordinaten, Polarkoordinaten	6
1.4	Rechnen mit komplexen Zahlen in EULERScher Darstellung	7
2	Lineare Gleichungssysteme und Matrizen über einen Körper K	8
2.1	Lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme	8
	2.1.1 Lösung eines linearen Gleichungssystems	9
2.2	Matrizen	9
	2.2.1 Spezielle Matrizen	10
	2.2.2 Rechnen mit Matrizen	11
	2.2.3 Rechenoperationen für Matrizen	12
2.3	Matrixschreibweise für LGS	14
2.4	Lösungsmenge von LGS $A \mid b$	14
	2.4.1 Zeilenstufenform von LGS	16
2.5	Elementare Zeilenumformungen	17
2.6	Lösen von LGS nach Gauss/Jordan	18
3	Vektorräume über einem Körper K	19

3.1	Vektorraumaxiome	20
3.1.1	Rechenregeln für VR	21
3.2	Untervektorräume	21
3.3	Spannräume	23
3.4	Erzeugendensysteme	24
3.5	Lineare Unabhängigkeit	25
3.6	Basis und Dimension von Vektorräumen	27
3.6.1	Dimension eines VR	28
4	Kern und Rang von Matrizen	29
4.1	Kern von Matrizen	29
4.1.1	Kern eines homogenen LGS	29
4.1.2	Kern eines inhomogenen LGS	30
4.2	Affine Teilräume	30
4.3	Rang von Matrizen	31
4.3.1	Spaltenraum	31
4.3.2	Zeilenraum	32
4.3.3	Rang einer Matrix	32
4.3.4	Rangberechnung für Matrizen	33
4.3.5	Dimensionsformel für Matrizen	34
4.4	Lösbarkeitskriterium für LGS	34
4.5	Reguläre Matrizen	34
4.5.1	Paralleles Lösen	36
4.5.2	Äquivalente Aussagen für invertierbare Matrizen	36
5	Lineare Abbildungen	37
5.1	Eigenschaften linearer Abbildungen	37
5.1.1	Das Bild linearer Abbildungen	39
5.1.2	Dimensionsformel für lineare Abbildungen	39
5.1.3	Abbildungsmatrizen	41
5.1.4	Darstellungsmatrizen	42
6	Determinanten	44
6.1	Eigenschaften von Determinanten	44
6.1.1	Berechnung der Determinante für $n = 2$	44
6.1.2	Berechnung der Determinante für $n = 3$	45

1 Der Körper der Komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen haben viele Eigenschaften mit den reellen Zahlen gemeinsam besitzen darüber hinaus aber weitere Vorteilhaftige Eigenschaften, die sich für die modernen Ingenieurwissenschaften als nützlich erwiesen haben.

In der Linearen Algebra werden komplexe Zahlen bei der Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren von Matrizen benötigt (mit zahlreichen Anwendungen). In der Numerischen Mathematik werden die Eigenschaften komplexer Zahlen benötigt, um effizient mit sehr großen natürlichen Zahlen rechnen zu können.

Die komplexen Zahlen bilden als algebraische Struktur einen Körper. In der gesamten Linearen Algebra werden ihre Eigenschaften für das Rechnen in Körpern ausgenutzt.

1.0.1 Konstruktion der komplexen Zahlen

Aus der Schule bekannte Zahlenbereiche:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Wir konstruieren einen Zahlenbereich \mathbb{C} mit folgenden Eigenschaften:

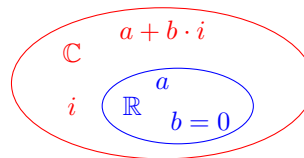
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- $x^2 = -1$ ist in \mathbb{C} lösbar
- Es gelten die Rechengesetze aus \mathbb{R}
- \mathbb{C} ist so klein wie möglich

Definition:

i mit $i^2 = -1$ heißt **imaginäre Einheit**

Bemerkung:

- $i \in \mathbb{C}$
- $a, b \in \mathbb{R}$



Definition:

$\mathbb{C} := \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge der komplexen Zahlen. Für $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$ heißt $Re(z) := a$ der Realteil von z und $Im(z) := b$ heißt der Imaginärteil von z

1.1 Komplexe Zahlen in arithmetischer Schreibweise

1.1.1 Rechenregeln

Der Körper der komplexen Zahlen ist $(\mathbb{C}; +, *)$.

Die komplexen Zahlen haben folgende Eigenschaften:

- $+$ ist assoziativ:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \text{für alle } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

- $+$ ist kommutativ:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

- $+$ hat ein neutrales Element 0:

$$z + 0 = 0 + z = z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

- Jedes Element $z \in \mathbb{C}$ hat ein Inverses $-z$ bezüglich $+$:

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

- $*$ ist assoziativ:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad \text{für alle } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

- $*$ ist kommutativ:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

- $+$ hat ein neutrales Element 1:

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

- Jedes Element $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat ein Inverses z^{-1} bezüglich $*$:

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$$

- $*$ ist distributiv bezüglich $+$:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \quad \text{für alle } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

1.1.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b\}$ ist die Menge der komplexen Zahlen

- Addieren:

$$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$$

- Subtrahieren

$$(a + bi) - (c + di) := (a - c) + (b - d)i$$

- Multiplizieren

$$(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- Dividieren

$$\frac{a + bi}{c + di} := \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \quad \text{für } c + di \neq 0$$

Um komplexe Zahlen in arithmetischer Form einfacher zu dividieren wird ein "Standardtrick" verwendet:

$$\begin{aligned}(1 + 2i) : (3 - 4i) &= \frac{(1+2i)}{(3-4i)} \\&= \frac{(1+2i)}{(3-4i)} \cdot \textcolor{red}{1} \\&= \frac{(1+2i)}{(3-4i)} \cdot \frac{\textcolor{red}{3+4i}}{\textcolor{red}{3+4i}} \\&= \frac{(1+2i) \cdot (3+4i)}{(3-4i) \cdot (3+4i)} \\&= \frac{-5+10i}{25} \\&= -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

1.2 Konjugiert komplexe Zahlen

Definition:

Sei $z := a + bi \in \mathbb{C}$. Dann nennt man $\bar{z} := a - bi$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Bemerkung:

Man dividiert durch eine komplexe Zahl $z \neq 0$, indem man mit der konjugiert komplexen Zahl erweitert.

Bemerkung:

Sei $a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dann gilt:

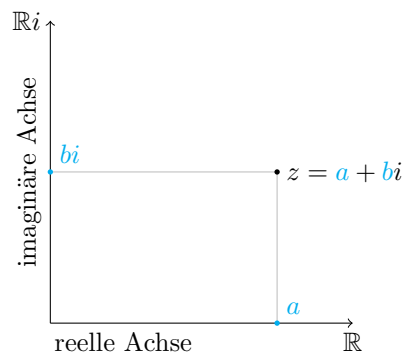
$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{\textcolor{red}{a - bi}}{\textcolor{red}{a - bi}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

1.3 GAUSS'sche Zahlenebene, kartesische Koordinaten, Polarkoordinaten

Bemerkung:

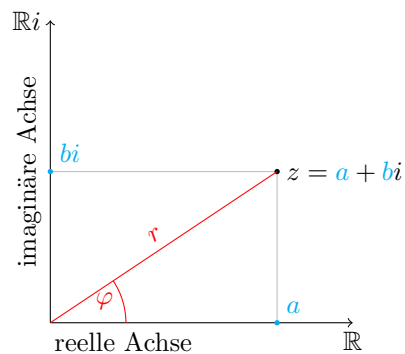
Komplexe Zahlen z kann man in der Form $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) darstellen. Diese Darstellung nennt man **arithmetische Darstellung** von z . Komplexe Zahlen kann man in arithmetischer Darstellung leicht addieren, sowie subtrahieren und aufwendiger multiplizieren, sowie dividieren.

Um komplexe Zahlen leicht multiplizieren und dividieren zu können werden noch die trigonometrische Darstellung und die EULERSche Darstellung Komplexer Zahlen eingeführt.



$z = a + bi$ hat die
kartesischen Koordinaten
(a, b)

a ist der Realteil von z
 b ist der Imaginärteil von z



$z = a + bi$ hat die
Polarkoordinaten
(r, φ)

r ist der Betrag von z : $|z| := r = \sqrt{a^2 + b^2}$

φ ist das Argument von z : $\text{Arg}(z) := \varphi$ mit $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$,
 $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$

Umrechnung

kartesischen Koordinaten
(a, b)

\longleftrightarrow

Polarkoordinaten
(r, φ)

- $(r, \varphi) \rightarrow (a, b)$: $a = r \cdot \cos(\varphi)$
 $b = r \cdot \sin(\varphi)$
- $(a, b) \rightarrow (r, \varphi)$: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
Durch $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$ UND $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$ ist $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig bestimmt.

Es genügt nicht, zur Bestimmung von φ nur eine dieser beiden Gleichungen zu betrachten.

Darstellung komplexer Zahlen $z \in \mathbb{C}$

- arithmetische Darstellung:
(kartesische Koordinaten) $z = a + bi$
- trigonometrische Darstellung:
(Polarkoordinaten) $z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$
- EULERSche Darstellung:
(Polarkoordinaten) $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$

1.4 Rechnen mit komplexen Zahlen in EULERScher Darstellung

Sei $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$

- Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i\varphi_1 + i\varphi_2}$

$$\implies \boxed{r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}}$$

- Division: $z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i\varphi_1 - i\varphi_2}$

$$\implies \boxed{\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

2 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen über einen Körper K

Betrachtet werden in diesem Kapitel ausschließlich die folgenden Körper:

- Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}; +, \cdot)$
- Körper der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}; +, \cdot)$
- endlicher Körper $(GF(2); +, \cdot)$ mit $GF(2) = \{0, 1\}$ und

Galois-Feld	$+$	0	1	\cdot	0	1
	0	0	1	0	0	0
	1	1	0	1	0	1

2.1 Lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme

Definition:

Sei K ein Körper, so heißt $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$ (mit $n \in \mathbb{N}$) eine **lineare Gleichung** in den Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n über K .

Kurz:

$$\sum_{j=1}^n a_j \cdot x_j = b$$

b wird als Absolutglied bezeichnet

Definition:

Sei K ein Körper, so heißt $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n = b_i$ (mit $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, 2, 3, \dots, m$) **Lineares Gleichungssystem (LGS)** in den Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n über K .

Kurz:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i$$

Ein LGS ist also die Zusammenfassung **mehrerer** linearer Gleichungen

2.1.1 Lösung eines linearen Gleichungssystems

Definition:

Das n -Tupel (l_1, l_2, \dots, l_n) mit $l_1, l_2, \dots, l_n \in K$ heißt **Lösung** des LGS, wenn sich beim Einsetzen eine wahre Aussage ergibt, d.h. wenn gilt:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot l_j = b_i \text{ (mit } i = 1, 2, \dots, m)$$

Die Menge L aller Lösungen des LGS heißt **Lösungsmenge** des LGS.

Es gibt zwei Arten linearer Gleichungssysteme:

- homogenes LGS:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = 0 \text{ (mit } i = 1, 2, \dots, m)$$

Bemerkung:

Ein homogenes LGS hat immer eine Lösung $(0, 0, \dots, 0)$

Beweis:

$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot 0 = 0$ mit $(i = 1, 2, \dots, m)$ ist eine wahre Aussage

□

- inhomogenes LGS:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i \text{ (mit } i = 1, 2, \dots, m)$$

wobei (mindestens) ein $b_i \neq 0$

Bemerkung:

Ein inhomogenes LSG hat nicht die Lösung $(0, 0, \dots, 0)$

2.2 Matrizen

Definition:

Sei $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so ist die $m \times n$ - Matrix A über dem Körper K eine Abbildung

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow K : (i, j) \mapsto a_{ij}$$

Bemerkung:

Matrizen sind spezielle Abbildungen (Funktionen). $m \times n$ -Matrizen lassen sich als rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten notieren:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Bemerkung:

$K^{m \times n}$ ist die Menge aller $m \times n$ -Matrizen über K

2.2.1 Spezielle Matrizen

- Eine $m \times n$ -Matrix heißt **quadratisch**, wenn $m = n$ gilt. Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ wird auch n -reihige Matrix genannt.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bei der **Hauptdiagonale** gilt $i = j$

- **Diagonalmatrix:** $D = (a_{ij})_{n \times n}$ mit $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$
Bis auf die Hauptdiagonale sind alle Werte in der Matrix 0

- **Einheitsmatrix:** $E = (a_{ij})_{n \times n}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$

Diagonalmatrix, wobei alle Werte in der Hauptdiagonalen 1 sind

- **Nullmatrix:** $\mathbf{0}_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$ mit $a_{ij} = 0$ für all i, j
Alle Werte in der Matrix sind 0

2.2.2 Rechnen mit Matrizen

- Addition: Sei $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$. Dann gilt:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

Bemerkung:

Matrizen können nur addiert werden, wenn ihre Dimensionen übereinstimmen.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \implies A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Multiplikation: Sei $A = (a_{ij})_{m \times p}$, $B = (a_{ij})_{p \times n}$. Dann gilt:

$$A \cdot B := C \text{ mit } C = (c_{ij})_{m \times n} \text{ und } c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Bemerkung:

Eine Matrix A kann mit einer Matrix B multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der Matrix A mit der Zeilenanzahl der Matrix B übereinstimmt.

Diese Definition der Multiplikation von Matrizen modelliert die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen von Vektorräumen

Bemerkung:

Zur Berechnung von c_{ij} benötigt man nur die i -te Zeile von A und die j -te Spalte von B :

$$a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj} = c_{ij}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$

$A \cdot B$ ist eine Matrix mit 3 Zeilen und zwei Spalten:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10 + 2 \cdot 11 & 1 \cdot 12 + 2 \cdot 14 \\ 4 \cdot 10 + 5 \cdot 11 & 4 \cdot 12 + 5 \cdot 14 \\ 7 \cdot 10 + 8 \cdot 11 & 7 \cdot 12 + 8 \cdot 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 40 \\ 95 & 118 \\ 158 & 196 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A$ existiert nicht, da die Spaltenanzahl von B nicht mit der Zeilenanzahl von A übereinstimmt.

- Skalarmultiplikation: Sei $A = (a_{ij})_{m \times n}$, k (Skalar) $\in K$, dann gilt:

$$k \cdot A := (k \cdot a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Eine Matrix wird mit einem Skalar multipliziert, indem man jedes Matrixelement mit diesem Skalar multipliziert

Beispiel:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 15 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}$$

- Transponieren einer Matrix: Sei $A = (a_{ij})_{m \times n}$, dann gilt:

$$A^T := (b_{ij})_{n \times m} \text{ mit } b_{ij} = a_{ji}$$

A^T heißt die zu A transponierte Matrix

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Rechenoperationen für Matrizen

- Addition (für alle $A, B, C \in K^{m \times n}$)
 - $A + B = B + A$ (Kommutativgesetz)
 - $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Assoziativgesetz)
 - $A + \mathbf{0} = A$ (Neutrales Element)
- Multiplikation
 - $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (Assoziativgesetz) (falls die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot C$ definiert sind)
 - Es gilt $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$ für alle $A \in K^{n \times n}$
 E_n ist die Einheitsmatrix mit n Zeilen und n Spalten
 - Es gilt $A \cdot \mathbf{0}_{m \times n} = \mathbf{0}_{m \times n}$ für alle $A \in K^{m \times n}$

- Distributivgesetz (falls die entsprechenden Summen und Produkte existieren)

$$- A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

$$- (B + C) \cdot A = (B \cdot A) + (C \cdot A)$$

- Transponieren (falls die entsprechenden Summen und Produkte von Matrizen existieren)

$$- (A^T)^T = A$$

$$- (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$- (k \cdot A)^T = k \cdot A^T$$

$$- (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Bemerkung:

Diese (und weitere) Eigenschaften für das Rechnen mit Matrizen können aus der Definition der Rechenoperationen und Eigenschaften für das Rechnen im Körper K hergeleitet werden.

Beispiel: Proposition:

$a \cdot E_n = A$ gilt für alle $A \in K^{m \cdot n}$

Beweis:

Sei $A = (a_{ij})_{n \times n}$ und $E_n = (e_{ij})_{n \times n}$ mit $e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$.
 $A \cdot E_n = (a_{ij})_{n \times n} \cdot (e_{ij})_{n \times n} = C$ mit $C = (c_{ij})_{n \times n}$. Dann gilt:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot e_{kj} = a_{ij} \cdot e_{jj} = a_{ij} \cdot 1 = a_{ij} \text{ für alle } i, j$$

Für alle $i \neq j$ gilt $e_{ij} = 0$, also $a_{ij} \cdot e_{jj} = 0$. Für alle $i = j$ gilt $e_{ij} = 1$, also $a_{ij} \cdot e_{jj} = a_{ij} \cdot 1 = a_{ij}$

Also gilt $C = A$ und daher $A \times E_n = A$

□

Bemerkung:

Es gibt Matrizen A, B mit $A \times B \neq B \times A$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Es gibt Matrizen A, B, C mit $A \times C = B \times C$ und $A \neq B$, weshalb nicht durch die Matrix C dividiert werden kann.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 Matrixschreibweise für LGS

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A \quad m \times n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x \quad n \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b \quad m \times 1}$$

Kurzform: $Ax = b$

ODER

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)}_{A \mid b \quad m \times n}$$

A Koeffizientenmatrix

x Spaltenvektor der Veränderlichen

b Spaltenvektor der Absolutglieder

$A \mid b$ erweiterte Koeffizientenmatrix

2.4 Lösungsmenge von LGS $A \mid b$

Bemerkung:

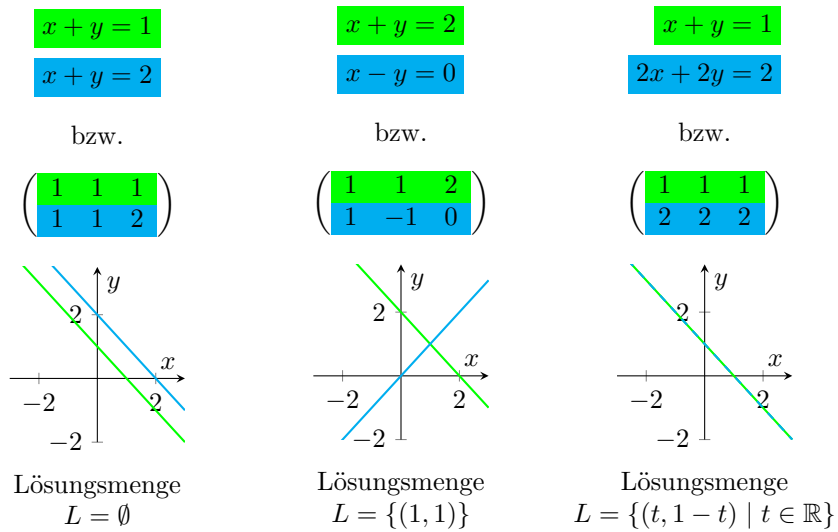
Jedes **homogene LGS** $Ax = \mathbf{0}$ ist lösbar. Für jedes $x = \mathbf{0}$

Es gibt lösbare und unlösbare **inhomogene LGS** $Ax = b$

Bemerkung:

Um die Lösbarkeit von LGS $AX = b$ zu untersuchen und im Falle der Lösbarkeit die Lösungsmenge zu berechnen, genügt die Darstellung des LGS durch die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$

Beispiel:



Bemerkung:

Es gibt LGS, aus denen man die Lösungsmenge leicht ablesen kann

Beispiel:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ausführlich:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & -7x_3 & +2x_4 & +x_6 & = & 0 \\ x_2 & +2x_3 & -3x_4 & -5x_6 & = & 8 \\ & & & x_5 & +5x_6 & = & 15 \\ & & & & x_7 & = & 42 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}$$

Widerspruch!

$$\Rightarrow L = \emptyset$$

Bemerkung:

$L = \emptyset$, falls das LGS eine Gleichung der Form $0 = b_i$ mit $b_i \neq 0$ enthält

2.4.1 Zeilenstufenform von LGS

Allgemein gilt für LGS in **Zeilenstufenform** (ZSF):

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1 & & & & b_1 \\ & a_2 & & & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_r & b_r \\ \hline & & & & b_{r+1} \\ & & & & \vdots \\ & & & & b_m \end{array} \right) \quad \text{mit } a_i \neq 0 \text{ für } i = 1, 2, \dots, r$$

$$(A | b) \text{ ist lösbar} \iff b_{r+1} = b_{r+2} = \dots = b_m = 0$$

$$(A | b) \text{ ist nicht lösbar} \iff \text{Es gibt ein } b_i \text{ mit } b_i \neq 0 \text{ und } i \in \{r+1, r+2, \dots, m\}$$

Beispiel:

LGS über \mathbb{R} mit einem Parameter a :

$$(A | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3-2a & a-6 \\ 0 & 0 & 3(a-3)(a-\frac{1}{3}) & -(a-3)(a-5) \end{array} \right)$$

- $L = \emptyset \iff \begin{aligned} &3(a-3)(a-\frac{1}{3}) = 0 \text{ und } -(a-3)(a-5) \neq 0 \\ &\iff a = \frac{1}{3} \end{aligned}$
- $L = \emptyset \iff a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$
 1. Fall: $a = 3$, unendlich viele Lösungen
 2. Fall: $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}, 3\}$, genau eine Lösung

Beispiel:

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ \hline 1 & 0 & -7 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 42 \end{array} \right) \quad \text{reduzierte ZSF}$$

$$\begin{array}{lll} x_3 & = & r \\ x_4 & = & s \\ x_5 & = & t \end{array} \qquad \begin{array}{lll} x_1 & = & 7r - 2s - t \\ x_2 & = & -2r + 3s + 5t \\ x_5 & = & -5t \\ x_7 & = & 42 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & = & 7r - 2s - t \\ & = & 8 - 2r + 3s + 5t \\ & = & 15 - 5t \\ & = & 42 \end{array}$$

$$L = \{(\overbrace{7r-2s-t}^{x_1}, \overbrace{8-2r+3s+5t}^{x_2}, \overbrace{r}^{x_3}, \overbrace{s}^{x_4}, \overbrace{15-5t}^{x_5}, \overbrace{t}^{x_6}, \overbrace{42}^{x_7}) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}$$

2.5 Elementare Zeilenumformungen

- Vertauschen zweier Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $k \in K \setminus \{0\}$
- Addieren des k -fachen ($k \in K$) einer Zeile zu einer anderen Zeile

Satz:

Bei Anwendung von elementaren Zeilenumformungen ändert sich die Lösungsmenge des LGS nicht

Proposition:

Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $k \in K \setminus \{0\}$ verändert die Lösungsmenge eines LGS nicht

Beweis:

Das LGS (S') entstehe aus dem LGS (S) , indem die erste (da Zeilen beliebig vertauscht werden können, die i -te) Zeile mit $k \in K \setminus \{0\}$ multipliziert wird.

LGS (S) :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \\ (i = 1, 2, \dots, m)$$

LGS (S') :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \\ (i = 1, 2, \dots, m) \\ \text{mit } a'_{1j} = k \cdot a_{1j}, b'_1 = k \cdot b_1 \\ \text{und } a'_{ij} = a_{ij}, b'_i = b_i \\ \text{für } j = 1, 2, \dots, n \\ \text{und } i = 2, 3, \dots, m$$

Jede Lösung (l_1, \dots, l_n) von S erfüllt $\sum_{j=1}^n a_{ij}b_j = b_i$ ($i = 1, \dots, m$) und ist gleichzeitig eine Lösung von S' , denn:

$$\sum_{j=1}^n a'_{1j}l_j = \sum_{j=1}^n k \cdot a_{1j}l_j = k \cdot \sum_{j=1}^n a_{1j}l_j = k \cdot b_1 = b'_1$$

Probe mit der ersten Gleichung. Alle anderen Gleichungen müssen nicht überprüft werden, da sie übereinstimmen

Jede Lösung (l'_1, \dots, l'_n) von S' erfüllt $\sum_{j=1}^n a_{ij}b_j = b_i$ ($i = 1, \dots, m$) und ist gleichzeitig eine Lösung von S , denn:

$$\sum_{j=1}^n a_{1j}l'_j = \sum_{j=1}^n \frac{1}{k} \cdot a'_{1j} \cdot l'_j = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^n a'_{1j}l'_j = \frac{1}{k} \cdot b'_1 = b_1$$

□

2.6 Lösen von LGS nach Gauss/Jordan

$$(A \mid b) \xrightarrow[\text{Lösbarkeitsentscheidung}]{\text{Gauss}} \begin{array}{l} \text{LGS in ZSF} \\ \text{Lösbarkeitsentscheidung} \end{array} \xrightarrow{\text{Gauss/Jordan}} \text{LGS in reduzierter ZSF}$$

Bemerkung:

Spalten dürfen beliebig vertauscht werden, wenn die Bezeichnungen der Unbekannten mitgenommen werden

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} x_2 & x_1 & \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 8 \end{array} \right)$$

Definition:

Bei dem **Eliminationsverfahren nach Gauss** wird das LGS so umgeformt, dass alle Elemente unterhalb der Zeilenstufe Null sind \implies Zeilenstufenform.

Definition:

Bei dem **Eliminationsverfahren nach Gauß\Jordan** wird ein LGS in ZSF mithilfe von Umformungen in die reduzierte ZSF gebracht, so dass sich Lösungen leicht ablesen lassen.

3 Vektorräume über einem Körper K

Definition:

Die **Lineare Algebra** ist die Theorie der Vektorräume und der linearen Abbildungen.

Definition:

Vektoren sind Elemente von Vektorräumen.

Beispiel:

- $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$ (Logarithmusfunktion)
- $\{0, 8, 15\}$
- $\int_0^1 \sin(x) dx$

Bemerkung:

Die gemeinsamen Eigenschaften für das Rechnen mit diesen konkreten mathematischen Objekten werden in der linearen Algebra untersucht.

Definition:

Sei K ein Körper. Ein **K -Vektorraum** $(V; +; (k \mid k \in K))$ besteht aus

- einer nichtleeren Menge V
- einer Addition $+: V \times V \rightarrow V$
- einer Skalarmultiplikation $(k \mid k \in K) : K \times V \rightarrow V$

mit den Eigenschaften (1) bis (10) - die Vektorraumaxiome.

Die Elemente von V heißen **Vektoren**.

Abkürzung: VR für Vektorraum

Beispiel:

- \mathbb{R} -VR: reeller Vektorraum
- \mathbb{C} -VR: komplexer Vektorraum

3.1 Vektorraumaxiome

1. Für je zwei Elemente $v_1, v_2 \in V$ ist $v_1 + v_2$ ein **eindeutig bestimmtes** Element von V .
2. $+$ ist **assoziativ**: $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ für alle $v_1, v_2, v_3 \in V$
3. $+$ ist **kommutativ**: $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ für alle $v_1, v_2 \in V$
4. $+$ hat ein **neutrales Element** 0 : $v + 0 = v$ für alle $v \in V$
5. Jedes Element $v \in V$ hat ein **inverses Element** $-v$ bezüglich $+$: $v + (-v) = 0$
6. Für jedes $k \in K$ und jedes $v \in V$ ist kv ein **eindeutig bestimmtes** Element von V .
7. Es gilt: $1v = v$ für alle $v \in V$
8. Es gilt: $(k_1 k_2)v = k_1(k_2 v)$ für alle $k_1, k_2 \in K$ und alle $v \in V$
9. Es gilt: $(k_1 + k_2)v = k_1 v + k_2 v$ für alle $k_1, k_2 \in K$ und alle $v \in V$
10. Es gilt: $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$ für alle $k \in K$ und alle $v_1, v_2 \in V$

Bemerkung:

Die Axiome (1) bis (10) enthalten keinen Widerspruch, da es Modelle (Beispiele für VR) gibt, die diese Axiome erfüllen.

Beispiel:

- Körper sind Vektorräume über sich selbst: \mathbb{R} -VR, \mathbb{C} -VR, $GF(2)$ -VR
- Sei K ein Körper. $K^{m \times n}$ mit der Matrizenaddition und der Skalarmultiplikation von Matrizen bildet einen K -VR mit dem Nullvektor $\mathbf{0}_{m \times n}$ (Nullmatrix)

- $R^n := R^{n \times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_1, \dots, a_n \in R \right\}$

$$\mathbb{C}^n := \mathbb{C}^{n \times 1}$$

$$GF(2)^n := GF(2)^{n \times 1}$$

sind spezielle VR $K^n := K^{n \times 1}$ (VR der Spaltenvektoren)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist der Nullvektor}$$

- \mathbb{R} -VR R^2 : $\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}}_{\text{Trägermenge}}; \underbrace{+, (k \mid k \in \mathbb{R})}_{\text{Operationssymbole}}$
- Sei A eine nichtleere Menge und K ein Körper.
Der VR der Abbildungen ist $f : A \rightarrow K$ mit
Addition: $f_1 + f_2 : x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$
Skalarmultiplikation: $kf : x \mapsto k \cdot f(x)$
 $f : A \rightarrow K : a \mapsto 0_K$ ist der Nullvektor
- Sei A eine nichtleere Menge und $K = GF(2)$.
- Die Potenzmenge $P(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$ mit der
Addition: $X + Y := X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$
Skalarmultiplikation: $1X := X, 0X := \emptyset$
bildet einen $GF(2)$ -VR mit dem Nullvektor \emptyset

Bemerkung:

Nullvektor 0_v und Nullelement des Körpers 0_k sind eindeutig bestimmt.

Beweis:

Seien 0_{v_1} und 0_{v_2} Nullvektoren von V . Dann gilt:

$$0_{v_1} + 0_{v_2} = 0_{v_1} \quad (\text{da } 0_{v_2} \text{ Nullvektor})$$

$$0_{v_1} + 0_{v_2} = 0_{v_2} \quad (\text{da } 0_{v_1} \text{ Nullvektor})$$

Also gilt: $0_{v_1} = 0_{v_2}$

Analog für 0_k .

□

3.1.1 Rechenregeln für VR

- $kv = 0_v \iff k = 0 \text{ oder } v = 0$ für alle $k \in K, v \in V$
- $(-k)v = -kv$ für alle $k \in K, v \in V$
Insbesondere gilt: $(-1)v = -v$ für alle $v \in V$

3.2 Untervektorräume

Definition:

Unterstrukturen sind Teilmengen eines Grundraumes, die die gleichen Eigenschaften haben wie dieser Grundraum.

Definition:

Sei V ein k -VR und $U \subseteq V$.

U heißt **Untervektorraum** (UVR) von V , wenn gilt:

- $0_v \in U$
- U ist abgeschlossen bezüglich $+$: $a, b \in U \implies a + b \in U$
- U ist abgeschlossen bezüglich der Skalarmultiplikation:
 $a \in U, k \in K \implies ka \in U$

Bemerkung:

Jeder UVR von V erfüllt die Vektorraumaxiome und bildet daher selbst einen K -VR.

Beispiel: Sei V ein K -VR. Dann gilt:

- $\{0_v\}$ ist ein UVR von V und wird **Nullraum** genannt.
- V ist ein UVR von V .

Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$

$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (Nullraum) ist ein UVR von \mathbb{R}^3

$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein UVR von \mathbb{R}^3

Satz:

Seien U_1 und U_2 UVR des VR V . Dann ist auch $U_1 \cap U_2$ ein UVR von V .

Beweis:

Wegen $U_1 \subseteq V, U_2 \subseteq V$ gilt auch $U_1 \cap U_2 \subseteq V$:

- Wegen $0_v \in U_1, 0_v \in U_2$ gilt auch $0_v \in U_1 \cap U_2$
- Seien $a, b \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt $a, b \in U_1$ und $a, b \in U_2$.
Weil U_1, U_2 abgeschlossen bzgl. $+$ sind, gilt
 $a + b \in U_1, a + b \in U_2$. Dann gilt auch $a, b \in U_1 \cap U_2$.
d.h. $U_1 \cap U_2$ ist abgeschlossen bzgl. $+$.
- Analog zeigt man:
 $U_1 \cap U_2$ ist abgeschlossen bzgl. der Skalarmultiplikation.

□

3.3 Spannräume

Definition:

Sei V ein VR und $T \subseteq V$.

Den kleinsten UVR U von V mit $T \subseteq U$ nennt man den **Spannraum** $\text{Span}(T)$ von V

Bemerkung:

Der Spannraum $\text{Span}(T)$ wird auch kurz mit $\langle T \rangle$ bezeichnet.

Beispiel:

$$\text{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}\right) = \left\langle \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Bemerkung:

- $\text{Span}(V) = \langle V \rangle = V$
- $\text{Span}(\emptyset) = \langle \emptyset \rangle = \{0_v\}$ (**Nullraum**)
Das Nullelement ist immer im Spannraum. Es gilt, dass $T \subseteq U$ für alle UVR U von V gilt.

Definition:

Sei V ein K -VR, $v_1, \dots, v_n \in V$ und $k_1, \dots, k_n \in K$.

Dann nennt man $k_1 v_1, \dots, k_n v_n$ eine **Linearkombination** (LK) der Vektoren v_1, \dots, v_n mit den Koeffizienten k_1, \dots, k_n

Bemerkung:

Jeder UVR von V , der v_1, \dots, v_n enthält, enthält auch sämtliche Linearkombinationen von v_1, \dots, v_n mit Koeffizienten aus K .

Seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann ist

$U := \{k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \mid k_1, \dots, k_n \in K\}$ der kleinste UVR von V

- $U \subseteq V$
- $0_k v_1 + \dots + 0_k v_n = 0_v \in U$
- U ist abgeschlossen bzgl. $+$
- U ist abgeschlossen bzgl. Skalarmultiplikation

Sei V ein K -VR und $T := \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$

Dann gilt: $\text{Span}(T) = \{k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \mid k_1, \dots, k_n \in K\}$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$

$$\text{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{ a \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$

$U := \left\{ \begin{pmatrix} 2a \\ a+b \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein UVR von \mathbb{R}^3 .

Beweis:

$$U = \left\{ a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left(\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\subseteq \mathbb{R}^3}\right)$$

Ein Spannraum ist nach Definition ein UVR. Also ist U ein UVR von \mathbb{R}^3 .

□

3.4 Erzeugendensysteme

Definition:

Sei V ein K -VR, $T \subseteq V$ und $V = \text{Spann}(T)$.
Dann nenne man T ein **Erzeugendensystem** von V .

Bemerkung:

Jeder Vektorraum V hat ein Erzeugendensystem.

Beispiel: $\text{Spann}(V) = V$

Bemerkung:

Um einen VR zu beschreiben genügt es, für diesen VR ein Erzeugendensystem anzugeben.

- VR sind durch Angabe eines Erzeugendensystems eindeutig bestimmt.
- Für jeden VR V gibt es Erzeugendensysteme T_1, T_2 mit $T_1 \neq T_2$.

Sinnvoll ist es, möglichst kleine Erzeugendensysteme für einen Vektorraum anzugeben.

Beispiel: $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- $T \subseteq \mathbb{R}^3 \quad (\implies \langle T \rangle \subseteq \mathbb{R}^3)$

- Jeder Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ lässt sich als LK von Vektoren aus T darstellen, denn das LGS mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{array} \right) \text{ ist lösbar } (\implies \mathbb{R}^3 \subseteq \langle T \rangle)$$

Also gilt: $\mathbb{R}^3 = \text{Span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right)$

d.h. T ist ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^3 .

3.5 Lineare Unabhängigkeit

Definition:

Sei V ein K -VR.

Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen **linear unabhängig**, wenn gilt:

$$\forall k_1, \dots, k_n \in K : k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0_v \implies k_1 = \dots = k_n = 0_k$$

Andernfalls heißen diese Vektoren **linear abhängig**.

Bemerkung:

Man spricht auch von linear unabhängigen bzw. linear abhängigen Mengen $(\{v_1, \dots, v_n\})$ bzw. Folgen von Vektoren (v_1, \dots, v_n) , bei Folgen ist die Reihenfolge wichtig).

Bemerkung:

Sei V ein K -VR.

Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ sind linear abhängig, wenn gilt:

$$\exists k_1, \dots, k_n \in K : k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0_v \wedge \exists i \in \{1, \dots, n\} : k_i \neq 0_k$$

Ist $(k_i \neq 0)$, so kann die Gleichung nach v_i aufgelöst werden. Somit ist v_i eine Linearkombination der anderen Vektoren.

Bemerkung:

Sei V ein K -VR.

Für beliebige Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ gilt:

- Sind v_1, \dots, v_n linear unabhängig, dann gibt es nur eine Linearkombination dieser Vektoren, die den Nullvektor ergibt:

$$0_k v_1 + \dots + 0_k v_n = 0_v$$

- Sind v_1, \dots, v_n linear abhängig, dann gibt mindestens zwei verschiedene Linearkombinationen dieser Vektoren, die den Nullvektor ergeben:

$$0_k v_1 + \dots + 0_k v_n = 0_v$$

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0_v$$

$$\text{mit } -k_i v_i = k_1 v_1 + \dots + k_{i-1} v_{i-1} + k_{i+1} v_{i+1} + \dots + k_n v_n$$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear abhängige Vektoren,

$$\text{denn } 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängige Vektoren,

$$\text{denn } k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

Bemerkung:

Für jeden K -VR V mit $v_1, v_2 \in V$ gilt:

v_1, v_2 sind linear abhängig $\iff \exists k \in K : v_2 = k v_1$

Beweis:

$(\implies) : v_1, v_2$ linear abhängig

$\implies \exists k_1, k_2 \in K : k_1 v_1 + k_2 v_2 = 0_v \wedge (k_1, k_2) \neq (0, 0)$ O.B.d.A sei $k_2 \neq 0_k$.

Dann gilt: $k_1 v_1 + k_2 v_2 = 0_v$

$$\begin{aligned} \implies -k_1 v_1 + k_1 v_1 + k_2 v_2 &= -k_1 v_1 + 0_v \\ \implies k_2 v_2 &= -k_1 v_1 \\ \implies v_2 &= \frac{-k_1}{k_2} v_1 \end{aligned}$$

D.h. $v_2 = kv_1$ mit $k = \frac{-k_1}{k_2}$

(\Leftarrow): Sei $v_2 = kv_1$. Dann gilt:

$$kv_1 + (-1)v_2 = kv_1 + (-1)kv_1 = kv_1 + (-k)v_1 = (k + (-k))v_1 = 0_K v_1 = 0_V \text{ und } (k, -1) \neq (0, 0).$$

Also sind v_1, v_2 linear abhängig.

□

Bemerkung:

Für jeden K -VR V gilt: \emptyset ist linear unabhängig.

Bemerkung:

Für jeden K -VR gilt: 0_v ist linear abhängig. Insbesondere ist jede Menge, die 0_v enthält, linear abhängig.

Beweis:

$$1 \cdot 0_v = 0_K 0_v$$

Es gilt sogar: $k0_v = 0_v$ für alle $k \in K$ und $|K| > 1$

□

3.6 Basis und Dimension von Vektorräumen

Definition:

Sei V ein K -VR und $B \subseteq V$.

B heißt eine **Basis** von V , wenn gilt:

- B ist linear unabhängig
- $V = \text{Span}(B) = \langle B \rangle$

Bemerkung:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist die Standardbasis von } K^n.$$

Bemerkung:

Der Nullraum hat als Basis die leere Menge:

$$\{0_v\} = \langle \emptyset \rangle \quad B = \emptyset$$

Beispiel:

- \mathbb{R}^3 hat die Standardbasis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- Für \mathbb{R} ist $\{1\}$ eine Basis. Aber auch $\{-1\}, \{\pi\}$ usw. sind Basen von \mathbb{R} . $\{0\}$ ist keine Basis von $\{\mathbb{R}\}$
- Der \mathbb{R} -VR \mathbb{C} hat als Basis $\{1, i\}$
- $R^{2 \times 2}$ hat als Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- Der $GF(2)$ -VR $P(A)$ mit $A = \{1, \dots, n\}$ hat als Basis $\{\{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, \dots, n\}\}$ bzw. $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{1, \dots, n\}\}$

Bemerkung:

Sei V ein K -VR und B eine Basis von V .
Dann gilt:

- B ist ein **minimales Erzeugendensystem** von V :
 - B ist ein Erzeugendensystem von V
 - Jede echte Teilmenge von B ist kein Erzeugendensystem von V
- B ist eine **maximale linear unabhängige Teilmenge** von V :
 - B ist linear unabhängig
 - Durch $B \cup \{v\}$ ($v \in V, v \notin B$) erhält man eine linear abhängige Menge.

3.6.1 Dimension eines VR

Satz:

Je zwei Basen eines endlichen Vektorraums haben die gleiche Anzahl von Elementen.

Definition:

Hat ein VR V eine Basis B mit $|B| = n$, dann wird die Anzahl der Basiselemente dieses VR die **Dimension $\dim(V)$** von V genannt:

$$\dim(V) = n$$

Beispiel:

- $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathbb{C}^n) = \dim(GF(2)^n) = \dim(K^n) = n$
- $\dim(K^{m \times n}) = m \cdot n$

Bemerkung:

Ein Beispiel für einen unendlich-dimensionalen VR ist die reelle Polynomfunktion:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

4 Kern und Rang von Matrizen

4.1 Kern von Matrizen

Definition:

Sei K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$.

$\ker(A) := \{x \mid x \in K^n, Ax = 0_{K^m}\}$ heißt **Kern der Matrix**.

Bemerkung:

Der Kern einer Matrix ist ein UVR von K^n .

4.1.1 Kern eines homogenen LGS

Bemerkung:

Die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist ein VR:

$$L^* = \{x \mid x \in K^n, Ax = 0_{K^m}\}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$x_3 = t \in \mathbb{R} \quad x_2 = 0 \quad x_1 = -t$$

$$\ker(A) = L^* = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine Basis von } \ker(A); \dim(\ker(A)) = 1$$

4.1.2 Kern eines inhomogenen LGS

Inhomogenes LGS: $A_{m \times n} \cdot x_{n \times 1} = b_{m \times 1} \neq 0_{m \times 1}$

Lösungsmenge: $L = \{x \mid x \in K^n, Ax = b\} \subseteq K^n$

Bemerkung:

L ist kein UVR von K^n , denn $0_{K^n} \notin L$

Bemerkung:

1. Die Summe einer Lösung des inhomogenen LGS und einer Lösung des homogenen LGS ist wieder eine Lösung des inhomogenen LGS.
2. Je zwei Lösungen des inhomogenen LGS unterscheiden sich um eine Lösung des homogenen LGS.

Sei L die Lösungsmenge von $ax = b$,

L^* die Lösungsmenge von $Ax = 0_{K^m}$,

x_1 eine Lösung von $Ax = b$

Dann gilt:

$$L = \{x_1 + x^* \mid x^* \in L^*\} \text{ oder } L = x_1 + L^*$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$ hat die Lösungsmenge

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + L^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \ker(A)$$

4.2 Affine Teilräume

Definition:

Sei V ein K -VR, U ein UVR von V , $v \in V$.

$T := v + U = \{v + u \mid u \in U\}$ heißt **affiner Teilraum** von V .

$\dim(T) := \dim(U)$ heißt Dimension des affinen Teilraums.

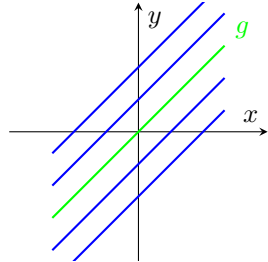
Bemerkung:

$$v + U \text{ ist ein UVR von } V \iff v \in U$$

$$0_v \in v + U \iff v \in U$$

Lösungsmengen von LGS $Ax = b$ mit $A \in K^{m \times n}$ sind affine Teilräume von K^n .

Beispiel:



Die Menge der Punkte von g ist ein $\underbrace{UVR}_{\text{spezieller affiner Teilraum}}$ von \mathbb{R}^2

Die Menge der Punkte jeder zu g parallelen Geraden bilde einen affinen Teilraum von \mathbb{R}^2 .

Definition:

Sei V ein K -VR, $\dim(V) = n$.

- 0-dimensionale affine Teilräume von V heißen **Punkte**
- 1-dimensionale affine Teilräume von V heißen **Geraden**
- 2-dimensionale affine Teilräume von V heißen **Ebenen**
- $n-1$ -dimensionale affine Teilräume von V heißen **Hyperebenen**

Beispiel: Hyperebenen in \mathbb{R}^2 sind Geraden, in \mathbb{R}^3 sind es Ebenen.

4.3 Rang von Matrizen

4.3.1 Spaltenraum

Sei $A \in K^{m \times n}$, $A = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ (Spaltenvektoren von A)

- $\text{col}(A) := \langle \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \rangle$ heißt **Spaltenraum** von A
- $\text{col}(A) \in K^m$
- $\text{col}(A)$ ist ein UVR von K^m
- $\dim(\text{col}(A))$ heißt **Spaltenrang** von A

Bemerkung:

Der Spaltenrang von A ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A .

4.3.2 Zeilenraum

Sei $A \in K^{m \times n}$, $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$ (Zeilenvektoren von A)

- $\text{row}(A) := \langle \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \rangle$ heißt **Zeilenraum** von A
- $\text{row}(A) \subseteq K^n$
- $\text{row}(A)$ ist ein UVR von K^n
- $\dim(\text{row}(A))$ heißt **Zeilenrang** von A

Bemerkung:

Der Zeilenrang von A ist die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A .

Satz:

Für jede Matrix A gilt:

$$\dim(\text{col}(A)) = \dim(\text{row}(A))$$

4.3.3 Rang einer Matrix

Definition:

Sei K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$. Dann nennt man

$$\text{rg}(A) := \dim(\text{col}(A)) = \dim(\text{row}(A))$$

den **Rang** von A .

Bemerkung:

$$A \in K^{m \times n} \implies \text{rg}(A) \leq \min(m, n)$$

Beispiel: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

A_1 hat den Spaltenrang $\dim(\langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \rangle) = 3$

A_1 hat den Zeilenrang $\dim(\langle \{ (1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1) \} \rangle) = 3$
 $\text{rg}(A_1) = 3$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 \text{ hat den Spaltenrang } \dim\left(\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle\right) = 2$$

$$A_2 \text{ hat den Zeilenrang } \dim(\langle \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 0)\} \rangle) = 2$$

$$\text{rg}(A_2) = 2$$

4.3.4 Rangberechnung für Matrizen

Bemerkung:

Elementare Zeilenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.

1. Bringe die Matrix $A \in K^{m \times n}$ mittels elementarer Zeilenumformungen in Zeilenstufenform
2. $\text{rg}(A)$ ist die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen in der Zeilenstufenform

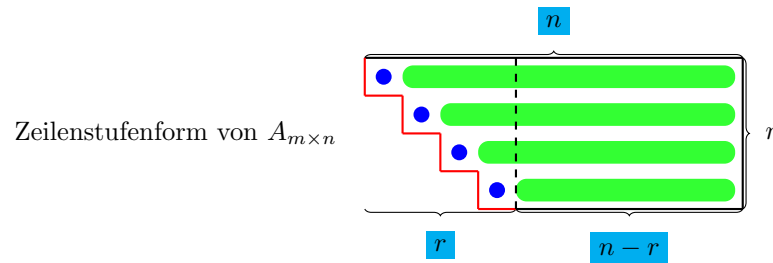
Beispiel:

•

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} \bullet & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \bullet & 0 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ hat den Rang } 3$$

• $\text{rg}(E_n) = n$

• $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$



• $r = \text{rg}(A)$ Zeilen

• $n - r$ ist die Anzahl der freien Parameter in der Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0_{K^m}$
(also $\dim \ker(a) = n - r$)

4.3.5 Dimensionsformel für Matrizen

Achtung! Matrizen haben keine Dimension!

Satz:

$$A \in K^{m \times n} \implies \operatorname{rg}(A) + \dim \ker(A) = n$$

4.4 Lösbarkeitskriterium für LGS

$$Ax = b \text{ lösbar} \iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid b)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} Ax = b \text{ lösbar} &\iff \exists k_1, \dots, k_n \in K \text{ mit } A \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = b \\ &\iff \exists k_1, \dots, k_n \in K \text{ mit } k_1 s_1 + \dots + k_n s_n = b \\ &\iff b \in \operatorname{col}(A) \\ &\iff \dim(\langle \{s_1, \dots, s_n\} \rangle) = \dim(\langle \{s_1, \dots, s_n, b\} \rangle) \\ &\iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid b) \end{aligned}$$

□

Beispiel:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$
- $\operatorname{rg}(A) = 1, \operatorname{rg}(A \mid b_1) = 1, \operatorname{rg}(A \mid b_2) = 2$
- $Ax = b_1$ ist lösbar, $Ax = b_2$ ist nicht lösbar

4.5 Reguläre Matrizen

Definition:

Sei K ein Körper.

eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix $A^{-1} \in K^{n \times n}$ gibt, sodass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$ gilt.

A^{-1} heißt dann die zu A inverse Matrix.

Bemerkung:

Invertierbare Matrizen werden auch **reguläre Matrizen** genannt.

Bemerkung:

Falls die Matrix A invertierbar ist, dann ist A^{-1} eindeutig bestimmt, denn:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \boxed{B \cdot A} = E_n \wedge \boxed{A \cdot C} = C \cdot A = E_n \\ \implies B &= B \cdot \boxed{E_n} = B \cdot \boxed{(A \cdot C)} = \boxed{(B \cdot A)} \cdot C = \boxed{E_n} \cdot C = C \end{aligned}$$

Beispiel:

- Die Nullmatrix ist nicht invertierbar:

Beweis:

$$\text{Für alle Matrizen } A : 0 \cdot A = 0 \neq E_n$$

□

- $E_n^{-1} = E_n$

Beweis:

$$E_n \cdot E_n = E_n \implies E_n = E_n^{-1}$$

□

- $(A^{-1})^{-1} = A$

Beweis:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n \implies A = (A^{-1})^{-1}$$

□

- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Beweis:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E_n$$

□

Bemerkung:

Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$.

Zur Berechnung von A^{-1} (falls diese Matrix existiert), sind n LGS $Ax = e_i$ zu lösen, wobei e_i der i -te Einheitsvektor ist.

4.5.1 Paralleles Lösen

Berechnung von A^{-1} durch paralleles Lösen von n LGS $(A \mid e_i)$:

1. Notiere $(A \mid E_n)$
2. Bringe $(A \mid E_n)$ mit elementaren Zeilenumformungen in **ZSF**
3. Enthält die umgeformte Matrix A eine **Nullzeile**, so existiert A^{-1} nicht. Andernfalls Bringe die Matrix in die **reduzierte ZSF**. Die Matrix hat nun die Form $(E_n \mid A^{-1})$.

Bemerkung:

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt:

- A ist invertierbar $\iff ad - bc \neq 0$
- A ist invertierbar $\implies \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

4.5.2 Äquivalente Aussagen für invertierbare Matrizen

Es sei $A \in K^{n \times n}$

- A ist eine invertierbare Matrix
- A^T ist eine invertierbare Matrix
- Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig
- Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig
- $\text{rg}(A) = n$
- $\dim \text{col}(A) = n$
- $\dim \text{row}(A) = n$
- $\dim \ker(A) = 0$
- $\ker(A) = \{0_{K^n}\}$

5 Lineare Abbildungen

Definition:

Seien $(V; \oplus_v, (k \mid k \in K))$ und $(W; \oplus_w, (k \mid k \in K))$ zwei K -VR über denselben Körper K .

Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ heißt **lineare Abbildung**, wenn $\forall a, b \in V; k \in K$ gilt:

$$\begin{aligned}f(a \oplus_v b) &= f(a) \oplus_w f(b) \\f(k \cdot a) &= k \cdot f(a)\end{aligned}$$

Dies lässt sich auch zu folgender Eigenschaft zusammenfassen:

$$f(a \oplus_v kb) = f(a) \oplus_w kf(b)$$

Beispiel:

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : v \mapsto A \cdot v$ eine lineare Abbildung.

Beweis:

Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}f(v_1 + v_2) &= A \cdot (v_1 + v_2) = A \cdot v_1 + A \cdot v_2 = f(v_1) + f(v_2) \\f(k \cdot v_1) &= A \cdot (k \cdot v_1) = k \cdot (A \cdot v_1) = k \cdot f(v_1)\end{aligned}$$

□

2. Sei K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$.
Dann ist $f : K^n \rightarrow K^m : v \mapsto Av$ eine lineare Abbildung.
3. Sei K ein Körper und $k \in K$.
Dann ist $f : K \rightarrow K : v \mapsto kv$ eine lineare Abbildung.

Bemerkung:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto mx$ mit $m \in \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung, aber
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto mx + n$ mit $m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist keine lineare Abbildung.

5.1 Eigenschaften linearer Abbildungen

1. Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung; $v_1, \dots, v_n \in V, k_1, \dots, k_n \in K$.
Dann gilt:

$$f(k_1v_1 + \dots + k_nv_n) = k_1 \cdot f(v_1) + \dots + k_n \cdot f(v_n)$$

2. Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V .
Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist injektiv} &\iff \{f(b_1), \dots, f(b_n)\} \text{ ist linear unabhängig} \\ f \text{ ist surjektiv} &\iff \langle \{f(b_1), \dots, f(b_n)\} \rangle = W \\ f \text{ ist bijektiv} &\iff \{f(b_1), \dots, f(b_n)\} \text{ ist eine Basis von } W \end{aligned}$$

Definition:

Seien V, W K -VR und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.
 $\ker(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$ heißt **Kern von f** .

Bemerkung:

$$0_v \in \ker(f), \text{ denn } f(0_v) = f(0 \cdot 0_v) = 0 \cdot f(0_v) = 0_w$$

Satz:

Seien V, W K -VR und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

$$f \text{ ist injektiv} \iff \ker(f) = \{0_v\}$$

Beweis:

(\implies) Sei $a \in \ker(f)$.

$$\begin{aligned} \implies & f(a) = 0_w \wedge f(0_v) = 0_w \\ \implies & f(a) = f(0_v) \\ \implies & a = 0_v \text{ (da } f \text{ injektiv)} \\ \implies & \ker(f) = \{0_v\} \end{aligned}$$

(\impliedby) Sei $\ker(f) = \{0_v\}$,
 $a, b \in V$ und $f(a) = f(b)$. (zu zeigen: $a = b$)

$$\begin{aligned} \implies & f(a) + (-1 \cdot f(b)) = 1 \cdot f(b) + (-1 \cdot f(b)) \\ \implies & f(a + (-1 \cdot b)) = (1 + (-1)) \cdot f(b) = 0 \cdot f(b) = 0_w \\ \implies & a + (-1 \cdot b) \in \ker(f) = \{0_v\} \\ \implies & a + (-1 \cdot b) + 1 \cdot b = 0_v + 1 \cdot b \\ \implies & a = b \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Sei $f : V \rightarrow W$ linear, so ist $\ker(f)$ ein UVR von V

5.1.1 Das Bild linearer Abbildungen

Definition:

Seien V, W K -VR und $f : v \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

$\text{Im}(f) := \{f(v) \mid v \in V\}$ nennt man **Bild von f** .

Bemerkung:

- $\text{Im}(f) \subseteq W$
- $0_w \in \text{Im}(f)$, denn $0_v \in V$ und $0_w = f(0_v) \in \text{Im}(f)$

Bemerkung:

Sei $f : V \rightarrow W$ linear, so ist $\text{Im}(f)$ ein UVR von W

5.1.2 Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Satz:

Seien V, W K -VR und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\dim(V) = n \implies \dim \ker(f) + \dim \text{Im}(f) = n$$

Bemerkung:

Für die lineare Abbildung $f : K^n \rightarrow K^m : v \mapsto Av$ ($A \in K^{m \times n}$) gilt:

$$\begin{aligned} \ker(f) &:= \{v \in K^n \mid f(v) = 0_{K^m}\} \\ &= \{v \mid v \in K, Av = 0_{K^m}\} \\ &= \ker(A) \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\dim \ker(f) = \dim \ker(A)$$

Aus der Dimensionsformel folgt daher wegen $\dim K^n = n$:

$$\dim \text{Im}(f) = \text{rg}(A)$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) = n &\iff \dim \ker(A) = 0 \\ &\iff \ker(A) = \{0_{K^n}\} \\ &\iff |\ker(A)| = 1 \\ &\iff \text{Es gibt keine freien Parameter} \\ &\quad \text{in der Lösungsmenge von } Ax = 0_{K^m} \end{aligned}$$

Bemerkung:

Die lineare Abbildung $f : K^n \rightarrow K^m : v \mapsto Av$ ($A \in K^{n \times m}$) ist genau dann bijektiv, wenn $\text{rg}(A) = n$ gilt. Die zu f inverse Abbildung f^{-1} lässt sich mithilfe der zu A inversen Matrix angeben.

Beispiel:

- Die identische Abbildung bildet jeden Vektor auf sich selbst ab:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Nullabbildung bildet jeden Vektor auf den Nullvektor ab:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Jeder Vektor (a, b) wird auf den doppelten Vektor $(2a, 2b)$ abgebildet:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Senkrechte Projektion auf die x-Achse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Senkrechte Projektion auf die Winkelhalbierende des ersten Quadranten:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Linksdrehung um den Koordinatenursprung um den Winkel φ :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

- Spiegelung an der Geraden, die gegen die x -Achse um den Winkel φ geneigt ist:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Jede lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basisvektoren bereits eindeutig bestimmt:

Sei $f : V \rightarrow W$ linear und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V . Kennt man $f(b_1), \dots, f(b_n)$, dann kann man für jeden Vektor $v \in V$ das Bild $f(v)$ wie folgt berechnen:

- v als Linearkombination der Basisvektoren darstellen:

$$v = k_1 b_1 + \dots + k_n b_n$$

- $f(v) = f(k_1 b_1 + \dots + k_n b_n) = k_1 f(b_1) + \dots + k_n f(b_n)$

5.1.3 Abbildungsmatrizen

Es sei $f : K^n \rightarrow K^m$ eine lineare Abbildung,

(e_1, \dots, e_n) die Standardbasis von K^n und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$.

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= f(v_1 e_1 + \dots + v_n e_n) = v_1 \cdot f(e_1) + \dots + v_n \cdot f(e_n) \\ &= \underbrace{(f(e_1) \ \dots \ f(e_n))}_A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A \cdot v \text{ mit } A \in K^{m \times n} \end{aligned}$$

Definition:

Die Matrix A mit $f(v) = A \cdot v$ für alle $v \in K^n$ heißt **Abbildungsmatrix** von f .

Bemerkung:

- Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ bestimmt eine lineare Abbildung:

$$f_A : K^n \rightarrow K^m : x \mapsto A \cdot x$$

- Jede lineare Abbildung $f : K^n \rightarrow K^m$ wird durch ihre Abbildungsmatrix A eindeutig bestimmt:

$$A := (f(e_1) \ \dots \ f(e_i) \ f(e_n))$$

mit $f(x) = A \cdot x$ für alle $x \in K^n$

5.1.4 Darstellungsmatrizen

V sei ein K -VR mit der angeordneten Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$
 W sei ein K -VR mit der angeordneten Basis $C = (c_1, \dots, c_m)$
 $f : V \rightarrow W$ sei eine beliebige lineare Abbildung von V in W .

Definition:

$A_{BC}(f)$ nennt man die **Darstellungsmatrix** für $f : V \rightarrow W$ bezüglich der Basen B und C .

Bemerkung:

Hat man die Matrix $A_{BC}(f)$ gefunden, dann kann man für Vektoren aus V das Bild $f(v)$ bestimmen, indem man mit Spaltenvektoren rechnet:

$$A_{BC}(f) \cdot v_B = f(v)_C$$

Bemerkung:

Gilt $V = K^n$ und $W = K^m$ für die lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ und sind B, C die Standardbasen für K^n bzw. K^m , dann ist die Abbildungsmatrix gleich der Darstellungsmatrix $A_{BC}(f)$.

Aufstellen der Darstellungsmatrix

1. Bestimme $f(b_1), \dots, f(b_n)$
2. Stelle $f(b_i)$ mit $i = 1, \dots, n$ bezüglich der Basis $C = (c_1, \dots, c_m)$ dar:

$$f(b_i) = a_{1i}c_1 + \dots + a_{mi}c_m, \text{ d.h. } f(b_i)_C = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

3. Notiere die Darstellungsmatrix $A_{BC}(f)$ von f bzgl. B, C :

$$A_{BC}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Berechnung von $f(v)$ mit Hilfe der Darstellungsmatrix $A_{BC}(f)$

1. Stelle $V \in V$ bzgl. der Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ dar:

$$v = k_1b_1 + \dots + k_nb_n, \text{ d.h. } v_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

2. Berechne $f(v)$:

- Berechne $a_{BC}(f) \cdot v_B = A_{BC}(f) \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = f(v)_C$
- $f(v) = l_1 c_1 + \dots + l_n c_n$

Eigenschaften linearer Abbildungen können aus ihrer Darstellungsmatrix abgelesen werden.

Satz:

Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix $A := A_{BC}(f) \in K^{m \times n}$. Dann gilt:

1. $v \in \ker(f) \iff v_B \in \ker(A) \iff v_B \in \ker(A_{BC}(f))$
2. $w \in \text{Im}(f) \iff w_C \in \text{Im}(f_A)$

Beweis:

Zu (1):

$$v \in \ker(f) \iff f(v) = 0_W \iff f(v)_C = 0_{K^m} \iff A \cdot v_B = 0_{K^m} \iff v_B \in \text{Ker}(A)$$

□

Basiswechselmatrix

- Die **Basiswechselmatrix** $A_{BB'}(id)$ ist die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $id : V \rightarrow V : v \mapsto v$, die den Übergang von einer Basis B zu einer Basis B' des K -VR V beschreibt.
- Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$, dann gilt:

$$A_{BB'}(id) = (b_{1B'}, \dots, b_{nB'})$$

- Mit der Basiswechselmatrix lassen sich die Koordinaten bezüglich der neuen Basis ausrechnen:

$$A_{BB'}(id) \cdot v_B = id(v)_{B'} = v_{B'}$$

- $A_{BB'}(id)$ ist eine quadratische Matrix und invertierbar.
 $A_{BB'}(id)^{-1} = A_{B'B}(id)$ beschreibt den Basiswechsel von B' zurück zu B .

Für die Basiswechselmatrix gilt:

$$A_{BB'}(id) = M(B')^{-1} \cdot M(B)$$

Ist B die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) , dann gilt: $A_{(e_1, \dots, e_n)B'}(id) = M(B')^{-1}$ Ist B' die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) , dann gilt: $A_{B'(e_1, \dots, e_n)}(id) = M(B')$

6 Determinanten

6.1 Eigenschaften von Determinanten

Bemerkung:

Determinanten sind Abbildungen: $\det : K^{n \times n} \rightarrow K : A \mapsto \det(A)$

Determinanten sind durch folgende Eigenschaften festgelegt:

- \det ist multilinear, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + k \cdot x \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + k \cdot \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

- \det ist alternierend, d.h. hat A zwei gleiche Zeilen, dann gilt $\det(A) = 0$
- \det ist normiert, d.h. $\det(E_n) = 1$

6.1.1 Berechnung der Determinante für $n = 2$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Bemerkung:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ linear abhängig} \iff \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 0$$

Beweis:

Ist $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, gilt die Behauptung. Andernfalls:

Richtung \implies :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ lin. abh.} &\implies \exists k \in K \text{ mit } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} \\ &\implies \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix} \\ &= a \cdot kb - ka \cdot b = 0 \end{aligned}$$

Richtung \Leftarrow :

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c = 0 \implies \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{d}{b} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a}{c} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

□

Bemerkung:

$\det(A)$ gibt den Faktor an, um den sich bei der linearen Abbildung $f : x \mapsto Ax$ die "Fläche" von Figuren ändert.

Beispiel: $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = -2$

6.1.2 Berechnung der Determinante für $n = 3$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Satz:

Der **Satz von Sarrus** besagt, dass die Determinante einer 3×3 -Matrix gleich der Differenz der Produkte der Elemente entlang der Haupt- und Nebendiagonalen ist.

Die Matrix lässt sich folgendermaßen nach der ersten Zeile entwickeln:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

Beispiel: $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 0 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 7 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot 6 - 6 \cdot 4 \cdot 2 - 7 \cdot 5 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 8 = 0$

$$= +0 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = 0 - 3 \cdot (-6) + 6 \cdot (-3) = 0$$

Definition:

Sei $A \in K^{n \times n}$