

承载索悬链方程求解的研究^{*}

罗桂生

(福建林学院基础科学系, 福建 南平 353001)

摘要: 导出在荷重下承载索的悬链线形方程, 介绍如何应用两分法精确求解悬链线弹性伸长方程的方法, 并以实例比较了在高程控制条件下抛物线法、摄动法与悬链线法计算结果的差异。

关键词: 索道承载索; 悬链线理论; 抛物线法; 摄动法

中图分类号: S776.322

文献标识码: A

文章编号: 1001-389X(2001)01-0061-04

A Study on the Method of Solving Catenary Equation in of Skyline

LUO Gui-sheng

(Basic Science Dept. of Fujian College of Forestry, Nanping 353001, China)

Abstract This paper proposed the catenary equation of loaded skyline and the method of solving the equation using the principle one divides into two. The difference among solutions using catenarian algorithm, parabola algorithm, and perturbational algorithm with the constraint of the height of skyline were analyzed.

Key words skyline of a cableway; catenarian theory; parabola algorithm; perturbational algorithm

固结于 2 个支点上的承载索, 其标准线形是所谓的超越曲线——悬链线。索道理论工作者一直在努力探索按照这一标准线形对索道承载索作精确设计计算的方法^[1-3], 但在处理弹性伸长对荷重张力及荷重挠度的影响时, 都遇到了求解超越方程的困难。在文献 [4] 的基础上, 导出一个荷重下索道的悬链线形方程, 同时应用一般解方程的两分法克服了求解弹性伸长超越方程的困难, 使索道的悬链线理论进一步完善。

1 1 个荷重下的线形方程

以索道下支点 A 为原点的承载索线形——悬链线的方程^[4]

$$y = \frac{l}{2} \operatorname{tg} U \left[1 + \frac{\operatorname{sh} \frac{T_x(2x-l)}{2l}}{\operatorname{sh} \frac{T}{2}} \right] + \frac{l \operatorname{sh} \frac{T_x}{2l} \operatorname{sh} \frac{T(x-l)}{2l}}{a \operatorname{sh} \frac{T}{2}} \sqrt{T^2 \operatorname{tg}^2 U + 4 \operatorname{sh}^2 \frac{T}{2}} \quad (1)$$

式中: l 为索道水平跨距; U 为索道倾角; $T_x = \frac{ql}{H}$ 为无荷重水平张力系数; y 而 q 为悬链单位长度重量; H 为悬链的水平张力。

设荷重 P 位于横坐标 $x = kl$ 的 D 处 (图 1), 这时索道线形呈 2 条在荷重点 D 处相接的悬链线。显然, AD 、 BD 段悬链的水平距离分别为 $h = kl$ 、 $h = (1-k)l$, 而它们的倾角分别设为 U 、 U_1 , 且

$$\operatorname{tg} U = \operatorname{tg} U_1 - \frac{f_k}{kl}, \quad \operatorname{tg} U_1 = \operatorname{tg} U + \frac{f_k}{(1-k)l}$$

若 H_k 为荷重水平张力, $T_k = \frac{ql}{H_k}$ 为荷重水平张力系数, 则以 A 为坐标原点, 参照 (1) 式, AD 段悬链线的方程为

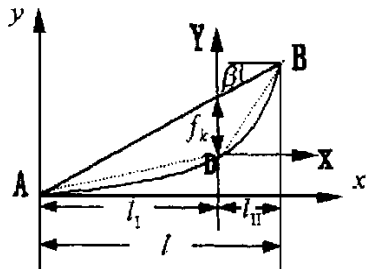


图 1 一个荷重下的索道线形

Figure 1 A line is loaded a cableway

*基金项目: 福建省自然科学基金资助项目 (E94001)。

作者简介: 罗桂生 (1945-), 男, 福建南平人, 讲师, 从事数学应用与悬索理论研究。

收稿日期: 2000-06-16; 修回日期: 2000-08-30

$$y=\frac{h}{2}\operatorname{tg}U\left[1+\frac{\operatorname{sh}\frac{T_1(2x-l)}{2h}}{\operatorname{sh}\frac{T_1}{2}}\right]+\frac{h\operatorname{sh}\frac{T_1x}{2h}\operatorname{sh}\frac{T_1(x-l)}{2h}}{T_1\operatorname{sh}\frac{T_1}{2}}\sqrt{T_1^2\operatorname{tg}^2U+4\operatorname{sh}^2\frac{T_1}{2}}\tag{2}$$

同时取以 D 为原点的 XY 坐标系, BD 段悬链线的方程为

$$Y=\frac{l_1}{2}\operatorname{tg}U\left[1+\frac{\operatorname{sh}\frac{T_1(2X-l_1)}{2h_1}}{\operatorname{sh}\frac{T_1}{2}}\right]+\frac{l_1\operatorname{sh}\frac{T_1X}{2h_1}\operatorname{sh}\frac{T_1(X-l_1)}{2h_1}}{T_1\operatorname{sh}\frac{T_1}{2}}\sqrt{T_1^2\operatorname{tg}^2U+4\operatorname{sh}^2\frac{T_1}{2}}\tag{3}$$

其中 T 、 T_1 分别是 AD 、 BD 段悬链的水平张力系数, 且

$$T=\frac{qh}{H_k}=kT_k,\quad T_1=\frac{ql_1}{H_k}=(1-k)T_k\tag{4}$$

参照无荷重情形, 由荷重基本方程 (2) 和 (3) 可得索长公式

$$L_k=L+L_1\tag{5}$$

式中: L 、 L_1 分别为 AD 、 BD 段悬链的索长, 且

$$\left.\begin{aligned}L&=\frac{h}{T_k}\sqrt{T_k^2\operatorname{tg}^2U+4\operatorname{sh}^2\frac{T_k}{2}}=\frac{l}{k}\sqrt{k^2T_k^2\operatorname{tg}^2U+4\operatorname{sh}^2\frac{kT_k}{2}}\\L_1&=\frac{h_1}{T_1}\sqrt{T_1^2\operatorname{tg}^2U+4\operatorname{sh}^2\frac{T_1}{2}}=\frac{l}{(1-k)}\sqrt{(1-k)^2T_k^2\operatorname{tg}^2U+4\operatorname{sh}^2\frac{(1-k)T_k}{2}}\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

荷重平均张力

$$\overline{T_K}=\frac{L\overline{T_1}+L_1\overline{T_1}}{L+L_1}\tag{7}$$

式中: $\overline{T_1}$ 、 $\overline{T_1}$ 分别为 AD 、 BD 段悬链的平均张力, 且

$$\overline{T_1}=\frac{H_kL}{kl}=\frac{qL}{kT_k},\quad \overline{T_1}=\frac{H_kL_1}{(1-k)l}=\frac{qL_1}{(1-k)T_k}\tag{8}$$

当荷重在中央即 $k=\frac{1}{2}$ 时, 于上支点处产生荷重最大张力

$$T_{1\max}=\frac{H_k}{4\operatorname{sh}\frac{T_k}{4}}\left[T_k\operatorname{tg}U\operatorname{sh}\frac{T_k}{4}+\operatorname{ch}\frac{T_k}{4}\sqrt{T_k^2\operatorname{tg}^2U+16\operatorname{sh}^2\frac{T_k}{4}}\right]\tag{9}$$

荷重水平张力 H_k 与荷重点挠度 f_k 的关系^[4]

$$H_k=\frac{(1-k)\overline{x_1}Q+k(1-\overline{x_1})Q_1+k(1-k)lp}{f_k}\tag{10}$$

式中: P 为设计荷重, $\overline{x_1}$ 、 $\overline{x_1}$ 分别为 AD 、 BD 段重心横坐标, 它们均以 A 为原点取值, 有

$$\left.\begin{aligned}\overline{x_1}&=\frac{kl}{2}\left[1+\frac{(kT_k\operatorname{cth}\frac{kT_k}{2}-2)\operatorname{tg}U}{k^2T_k^2\operatorname{tg}^2U+4\operatorname{sh}^2\frac{kT_k}{2}}\right]\\\overline{x_1}&=kl+\frac{(1-k)l}{2}\left[1+\frac{\left[(1-k)T_k\operatorname{cth}\frac{(1-k)T_k}{2}-2\right]\operatorname{tg}U}{(1-k)^2T_k^2\operatorname{tg}^2U+4\operatorname{sh}^2\frac{(1-k)T_k}{2}}\right]\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

式中: Q 、 Q_1 分别为 AD 、 BD 段悬链自重, 设 Q 为整条悬链自重, 有

$$Q=\frac{L}{L_k}Q,\quad Q_1=\frac{L_1}{L_k}Q\tag{12}$$

2 有关弹性伸长的计算方法

荷重前后, 张力之间的关系依赖于虎克定律

$$\frac{L_k-L}{L}=\frac{\overline{T_k}-\overline{T}}{EF}\tag{13}$$

式中： E 为钢索弹性模量； F 为钢索的金属截面积。

若已知无荷重的情形，实际上就是无荷张力系数 T 为已知，从而 L 、 \bar{T} 可求得，将 L_k 、 \bar{T}_k 的表达式 (5) (7) 代入 (13) 式，得到的是关于荷重张力系数 T_k 的超越方程。反之，若已知荷重情形，即荷重张力系数 T_k 为已知时， L_k 、 \bar{T}_k 则可求得，将无荷重时的 L 、 \bar{T} 的表达式代入 (13) 式，则得到关于无荷张力系数 T 的超越方程。虽然它们没有显式解，但可以象文献 [4] 一样采用迭代法求解，并且可以达到任意精确的程度。不过采用迭代法解时，必须考虑收敛性，因此不能直接应用 (13) 式，而需做适当的变形。并且由 T 求 T_k 和由 T_k 求 T 的形式很不相同，实际应用时不好掌握。能否不变更 (13) 式的基本形式，而把由 T 求 T_k 和由 T_k 求 T 的解法统一起来呢？

以已知 T_k 的值求 T 为例，将 (13) 式的右端移至左端，并以 $g(T)$ 表示，得

$$g(a)=\frac{L_k-L}{L}-\frac{\bar{T}_k-\bar{T}}{EF}=0$$

(14)

首先估计 T 值的范围，显然 $T > T_k$ ，并且对于一般索道， T 的值不会超过 T_k 的 10 倍，即有 $T_k < T < 10T_k$ 。若记 $a = T_k$ ， $b = 10T_k$ ，则 $g(a)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数，根据实际问题 $g(T)$ 在 $[a, b]$ 上有唯一的零点，这样就不难采用一般解方程的两分法^[5]求得满足一定精确度要求的 T 的值。

3 设计实例

已知

$l=1\,000\text{ m}$

$\psi=20^\circ$

$q=26\text{ N/m}$

$F=290\text{ mm}^2$

$E=10^5\text{ N/mm}^2$

$P=30\,000\text{ N}$

要求当 $k=0.8$ 时， $f_k=120\text{ m}$ 或 $s_k=\frac{f_k}{l}=0.120$ 。

3.1 按控制点的荷重挠度计算荷重参数

应用公式 (2) ~ (10)，采用迭代法，由 $f_k=120\text{ m}$ 及其它已知数据可以求得荷重下钢索长度 $L_k=1\,099.98\text{ m}$ ，荷重平均张力 $\bar{T}_k=66\,261.64\text{ N}$ ，荷重水平张 $H_k=59\,190.82\text{ N}$ ，荷重水平张力系数： $T_k=\frac{ql}{H_k}=0.439\,257\,4$ 。

3.2 无荷重参数计算

取 $a = T_k = 0.439\,257\,4$ ， $b = 10T_k = 4.392\,574$ ，则无荷水平张力系数 T 适合： $a < T < b$ 。在区间 $[a = 0.439\,257\,4, b = 4.392\,574]$ 上应用两分法：首先取 $T = a$ ，则可求得无荷索长和无荷平均张力^[4]，分别记为 $L = L(a)$ 和 $\bar{T} = \bar{T}(a)$ 。将 L_k 、 \bar{T}_k 、 $L(a)$ 和 $\bar{T}(a)$ 代入 (14) 式，即得 $g(T)$ 的值，记作 $g(a)$ 。然后取 $T = b$ ，可类似求得 $L(b)$ 、 $\bar{T}(b)$ 及 $g(b)$ ，这时一般有 $g(a)g(b) < 0$ 。

依照两分法，令 $c = \frac{1}{2}(a + b)$ ，再取 $T = c$ ，又可求得 $L(c)$ 、 $\bar{T}(c)$ 及 $g(c)$ 。若 $g(a)g(c) < 0$ ，则表明方程 (14) 的解即 T 的值在 a 与 c 之间： $a < T < c$ ；此时应修正： $b = c$ 、 $L(b) = L(c)$ 、 $\bar{T}(b) = \bar{T}(c)$ 及 $g(b) = g(c)$ 。反之，若 $g(a)g(c) > 0$ ，有 $g(c)g(b) < 0$ ，则表明： $c < T < b$ ；此时应修正： $a = c$ 、 $L(a) = L(c)$ 、 $\bar{T}(a) = \bar{T}(c)$ 及 $g(a) = g(c)$ 。这样，区间 $[a, b]$ 的长度就比原来缩短一半。如此不断“两分”，最后 a 、 b 愈来愈接近，可达到预先要求的精度 Δ （例如，取 $\Delta = 10^{-5}$ ），当 $|a - b| \leq \Delta$ 时，便停止，任取 a 、 b 之一为 T 的值，就得到弹性伸长虎克方程 (14) 的解。

对于实例，初始时

$a = T_k = 0.439\,257\,4, L(a) = 1\,071.75\text{ m}, \bar{T}(a) = 63\,437.99\text{ N}, g(a) = 0.026\,24;$

$b = 10T_k = 4.392\,574, L(b) = 2\,054.18\text{ m}, \bar{T}(b) = 30\,647.59\text{ N}, g(b) = -0.466\,38$

经多次“两分”计算达到精度要求时，得

$a = 0.932\,029\,0, L(a) = 1\,098.63\text{ m}, \bar{T}(a) = 30\,647.59\text{ N}, g(a) = 1.037\,617 \times 10^{-7};$

$b = 0.932\,029\,1, L(b) = 1\,098.63\text{ m}, \bar{T}(b) = 30\,647.59\text{ N}, g(b) = -7.485\,778 \times 10^{-9}$

取无荷张力系数 $T = b = 0.932\,029\,1$ ，可得无荷索长 $L = L(b) = 1\,098.63\text{ m}$ ，无荷平均张力 $\bar{T} = \bar{T}(b)$

$= 30\,647.6\text{ N}$ ，无荷中央挠度^[4] $f = 125.7\text{ m}$ ，无荷中央挠度系数 $s = \frac{f}{l} = 0.125\,7$ 。

4 结果比较与分析

如果说索道的标准线形是悬链线的话,则按照本文给出的方法可对索道承载索作精确设计^[8],同时还用来衡量其它方法的设计精度. 为便于比较,对于上述给出的实例,在其它条件相同的情况下,再求出当 $k=0.8$ $f_k=50\text{m}$ 和 $k=0.5$ $f_k=150\text{m}$ 时的无荷中央挠度系数.同时,应用文献[6] [2] [7]提供的算法计算出摄动法和抛物线法相应的结果,见表 1.发现当挠度较小或荷重在中央时,3种算法的结果相差不大.当荷重点靠近两端支点并且挠度较大时,摄动法三次解与抛物线的结果仍较一致,而与悬链线法的结果有较大的误差,分别达 7.6%和 7.1%,这是值得注意的.

表 1 各种算法结果比较
Table 1 The comparison of result in different algorithm

荷重点 距离系数	荷重点 挠度系数	无荷中央挠度系数 计算结果						
		悬链线解	摄动法三次解			抛 物 线 解		
K	S _k	S ₀	S ₀	误差	f/%	S ₀	误差	f/%
0.5	0.150	0.129 0	0.130 5	+	1.16	0.128 9	-	0.08
0.8	0.050	0.044 2	0.045 5	+	2.94	0.045 8	+	3.62
0.8	0.120	0.125 7	0.135 3	+	7.64	0.134 6	+	7.08

为什么在荷重计算中摄动法与抛物线法一样也会产生这样大的误差呢?在此仅指出:关于摄动法三次解,其荷重线形的推导是采用挠度迭加的方法进行的^[9],因此在荷重点相接的两段线形不是严格意义上的“摄动法三次解”.当荷重在中央或挠度不大时,采用挠度迭加求线形的精度影响不大,否则精度会受影响.如果放弃挠度迭加的方法而把荷重线形严格地看做是在荷重点相接的两条摄动法三次解曲线,分析出荷重点挠度与荷重水平张力之间更为准确的关系,将能提高摄动法的计算精度^[10].

参 考 文 献:

[1] (日)堀 高夫.架空索道の理論とその应用 [J].株式会社:地球出版社,1974. 52-71.
[2] 张应春.悬链线与单跨悬索张力的研究 [J].林业科学,1979, 15(3): 205-214.
[3] 倪元增.索道的悬链线理论及其应用 [J].东北林学院学报,1978(1): 73-90.
[4] 罗桂生.索道的悬链线算法 [J].福建林学院学报,1998, 18(3): 219-223.
[5] 《数学手册》编写组.数学手册 [M].北京:人民教育出版社,1977. 103-104.
[6] 倪元增.索道承载索的设计方法 [J].东北林学院学报,1982(2): 114-119 .
[7] (日)加藤诚平著(张德义等译).林业架空索道设计法 [M].北京:中国农业出版社,1965. 60-63.
[8] 周新年,罗桂生,吴沂隆,等.悬链线精确算法单跨索道设计系统 [J].福建林学院学报,1999, 19(3): 205-208.
[9] 倪元增.索道的摄动法计算 [J].林业科学,1981(2): 202-208.
[10] 罗桂生.索道摄动法计算的精度分析 [J]. 林业科学,1992, 28(6): 517-523.

(责任编辑:江 英)