

弦振动实验

左京伟 未央-电 11 2021012328

2022 年 4 月 22 日

摘要

本实验的原理主要包括：波动方程的推导和应用，波的反射和叠加原理以及驻波的条件与性质。实验主要内容为：了解振动在弦线上的传播现象，学习弦振动方程，分析弦末端固定时的边界条件和反射特性，以及观察和测试弦线在周期性正弦激励下的受迫振动（尤其是驻波）现象，最后利用示波器测量共振频率，用直线拟合的方式探究影响振动频率的因素。

1 实验仪器

6 根直径不同的弦线，线密度如图 1。

弦线编号及对应定位柱颜色	线密度 (kg/m)
6# (银)	0.00936
5# (金)	0.00578
4# (绿)	0.00350
3# (黑)	0.00191
2# (蓝)	0.00098
1# (红)	0.00055

图 1: 弦线的线密度

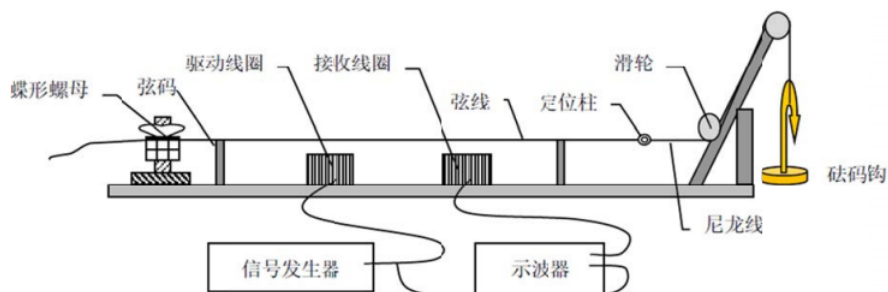


图 2: 实验装置

砝码钩 1 个，砝码 5 个，质量均为 200g（用来改变弦线上的张力）

2 实验内容

底座 1 个，包含蝶形螺母（用来固定弦线）、两个弦码（作为反射面），滑轮和底部的驱动线圈（提供周期激励）和接收线圈（测量弦线振动频率）。

信号发生器与示波器，分别连接驱动线圈和接受线圈。

实验装置的摆放如图 2。

注意点：

- i. 发射线圈和接受线圈之间的距离不要太短（ $> 10\text{cm}$ ），以免互感现象干扰对振动波形的观测。
- ii. 驱动线圈和接受线圈与弦码之间的距离都要 $> 5\text{cm}$ 。
- iii. 驱动线圈和接受线圈尽量都要放置在波腹左右的位置上，这样方便观测波形。

2 实验内容

2.1 理论部分

2.1.1 弦振动方程

下面我们来推导匀质软绳上的横波的振动方程。

假设有一根半无限长，沿着 $+x$ 轴放置的柔软均匀的弦线被拉紧，弦线中张力为 T 。¹在弦线的始端 $x = 0$ 处加以 y 方向的振动激励之后，由于弦线中的张力作用，弦线的振动形式将会随着绳子传播。

对位于 $(x, x + dx)$ 上的一小段弦线进行受力分析，如图 3 所示。

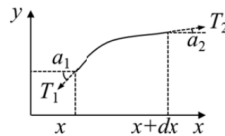


图 3: 弦线受力分析

由于弦线没有水平方向上的位移，因此 $\frac{\partial x}{\partial t} \equiv 0$ ，下面仅对 y 列出运动学方程。

水平方向受力平衡

$$T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 0 \quad (1)$$

竖直方向的牛二方程，其中已设绳的线密度为 ρ

$$T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 = \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2)$$

当振动幅度很小，即 $\alpha \approx 0$ 时，有近似条件 $\sin \alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x$ ， $\sin \alpha_2 \approx \tan \alpha_2 = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx}$ ，以及 $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2 \approx 1$ ，代入式 (1) 和式 (2) 得

$$T_1 \approx T_2 \approx T \quad (3)$$

¹如何给半无限长的绳子施加张力？这里所谓“无限”，其实是一种绳长远大于波长的等价表述。本实验中测量的是绳形成的驻波，而驻波可以看成是两个相反方向的无限长绳振动的叠加，所以不会有逻辑漏洞。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

由此易得波速为

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (5)$$

式 (4) 的通解为 $f(vt \pm x)$ ，其中负号代表波向 $+x$ 方向传播的方程，正号代表波向 $-x$ 方向传播的方程。²

又由式 (5) 知，弦振动波形传递的波速 v 仅仅和弦上张力 T 和弦线线密度 ρ 有关。

2.1.2 弦线末端固定时的边界条件及反射现象

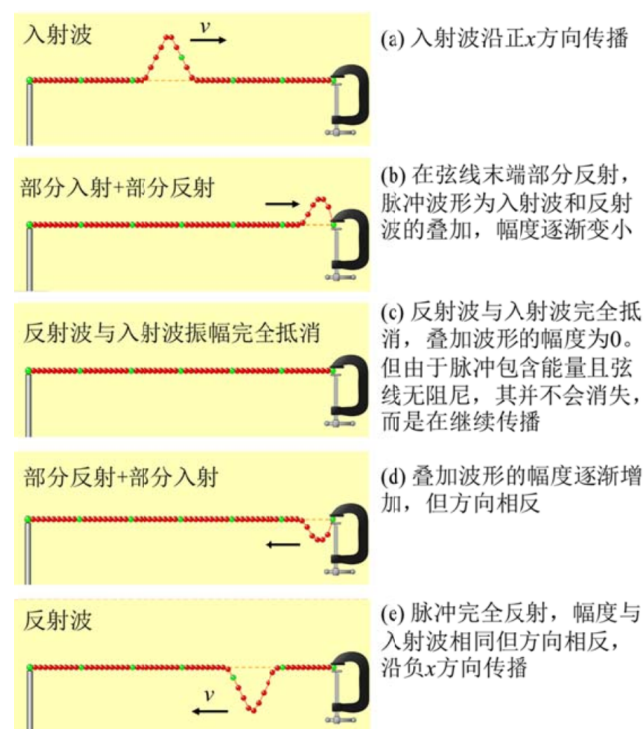


图 4: 弦末端固定时脉冲的反射及其与入射波的干涉（叠加）现象

因为这里是完全固定的状态，为了保证右端点处位移恒为零，反射波必然在右端点处的振动位移和入射波完全抵消，即 $y_{in}(vt - x)|_{x=L} \equiv y_{reflect}(vt + x)|_{x=L}$ ，因此反射系数 $R = 1$ 。

2.1.3 弦线在周期性正弦激励下的受迫振动和共振（或驻波）现象

下面分析，在周期性正弦激励下，弦线形成共振（驻波）的条件。

²一个简单的判断方法是，看过了一段时间（即 $t > 0$ ）之后，波传播到的位置，即 $f(0)$ 将在哪一个 x 处获得。当括号中是正号时， x 是一个负值，而负号时 x 为正值。

设弦线上沿着 $+x$ 方向传播的波为 $y^+ = A^+ e^{i(\omega t - kx + \varphi^+)}$, ³沿着 $-x$ 方向传播的波为 $y^- = A^- e^{i(\omega t + kx + \varphi^-)}$ 。则合振动为⁴

$$y = A^+ e^{i(\omega t - kx + \varphi^+)} + A^- e^{i(\omega t + kx + \varphi^-)} \quad (6)$$

波的边界条件为弦线两端固定, 即 $y(t, x = 0) = 0$ 与 $y(t, x = L) = 0$ 。得到

$$A^- = -A^+ e^{i(\varphi^+ - \varphi^-)} \quad (7)$$

回代入式 (6) 得到

$$y = -2A^+ e^{i\varphi^+} \sin kx e^{i\omega t} \quad (8)$$

令初相位 $\varphi^+ = 0$, 并且取实部得到

$$y = -2A^+ \sin kx \cos \omega t \quad (9)$$

可以发现, 形成驻波时, 弦上每处都在做简谐振动, 振幅仅与 x 有关, 为 $|2A^+ \sin kx|$ 。

难道说只要弦的两端被固定, 就一定会形成驻波吗? 未必。下面探讨何时驻波形成的条件。

将边界条件 $y(t, x = L) = 0$ 代入式 (8) 可知, 驻波形成的条件为 $\sin kL = 0$, 也即 $\frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi$, 或 $L = n\frac{\lambda}{2}$, 其中 n 为自然数。所以, 弦上形成驻波的条件是弦长 L 为半波长 $\frac{\lambda}{2}$ 的整数倍。⁵

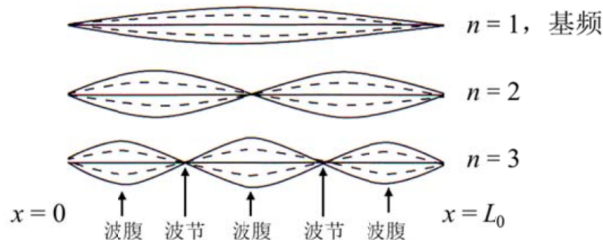


图 5: 驻波的波形示意图

形成驻波之后, 波形看起来就像昆虫的身体。最宽 (也即振幅最大) 的地方称作“波腹”, 窄的地方 (振幅为 0 的地方) 称作“波节”。 n 次谐频有 n 个波腹和 $n-1$ 个波节。 $n=1$ 对应的频率称为基频频率。

由 $v = f\lambda$, 还可以得到驻波频率和弦线参数的关系

$$f = \frac{n}{2L}v = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (10)$$

³复数表示振动。由欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 。

⁴由于波的叠加原理。

⁵在测量中, 如何判断形成了驻波呢? 实际只需要观察到振动的波形稳定最大即可。因为如果弦上没有形成驻波, 会有类似“拍”的振荡形式, 即波形会一边振动一边平移, 而且振幅会比驻波的情形小。

2.2 实验部分

从式 (10) 可知, 弦振动频率和 n 、 L 、 T 、 ρ 有关。下面采取控制变量的方法, 分别研究这 4 个影响因素。本实验中肿瘤加速度 g 均取 9.80m/s^2 。

2.2.1 观察弦振动, 分析 $f \sim n$ 关系

选用粗弦 6# 银弦, 在弦长 $L = 50.0\text{cm}$, 张力 $T = 9.80\text{N}$ 的条件下, 用信号发生器产生合适频率的激励, 观察弦振动现象。在 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 的驻波情况下, 测量共振频率, 并且使用最小二乘法对 f 、 n 进行直线拟合。数据如图 (6) 所示。

(1) $f \sim n$ 关系					
6#银线	$\rho = 0.00936\text{kg/m}$				
n	1	2	3	4	5
f/Hz	31.83	64.51	97.80	131.40	168.24

图 6: $f \sim n$ 关系

由 Excel 表格拟合得出斜率的测量值为

$$k = 33.11 \text{ s}^{-1}$$

并经过计算得到不确定度⁶

$$U_k = s_k \cdot \text{tinv}(1 - 0.95, 5 - 1) = 0.263033873 \times 2.776445105 = 0.730299108 \text{ s}^{-1}$$

因此斜率测量结果为

$$k = (33.1 \pm 0.7) \text{ s}^{-1}$$

根据式 (10) 得到, $f \sim n$ 直线理论的斜率为

$$k' = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{1}{2 \times 0.5000\text{m}} \sqrt{\frac{9.80\text{N}}{0.00936\text{kg/m}}} = 32.4 \text{ s}^{-1}$$

实际测得斜率和理论值的相对误差为⁷

$$\varepsilon_k = \frac{k - k'}{k'} = \frac{33.1 - 32.4}{32.4} = 2.16\%$$

2.2.2 分析 $f \sim L$ 关系

选用中粗弦 3# 黑弦, 在张力 $T = 9.80\text{N}$ 的条件下, 用信号发生器产生合适频率的激励, 观察弦振动现象。在形成 $n = 1$ 的驻波情况下, 从 30.0cm 到 55.0cm 范围内每间隔 5.0cm 改变弦长 L , 测量相应的共振频率 f , 并且使用最小二乘法对 f 、 $\frac{1}{L}$ 进行直线拟合。数据如图 (7) 所示。

⁶这里的自由度 ν 取 $n - 1$, 因为这是一条过原点的直线, 2.2.2 中也是如此。但是 2.2.3 及 2.2.4 的拟合当中, 由于直线不过原点, 所以自由度 ν 取 $n - 2$, 特此说明, 在后续小节不再另行脚注。

⁷经过初步分析, 笔者认为误差来源可能为读取谐振频率时, 由于需要手动调节信号发生器的发射频率, 观察输出波形是否达到稳定的最大, 存在一定的主观因素影响。当输出频率和共振频率接近时, 共振波形在极其缓慢地上下浮动, 左右漂移, 由于时间尺度过大, 很难真正使得测量得到的频率数据误差在仪器误差限以内。这种误差来源广泛存在于本次实验的所有频率读取过程当中。

(2)f~L关系						
3#黑线						
L/cm	30.00	35.00	40.00	45.00	50.00	55.00
(1/L)/(m-1)	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	1.82
f/Hz	114.30	98.00	86.06	76.86	69.31	63.10

图 7: $f \sim L$ 关系

由 Excel 表格拟合得出斜率的测量值为

$$k = 34.42814976 \text{ m/s}$$

并经过计算得到不确定度

$$U_k = s_k \cdot \text{tinv}(1 - 0.95, 6 - 1) = 0.070178663 \times 2.570581836 = 0.180399997 \text{ m/s}$$

因此斜率测量结果为

$$k = (34.43 \pm 0.18) \text{ m/s}$$

根据式 (10) 得到, $f \sim \frac{1}{L}$ 直线理论的斜率为

$$k' = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9.80\text{N}}{0.00191\text{kg/m}}} = 35.82 \text{ m/s}$$

实际测得斜率和理论值的相对误差为

$$\varepsilon_k = \frac{k - k'}{k'} = \frac{34.43 - 35.82}{35.82} = -3.88\%$$

2.2.3 分析 $f \sim T$ 关系

选用细弦 1# 黑弦, 保持 $L = 50.00\text{cm}$ 不变, 在 1.96N 到 11.76N 之间改变弦上张力, 在形成 $n = 1$ 的驻波情况下, 测量相应的共振频率 f , 并且使用最小二乘法对 $\ln f$ 、 $\ln T$ 进行直线拟合。数据如图 (8) 所示。

(3)f~T关系						
1#红线						
T/N	1.96	3.92	5.88	7.84	9.80	11.76
f/Hz	57.90	83.65	103.10	119.32	133.46	142.82
lnT	0.67	1.37	1.77	2.06	2.28	2.46
lnf	4.06	4.43	4.64	4.78	4.89	4.96

图 8: $f \sim T$ 关系

由 Excel 表格拟合得出斜率的测量值为

$$k = 0.50936177$$

并经过计算得到不确定度

$$U_k = s_k \cdot \text{tinv}(1 - 0.95, 6 - 2) = 0.008548257 \times 2.776445105 = 0.023733767$$

因此斜率测量结果为

$$k = 0.509 \pm 0.024$$

根据式 (10) 得到, $\ln f \sim \ln T$ 直线理论的斜率为

$$k' = \frac{1}{2} = 0.500$$

实际测得斜率和理论值的相对误差为

$$\varepsilon_k = \frac{k - k'}{k'} = \frac{0.509 - 0.500}{0.500} = 1.80\%$$

2.2.4 分析 $f \sim \rho$ 关系

保持 $L = 50.00\text{cm}$, $T = 9.80\text{N}$ 不变, 分别测量 1# 到 6# 弦的基频 ($n = 1$) 共振频率, 测量相应的基频频率 f , 并且使用最小二乘法对 $\ln f$ 、 $\ln \rho$ 进行直线拟合。数据如图 (8) 所示。

(4)f~ρ关系						
#	1	2	3	4	5	6
ρ/kg·m-1	0.00055	0.00098	0.00191	0.00350	0.00578	0.00936
f/Hz	133.46	95.80	69.31	53.45	40.88	31.83
lnρ	-7.51	-6.93	-6.26	-5.65	-5.15	-4.67
lnf	4.89	4.56	4.24	3.98	3.71	3.46

图 9: $f \sim \rho$ 关系

由 Excel 表格拟合得出斜率的测量值为

$$k = -0.496271722$$

并经过计算得到不确定度

$$U_k = s_k \cdot t_{inv}(1 - 0.95, 6 - 2) = 0.009126232 \times 2.776445105 = 0.025338482$$

因此斜率测量结果为

$$k = -0.496 \pm 0.025$$

根据式 (10) 得到, $\ln f \sim \ln T$ 直线理论的斜率为

$$k' = \frac{1}{2} = -0.500$$

实际测得斜率和理论值的相对误差为

$$\varepsilon_k = \frac{k - k'}{k'} = \frac{-0.496 - (-0.500)}{-0.500} = 0.80\%$$

弦线#	1	2	3	4	5	6
$\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$	0.00055	0.00098	0.00191	0.00350	0.00578	0.00936
$v_{\text{测}}/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	133.46	95.80	69.31	53.45	40.88	31.83
$v_{\text{理论}}/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	133.48	100.00	71.63	52.92	41.18	32.36
相对误差	-3.24%	-4.20%	-3.24%	1.00%	0.73%	-1.64%

图 10: 波速数据

2.2.5 分析弦的线密度、弦长、张力、基频与波速的关系

这里控制绳上张力不变, 选取不同线密度的弦线, 分别计算波速, 并与理论波速相比较。实验数据如图 (10) 所示。

其中实验测得的波速为

$$v = f\lambda = \frac{2L}{n}f$$

选取 $n = 1$, 即可计算得到图 (10) 中第三行的数据。

理论的波速计算方式为

$$v' = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

相对误差为

$$\varepsilon = \frac{v - v'}{v'}$$

由上两式, 计算得到图 (10) 中第四、五两行的数据。可以发现误差还是有一些大的, 初步分析判断, 除了之前提到的读取频率的人差之外, 还有可能是因为弦线密度和基准值有偏差。因为弦线重复用了很多次, 承受拉力的时间长了之后, 会有绳长方向的延展, 造成线密度降低, 所以理论值会偏大。这种判断也和相对误差总是小于 0 的事实相符合。

2.2.6 激励线圈和探测线圈放置的位置

参见“实验仪器”一节中最后的三个注意点 (i. ii. iii.), 此处不再重复。

2.2.7 快速找到弦振动的共振频率的方法

首先, 计算得出当前共振频率的理论值, 将信号发生器调节到理论值附近, 调节步长设置为 1Hz, 先粗调。找到波形变化比较缓慢的频率附近⁸, 再将步长设置为 0.1Hz, 继续调节, 再进而设置步长为 0.01Hz, 重复上述过程, 直到看到的输出波形为振幅最大的稳定正弦波为止。

3 分析讨论

- i. 实验时要注意弦线的尾端位置, 不要让砝码钩和任何物体有接触, 否则绳上张力会有偏差。

⁸当频率接近共振频率时, 会形成拍振, 波形发生缓慢横向移动, 当激励频率高于共振频率时和低于共振频率时, 拍的位移动方向相反。由此可以断定, 当调节 1 个步长之后, 拍的漂移方向反转时, 共振频率即处在这两个频率之间。

3 分析讨论

- ii. 实验中的误差来源主要是弦线密度实际会偏小；共振频率读数有人差；在多次改变张力测量弦线共振频率时，弦线的长度会有些微拉伸，造成弦码的微小位移，这往往容易被实验者忽略。
- iii. 其余一些细碎的讨论，均已以脚注的形式随文附上。

附录：原始数据

第 (3) 点中把最右侧的频率值划去的原因是，一开始测的这个数据，发现砝码和底座有接触，造成拉力不准，后来更改砝码位置重新测量。

第 (5) 点划去的原因是，一开始以为只要选取一个数据测量波速。后来经过老师的提醒发现这样不具有代表性，因此增加了其他数据，画成一张表格在下方。

(科目: 3# 振动 清华大学数学作业纸 4120238 第 1/1 页)

编号: 2021012328 $f = \frac{v}{\lambda}$ 姓名: 左京伟

(1) 6# 弦

n	1	2	3	4	5
f/Hz	31.83	64.51	97.75	131.40	168.24

(2) 3# 弦

L/cm	30.00	33.00	40.00	45.00	50.00	55.00
f/Hz	14.30	18.00	26.06	36.86	49.31	63.10

(3) 1# 弦 $\rho = 0.0055 \text{ kg/m}$

T/N	1.96	3.92	5.88	7.84	9.80	11.76
f/Hz	57.90	83.65	103.20	119.32	133.46	142.82

(4) #

#	1	2	3	4	5	6
$\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$	0.0055	0.0098	0.0091	0.00350	0.00578	0.00736
f/Hz	133.46	95.80	69.31	53.45	40.88	31.83

$n=1$ 基频 $T=9.80\text{N}$

(5) 3# $v = \frac{2L}{n} \cdot f$ $\lambda_k n=1$ $T=9.80\text{N}$ $L=50\text{cm}$

$= 69.31 \text{ m/s}$

$v_{\text{理论}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 71.63 \text{ m/s}$

$\Sigma \text{相对} = -3.24\%$

线	1#	2#	3#	4#	5#	6#
$v_{\text{理论}}/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	133.48	100.00	71.63	52.92	41.18	32.36
$v_{\text{测}}/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	133.46	95.80	69.31	53.45	40.88	31.83
$\Sigma \text{相对}$	-3.24%	-4.20%	-3.24%	1.00%	-2.73%	-1.64%

陈崇 4.21

图 11: 原始数据