Markov 模型在网球比赛中的应用

左京伟*

(未央-电 11　未央书院)

Dec 2022

摘　要

本文使用 Markov 链对网球比赛进行建模，深入讨论了不同赛制下每局、每比赛获胜的概率，并对球员实力存在对比的情况做出了一些研究。最终得出结论，网球赛制能够很好地体现球员综合实力，并保证球员更稳定地发挥。

关键词：随机过程，概率论，马尔可夫链，体育比赛

Abstract

This paper uses Markov chains to model tennis games, discusses in depth the probability of winning each game and each game under different rules, and makes some research on the comparison of player strength. Finally, it is concluded that the tennis competition system can well reflect the comprehensive strength of the players and ensure the players to play more stably.

*本文为概率论与随机过程的课程论文。感谢唐宏岩老师在课程中的指导!

目录

1 引言：网球比赛规则的介绍

网球是一项广泛普及的球类体育运动，其四大公开赛 (澳网、法网、温网及美网) 是公众关注度极高的全球性体育赛事。

笔者本人也爱好打网球，并曾代表本院系队参加过清华大学校内的马约翰杯比赛。随着我接触网球的时间不断增加，我对于网球比赛赛制的了解也不断深入，并且逐渐体会到不同赛制之间的差异。

网球比赛的规则在几大球类中向来以复杂著称，下面笔者对其做出简要的介绍。

首先要明确网球比赛的组成。一**场**比赛 (Match) 由若干**盘**比赛 (Set) 组成，而一盘又由若干**局**比赛 (Game) 构成，而每局比赛又有若干**分** (Point)。

我们从小向大讨论，略去每球的输赢判定，首先讨论每局比赛的胜负。

1.1 Game: 局

在每局比赛中，整局都是由一方发球，该方称为**发球方**，此局称为该方的**发球局**，另一方一直接发球，称为**接发球方**。

每局比赛开始，双方均记 0 分。任意一方赢得第一球，记该选手目前得分为 15 分，第二球为 30 分，第三球为 40 分。

在**无占先**的赛制下，赢四球即赢得此局比赛。而在**有占先**的赛制下，赢四球之后，只有对方只赢得两球或更少，才能直接胜出。如果双方出现了 40:40 的比分 (即三球：三球)，记为**平分** (Deuce)。

进入平分后，任何一方赢一球，则记该方**占先** (Advantage)，该方赢得下一球即获得此局比赛胜利，否则回到平分状态，继续这个过程，直至此局比赛结束。

1.2 Set: 盘

每盘比赛，由双方轮流发球（轮流是双方的发球局）。首先赢得 6 局比赛，并且净胜对手两局比赛的一方获得该盘的胜利。

在**长盘制**中，比赛会一直延续，直至任何一方净胜两局。而在**短盘制**中，如果双方出现 6:6 的平分，则开始**抢七比赛** (Tiebreaker)。

抢七比赛中，计分从 0 开始，每赢一球获得一分，率先获得 7 分，并净胜对手 2 分及以上者胜利。

从盘制的名称可以看出，抢七比赛就是为了缩短比赛时间而设计的。[1]

1.3 Match: 整场比赛

整场比赛，有三盘两胜和五盘三胜两种赛制。一场比赛中, 男子单打比赛除大满贯赛事采用五盘三胜制以外, 均使用三盘两胜制。女子比赛全部采用三盘两胜制。

2 研究方法

本文视比赛[2]为随机过程。

记 X_n 为当前比赛的比分，它属于状态空间集 S, S 包含本场比赛所有可能的比分。记时间 n 为目前已完成的比当前单位的比赛低一级的比赛的数目。例如，在研究一盘比赛时，n 即为比赛进行的局数。n 属于自然数集 $\mathbb{N}$。随机过程记作 $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$.

本文采用时间齐性的 Markov 链对于网球比赛进行建模。

Markov 链具有 **Markov 性质**：新状态仅和上一状态有关。实际上由于球员体力下降等各种因素，网球比赛是很难保证当前状态的转移和时间无关的，这里仅仅做一点理想化的讨论。

3 研究内容

我们这里理想化地认为，甲乙两个球员对阵时，每个球员的发球的赢球概率均相等，其中甲的记作 p，则乙的即为 $1-p$. 每个球员接发球赢球的概率也相等，其中甲的记作 q，则乙的即为 $1-q$. [3]

下面讨论在不同情况下球员赢得各种级别比赛的概率，以观察网球赛制的合理性。

3.1 Game: 局

每一局中，甲要不全是发球，要不全是接发球。这里不失一般性地以甲发球为例进行讨论[4]，因此甲每球获胜的概率均为 p.

[1]在现今的职业比赛中，一般除了决胜盘 (该盘胜负决定正常比赛的胜负的一盘)，均采用短盘制。

[2]这里的比赛包括局 (game), 盘 (set) 及场 (match).

[3]一般网球发球占很大优势，所以如果认为 p 和 q 相等，那么模型和实际的符合度会大幅下降。因此，本文不惜复杂化讨论，把发球和接发分开讨论，以获得和实际更加相符的结论。

[4]接发球局非常类似，只需把 p 换成 q 即可。

一局比赛的状态转移图如下图所示。

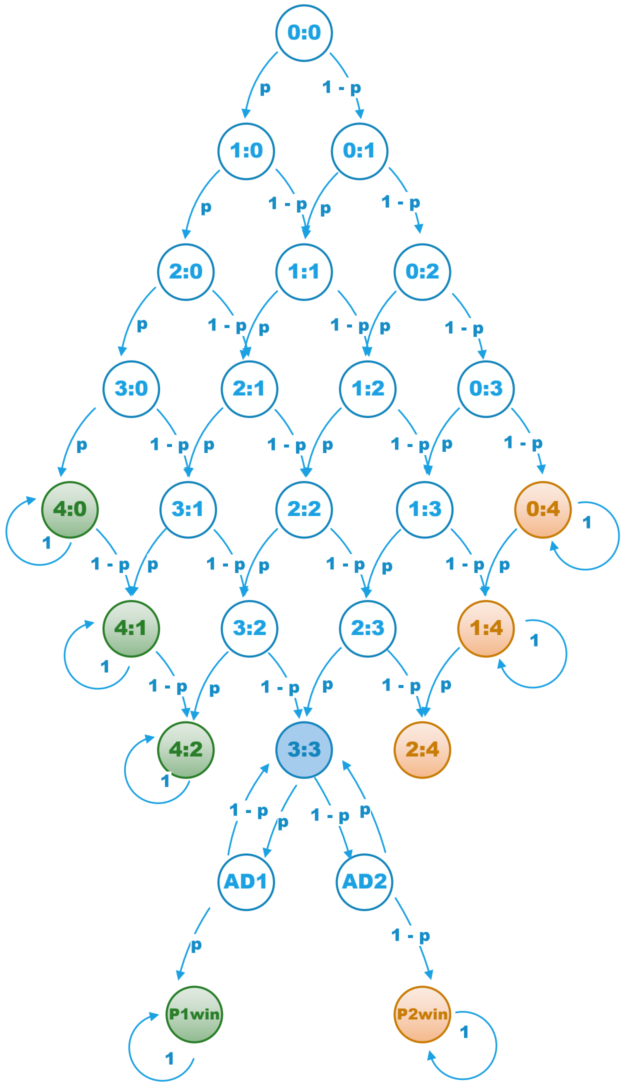

Figure 1: 一局比赛的状态转移图

图中蓝色外框的状态均为非常返态，绿色或黄色外框的均为常返态。绿色代表甲最终胜利的状态，黄色代表乙最终胜利的状态[5]。

下面开始计算甲获得本局比赛的胜利的概率。

记 $P(i:j)$ 表示最终比分为 $i:j$ 的概率。这里首先不考虑进入平分 (Deuce) 状态的比赛过程，即认为 $3:3$ 也是比赛的终态，可以计算出比赛进入平分状态的概率 $P(\text{Deuce}) = P(3:3)$。

[5]二者均为常返态、吸收态。

$$P(\text{P1 win}) = \sum_{i=0}^{2} P(4:i) + P(3:3) \cdot P(\text{P1 win}|\text{Deuce}) \tag{1}$$

而

$$P(4:i) = \left[\binom{4+i-1}{3} p^3 (1-p)^i\right] \cdot p \tag{2}$$

$$P(3:3) = \binom{6}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^3 \tag{3}$$

下面计算 $P(\text{P1 win}|\text{Deuce})$.

画出状态转移图如下图所示。

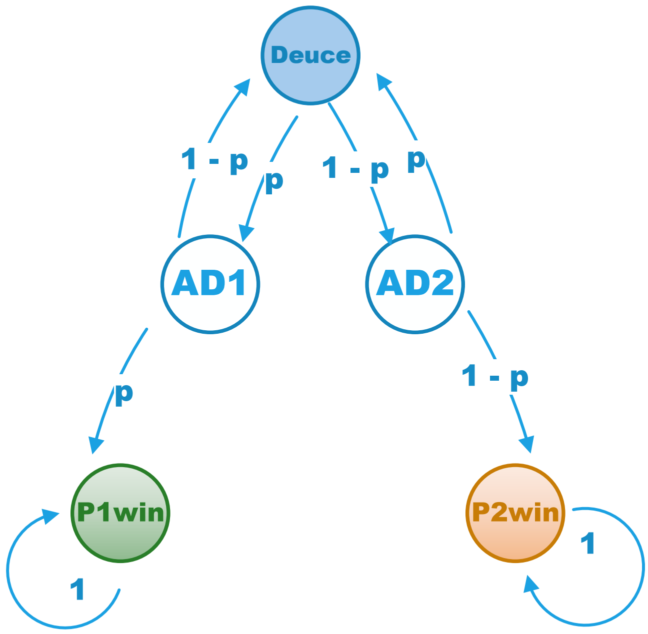

Figure 2: 进入平分之后一局比赛的状态转移图

分别记 Deuce, AD1, AD2, P1win, P2win 为 0,1,2,3,4 状态，得到状态转移矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 1-p & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

这是一个有限可约马尔可夫链，其平稳分布存在但不唯一。

但我们只需要计算从 0(Deuce) 状态出发，最终被 3(P1 win) 状态吸收的概率，即

$$P(\text{P1 win}|\text{Deuce}) = P_{03}^{\infty} \tag{5}$$

P^{∞} 可以通过计算机数值计算得到近似值。经过计算发现 P^{100} 已经基本收敛[6]，因此在接下来的计算机数值计算中均采取 P^{100} 作为 P^{∞} 的代表值。

让 p 遍历 0 至 1，分别计算各个概率值，代入式 (1) 得到最终甲获胜的概率，绘制出 $P(\text{P1 win})$ 随着 p 变化的曲线如下图所示，其中蓝色曲线代表有占先的赛制，黄色曲线代表无占先的赛制。

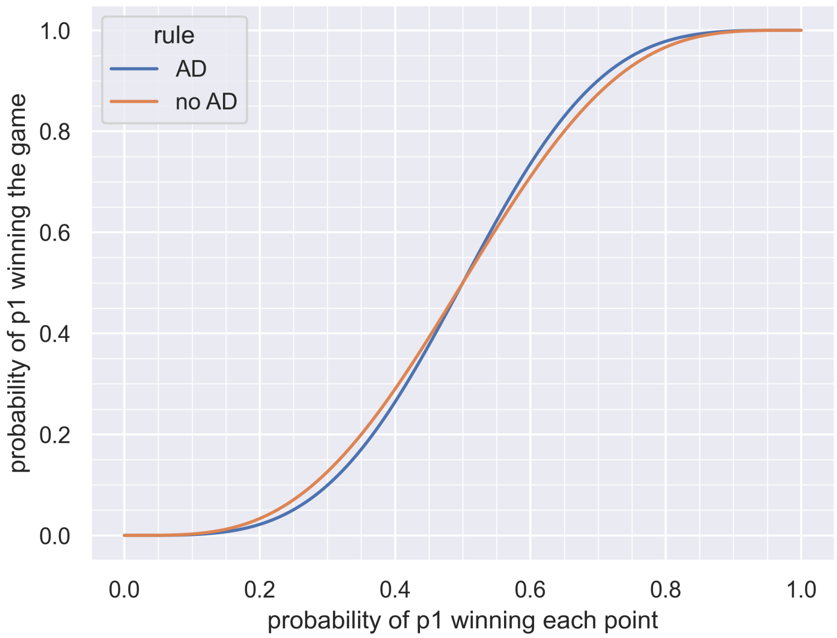

Figure 3: $P(\text{P1 win})$ 随着 p 变化的曲线

对于曲线进行一些定性的分析，我们可以得到一些很有趣的结论：

(a) 曲线的非线性性质导致，球员每一局获胜的概率，比每一球获胜的概率更加偏向于极端值 (0 或 1)。这其实是多局多胜制的一个普遍性质，也是设置这种赛制的初衷——降低不确定的因素，让本身能力强的球员更平稳地胜出。

(b) 有占先赛制曲线的非线性性质更强，即会让能力强的球员获胜的概率进一步提高，让比赛结果更能体现球员的水平，进一步降低了不确定性。

[6]这通过计算 $P^{100} - P^{1E9}$，发现得到的差值矩阵每个元素的差值均小于 $1E-6$，因此认为其已经基本收敛。

(c) 当球员每球获胜的概率越接近 0.5 时，比赛的不确定性越大。[7]

(d) 比赛是公平的，因为 $p = 0.5$ 时，$P(\text{P1 win})$ 恰为 0.5.

3.2 Set: 盘

下面我们来讨论球员在每一盘中获胜的概率。

这和局的讨论会有很大不同，因为在引言中笔者已经提到，盘中是双方轮流持发球局的，因此要区分 p 与 q，这使得 Markov 链的状态转移概率发生了变化.

这里不再给出 Markov 状态转移图示，只需把 Figure1 中偶数行的箭头改成 q 和 $1-q$，然后最后结束比分扩展至 $6:i$ 即可。

在区分 p 与 q 的情况下，$P(6:i)$ 的计算方法和式 (2) 略有不同，如下。

$$P(6:i) = \sum_{j=0}^{i} \left[\binom{k}{i-j} \binom{l}{j} p^{k-(i-j)} (1-p)^{i-j} q^{l-j} (1-q)^{j} \right] \cdot p^{\frac{1+(-1)^{i+1}}{2}} q^{\frac{1+(-1)^{i}}{2}} \tag{6}$$

其中 $k = \lceil \frac{6+i-1}{2} \rceil, l = 6+i-1-k$.
由此可以计算甲获胜的概率

$$P(\text{P1 win}) = \sum_{i=0}^{4} P(6:i) + P(\text{Deuce}) \cdot P(\text{P1 win}|\text{Deuce}) \tag{7}$$

而

$$P(\text{Deuce}) = P(6:5) \cdot (1-q) + P(5:6) \cdot q \tag{8}$$

3.2.1 长盘制

在长盘制中，选手将继续正常的比赛过程，直至有一方净胜两分为止。这很类似一局比赛中的平分之后的状态，这里一样地使用 Markov 过程对之进行建模。Markov 状态转移图如下图所示。

[7]这通过曲线的斜率可以看出: $\frac{\mathrm{d}P(\text{P1 win})}{\mathrm{d}p}$ 越大，$P(\text{P1 win})$ 对于 p 的微小波动就会更加敏感。

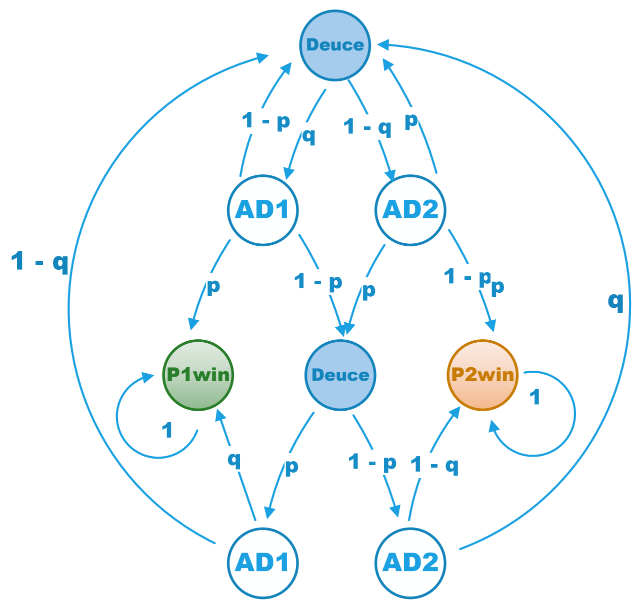

Figure 4: 长盘制中进入平分状态后的 Markov 状态转移图

下面通过 Markov 链的极限概率转移矩阵计算 $P(\text{P1 win}|\text{Deuce})$.

这里是 8 状态 Markov 过程。按照从上到下，从左到右的顺序，从 0 开始依次编号，给出状态转移矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0 & q & 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 1-p & 0 & 0 \\ 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

这是一个有限可约马尔可夫链，其平稳分布存在但不唯一。

和一局比赛类似，我们只需要计算从 0(Deuce) 状态出发，最终被 7(P1 win) 状态吸收的概率，即

$$P(\text{P1 win}|\text{Deuce}) = P_{07}^{\infty} \tag{10}$$

同样用 P^{100} 作为 P^{∞} 的代表值。

3.2.2 短盘制与抢七比赛

在短盘制中，平分之后进入**抢七比赛**。下面我们着重讨论抢七比赛中的获胜概率。[8]

抢七比赛从 0:0 开始，最先获得 7 分且净胜两分者获胜，讨论过程和长盘制每盘的比赛非常类似，这里只给出计算机仿真结果，具体过程略去。

值得注意的是抢七比赛的规则很独特，它的发球顺序是 $BAABBAA\cdots$（假设是 A 方在本盘比赛中先发球的情况）。笔者十分好奇为什么要如此设计，而不是选用 $BBAABBAA\cdots$ 或是 $AABBAABB\cdots$ 这样更加方便的规则。

下面笔者按照两种不同的比赛规则，分别计算并绘制出每盘胜率随着每球胜率的变化曲线（这里假设两名球员旗鼓相当，即 $p+q=1$）[9]，如下图所示，其中蓝色曲线代表现行的抢七规则，橙色曲线代表 $BBAABBAA\cdots$ 的假想规则。

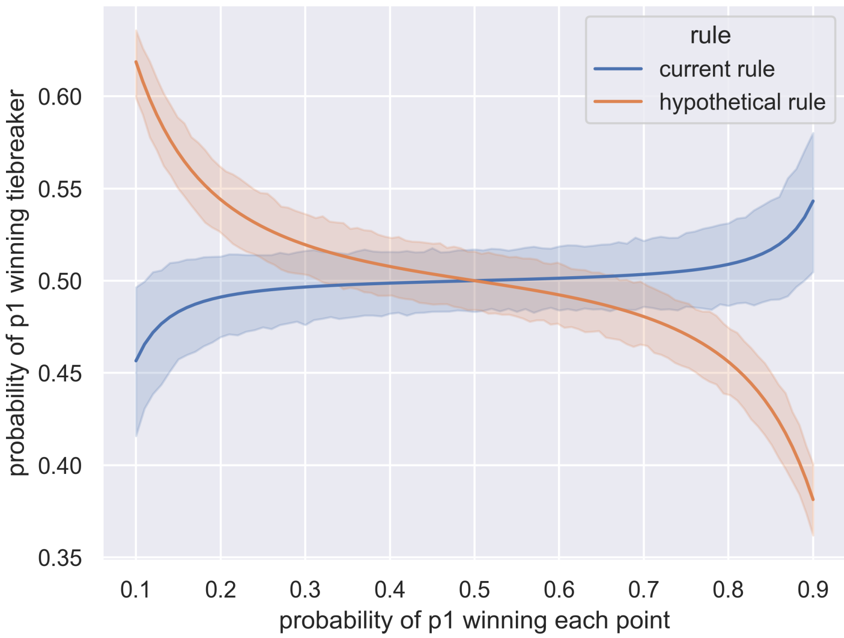

Figure 5: 不同抢七规则的对比

观察曲线可以发现，在现行抢七规则下，球员赢得抢七局的概率随着发球胜率的概率的变化而变化的幅度要更小。换句话说，现有规则可以更全面地反映球员的综合素质，而不仅仅是接发球，或者发球的水平。

曲线走势也是很合理的，在假想条件下，对手先连续发两球，此时自身接发球能力

[8]这也是笔者的一点私心，因为清华大学校内马杯比赛每一局都是按照抢七比赛的规则

[9]网球比赛中发球很占优势。所以不能认为旗鼓相当就是 $p=q=0.5$。这里用 $p+q=1$ 更为合理。

越强[10]，赢得抢七局的概率就越大，反之则输的概率越大。

综上所述，现行抢七局的规则更为合理。

以上讨论全部基于两名选手旗鼓相当的情况，下面我们研究当实力存在对比时，抢七比赛能否如实反映。

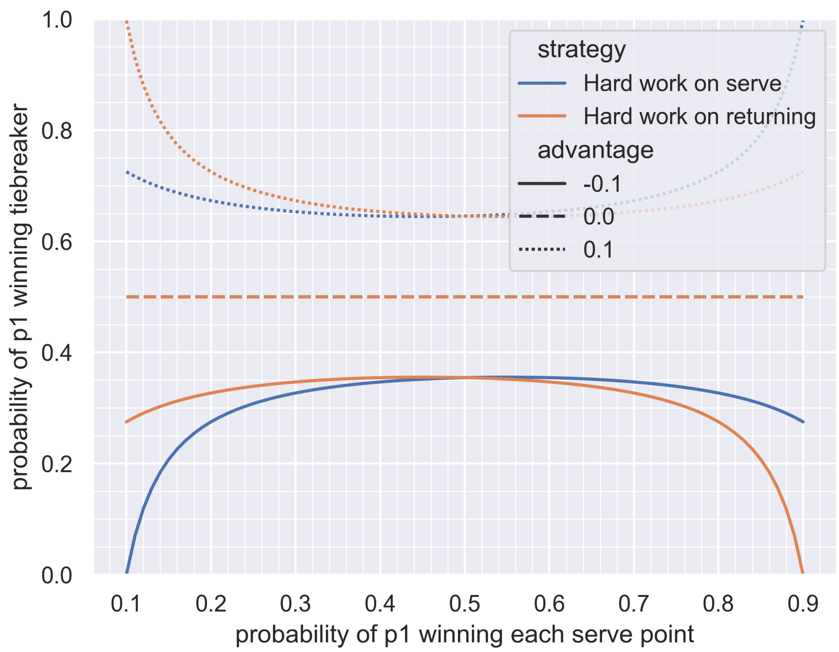

Figure 6: 抢七局实力对比产生的结果

图中 advantage 区分了甲选手相对乙是占优 (0.1)、旗鼓相当 (0.0)，还是劣势 (-0.1)，strategy 区分了甲选手的实力差异体现在发球 (蓝色)，还是接发球 (橙色)。

我们仔细分析曲线可以得到很有意思的结论。

(a) 观察曲线线型可以得出结论，当甲综合实力高于乙，其抢七局获胜的概率也就越大，并且这种概率的提升是高于综合实力的优势的。

(b) 观察曲线颜色可以得出结论，如果综合实力占优势，应该发展长板（$p > 0.5$ 就增加 p, $p < 0.5$ 就增加 q）如果综合实力处于劣势，应该平衡发展（补短板，$p < 0.5$ 就增大 p, $p > 0.5$ 就增加 q）这个可以用曲线极值看出来。

3.2.3 整盘胜率

我们首先研究，整盘胜率随着发球局每球胜率的变化而变化的趋势。

[10]i.e. $q = 1 - p$ 越大，即 p 越小，约靠近坐标横轴的左侧。

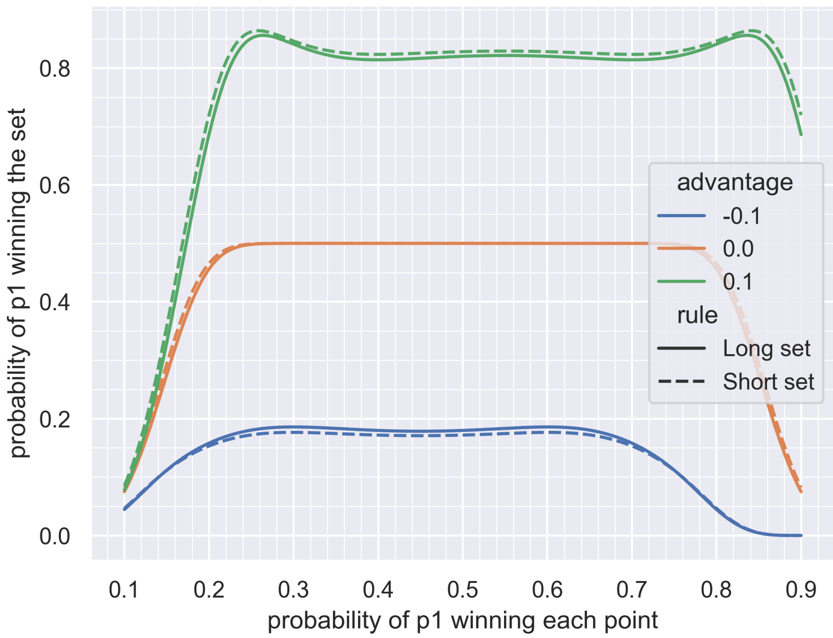

Figure 7: 整盘胜率随着发球胜率的变化

可以看出在 $p = 0.5$ 附近，曲线十分稳定。可以看出，整盘比赛可以很好地体现球员综合水准。[11]同时我们也可以看到，长盘制和短盘制的胜率区别不大，这也就说明抢七比赛的合理性：既能缩短比赛时间，还能保持比赛结果的稳定性。

下面我们研究实力对比对于整盘比赛胜率的影响，如下图所示。

[11]这里的综合水准指 $p+q$ 和 1 的大小关系。如果 $p+q$ 比较大，说明对手的总胜率 $(1-p)+(1-q)$ 比较小。这个可以消除球员属性的影响。例如，一个球员很擅长发球，但是接发球弱一点，综合来看和另一个发球和接发球都中规中矩的球员综合实力相等。这应该在比赛中综合地体现，即这两个球员获胜的概率都大约是 50%，这样的赛制才能说体现球员综合实力。

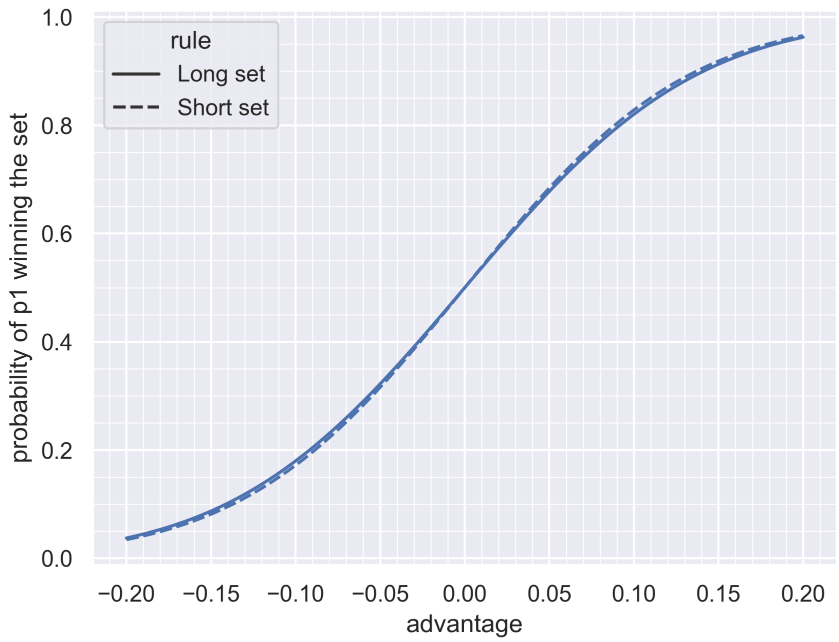

Figure 8: 实力对比对于整盘比赛胜率的影响

可以看出曲线具有非线性性质，换句话说也就是能很好地放大实力对比的因素。

3.3 Match: 整场比赛

多盘多胜制，这个在第 1 节的讨论中可以定性地看出，会提供一种非线性性质，让较强的选手获胜概率进一步增大，进而进一步减少比赛的不确定性。这里不再定量讨论，感兴趣的读者可以自行推导。只需要将第 1 节中的部分结论中的每球胜率换成第 3 节中每盘胜率即可。

4 总结与思考

网球比赛的赛制，看似复杂，但仔细深究之后，不难发现其智慧所在。总体说来，各种体育比赛的赛制基本类似，都是通过多局多胜，来降低比赛的不确定性，让比赛结果能够以更高的置信度反映出选手的真实水平。

校内马杯赛事，赛制和职业赛事完全不同，比赛仅一盘，并且每盘只有 6 局，每局都是抢七，没有占先。这种比赛相对职业赛事，不确定因素必然更强，再加上球员热身不足方面的因素，使得比赛结果充满未知。但鉴于校内比赛，时间紧凑，按照职业赛事的赛制打也不现实，因此也是一种权宜之计。

参考文献

[1] Tennis - Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Tennis

[2] Ross, S. M., Kelly, J. J., Sullivan, R. J., Perry, W. J., Mercer, D., Davis, R. M., ... & Bristow, V. L. (1996). Stochastic processes (Vol. 2). New York: Wiley.