Trier avec une pile

(preuves mathématiques)

Tout nombre et chiffre dans ce document est un nombre naturel

Soit L une liste ordonnée de N livres numérotés de 1 à N en fonction de leur taille en ordre croissante.

Exemple : $[1, 3, 4, 2]$ (ce qui est différente de $[1, 4, 3, 2]$)

Il y a donc $N!$ listes différentes possibles.

On dispose de 3 listes de livres pour trier les listes :

I, la liste initiale, M, la liste intermédiaire et F, la liste finale.
Le but est en commençant avec une liste L, d'avoir à la fin une liste F triée selon les règles suivantes :

-On ne peut que déposer un livre à la droite (fin) de I à la droite de M ou à la droite de F.

-On ne peut que déposer un livre à la droite de M à la droite de F.

Exemple : Trions la liste $L = [2, 3, 1]$:

Début : $I = [2, 3, 1]; M = [\,]; F = [\,]$
Etape 1 : $I = [2, 3]; M = [\,]; F = [1]$
Etape 2 : $I = [2]; M = [3]; F = [1]$
Etape 3 : $I = [\,]; M = [3]; F = [1, 2]$
Etape 4 : $I = [\,]; M = [\,]; F = [1, 2, 3]$

Question I : Quelle sorte de listes peuvent être triées ?

Notation : On note $L_{x\rightarrow}$ la sous-liste de L contentant tous les livres à droite de x (non inclus). On note $L_{\leftarrow x}$ la sous-liste de L contentant tous les livres à gauche de x (non inclus).

On note aussi $L_{x\leftrightarrow y}$ la sous-liste de L contentant tous les livres à droite de x et à gauche de y (les 2 non-inclus)

Exemple : Soit $L = [1, 4, 3, 5, 2]$, $L_{\leftarrow 3} = [1, 4]$ et $L_{3\rightarrow} = [5, 2]$

Hypothèse : Critère de non-triabilité :

Soit L une liste de N livres,
L n'est pas triable ⇔ $\exists\ A, B, C \in L$ tels que $A \in L_{\leftarrow B},\ C \in L_{B\rightarrow}$ et que $A < C < B$.

Corolaires de l'hypothèse : Critère de triabilité :

Soit L une liste de N livres,
L est triable ⇔ $\nexists\ A, B, C \in L$ tels que $A \in L_{\leftarrow B},\ C \in L_{B\rightarrow}$ et que $A < C < B$:

C'est-à-dire : $\forall\ B\ \in L,\ \ \forall\ C\ \in L_{B\rightarrow},$

on a soit $C > B$,

soit $C < B$ ***ET*** $C < \min\,(L_{\leftarrow B})$. (car si $\forall\ A\ \in L_{\leftarrow B}, C < A \Rightarrow\ C <\ \min\,(L_{\leftarrow B})$)

Démonstration qu'il est suffisant :

Pour $N < 3$: Les listes [ ], $[1]$, $[1, 2]$ et $[2, 1]$ sont triables.

Pour $N \geq 3$: Soit L une liste N livres, et $A, B, C\ \in L$, tels que $A \in L_{\leftarrow B},\ C \in L_{B\rightarrow}$ et que $A < C < B$. De plus, on s'intéresse au dernier tel triplet présent dans L.

on peut décomposer L en 7 différentes parties :

$L_{\leftarrow A},\ A,\ L_{A\leftrightarrow B},\ B,\ L_{B\leftrightarrow C}, C$, et $L_{C\rightarrow}$ ($L_{\leftarrow A},\ L_{A\leftrightarrow B}, L_{B\leftrightarrow C}$, et $L_{C\rightarrow}$ peuvent être vides)

$L_{\leftarrow A}$	A	$L_{A\leftrightarrow B}$	B	$L_{B\leftrightarrow C}$	C	$L_{C\rightarrow}$

Essayons donc de trier L :

Début : $I = [L_{\leftarrow A},\ A,\ L_{A\leftrightarrow B},\ B,\ L_{B\leftrightarrow C}, C, L_{C\rightarrow}\ ]; M = [\ ]; F = [\ ]$

En premier, on trie $L_{C\rightarrow}$. Si $1 \in L_{C\rightarrow}$, on peut déposer au moins 1 livre sur F, sinon, on dépose tous les livres sur M. (puisque notre but est d'avoir une liste ordonnée en ordre croissante commençant par 1 à la fin, donc 1 doit être le premier livre à entrer dans F)

Etape 1 : $I = [L_{\leftarrow A},\ A,\ L_{A\leftrightarrow B},\ B,\ L_{B\leftrightarrow C}, C,]; M = [L_{C\rightarrow}]; F = [\ 1?, \dots]$

Puis, on trie C. $C > A$ ainsi C doit au moins attendre que A soit dans F pour que C doit être déposé dans F. Donc, on dépose C dans M.

Etape 2 : $I = [L_{\leftarrow A},\ A,\ L_{A\leftrightarrow B},\ B,\ L_{B\leftrightarrow C}]; M = [L_{C\rightarrow},\ C]; F = [\ 1?, \dots]$

Puis, on trie $L_{B\leftrightarrow C}$. On le trie de la même manière qu'on a trié $L_{C\rightarrow}$.

Etape 3 : $I = [L_{\leftarrow A},\ A,\ L_{A\leftrightarrow B},\ B]; M = [L_{C\rightarrow},\ C,\ L_{B\leftrightarrow C}]; F = [\ 1?, \dots]$

Puis, on trie B. $B > A$, donc comme C, B doit attendre que A soit dans F.

Etape 4 : $I = [L_{\leftarrow A},\ A,\ L_{A\leftrightarrow B}]; M = [L_{C\rightarrow},\ C,\ L_{B\leftrightarrow C},\ B]; F = [\ 1?, \dots]$

Puis, on trie $L_{A\leftrightarrow B}$ de la même manière que $L_{B\leftrightarrow C}$.

Etape 5 : $I = [L_{\leftarrow A},\ A]; M = [L_{C\rightarrow},\ C,\ L_{B\leftrightarrow C},\ B,\ L_{A\leftrightarrow B}]; F = [\ 1?, \dots]$

Puis, on trie A. $A < B$ et $A < C$, ainsi A ne doit attendre ni B, ni C. Ainsi, on peut le déposer en F si le dernier livre de F est $(A - 1)$ ou si $A = 1$. Sinon on dépose A dans M.

Etape 5 : $I = [L_{\leftarrow A}]; M = [L_{C\rightarrow},\ C,\ L_{B\leftrightarrow C},\ B,\ L_{A\leftrightarrow B},\ A]; F = [\ 1?, \dots]$

ou

Etape 5 : $I = [L_{\leftarrow A}]; M = [L_{C\rightarrow},\ C,\ L_{B\leftrightarrow C},\ B,\ L_{A\leftrightarrow B}]; F = [\ 1?, \dots,\ A]$

Dans les 2 cas, il nous reste qu'à trier $L_{\leftarrow A}$. On va le trier de la même manière que $L_{A\leftrightarrow B}$.

Etape 6 : $I = [\ ]; M = [L_{C\rightarrow},\ C,\ L_{B\leftrightarrow C},\ B,\ L_{A\leftrightarrow B,}\ A,\ L_{\leftarrow A}]; F = [\ 1?, \dots]$

ou

Etape 6 : $I = [\ ]; M = [L_{C\rightarrow},\ C,\ L_{B\leftrightarrow C},\ B,\ L_{A\leftrightarrow B},\ L_{\leftarrow A}]; F = [\ 1?, \dots,\ A, \dots\ ]$

Maintenant que I est vide, le seul mouvement possible est de déposer les livres à droite de M à la droite de F.

Etape finale : $I = [\,]; M = [\,]; F = [\,1, \dots, A, \dots, B, \dots, C, \dots\,]$

Or, à la fin, on a toujours le triplet A, B, C dans le même ordre. Mais $A < C < B$. Ainsi la liste F n'est pas dans l'ordre, et donc L n'est pas triable.

Démonstration qu'il est nécessaire :

Supposons que $\exists\ L'$ non triable tel qu'elle n'obéit pas au critère de non-triabilité. Elle obéit donc à son opposé, c'est-à-dire :
$\forall\ B\ \in L',\ \ \forall\ C\ \in L'_{B\rightarrow}$,
on a soit $C > B$,
soit $C < B$ ***ET*** $C < \min\,(L'_{\leftarrow B})$.

On impose que $\min(L'_{\leftarrow B}) = +\infty$ si $L_{\leftarrow B}$ est vide.

Si on impose B comme le livre directement à gauche du livre le plus à droite, nommé C, on peut décomposer L' en 3 parties :

$L'_{\leftarrow B}$	B	C

Essayons donc de trier L'.

Début : $I = [L'_{\leftarrow B},\ B,\ C\,]; M = [\,]; F = [\,]$

En premier, on trie C.

si $C > B$, C doit être déposé dans M, car il faut que B soit dans F pour que C y soit déposé.

si $C < B$ ***ET*** $C < \min\,(L'_{\leftarrow B})$, on peut le déposer directement dans F car il ne doit attendre qu'aucun livre dans $L'_{\leftarrow C}$. Ceci veut dire aussi que le C le plus à droite qui obéit cette condition est $C = 1$. Et donc, $\forall\, X \in L'_{1\rightarrow},\ X < L'_{X\rightarrow}$ et $X > L'_{1\leftrightarrow X}$. (tout nombre à droite de 1 est en ordre croissante). Puis, on vérifie si le livre le plus à droite de M est le prochain livre $(C + 1)$. Si oui, on le dépose en F, et puis on vérifie encore une fois. Sinon, on passe au C suivant. Ce veut dire aussi que jusqu'à maintenant, tous les livres déposés en M sont en ordre décroissante.

Etape 1 :

Si $C = 1,\ I = [L'_{\leftarrow B},\ B]\,;\, M = [\,];\, F = [1]$

Sinon, $I = [L'_{\leftarrow B},\ B]\,;\, M = [C];\, F = [\,]$

Puis, on trie B. Si on refait l'étape 1, avec $C = B$ et B le livre directement à gauche de C, jusqu'à arriver à la $C < B$ ***ET*** $C < \min(L'_{\leftarrow B})$ (donc $C = 1$), on arrive à $I = [L'_{\leftarrow B},\ B]\,;\, M = [\dots(ordre\ décroissante)];\, F = [1]$ car tous les livres à droite de 1 sont en ordre croissante.
Puis, si on continue à refaire l'étape 1, on arrive à la fin avec

$$I = [\,]\,;\, M = [\,N, \dots(ordre\ décroissante)];\, F = [1, \dots(ordre\ croissante)]$$

Puis, si on dépose tous les livres de M en F et on a ainsi

$F = [1, 2, 3 \dots, N]\ (ordre\ croissante)$. Ainsi, à la fin, la liste est triée. Or, L' est non triable, ce qui est absurde. Ainsi la supposition du départ est fausse, $\nexists\, L'$ non triable tel qu'elle n'obéit pas au critère de non-triabilité. Le critère de non triabilité est donc nécessaire.

Par conséquent, on a aussi prouvé que son opposé est le critère de triabilité :

L est triable ⇔ $\forall\, B \in L,\ \ \forall\, C \in L_{B\rightarrow}$,
on a soit $C > B$,
soit $C < B$ ***ET*** $C < \min(L_{\leftarrow B})$. Avec $\min([\,]) = +\infty$

Question II : Combien de listes de N livres peuvent être triées ?

Notation : On note L_N le nombre de listes triables de longueur N. On note L_N^K le nombre de listes triables de longueur N se terminant par K, avec $1 \leq K \leq N$

On a ainsi $L_0 = 1$ car il n'y a qu'une seule liste avec 0 livres (la liste vide), et elle est triable. $L_1 = 1$ pour la même raison.

Une liste de longueur N se termine toujours par un K tel que $1 \leq K \leq N$, ainsi on a : $L_N = L_N^1 + L_N^2 + \cdots + L_N^{N-1} + L_N^N = \sum_{i=1}^{N} L_N^i$

Soit L une liste triable de longueur N,

On note M_k à la position k, on a donc

$L =$	$L_{\leftarrow M_{N-1}}$	M_{N-1}	M_N

Pour respecter le critère de triabilité démontré dans la Question I, on a soit :

$M_{N-1} < M_N$, soit $M_{N-1} > M_N$ et $M_N < \min(L_{\leftarrow M_{N-1}})$.

Si $M_N > 1$, $M_{N-1} < M_N$ car si $M_{N-1} > M_N$, $1 \in L_{\leftarrow M_{N-1}}$ et donc $\min\left(L_{\leftarrow M_{N-1}}\right) = 1$, ce qui est impossible.

Si $M_{N-1} = 1$, et $M_N > 1$, donc $M_{N-2} \in [2; N] \setminus M_N$.

Dans ce cas, si $M_{N-2} > M_N$, $\exists\, K \in L_{\leftarrow M_{N-2}}$ tel que $K < M_N$.
Ceci voudrait dire la liste n'est pas triable (critère de non-triabilité, avec $A = K,\ B = M_{N-2},\ C = M_N$.

Ceci veut dire que si L se termine par K, $L_{M_{N-(K-1)} \leftrightarrow K}$ doit être une liste triable de longueur $K-1$. Il y a donc L_{K-1} de ces listes possibles.

En appliquant le même raisonnement à $L_{\leftarrow M_{N-(K-1)}}$ est une liste triable de longueur $N-K$ avec son livre le plus petit étant $K+1$. Si on soustrait K de tous ces livres, on retrouve une liste triable de longueur $N-K$ normale. Il y a donc L_{N-K} de ces listes possibles.

$$L = [L_{\leftarrow M_{N-(K-1)}}, L_{M_{N-K} \leftrightarrow M_N}, M_N\ ]$$

Ainsi, $L_N^K = L_{N-K} \times L_{K-1}$

Et donc, $L_N = L_N^1 + L_N^2 + \cdots + L_N^{N-1} + L_N^N = \sum_{i=1}^{N} L_N^i$

$$= L_{N-1} \times L_0 + L_{N-2} \times L_1 + \cdots + L_1 \times L_{N-2} + L_0 \times L_{N-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} L_{N-1-i} \times L_i$$

Si on travaille avec $N+1$ comme c'est habituel avec des formules récursives, on a : $L_{N+1} = \sum_{i=0}^{N} L_{N-i} \times L_i$

Et ceci, est simplement la formule récursive du nombre de Catalan, $C(n)$

Ainsi, $L_N = C(n)$

Question III : Que se passe-t-il si on autorise de faire du triage en sériée ?

Si L est triable, en la triant, on aura une liste triée. Et une liste triée, est toujours triable en déposant tout $K \in L$ dans M, et puis déposant tout K dans F.

Si L n'est pas triable, c'est qu'elle obéit le critère de non triabilité ($A < C < B$), or on peut remarquer que dans la première démonstration de la Question I, on a toujours ce triplet dans le même ordre. Ainsi, une liste non triable ne le sera jamais.

Freitas Armando
Aguezlane Adam
Mullenders Liam
Dr Septimus
2023