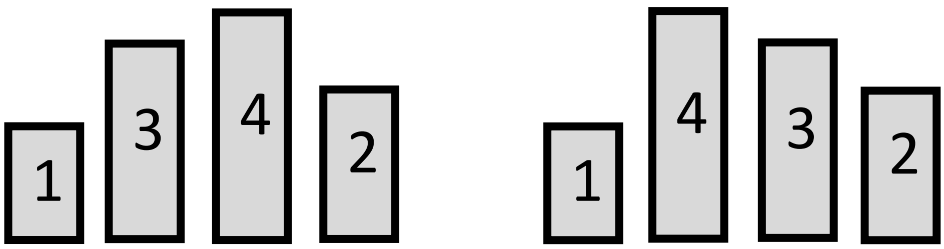
# Trier avec une pile

# (preuves mathématiques)

*Tout nombre et chiffre dans ce document est un nombre naturel*

Soit $L$ une liste ordonnée de $N$ livres numérotés de 1 à $N$ en fonction de leur taille en ordre croissante.

Exemple : $[1, 3, 4, 2]$ (ce qui est différente de $[1, 4, 3, 2]$ )




Il y a donc $N!$ listes différentes possibles.

On dispose de 3 listes de livres pour trier les listes :

$I$, la liste initiale, $M$, la liste intermédiaire et $F$, la liste finale.

| $I$ | $M$ | $F$ |
|---|---|---|

Le but est en commençant avec une liste $L$, d'avoir à la fin une liste $F$ triée selon les règles suivantes :

-On ne peut que déposer un livre à la droite (fin) de $I$ à la droite de $M$ ou à la droite de $F$.

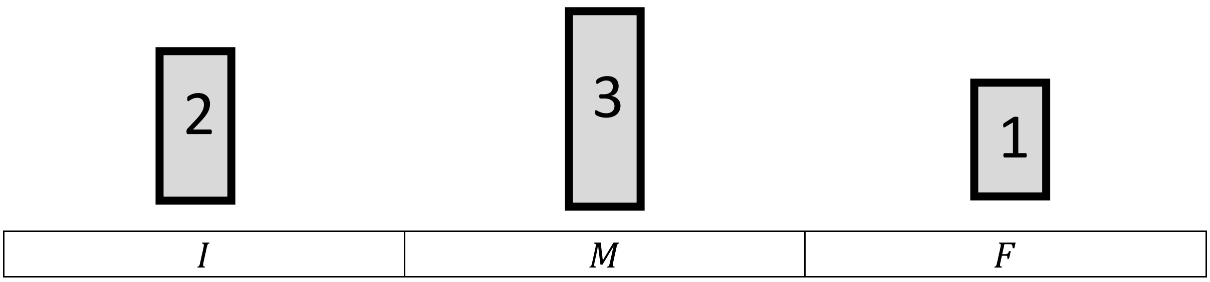
-On ne peut que déposer un livre à la droite de $M$ à la droite de $F$.

Exemple : Trions la liste $L = [2,3,1]$ :

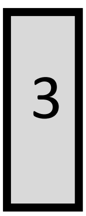
Début : $I = [2,3,1]; M = [\ ]; F = [\ ]$

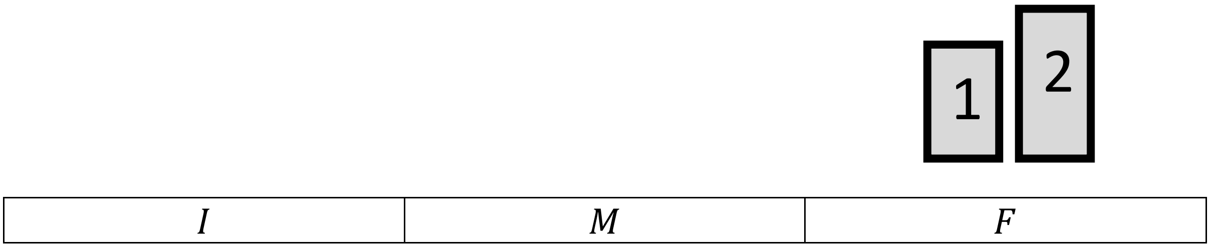

Etape 1 : $I = [2,3]; M = [\ ]; F = [1]$


Etape 2 : $I = [2]; M = [3]; F = [1]$

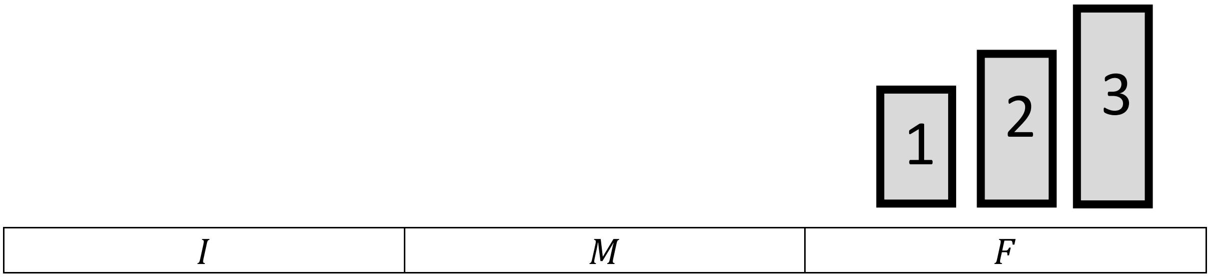



Etape 3 : $I = [\ ]; M = [3]; F = [1,2]$






Etape 4 : $I = [\,]; M = [\,]; F = [1, 2, 3]$

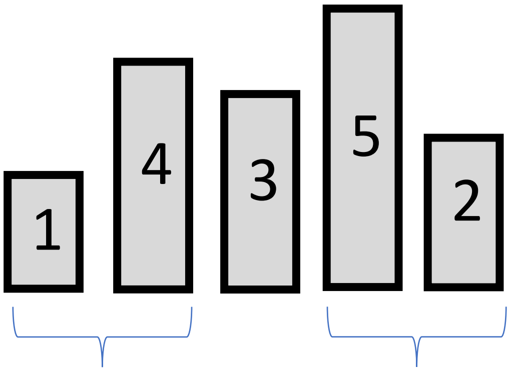



## <u>Question I</u> : Quelle sorte de listes peuvent être triées ?

**<u>Notation</u>** : On note $L_{x\rightarrow}$ la sous-liste de $L$ contenant tous les livres à droite de $x$ (non inclus). On note $L_{\leftarrow x}$ la sous-liste de $L$ contenant tous les livres à gauche de $x$ (non inclus).

On note aussi $L_{x\leftrightarrow y}$ la sous-liste de $L$ contenant tous les livres à droite de $x$ et à gauche de $y$ (les 2 non-inclus)

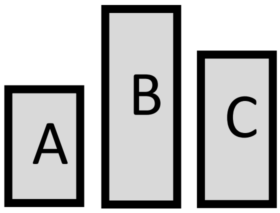
Exemple : Soit $L = [1, 4, 3, 5, 2]$, $L_{\leftarrow 3} = [1, 4]$ et $L_{3\rightarrow} = [5, 2]$




$L_{\leftarrow 3} = [1, 4]$ $L_{3\rightarrow} = [5, 2]$

**<u>Hypothèse :</u> Critère de non-triabilité :**

Soit $L$ une liste de $N$ livres,
$L$ n'est pas triable ⇔ $\exists\ A, B, C \in L$ tels que $A \in L_{\leftarrow B},\ C \in L_{B\rightarrow}$ et que $A < C < B$.




**<u>Corolaires de l'hypothèse :</u> Critère de triabilité :**

Soit $L$ une liste de $N$ livres,
$L$ est triable ⇔ $\nexists\ A, B, C \in L$ tels que $A \in L_{\leftarrow B},\ C \in L_{B\rightarrow}$ et que $A < C < B$ :

C'est-à-dire : $\forall\ B\ \in L,\ \ \forall\ C\ \in L_{B\rightarrow},$

on a soit $C > B$,

soit $C < B$ $\boldsymbol{ET}$ $C < \min(L_{\leftarrow B})$. (car si $\forall\ A\ \in L_{\leftarrow B}, C < A \Rightarrow\ C <\ \min(L_{\leftarrow B})$ )

**<u>Démonstration qu'il est suffisant :</u>**

Pour $N < 3$: Les listes [ ], [1], [1, 2] et [2, 1] sont triables.

Pour $N \geq 3$: Soit $L$ une liste $N$ livres, et $A, B, C\ \in L$, tels que $A \in L_{\leftarrow B},\ C \in L_{B\rightarrow}$ et que $A < C < B$. De plus, on s'intéresse au dernier tel triplet présent dans $L$.

on peut décomposer $L$ en 7 différentes parties :

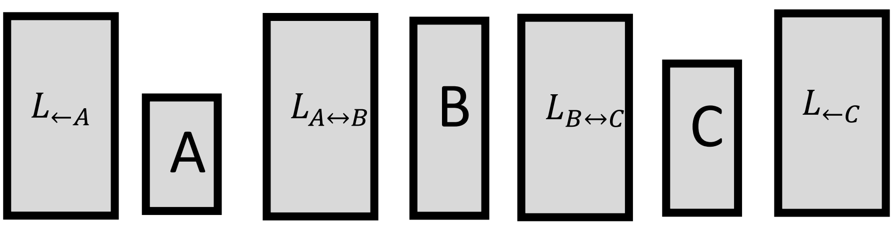
$L_{\leftarrow A},\ A,\ L_{A\leftrightarrow B},\ B,\ L_{B\leftrightarrow C}, C,$ et $L_{C\rightarrow}$ ($L_{\leftarrow A},\ L_{A\leftrightarrow B}, L_{B\leftrightarrow C}$, et $L_{C\rightarrow}$ peuvent être vides)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_{\leftarrow A}$ | $A$ | $L_{A\leftrightarrow B}$ | $B$ | $L_{B\leftrightarrow C}$ | $C$ | $L_{C\rightarrow}$ |

Essayons donc de trier $L$ :

Début : $I\ =\ [L_{\leftarrow A},\ A,\ L_{A\leftrightarrow B},\ B,\ L_{B\leftrightarrow C}, C, L_{C\rightarrow}\ ]; M = [\ ]; F = [\ ]$

$I$ :



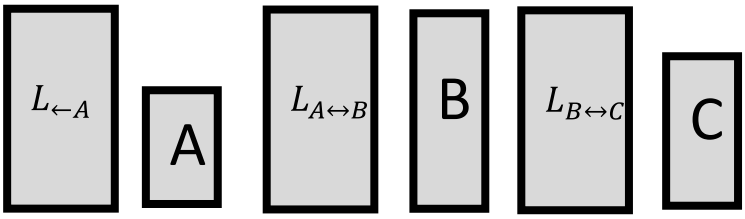
$M$:

$F$:

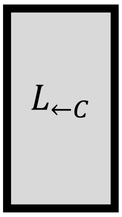
En premier, on trie $L_{C\rightarrow}$. Si $1 \in L_{C\rightarrow}$, on peut déposer au moins 1 livre sur $F$, sinon, on dépose tous les livres sur $M$. (puisque notre but est d'avoir une liste ordonnée en ordre croissante commençant par 1 à la fin, donc 1 doit être le premier livre à entrer dans $F$)

Etape 1 : $I\ =\ [L_{\leftarrow A},\ A,\ L_{A\leftrightarrow B},\ B,\ L_{B\leftrightarrow C}, C, ]; M = [L_{C\rightarrow}]; F = [\ 1?, \ldots]$

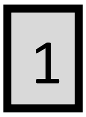
$I$ :




$M$:



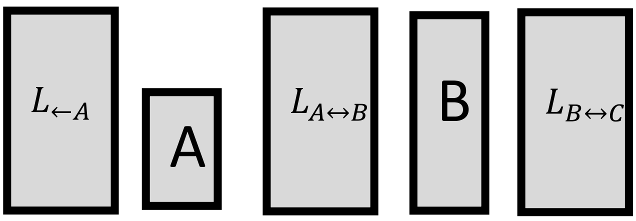

$F$:



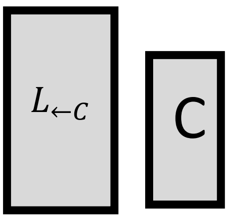

Puis, on trie $C$. $C > A$ ainsi $C$ doit au moins attendre que $A$ soit dans $F$ pour que $C$ doit être déposé dans $F$. Donc, on dépose $C$ dans $M$.

Etape 2 : $I\ =\ [L_{\leftarrow A},\ A,\ L_{A\leftrightarrow B},\ B,\ L_{B\leftrightarrow C}]; M = [L_{C\rightarrow},\ C]; F = [\ 1?, \ldots]$

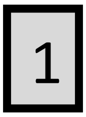
$I$ :




$M$:



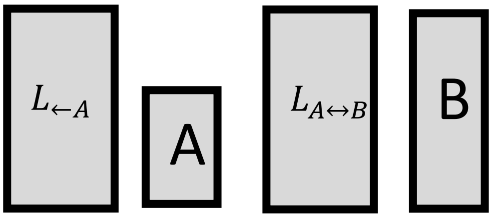
$F$:



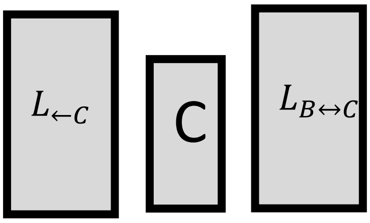

Puis, on trie $L_{B\leftrightarrow C}$. On le trie de la même manière qu'on a trié $L_{C\rightarrow}$.

Etape 3 : $I = [L_{\leftarrow A},\ A,\ L_{A\leftrightarrow B},\ B]; M = [L_{C\rightarrow},\ C,\ L_{B\leftrightarrow C}]; F = [\ 1?\, , \ldots]$

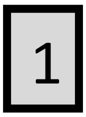
$I$ :




$M$:



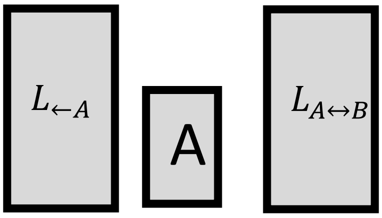

$F$:



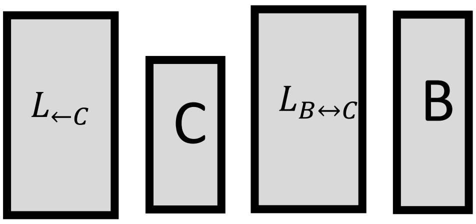

Puis, on trie $B$. $B > A$, donc comme $C$, $B$ doit attendre que $A$ soit dans $F$.

Etape 4 : $I = [L_{\leftarrow A},\ A,\ L_{A\leftrightarrow B}]; M = [L_{C\rightarrow},\ C,\ L_{B\leftrightarrow C},\ B]; F = [\ 1?\, , \ldots]$

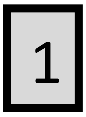
$I$ :




$M$:



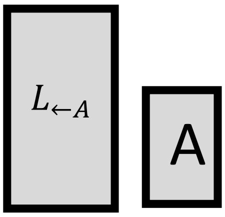
$F$ :



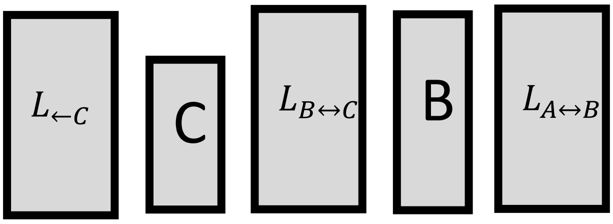

Puis, on trie $L_{A\leftrightarrow B}$ de la même manière que $L_{B\leftrightarrow C}$.

Etape 5 : $I = [L_{\leftarrow A},\ A]; M = [L_{C\rightarrow},\ C,\ L_{B\leftrightarrow C},\ B,\ L_{A\leftrightarrow B}]; F = [\ 1?, \dots]$

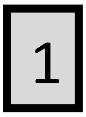
$I$ :




$M$ :



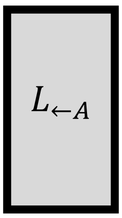

$F$ :



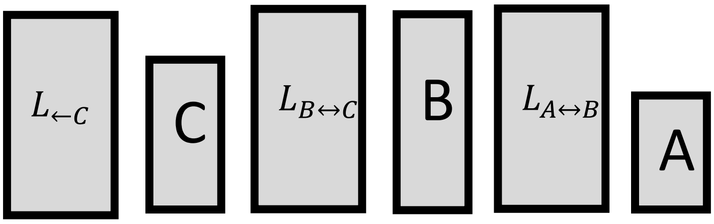

Puis, on trie $A$. $A < B$ et $A < C$, ainsi A ne doit attendre ni $B$, ni $C$. Ainsi, on peut le déposer en $F$ si le dernier livre de $F$ est $(A-1)$ ou si $A = 1$. Sinon on dépose $A$ dans $M$.

Etape 5 : $I = [L_{\leftarrow A}]; M = [L_{C\rightarrow},\ C,\ L_{B\leftrightarrow C},\ B,\ L_{A\leftrightarrow B},\ A]; F = [\ 1?, \dots]$

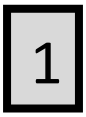
$I$ :



$M$:



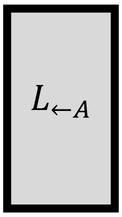

$F$:



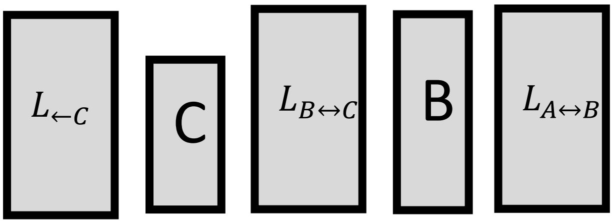

ou

Etape 5 : $I = [L_{\leftarrow A}]; M = [L_{C\rightarrow},\ C,\ L_{B\leftrightarrow C},\ B,\ L_{A\leftrightarrow B}]; F = [\,1?\,, \dots\,,\ A]$

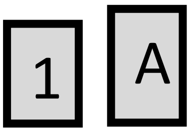
$I$ :




$M$:




$F$:

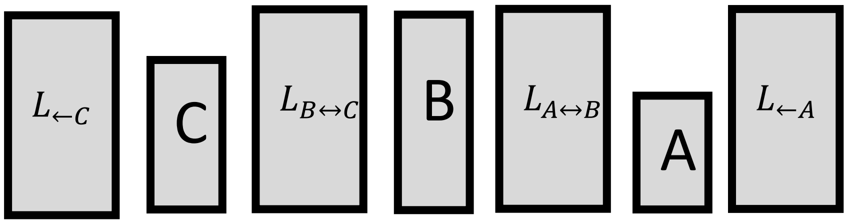



Dans les 2 cas, il nous reste qu'à trier $L_{\leftarrow A}$. On va le trier de la même manière que $L_{A\leftrightarrow B}$.

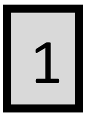
Etape 6 : $I = [\ ]; M = [L_{C\rightarrow},\ C,\ L_{B\leftrightarrow C},\ B,\ L_{A\leftrightarrow B},\ A,\ L_{\leftarrow A}]; F = [\,1?\,, \dots]$

$I$ :

$M$:




$F$:

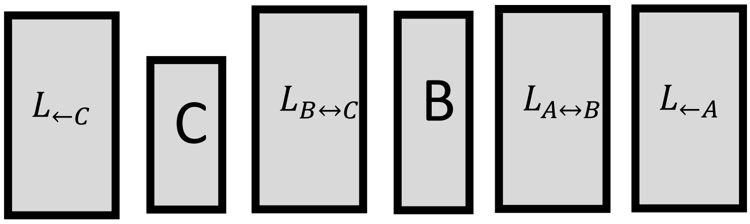



ou

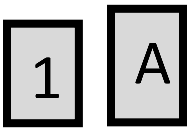
Etape 6 : $I = [\,]; M = [L_{C\rightarrow},\ C,\ L_{B\leftrightarrow C},\ B,\ L_{A\leftrightarrow B},\ L_{\leftarrow A}]; F = [\,1?, \ldots ,$ $A, \ldots\,]$

$I$ :

$M$:




$F$:



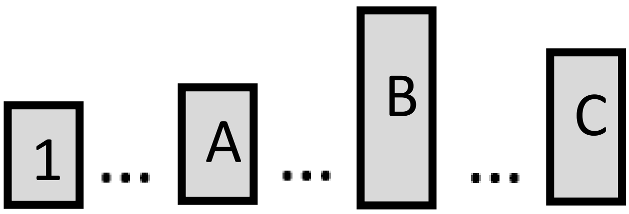

Maintenant que $I$ est vide, le seul mouvement possible est de déposer les livres à droite de $M$ à la droite de $F$.

Etape finale : $I = [\,]; M = [\,]; F = [\,1, \ldots, A, \ldots, B, \ldots, C, \ldots\,]$

$I$ :

$M$:

$F$ :



Or, à la fin, on a toujours le triplet $A, B, C$ dans le même ordre. Mais $A < C < B$. Ainsi la liste $F$ n'est pas dans l'ordre, et donc $L$ n'est pas triable.

**<u>Démonstration qu'il est nécessaire :</u>**

Supposons que $\exists\ L'$ non triable tel qu'elle n'obéit pas au critère de non-triabilité. Elle obéit donc à son opposé, c'est-à-dire :
$\forall\ B\ \in L',\ \ \forall\ C\ \in L'_{B\rightarrow},$
on a soit $C > B$,
soit $C < B$ ***ET*** $C < \min\,(L'_{\leftarrow B})$.

On impose que $\min(L'_{\leftarrow B}) = +\infty$ si $L_{\leftarrow B}$ est vide.

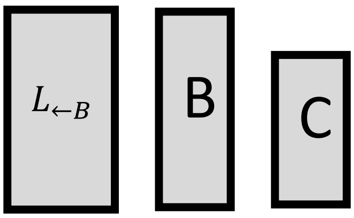
Si on impose $B$ comme le livre directement à gauche du livre le plus à droite, nommé $C$, on peut décomposer $L'$ en 3 parties :

| | | |
|---|---|---|
| $L'_{\leftarrow B}$ | $B$ | $C$ |

Essayons donc de trier $L'$.

Début : $I\ =\ [L'_{\leftarrow B},\ B,\ C\ ]; M = [\ ]; F = [\ ]$

$I$ :




$M$ :

$F$ :

En premier, on trie $C$.

si $C > B$, $C$ doit être déposé dans $M$, car il faut que $B$ soit dans $F$ pour que $C$ y soit déposé.

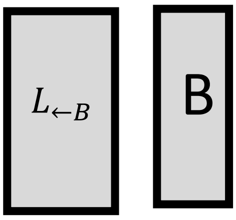
si $C < B$ ***ET*** $C < \min\,(L'_{\leftarrow B})$, on peut le déposer directement dans $F$ car il ne doit attendre qu'aucun livre dans $L'_{\leftarrow C}$. Ceci veut dire aussi que le $C$ le plus à droite qui obéit cette condition est $C = 1$. Et donc, $\forall\ X\ \in L'_{1\rightarrow},\ \ X < L'_{X\rightarrow}$ et

$X > L'_{1\leftrightarrow X}$. (tout nombre à droite de 1 est en ordre croissante). Puis, on vérifie si le livre le plus à droite de $M$ est le prochain livre $(C+1)$. Si oui, on le dépose en $F$, et puis on vérifie encore une fois. Sinon, on passe au $C$ suivant. Ce veut dire aussi que jusqu'à maintenant, tous les livres déposés en $M$ sont en ordre décroissante.

Etape 1 :

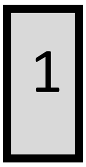
Si $C = 1$, $I = [L'_{\leftarrow B},\ B]$ ; $M = [\,]$; $F = [1]$

$I$ :



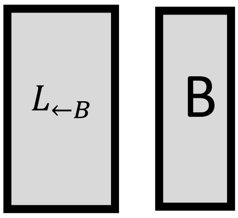

$M$ :

$F$ :

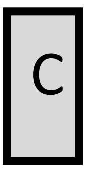



Sinon, $I = [L'_{\leftarrow B},\ B]$ ; $M = [C]$; $F = [\,]$

$I$ :




$M$ :



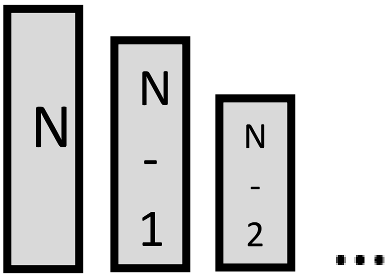
$F$ :

Puis, on trie $B$. Si on refait l'étape 1, avec $C = B$ et $B$ le livre directement à gauche de $C$, jusqu'à arriver à la $C < B$ $\boldsymbol{ET}$ $C < \min(L'_{\leftarrow B})$ (donc $C = 1$), on arrive à $I = [L'_{\leftarrow B},\ B]$ ; $M = [\dots(ordre\ décroissante)]$; $F = [1]$ car tous les livres à droite de 1 sont en ordre croissante.
Puis, si on continue à refaire l'étape 1, on arrive à la fin avec

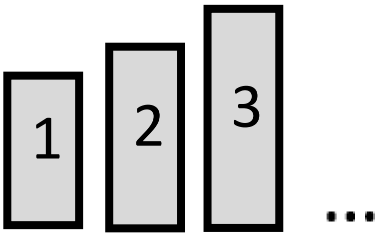
$I = [\,]$ ; $M = [\,N, \dots(ordre\ décroissante)]$; $F = [1, \dots(ordre\ croissante)]$

$I$ :

$M$ :




$F$ :




Puis, si on dépose tous les livres de $M$ en $F$ et on a ainsi

$F = [1, 2, 3 \dots, N]$ $(ordre\ croissante)$. Ainsi, à la fin, la liste est triée. Or, $L'$ est non triable, ce qui est absurde. Ainsi la supposition du départ est fausse, $\nexists\ L'$ non triable tel qu'elle n'obéit pas au critère de non-triabilité. Le critère de non triabilité est donc nécessaire.

Par conséquent, on a aussi prouvé que son opposé est le critère de triabilité :

$L$ est triable ⇔ $\forall\ B\ \in L,\ \ \forall\ C\ \in L_{B\rightarrow}$,
on a soit $C > B$,
soit $C < B$ $\boldsymbol{ET}$ $C < \min(L_{\leftarrow B})$. Avec $\min([\,]) = +\infty$

## Question II : Combien de listes de N livres peuvent être triées ?

**Notation** : On note $L_N$ le nombre de listes triables de longueur $N$. On note $L_N^K$ le nombre de listes triables de longueur $N$ se terminant par $K$, avec $1 \leq K \leq N$

On a ainsi $L_0 = 1$ car il n'y a qu'une seule liste avec 0 livres (la liste vide), et elle est triable. $L_1 = 1$ pour la même raison.

Une liste de longueur $N$ se termine toujours par un $K$ tel que $1 \leq K \leq N$, ainsi on a : $L_N = L_N^1 + L_N^2 + \cdots + L_N^{N-1} + L_N^N = \sum_{i=1}^{N} L_N^i$

Soit $L$ une liste triable de longueur N,s

On note $M_k$ à la position $k$, on a donc

$L =$

| $L_{\leftarrow M_{N-1}}$ | $M_{N-1}$ | $M_N$ |
|---|---|---|

Pour respecter le critère de triabilité démontré dans la Question I, on a soit :

$M_{N-1} < M_N$ , soit $M_{N-1} > M_N$ et $M_N < \min(L_{\leftarrow M_{N-1}})$.

Si $M_N > 1$, $M_{N-1} < M_N$ car si $M_{N-1} > M_N$, $1 \in L_{\leftarrow M_{N-1}}$ et donc $\min\left(L_{\leftarrow M_{N-1}}\right) = 1$, ce qui est impossible.

Si $M_{N-1} = 1$, et $M_N > 1$, donc $M_{N-2} \in [2; N] \setminus M_N$.

Dans ce cas, si $M_{N-2} > M_N$, $\exists\, K \in L_{\leftarrow M_{N-2}}$ tel que $K < M_N$.
Ceci voudrait dire la liste n'est pas triable (critère de non-triabilité, avec $A = K,\ B = M_{N-2},\ C = M_N$.

Ceci veut dire que si $L$ se termine par $K$, $L_{M_{N-(K-1)} \leftrightarrow K}$ doit être une liste triable de longueur $K - 1$. Il y a donc $L_{K-1}$ de ces listes possibles.

En appliquant le même raisonnement à $L_{\leftarrow M_{N-(K-1)}}$ est une liste triable de longueur $N - K$ avec son livre le plus petit étant $K + 1$. Si on soustrait $K$ de tous ces livres, on retrouve une liste triable de longueur $N - K$ normale. Il y a donc $L_{N-K}$ de ces listes possibles.

$$L = [L_{\leftarrow M_{N-(K-1)}}, L_{M_{N-K} \leftrightarrow M_N}, M_N\ ]$$

Ainsi, $L_N^K = L_{N-K} \times L_{K-1}$

Et donc, $L_N = L_N^1 + L_N^2 + \cdots + L_N^{N-1} + L_N^N = \sum_{i=1}^{N} L_N^i$

$$= L_{N-1} \times L_0 + L_{N-2} \times L_1 + \cdots + L_1 \times L_{N-2} + L_0 \times L_{N-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} L_{N-1-i} \times L_i$$

Si on travaille avec $N + 1$ comme c'est habituel avec des formules récursives, on a : $L_{N+1} = \sum_{i=0}^{N} L_{N-i} \times L_i$

Et ceci, est simplement la formule récursive du nombre de Catalan, $C(n)$

Ainsi, $L_N = C(n)$

## Question III : Que se passe-t-il si on autorise de faire du triage en sériée ?

Si $L$ est triable, en la triant, on aura une liste triée. Et une liste triée, est toujours triable en déposant tout $K \in L$ dans $M$, et puis déposant tout $K$ dans $F$.

Si $L$ n'est pas triable, c'est qu'elle obéit le critère de non triabilité ($A < C < B$), or on peut remarquer que dans la première démonstration de la Question I, on a toujours ce triplet dans le même ordre. Ainsi, une liste non triable ne le sera jamais.

Freitas Armando
Aguezlane Adam
Mullenders Liam
Dr Septimus
2023