

Dr. Winfried Teschers
Anton-Günther-Straße 26c
91083 Baiersdorf
winfried.teschers@t-online.de

Projektdokument

ASBA

Axiome, Sätze, Beweise und Auswertungen

Projekt zur maschinellen Überprüfung von mathematischen **Beweisen** und deren
Ausgabe in lesbarer Form

Winfried Teschers

23. Februar 2018

Es wird ein Programmsystem beschrieben, das zu eingegebenen Axiomen, Sätzen, und Beweisen
letztere prüft, Auswertungen generiert und zu gegebenen Ausgabeschemata eine Ausgabe der
Elemente in üblicher Formelschreibweise im \LaTeX -Format erstellt.

Copyright © 2017 Winfried Teschers

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the
GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software
Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. You should
have received a copy of the GNU Free Documentation License along with this document. If not, see
<http://www.gnu.org/licenses/>. english

Inhaltsverzeichnis

1. Test	4
2. Analyse	5
2.1. Fragen	5
2.2. Eigenschaften	6
2.3. Ziele	7
2.4. Zusammenfassung	9
2.5. Die Umgebung von ASBA	10
2.6. Basis von Beweisen	11
3. Mathematische Grundlagen	13
3.1. Notationen	13
3.1.1. Bezeichnungen	13
3.1.2. Quotierung	14
3.1.3. Weitere Bezeichnungen	15
3.1.4. Relationen und Operationen	16
3.1.5. Prioritäten	17
3.2. Metasprache	19
3.2.1. Aussagen und Metaoperationen	19
3.2.2. Mit Gleichheit verwandte Relationen	20
3.2.2.1. Vergleichbar	20
3.2.2.2. Vergleiche	20
3.2.2.3. Definitionen	21
3.3. Beweise in ASBA	21
3.3.1. Definitionen und Verabredungen	21
3.3.2. Formeln und Ableitungen	22
3.3.3. Schlussregeln	23
3.3.4. Beweise	25
3.3.5. Beispiel für einen Beweis	25
3.3.6. Beweisschritte	26
3.4. Aussagenlogik	26
3.4.1. Konstante und Operationen	26
3.4.2. Formalisierung	28
3.4.2.1. Bausteine der aussagenlogischen Sprache	28
3.4.2.2. Aussagenlogische Formeln	28
3.4.3. Definition von Junktoren durch andere	29
3.4.4. Aussagenlogisches Axiomensystem	31
3.5. Prädikatenlogik	31
3.6. Mengenlehre	31
4. Ideen	32
4.1. Schlussregeln	32
4.1.1. Basisregeln	32
4.1.2. Identitätsregeln	33
4.1.3. Weitere Schlussregeln	34
4.1.4. Beispiel einer Ableitung	35

5. Design	40
5.1. Anforderungen	40
5.2. Axiome	41
5.3. Beweise	41
5.4. Datenstruktur	41
5.5. Bausteine	41
A. Anhang	42
A.1. Werkzeuge	42
A.2. Offene Aufgaben	43
B. Verzeichnisse	44
Tabellenverzeichnis	44
Abbildungsverzeichnis	44
Literaturverzeichnis	45
Index	47
Symbolverzeichnis	49
Glossar	50

1. Test

Testkapitel

2. Analyse

In der Mathematik gibt es eine unüberschaubare Menge an [Axiomen](#), [Sätzen](#), [Beweisen](#), [Fachbegriffen](#)¹⁾ und [Fachgebieten](#)²⁾. Zu den meisten [Fachgebieten](#) gibt es noch ungelöste Probleme.

Es fehlt ein System, das einen Überblick bietet und die Möglichkeit, [Beweise](#) automatisch zu überprüfen. Außerdem sollte all dies in üblicher mathematischer Schreibweise ein- und ausgegeben werden können. In diesem Dokument werden die Grundlagen für das zu entwickelnde [Programmsystem, das Axiome, Sätze, Beweise und Auswertungen behandeln kann. \(ASBA\)](#) behandelt.

Ein Programmsystem mit ähnlicher Aufgabenstellung findet sich im GitHub Projekt *Hilbert II* (siehe [18, 19]). Einige Ideen sind von dort übernommen worden.

2.1. Fragen

Einige der Fragen, die in diesem Zusammenhang auftauchen, werden nun formuliert:

1. *Grundlagen*: Was sind die Grundlagen? Z. B. welche Logik und Mengenlehre.
2. *Basis*: Welche wichtigen [Axiome](#), [Sätze](#), [Beweise](#), [Fachbegriffe](#) und [Fachgebiete](#) gibt es? Welche davon sind Standard?
3. *Axiome*: Welche [Axiome](#) werden bei einem [Satz](#) oder [Beweis](#) vorausgesetzt? Allgemein anerkannte oder auch strittige, wie z. B. den [Satz vom ausgeschlossenen Dritten](#) (*tertium non datur*) oder das *Auswahlaxiom*.
4. *Beweis*: Ist ein [Beweis](#) fehlerfrei?
5. *Konstruktion*: Gibt es einen konstruktiven [Beweis](#)?
6. *Vergleiche*: Welcher [Beweis](#) ist besser? Nach welchem Kriterium? Z. B. elegant, kurz, einsichtig oder wenige [Axiome](#). Was heißt eigentlich *elegant*?
7. *Definitionen*: Was ist mit einem [Fachbegriff](#) jeweils genau gemeint? Z. B. *Stetigkeit*, *Integral* und *Analysis*.
8. *Abhängigkeiten*: Wie heißt ein [Fachbegriff](#) in einer anderen Sprache? Ist wirklich dasselbe gemeint? Was ist mit [Fachbegriffen](#) in verschiedenen [Fachgebieten](#)?
9. *Überblick*: Ist ein [Axiom](#), [Satz](#), [Beweis](#) oder [Fachbegriff](#) schon einmal – ggf. abweichend – definiert, formuliert oder bewiesen worden?
10. *Darstellung*: Wie kann man einen [Satz](#) und den zugehörigen [Beweis](#) – ggf. auch spezifisch für ein [Fachgebiet](#) – darstellen?

¹⁾ [Fachbegriffe](#) sind Namen für mathematische Elemente und Konstruktionen, z. B. [Axiomen](#), [Sätze](#), [Beweise](#) und [Fachgebiete](#). *Symbole* können als spezielle [Fachbegriffe](#) aufgefasst werden.

²⁾ Ein [Fachgebiet](#) ist ein Teil der Mathematik mit einer zugehörigen Basis an [Axiomen](#), [Sätzen](#), [Fachbegriffen](#) und Darstellungen, z. B. *Logik*, *Mengenlehre* und *Gruppentheorie*. Ein [Fachgebiet](#) kann sehr klein sein und im Extremfall kein einziges Element enthalten. *Umgebung* wäre eine bessere Bezeichnung, ist aber schon ein verbreiteter [Fachbegriff](#), so dass hier die Bezeichnung [Fachgebiet](#) verwendet wird.

Statt „[Fachgebiet](#)“ könnte man auch „Theorie“ nehmen. An *Theorien* (siehe [1] Kapitel 2.5, Seite 64) werden aber bestimmte Anforderungen gestellt, die vom hier behandelten Programmsystem aber nicht notwendigerweise überprüft werden sollen. Theorien sind allerdings i. Alg. auch [Fachgebiete](#).

11. *Forschung*: Welche Probleme gibt es noch zu erforschen.

2.2. Eigenschaften

ASBA soll ausgehend aus den Fragen in Abschnitt 2.1 auf der vorherigen Seite entwickelt werden, und die folgenden Eigenschaften haben:

1. *Daten*: **Axiome**, **Sätze**, **Beweise**, **Fachbegriffe** und **Fachgebiete** können in formaler Form gespeichert werden – auch (noch) nicht oder unvollständig bewiesene **Sätze**. Dabei soll die übliche mathematische Schreibweise verwendet werden können.
2. *Definitionen*: Es können **Fachbegriffe** für **Axiome**, **Sätze**, **Beweise** und **Fachgebiete** – letztere mit eigenen **Axiomen**, **Sätzen**, **Beweisen**, **Fachbegriffen** und über- oder untergeordneten **Fachgebieten** – definiert werden. Die Definitionen dürfen wiederum an dieser Stelle schon bekannte **Fachbegriffe** und **Fachgebiete** verwenden.
3. *Prüfung*: Vorhandene **Beweise** können automatisch geprüft werden.
4. *Ausgaben*: Die **Axiome**, **Sätze** und **Beweise** können in üblicher Schreibweise – abhängig aus Sprache und **Fachgebiet** – ausgegeben werden.
5. *Auswertungen*: Zusätzlich zur Ausgabe der gespeicherten Daten sind verschiedene Auswertungen möglich, unter anderem für die meisten der unter Abschnitt 2.1 auf der vorherigen Seite behandelten Fragen.

Damit **ASBA** nicht umsonst erstellt wird und möglichst breite Verwendung findet, werden noch zwei Punkte angefügt:

6. *Lizenz*: Die Software ist *Open Source*.
7. *Akzeptanz*: **ASBA** wird aus Mathematikern akzeptiert und verwendet.

Tabelle 2.1 auf der nächsten Seite zeigt, wie sich die Eigenschaften zu den Fragen im Abschnitt 2.1 auf der vorherigen Seite verhalten. Mit einem X werden die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Eigenschaften zur Beantwortung der entsprechenden Frage beitragen sollen. Idealerweise sollte die Erfüllung aller angegebenen Eigenschaften alle gestellten Fragen beantworten, was allerdings illusorisch ist.

Frage \ Eigenschaft							
	1 Daten	2 Definitionen	3 Prüfung	4 Ausgaben	5 Auswertungen	6 Lizenz	7 Akzeptanz
1 Grundlagen	X	X	-	X	X	-	-
2 Basis	X	X	-	X	X	-	-
3 Axiome	X	X	-	X	X	-	-
4 Beweise	X	-	X	X	-	-	-
5 Konstruktion	X	-	-	X	-	-	-
6 Vergleiche	X	-	-	-	X	-	-
7 Definitionen	X	X	-	X	-	-	-
8 Abhängigkeiten	X	-	-	X	-	-	-
9 Überblick	X	-	-	-	X	-	-
10 Darstellung	-	X	-	X	-	-	-
11 Forschung	X	-	-	-	X	-	-

Tabelle 2.1.: 2.1 Fragen → 2.2 Eigenschaften

2.3. Ziele

Um die Eigenschaften von Abschnitt 2.2 auf der vorherigen Seite zu erreichen, werden für ASBA die folgenden Ziele³⁾ gesetzt:

1. *Daten*: Es enthält möglichst viele wichtige Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe, Fachgebiete und Ausgabeschemata⁴⁾.
2. *Form*: Die Daten liegen in formaler, geprüfter Form vor.
3. *Eingaben*: Die Eingabe von Daten erfolgt in einer formalen Syntax unter Verwendung der üblichen mathematischen Schreibweise.
4. *Prüfung*: Vorhandene Beweise können automatisch geprüft werden.
5. *Ausgaben*: Die Ausgabe kann in einer eindeutigen, formalen Syntax gemäß vorhandener Ausgabeschemata erfolgen.
6. *Auswertungen*: Zusätzlich zur Ausgabe der Daten sind verschiedene Auswertungen möglich. Insbesondere kann zu jedem Beweis angegeben werden, wie lang er ist und welche Axiome und Sätze⁵⁾ er benötigt.
7. *Anpassbarkeit*: Fachbegriffe und die Darstellung bei der Ausgabe können mit Hilfe von – gegebenenfalls unbenannten – untergeordneten Fachgebieten angepasst werden.
8. *Individualität*: Axiome und Sätze können für jeden Beweis individuell vorausgesetzt werden. Dabei sind fachgebietsspezifische Fachbegriffe erlaubt.

³⁾ Es sind eigentlich Anforderungen. Da dieser Begriff auch im Kapitel 5 auf Seite 40 verwendet wird, werden die Anforderungen hier Ziele genannt.

⁴⁾ Um den Punkt 4 von Abschnitt 2.2 auf der vorherigen Seite erfüllen zu können, werden noch fachgebietsspezifische Ausgabeschemata benötigt, welche die Art der Ausgaben beschreiben.

⁵⁾ Sätze, die quasi als Axiome verwendet werden.

9. *Internet*: Die Daten können auf mehrere Dateien verteilt sein. Ein Teil davon – oder sogar alle – können im Internet liegen.
10. *Kommunikation*: Die Kommunikation mit **ASBA** kann mit den **Fachbegriffen** der einzelnen **Fachgebiete** erfolgen.
11. *Zugriff*: Der Zugriff auf **ASBA** kann lokal und über das Internet erfolgen.
12. *Unabhängigkeit*: **ASBA** kann online und offline arbeiten.
13. *Rekursion*: Es kann rekursiv über alle verwendeten Dateien – auch solchen, die im Internet liegen – ausgewertet werden.
14. *Bedienbarkeit*: **ASBA** ist einfach zu bedienen.
15. *Lizenz*: Die Software ist *Open Source*.
16. *Zwischenspeicher*: Wichtige Auswertungen können an vorhandenen Dateien angehängt oder separat in eigenen Dateien gespeichert werden.

Punkt 16 wurde noch eingefügt, damit **ASBA** effizient arbeiten kann und um die Akzeptanz zu erhöhen.

Die Tabelle 2.2 zeigt wieder, wie sich die Ziele zu den Eigenschaften im Abschnitt 2.2 auf Seite 6 verhalten. Mit einem X werden wieder die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Ziele zur Sicherstellung der entsprechenden Eigenschaft beitragen sollen. Idealerweise sollte durch Erreichen aller aufgestellten Ziele **ASBA** alle angegebenen Eigenschaften aufweisen, was wahrscheinlich ebenfalls illusorisch ist.

Eigenschaft \ Ziel																
	1 Daten	2 Form	3 Eingaben	4 Prüfung	5 Ausgaben	6 Auswertungen	7 Anpassbarkeit	8 Individualität	9 Internet	10 Kommunikation	11 Zugriff	12 Unabhängigkeit	13 Rekursion	14 Bedienbarkeit	15 Lizenz	16 Zwischenspeicher
1 Daten	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2 Definitionen	X	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3 Prüfung	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4 Ausgaben	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 Auswertungen	-	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6 Lizenz	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	-
7 Akzeptanz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabelle 2.2.: 2.2 Eigenschaften → 2.3 Ziele

2.4. Zusammenfassung

Frage \ Ziel															
	1 Daten	2 Form	3 Eingaben	4 Prüfung	5 Ausgaben	6 Auswertungen	7 Anpassbarkeit	8 Individualität	9 Internet	10 Kommunikation	11 Zugriff	12 Unabhängigkeit	13 Rekursion	14 Bedienbarkeit	15 Lizenz
1 Grundlagen	X	X	X	-	X	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
2 Basis	X	X	X	-	X	X	x	x	-	-	-	-	-	-	-
3 Axiome	X	X	X	-	X	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
4 Beweis	X	X	X	X	X	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-
5 Konstruktion	X	X	X	-	X	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-
6 Vergleiche	X	X	X	-	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-
7 Definitionen	X	X	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-
8 Abhängigkeiten	X	X	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-
9 Überblick	X	X	X	-	-	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
10 Darstellung	X	-	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-
11 Forschung	X	X	X	-	-	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
Die nächsten beiden Punkte sind Eigenschaften aus Abschnitt 2.2 auf Seite 6:															
6 Lizenz	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X
7 Akzeptanz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabelle 2.3.: 2.1 Fragen → 2.3 Ziele

Die Tabelle 2.3 ist eine Kombination der Tabellen 2.1 und 2.2 und zeigt, wie sich die Ziele im Abschnitt 2.3 auf Seite 7 zu den Fragen im Abschnitt 2.1 auf Seite 5 verhalten. Auch hier werden mit einem X die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Ziele für die Beantwortung der entsprechenden Frage nötig sind. Mit einem kleinen x werden sie markiert, wenn sie zur Beantwortung der Fragen nicht nötig, aber von Interesse sind. Idealerweise sollte das Erreichen aller aufgestellten Ziele alle gestellten Fragen beantworten, was natürlich auch illusorisch ist.

2.5. Die Umgebung von ASBA

In der Abbildung 2.1 wird beschrieben, welche Interaktionen **ASBA** mit der Umgebung hat, d. h. welche Ein- und Ausgaben existieren und woher sie kommen bzw. wohin sie gehen.

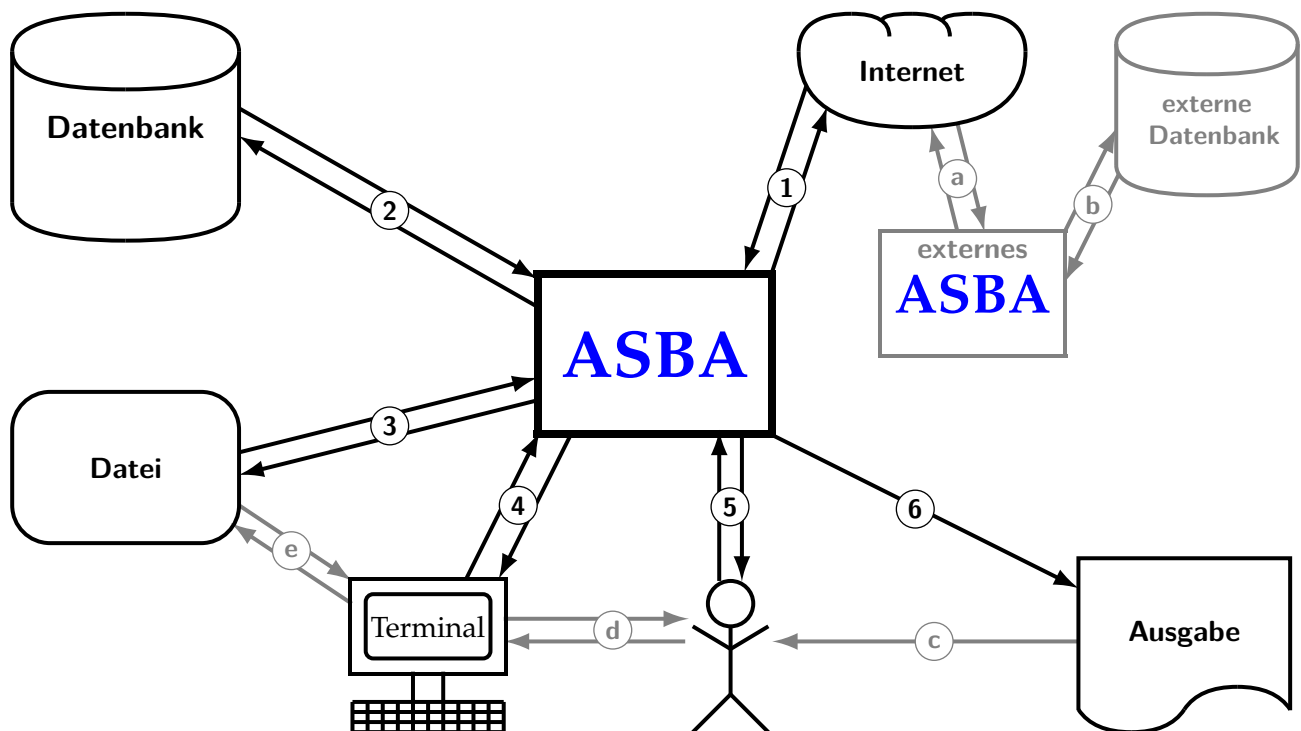


Abbildung 2.1.: Die Umgebung von **ASBA**

In den in der Abbildung 2.1 abgebildeten Datenflüssen (1) bis (6) und (a) bis (e) werden die folgenden Daten übertragen:

- (1) **ASBA** → **Internet** Inhalte der Datenbank.
Internet → **ASBA** Inhalte der externen Datenbank.
- (2) **Datenbank** → **ASBA** Inhalte der Datenbank und Antworten auf Datenbankanweisungen.
ASBA → **Datenbank** Inhalte der Datei, der externen Datenbank und Datenbankanweisungen.
- (3) **Datei** → **ASBA** Inhalte der Datei.
ASBA → **Datei** Die Datei wird um zusätzliche Auswertungen ergänzt, z. B. ob die **Beweise** korrekt sind, welche **Axiome** und **Sätze** – auch externe aus dem Internet – verwendet wurden, Länge des **Beweises** usw.
- (4) **Terminal** → **ASBA** Anweisungen, Daten und Batchprogramme.
ASBA → **Terminal** Antworten auf Anweisungen, Auswertungen usw.
 Außerdem interaktive Ein- und Ausgabe durch einen Anwender, wie in (5) beschrieben.
- (5) **Anwender** ↔ **ASBA** Interaktive Ein- und Ausgaben durch einen Anwender mit Komponenten von (3), (4) und (6). – Die Kommunikation läuft i. Alg. über ein Terminal.
- (6) **ASBA** → **Ausgabe** Inhalte von Datei und Datenbank in lesbarer Form, u. a. mit Hilfe von **Ausgabeschemata** auch in Formelschreibweise. Die Ausgabe kann auch in eine Datei erfolgen, z. B. im \LaTeX -Format.
- (a) **Internet** → **externes ASBA** Inhalte der Datenbank.

externes **ASBA** → **Internet** Inhalte der externen Datenbank.

(b) **externe Datenbank** → **externes ASBA** Inhalte der externen Datenbank.

externes ASBA → **externe Datenbank** Inhalte der Datenbank.

(c) **Ausgabe** → **Anwender** Alle Daten der Ausgabe.

(d) **Anwender** ↔ **Terminal** Interaktive Ein- und Ausgabe durch einen Anwender, wie in (5) beschrieben.

(e) **Terminal** ↔ **Datei** Erstellen und Bearbeiten der Datei durch einen Anwender. – siehe (d)

Die Datenflüsse (a) bis (e) erfolgen außerhalb von **ASBA** und werden nicht weiter behandelt.

Die Datenbank und die Datei enthalten im Prinzip die gleichen Daten, wobei sie in der Datei im Textformat in lesbarer Form und in der Datenbank in einem internen Format vorliegen. Zudem enthält die Datenbank i. Alg. sehr viel mehr Daten. Es handelt sich dabei jeweils um die folgenden Daten:

Axiome Ein **Axiom** ist eine **Aussage** oder Behauptung, die nicht aus anderen **Aussagen** abgeleitet werden kann. Es können wie bei **Sätzen** Voraussetzungen vorhanden sein, aber keine **Beweise**.

Sätze Ein **Satz** besteht aus einer Anzahl von Voraussetzungen, einer Behauptung und einem **Beweis**, der die Behauptung aus den Voraussetzungen ableitet. Letztere können **Axiome** und andere **Sätze** sein, auf die dann verwiesen wird.

Beweise Ein **Beweis** besteht aus einer Folge aus **Beweisschritten** die aus gegebenen Voraussetzungen eine Behauptung ableiten.

Fachbegriffe Ein **Fachbegriff** ist ein Name für ein Objekt bzw. eine Eigenschaft in einem bestimmten Fachgebiet.

Fachgebiete Ein **Fachgebiet** ist ein Teil der Mathematik mit einer zugehörigen Basis aus **Axiomen**, **Sätzen**, **Fachbegriffen** und **Ausgabeschemata**, quasi eine untergeordnete Datenbank.

Ausgabeschemata Eine Beschreibung, wie ein bestimmtes mathematisches Objekt ausgegeben werden soll. Dies kann z. B. ein Stück **L^AT_EX**-Code mit entsprechenden Parametern sein.

Auswertungen Statistische und andere Auswertungen, die bestimmten Elementen der Datei bzw. Datenbank zugeordnet sind. Z. B. können zu einem **Satz** alle für einen **Beweis** notwendigen **Axiome** angegeben werden – als Verweise.

Die Daten können interne und externe Verweise enthalten.

2.6. Basis von Beweisen

Da ein Computerprogramm erstellt werden soll, muss die Grundstruktur des Vorgehens bei **Beweisen** definiert werden.⁶⁾

Die logische Darstellung von mathematischen **Aussagen**, wozu auch **Axiome** und **Sätze** gehören, erfolgt, da es sich immer um Formeln handelt, an besten mit **Zeichenfolgen**⁷⁾, d. h. Folgen aus Zeichen und Symbolen, in denen Zwischenraum – insbesondere Leerstellen – nicht zählen.

⁶⁾ siehe [32]

⁷⁾ Die interne Darstellung der Zeichenfolgen kann zur Optimierung des Programms von der logischen abweichen.

Mehrdimensionale Formeln, wie z. B. Matrizen, Baumstrukturen, Funktionsschemata und anderes, können auch als (eindimensionale) Zeichenfolgen dargestellt werden.⁸⁾ **Beweise** sind letztendlich nichts anderes, als erlaubte Transformationen dieser Zeichenfolgen.

Bausteine sind Grundelemente, auch **Zeichen** oder **(Satz-)Buchstaben** genannt, aus denen die Zeichenfolgen bestehen dürfen, und müssen definiert werden.

Formationsregeln dienen zur Festlegung, wie man aus den Bausteinen Ausdrücke erzeugen kann, und müssen ebenfalls definiert werden.

Sätze lassen sich als eine Menge aus Formeln, den Voraussetzungen, wozu auch **Axiome** und andere **Sätze** gehören können, einer weiteren Menge aus Formeln (Zeichenfolgen), den Folgerungen, und der Angabe eines **Beweises** darstellen.

Beweise zu gegebenen Voraussetzungen und Folgerungen lassen sich als Folge aus zulässigen Transformationen, beginnend mit den Voraussetzungen und endend mit den Folgerungen, darstellen.

Transformationsregeln definieren, welche Transformationen mit gegebenen Formelmengen zulässig sind.⁹⁾

⁸⁾ Z. B. könnte man eine 2×2 -Matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ auch darstellen als Folge aus Zeilen: „ $[(a, b), (c, d)]$ “, oder noch einfacher: „ $[a, b; c, d]$ “. In **ASBA** wird die \LaTeX -Syntax verwendet. Damit wird die soeben angegebene Matrix codiert durch „ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ “.

⁹⁾ siehe [1, 36, 37]

3. Mathematische Grundlagen

Die mathematischen Grundlagen werden einerseits gebraucht, um die erlaubten [Beweisschritte](#)¹⁾ zu definieren, andererseits dienen sie auch zum Testen von [ASBA](#). Daher werden sie in diesem Kapitel 3 ausführlicher behandelt, als für die Erstellung von [ASBA](#) erforderlich ist. Alle hier aufgeführten [Axiome](#), [Sätze](#) und [Beweise](#) sollen dazu kodiert und die [Beweise](#) dann von [ASBA](#) verifiziert werden.

3.1. Notationen

- Die in diesem Abschnitt 3.1 aufgeführten Notationen werden in diesem Kapitel 3 verwendet, ohne nochmals erläutert zu werden. Abweichungen davon müssen gesondert angegeben.
- Sätze mit „wir“ bestimmen Notationen, die evtl. nur für dieses Dokument gelten. Bei allgemein bekannten Notationen wird „wir“ nicht verwendet. Die Verwendung von „wir“ ist allerdings möglicherweise nicht konsistent und soll nur als Hinweis dienen.
- Allgemein bekannte Notationen werden hier nicht alle angeführt. Nur solche, die in der Literatur unterschiedlich verwendet werden.
- Werden Begriffe definiert, so werden sie **in dieser** Schriftart hervorgehoben.

Im Vorgriff auf Paragraph 3.2.2.3 auf Seite 21 stehen „ $A :\Leftrightarrow B$ “ und „ $A := B$ “ für „*A ist definitionsgemäß gleich B*“, „ $A \& B$ “ für „*A und B*“ und „ $A \parallel B$ “ für „*A oder B*“. – Wir definieren für Mengen A und B :²⁾

$A \subset B$	$:\Leftrightarrow$	A ist echte Teilmenge von B
$A \subseteq B$	$:\Leftrightarrow$	A ist Teilmenge von B
\mathbb{N}	$:=$	die Menge der natürlichen Zahlen ohne 0
\mathbb{N}_0	$:=$	die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich 0)

Wenn wir von einer **natürlichen Zahl** sprechen, meinen wir immer ein Element aus \mathbb{N}_0 .

3.1.1. Bezeichnungen

Symbole umfassen neben speziellen [Symbolen](#) auch Buchstaben, Ziffern und Sonderzeichen. [Symbole](#), für die es kein eigenes typographisches Zeichen gibt, können auch durch Aufeinanderfolge mehrerer typographischer Zeichen, i. Alg. lateinische Buchstaben, dargestellt werden. Wir nennen sie dann **zusammengesetzte Symbole**, im Gegensatz zu den **einfachen Symbolen**. Charakteristisch für ein Symbol ist, dass es ohne Bedeutungsverlust nicht zerlegt werden kann. Einzelne Symbole werden $\langle \text{so} \rangle$ quotiert, z. B. $\langle \mathbb{N}_0 \rangle$ ³⁾ für die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0 und $\langle \sin \rangle$ für die Sinusfunktion. – Die Quotierung ist kein Bestandteil des [Symbols](#)!

¹⁾ siehe Abschnitt 3.3.6 auf Seite 26

²⁾ In der Literatur wird $\langle \subset \rangle$ oft in der Bedeutung von $\langle \subseteq \rangle$ verwendet. Wir verwenden $\langle \subset \rangle$ jedoch nur, wenn wir explizit [Ungleichheit](#) verlangen.

³⁾ Man kann $\langle \mathbb{N}_0 \rangle$ auch als Aufeinanderfolge der beiden Symbole $\langle \mathbb{N} \rangle$ und $\langle 0 \rangle$ betrachten. Welche Interpretation richtig ist, ist nicht immer wichtig und ergibt sich bei Bedarf aus dem Zusammenhang.

Wird für bestimmte **Objekte** ein **Symbol** verwendet, so nennen wir dies ein **Objektsymbol**. Ist das Objekt eine Funktion, Operation, Relation usw., so nennen wir das Symbol ein **Funktionsymbol**, **Operatorsymbol**, **Relationssymbol** usw.

Zeichenketten sind Folgen aus einfachen **Symbolen**, in denen im Prinzip auch Leerstellen und andere nicht druckbare Zeichen zulässig sind.⁴⁾ Damit Leerstellen in **Zeichenketten** leicht bestimmt und sogar gezählt werden können, werden **Zeichenketten** stets „in dieser“ Schriftart und Quotierung dargestellt. – Die Quotierung ist kein Bestandteil der **Zeichenkette**!

Zeichenfolgen sind ähnlich wie **Zeichenketten**, außer das sie neben einfachen auch zusammengesetzte **Symbole** enthalten können und Leerzeichen und andere Zwischenraumzeichen nicht zählen. Letztere dienen nur der optischen Trennung der **Symbole** und der besseren Lesbarkeit. **Zeichenfolgen** werden stets «in dieser» Quotierung dargestellt. – Die Quotierung ist kein Bestandteil der **Zeichenfolge**!

Formeln sind in diesem Dokument immer nach vorgegebenen Regeln aufgebaute **Zeichenfolgen**⁵⁾. Daher werden sie wie **Zeichenfolgen** quotiert. – Die Quotierung ist kein Bestandteil der **Zeichenfolge**!

Man kann eine **Formel** auch dadurch charakterisieren, dass sie ein Element einer vorgegebenen Menge \mathcal{L} von **Zeichenfolgen** ist.⁶⁾ Das ist dann so ziemlich die einfachste Regel.

Wenn eine **Zeichenfolge** nicht korrekt nach den vorgegebenen Regeln aufgebaut ist bzw. kein Element der vorgegebenen Menge \mathcal{L} ist, werden wir sie *nicht* als **Formel** bezeichnen, auch nicht als „fehlerhafte Formel“ oder ähnlich. Sie ist dann einfach keine **Formel**.

Objekte sind z. B. **Symbole**, **Zeichenketten**, **Zeichenfolgen** und **Formeln**, oder auch **Aussagen**, Mengen, Zahlen, usw. – ganz allgemein reale oder gedachte Dinge an sich. Eine **Formel**, die nicht quotiert ist, steht für den Wert dieser **Formel**, der dann wieder ein **Objekt** ist. Entsprechend steht ein **Symbol**, das nicht quotiert ist, für das dadurch bezeichnete **Objekt**. Z. B. bezeichnet das **Symbol** $\langle \mathbb{N} \rangle$ die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen ohne 0.

Fußnoten dienen nur zu weiteren Erläuterungen sowie Verweisen in dieses Dokument und in die Literatur. Daher können sie auch etwas „lascher“ formuliert sein. Für das Verständnis des Textes sollten sie nicht nötig sein, es reichen Grundkenntnisse der Mathematik.

3.1.2. Quotierung

Zur Verdeutlichung der soeben definierten Quotierungen ein Beispiel:⁷⁾

sin	Ein Objekt	die Sinusfunktion
$\langle \text{sin} \rangle$	Ein Symbol (Bezeichnung)	für das Objekt
$\langle\langle \text{sin} \rangle\rangle$	Eine Zeichenfolge (Formel)	aus dem zusammengesetzten Symbol $\langle \text{sin} \rangle$
$\langle\langle \text{sin} \rangle\rangle$	Eine Zeichenfolge (Formel)	aus den einfachen Symbolen $\langle s \rangle$, $\langle i \rangle$ und $\langle n \rangle$
“sin”	Eine Zeichenkette	aus den einfachen Symbolen $\langle s \rangle$, $\langle i \rangle$ und $\langle n \rangle$

Die Bezeichnung eines **Objekts** kann auch aus mehreren Symbolen bestehen, d. h. einer **Zeichenfolge** oder sogar einer ganzen **Formel**; z. B. ist die Bezeichnung für das indizierte **Objekt** a_i gleich $\langle\langle a_i \rangle\rangle$.

⁴⁾ Da beim Ausdruck optisch nicht entschieden werden kann, ob ein Zwischenraum (white space) aus einem Tabulator oder evtl. mehreren Leerzeichen besteht, verwenden wir nur einzelne Leerzeichen als Zwischenraumzeichen und vermeiden Zeilenumbrüche.

⁵⁾ Es kann verschiedene Arten von **Formeln** geben, z. B. aussagenlogische, prädikatenlogische und solche, die ein Taschenrechner auswerten kann.

⁶⁾ Die **Formel** wird dann auch **Wort** der **Sprache** \mathcal{L} genannt – besonders, wenn die Elemente aus \mathcal{L} **Zeichenketten** statt **Zeichenfolgen** sind. Wir bleiben der Klarheit willen bei „**Formel**“.

⁷⁾ Was zusammengesetzte **Symbole** sind, muss jeweils definiert werden bzw. ergibt sich aus dem Zusammenhang.

3.1.3. Weitere Bezeichnungen

Tupel Ein n -**Tupel** ist eine endliche Folge $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

- n , die **Länge**, d. h. die Anzahl der **Komponenten** aus \vec{a} , ist eine natürliche Zahl.
 $\text{len } \vec{a} := \text{len}(\vec{a}) := n$
- Die a_i für $1 \leq i \leq n$ sind Elemente meist vorgegebener Mengen.
- **Set** $\vec{a} := \text{Set}(\vec{a}) :=$ die Menge aller Komponenten a_i aus \vec{a} .

Für $n = 0$ ist $\vec{a} = ()$, das **leere Tupel** oder **0-Tupel**.

Wo immer \vec{a} und a_i mit $i \in \mathbb{N}_0$ gemeinsam vorkommen, ist a_i die i -te Komponente aus \vec{a} .

Relation Eine n -stellige **Relation**⁸⁾ R ist ein $(1+n)$ -**Tupel** (G, A_1, \dots, A_n) mit folgenden Eigenschaften:

- n , die **relationale Stelligkeit**, ist eine natürliche Zahl.
 $\text{stel}_r R := \text{stel}_r(R) := n$
- Die A_i für $1 \leq i \leq n$ sind Mengen, die **Trägersmengen** (carrier) von R .
 $\text{car}_i R := \text{car}_i(R) := A_i$
- G , der **Graph** von R , ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A_1 \times \dots \times A_n$.
 $\text{graph } R := \text{graph}(R) := G$ (oft einfach mit R bezeichnet)
- $R(a_1, \dots, a_n) :\Leftrightarrow (a_1, \dots, a_n) \in G$

Für $n = 0$ ist $G \subseteq \{()\}$ ⁹⁾, d. h. $R()$ ist entweder *wahr* (true) oder *falsch* (false).

Für $n = 1$ ist $G \subseteq A_1$, d. h. R kann als Teilmenge von A_1 aufgefasst werden.

Für $n = 2$ heißt die Relation **binär** und man schreibt „ xRy “ statt „ $R(x, y)$ “ bzw. „ $(x, y) \in R$ “.

Ist $R = (G, M, \dots, M)$, so heißt R eine n -stellige Relation **auf**¹⁰⁾ M .

Ist $|G|$ endlich, so nennen wir auch R **endliche**.

Umkehrrelation Die **Umkehrrelation** einer binären Relation (G, A, B) ist die Relation (G', B, A) mit $G' := \{(b, a) \mid (a, b) \in G\}$. Üblicherweise wird das zugehörige Relationssymbol gespiegelt.

Funktion Eine n -stellige **Funktion**¹¹⁾ ist ein $(1+n+1)$ -**Tupel** $f = (G, A_1, \dots, A_n, B)$ mit folgenden Eigenschaften:

- n , die **Stelligkeit**¹²⁾, ist eine natürliche Zahl.
 $\text{stel}_f f := \text{stel}_f(f) := n$
- f ist eine $(n+1)$ -stellige Relation.
- Zu jedem n -**Tupel** $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ für $1 \leq i \leq n$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a_1, \dots, a_n, b) \in G$, den **Funktionswert** von \vec{a} .
 $f\vec{a} := fa_1 \dots a_n := f(\vec{a}) := f(a_1, \dots, a_n) := b$ ¹³⁾
- $A = A_1 \times \dots \times A_n$ ist der **Definitionsbereich** (domain) von f .
 $\text{dom } f := \text{dom}(f) := A_1 \times \dots \times A_n$

⁸⁾ siehe [35]

⁹⁾ Das kartesische Produkt enthält nur noch das 0-Tupel $()$.

¹⁰⁾ alternativ: **in**

¹¹⁾ siehe [28]

¹²⁾ Die Werte der Stelligkeit als Relation und als Funktion sind verschieden, d. h. es gilt stets: $\text{stel}_r(f) = \text{stel}_f(f) + 1$.

¹³⁾ $f(a_1, \dots, a_n)$ und $f(a_1, \dots, a_n, b)$ sind wohl zu unterscheiden. Ersteres ist ein Funktionsaufruf mit einem Funktionswert, letzteres eine Relation mit einem Wahrheitswert.

- B ist der **Zielbereich** (target) von f

$$\text{tar } f := \text{tar}(f)$$

Für $n = 0$ ist $G = ((), b)$ für ein $b \in B$ und somit $f() = b$. f kann damit auch als Konstante b aufgefasst werden.¹⁴⁾

Man sagt: f ist eine n -stellige **Funktion** von $A_1 \times \dots \times A_n$ **nach**¹⁵⁾ B (Schreibweise: $f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B$) oder, im Fall $n = 1$, f ist eine Funktion von A nach B (Schreibweise: $f : A \rightarrow B$). Mit $A := A_1 \times \dots \times A_n$ kann für $n > 0$ jede Funktion als 1-stellig aufgefasst werden.

Operationen in oder auf einer Menge M sind n -stellige Funktionen $M^n \rightarrow M$. Für eine **binäre**, d. h. 2-stellige **Operation** \otimes schreibt man i. Alg. „ $x \otimes y$ “ statt „ $\otimes(x, y)$ “. Wenn nicht anders angegeben, sind **Operationen** stets binär. 0-stellige **Operationen** können wieder als Konstante aufgefasst werden.

Um Missverständnisse zu vermeiden, werden wir den Begriff „Operator“ nicht verwenden.

Junktoren sind aussagenlogische **Relationen** und **Operationen**.¹⁶⁾

3.1.4. Relationen und Operationen

Als Beispielsymbol für unäre **Operationen** wird $\langle \ominus \rangle$ und für binäre **Operationen** $\langle \otimes \rangle$ verwendet. Beispielsymbole für binäre **Relationen** sind $\langle \sim \rangle$ und $\langle \simeq \rangle$, ihre **Umkehrrelationen** $\langle \smile \rangle$ bzw. $\langle \rightrightarrows \rangle$ sowie ihre **Negationen** $\langle \not\sim \rangle$ bzw. $\langle \not\simeq \rangle$.¹⁷⁾ Wenn nichts anderes gesagt wird, gelte mit diesen Symbolen bei gegebenem $\langle \sim \rangle$ stets:

$$(A \smile B) \quad :\Leftrightarrow \quad (B \sim A) \tag{3.1}$$

$$(A \not\sim B) \quad :\Leftrightarrow \quad ((A \sim B) \text{ gilt nicht}) \tag{3.2}$$

Dabei ist $\langle \smile \rangle$ ist die waagerechte Spiegelung von $\langle \sim \rangle$ und statt des schrägen kann bei der Negation auch ein senkrechter Strich genommen werden.

Ist $\langle \smile \rangle$, $\langle \simeq \rangle$ oder $\langle \rightrightarrows \rangle$, statt $\langle \sim \rangle$ gegeben, so müssen die Symbole entsprechend ausgetauscht werden. Entsprechend für die nächsten beiden Definitionen.

Je nachdem ob \sim oder \simeq gegeben ist gelte ferner:

$$(A \simeq B) \quad :\Leftrightarrow \quad ((A \sim B) \parallel (A = B)) \tag{3.3}$$

$$(A \sim B) \quad :\Leftrightarrow \quad ((A \simeq B) \& (A \neq B)) \tag{3.4}$$

Man beachte, dass, wenn man $\langle :\Leftrightarrow \rangle$ durch $\langle \Leftrightarrow \rangle$ ersetzt, weder (3.3) aus (3.4) folgt noch umgekehrt. (3.3) und (3.4) folgen aber dann auseinander, wenn aus $\langle \sim \rangle$ die Ungleichheit bzw. aus der Gleichheit $\langle \simeq \rangle$ folgt. Beispiele dazu sind in der Tabelle 3.1 auf der nächsten Seite angegeben.

¹⁴⁾ Bei der Schreibweise ohne Klammern steht da statt $\langle\langle f() \rangle\rangle$ nur noch $\langle\langle f \rangle\rangle$ und statt $\langle\langle f() = b \rangle\rangle$, insgesamt also nur noch $\langle\langle f = b \rangle\rangle$.

¹⁵⁾ alternativ: **in**

¹⁶⁾ Ein n -stelliger **Junktor** J sei eine **Operation** und somit eine **Funktion**. Wegen $M = \{\text{true}, \text{false}\}$ kann er auch als eine n -stellige **Relation** J' aufgefasst werden: $J' := \{\vec{a} \in M^n \mid J(\vec{a}) = \text{true}\}$.

Umgekehrt kann eine n -stellige aussagenlogische **Relation** J' mittels: $J''(\vec{a}) := \text{true}$ für $\vec{a} \in J'$, false sonst, für $\vec{a} \in M^n$, als n -stellige **Operation** aufgefasst werden.

Falls $J(\vec{a}) = \text{true}$ ist $\vec{a} \in J'$ und somit $J''(\vec{a}) = \text{true}$. Für $J(\vec{a}) = \text{false}$ ist $\vec{a} \notin J'$ und somit $J''(\vec{a}) = \text{false}$. Also ist $J = J''$ und so können die aussagenlogischen n -stelligen **Relationen** und **Operationen** einander eindeutig zugeordnet werden.

Daher sind in der Aussagenlogik **Relationen** und **Operationen** nicht von vornherein unterscheidbar. Wegen der Verabredungen in Unterabschnitt 3.1.4 muss für die verwendeten **Junktoren** daher jeweils wohl definiert sein, ob sie als **Relation** und **Operation** zu verstehen sind.

¹⁷⁾ Die **Relationen** brauchen keine Äquivalenzrelationen sein, auch wenn die angegebenen Symbole dies nahe legen. Wenn eine der **Relationen** \sim , \simeq , \smile oder \rightrightarrows definiert ist, sind wegen (3.1), (3.3) und (3.4) auch die anderen drei **Relationen** definiert sowie wegen (3.2) auch $\not\sim$, $\not\simeq$, $\not\smile$ und $\not\rightrightarrows$. (Für die letzten beiden habe ich keine schöneren Symbole gefunden.)

	A, A	A, B	B, A	B, B	
$=$	$A = A$			$B = B$	
\simeq	$A \simeq A$	$A \simeq B$		$B \simeq B$	Es gilt (3.3)
\sim		$A \sim B$			und (3.4)
\simeq	$A \simeq A$	$A \simeq B$		$B \simeq B$	Es gilt (3.3)
\sim		$A \sim B$		$B \sim B$	aber nicht (3.4)
\simeq	$A \simeq A$	$A \simeq B$			Es gilt (3.4)
\sim		$A \sim B$			aber nicht (3.3)

Tabelle 3.1.: Beispiele für \simeq und \sim

Wird eine binäre **Relation** \sim zusammen mit einer binären **Operation** \circledast oder einer weiteren binären **Relation** \approx verwendet wird, treffen wir folgende Vereinbarung:¹⁸⁾

$A \circledast B \sim C$	steht für	$A \circledast B$	$\&$	$B \sim C$
$A \sim B \circledast C$	steht für	$A \sim B$	$\&$	$B \circledast C$
$A \sim B \approx C$	steht für	$A \sim B$	$\&$	$B \approx C$

Besondere Vereinbarungen für die unäre **Operation** $\langle \ominus \rangle$ treffen wir nicht.

Es sei noch angemerkt, dass wegen (3.1) die Definition von $\langle \Leftarrow \rangle$ im Unterabschnitt 3.2.1 auf Seite 19 überflüssig ist. Wegen der angegebenen Sprechweise ist sie dennoch angegeben. Für den Fall fehlender Klammern sind die Prioritäten in der Tabelle 3.2 auf der nächsten Seite angegeben. Damit wären dann alle Klammern in diesem Unterabschnitt 3.1.4 überflüssig.

3.1.5. Prioritäten

Die Tabelle 3.2 auf der nächsten Seite listet zur Vermeidung von Klammern die Prioritäten der in diesem Dokument verwendeten **Operationen**, **Relationen**, **Junktoren** und **Definitionen** in absteigender Folge von höherer zu niedrigerer Priorität, d. h. von starker zu schwacher Bindung auf.¹⁹⁾ Das Weglassen redundanter Klammern wird in diesem Kapitel 3 nicht weiter thematisiert.²⁰⁾ Zur besseren Verständlichkeit werden aber gelegentlich auch redundante Klammern verwendet, insbesondere wenn Prioritäten unklar oder in der Literatur auch anders definiert sind. Die Prioritäten der **Junktoren** wurden aus [1] Kapitel 1.1 Seite 5 entnommen und ergänzt und die der **Metaoperationen** daran angeglichen.

Für **Operationen** derselben Priorität wählen wir in diesem Dokument Rechtsklammerung²¹⁾.

¹⁸⁾ wird auch in der Literatur verwendet, z. B. z. B. [1], Notationen Seite xxi

¹⁹⁾ Priorität 1 ist höher und bindet damit stärker als Priorität 2, usw.

²⁰⁾ Gesetzt den Fall, dass **ASBA** die **Voraussetzungen** und **Folgerungen** eines mathematischen Satzes richtig und die **Beweisschritte**, z. B. durch fehlerhafte Interpretation einer **Formel**, falsch einliest, ansonsten aber richtig arbeitet. Dann kann man folgende Fälle unterscheiden:

- Ein falscher Satz kann dadurch nicht als richtig bewertet werden.
- Ein richtiger Satz wird wahrscheinlich auch bei eigentlich richtigem **Beweis** als nicht bewiesen gelten, was natürlich unbefriedigend ist.
- In äußerst unwahrscheinlichen Fällen kann dabei auch ein eigentlich falscher **Beweis** in einen richtigen verwandelt werden, was zwar schön ist, aber leider steht in der Dokumentation dann ein falscher **Beweis**.

In keinem Fall wird durch diesen Fehler die Menge der richtigen Sätze durch einen falschen Satz „verunreinigt“.

²¹⁾ Die Symbole unärer **Operationen** stehen in diesem Dokument stets links vor dem Operanden, so dass es für sie nur Rechtsklammerung geben kann. Zur Rechtsklammerung bei binären Operationen ein Zitat aus [1] Kapitel 1.1 Seite 5: „Diese hat gegenüber Linksklammerung Vorteile bei der Niederschrift von Tautologien in $\rightarrow, [\dots]$ “. Die meisten Autoren bevorzugen Linksklammerung, was natürlicher erscheint. Dann sollte man aber für die Potenz doch noch Rechtsklammerung wählen, sonst ist $\langle\langle a^{x^y} = (a^x)^y = a^{(x*y)} \rangle\rangle$ und nicht wie wahrscheinlich erwünscht $\langle\langle a^{(x^y)} \rangle\rangle$.

Klammern	() < > << >> “ ”
Operationen haben unterschiedliche Priorität.	
Unäre Operationen ^{1) 2)}	$\ominus \neg \sim$
Binäre Operationen für Mengen	\times \cup \cap
Binäre Operationen ¹⁾	\otimes
Binäre Junktoren ²⁾	$\wedge \uparrow$ $\vee + \downarrow$ $\leftarrow \rightarrow$ \leftrightarrow
Binäre Relationen haben gleiche Priorität.	
Binäre Relationen für Mengen ³⁾	$\subset \subseteq \in \notin \supset \supseteq \ni \notin$
Binäre Relationen ¹⁾	$\sim \not\sim \simeq \not\simeq \sim \simeq$
Gleichheitsrelation ⁴⁾	$= \neq \equiv \not\equiv$
Ableitungsrelation ⁵⁾	\vdash
Substitution ⁵⁾	\leftarrow
Sonstige binäre Verknüpfungen haben unterschiedliche Priorität.	
Definition ⁶⁾	$:=$
Binäre Metaoperationen ^{7) 8)}	$\&$ \parallel \perp $\Leftarrow \Leftrightarrow \Rightarrow$
Metadefinition ⁶⁾	$:\Leftrightarrow$
Natürliche Sprache	
Innerhalb natürlicher Sprache deren Strukturelemente, z. B. Satzzeichen ⁹⁾	$\cdot , ;$ usw.

¹ siehe Unterabschnitt 3.1.4 auf Seite 16

² siehe Tabelle 3.3 auf Seite 27

³ siehe Unterabschnitt 3.1.1 auf Seite 13

⁴ siehe Paragraph 3.2.2.2 auf Seite 20

⁵ siehe Unterabschnitt 4.1.1 auf Seite 32

⁶ siehe Paragraph 3.2.2.3 auf Seite 21

⁷ siehe Unterabschnitt 3.2.1 auf der nächsten Seite

⁸ $\langle \rangle$ wird nur bei den Schlussregeln (siehe Unterabschnitt 3.3.3 auf Seite 23) verwendet. Zwar bezeichnen $\langle \& \rangle$ und $\langle \parallel \rangle$ dieselbe Operation, aber je nach verwendetem Symbol hat sie eine unterschiedliche Priorität.

⁹ Innerhalb von Formeln können Satzzeichen eine andere Bedeutung und Priorität haben.

Tabelle 3.2.: Prioritäten in abnehmender Reihenfolge

3.2. Metasprache

Wenn man über eine Sprache spricht, braucht man eine zweite Sprache, die **Metasprache**, in der **Aussagen** über erstere getroffen werden können.²²⁾ Wenn die zuerst genannte Sprache die der Mathematik ist, wählt man üblicherweise die natürliche Sprache als **Metasprache**. Leider ist diese oft ungenau, nicht immer eindeutig und abhängig vom Zusammenhang, in dem sie gesprochen wird.²³⁾ Um diese Probleme in den Griff zu bekommen, kann die **Metasprache** teilweise formalisiert werden. Durch diese Formalisierung erinnert sie dann schon an mathematische **Formeln**. Die Sprachebenen sollten aber sorgfältig unterschieden werden.

3.2.1. Aussagen und Metaoperationen

Beispiele für **Aussagen** in **Metasprache** sind (a) „Morgen scheint die Sonne.“, (b) „Ich bin 1,83 m groß.“, (c) „Ich habe ein rotes Auto und das kann 200 km/h schnell fahren.“, usw. Wie Beispiel (c) zeigt, kann eine **Aussage** auch aus anderen **Aussagen** zusammengesetzt sein. In diesem Fall bezeichnen wir sie als **zerlegbar**, ansonsten als **unzerlegbar** oder auch **atomar**. – Wir betrachten auch Relationen einschließlich ihrer Operanden als **Aussagen**.²⁴⁾

Während die Beispiele (a) und (b) **unzerlegbare** (**atomare**) **Aussagen** sind, ist Beispiel (c) **zerlegbar**. Für alle drei **Aussagen** lässt sich feststellen, ob sie richtig sind oder nicht; für (a) allerdings nur im Nachhinein und für den zweiten Teil von (c) nur weil klar ist, worauf sich „das“ bezieht. Natürlich muss auch der Zusammenhang, in dem eine **Aussage** formuliert wird, bekannt sein. Z. B. ist die Bedeutung von „Ich“ nur dann bekannt, wenn man weiss, von wem die **Aussage** ist. Auf eine exakte Definition von **Aussage** wird verzichtet, weil das intuitive Verständnis hier ausreicht.

Zerlegbare Aussagen wie (c) können zum Teil formalisiert werden. Dies wird mit den folgenden Definitionen erreicht:²⁵⁾

$\sim A$	$:\Leftrightarrow$	A gilt nicht .
$A \Rightarrow B$	$:\Leftrightarrow$	Wenn A gilt dann gilt auch B .
$A \Leftarrow B$	$:\Leftrightarrow$	A gilt sofern B gilt .
$A \Leftrightarrow B$	$:\Leftrightarrow$	A gilt genau dann wenn B gilt .
$A \& B$	$:\Leftrightarrow$	A und B .
$A \parallel B$	$:\Leftrightarrow$	A oder B .

Offensichtlich sind das alles ebenfalls **Aussagen**, jetzt aber teilweise formalisiert. (c) lässt sich dann ausdrücken als „Ich habe ein rotes Auto' & ,das kann 200 km/h schnell fahren.“. „ $A \Leftarrow B$ “ ist nur eine andere Schreibweise für „ $B \Rightarrow A$ “. – Ein Symbol für „nicht“ wird hier nicht gebraucht.

Wir nennen **&** und **||** **Metaoperationen** und **\Rightarrow** , **\Leftarrow** und **\Leftrightarrow** **Metarelationen**²⁶⁾. Die damit gebildeten **Aussagen** können natürlich auch geklammert werden, um die Reihenfolge der Auswertung eindeutig

²²⁾ Die beiden Sprachen können auch übereinstimmen, z. B. wenn man über die natürliche Sprache spricht.

²³⁾ Man betrachte die beiden **Aussagen** „Studenten und Rentner zahlen die Hälfte.“ und „Studenten oder Rentner zahlen die Hälfte.“, die beide das gleiche meinen. – Entnommen aus [1] Abschnitt 1.2 Bemerkung 1.

Ein weiteres Problem ist, dass man unauflösbare Widersprüche formulieren kann, z. B. „Der Barbier ist der Mann im Ort, der genau die Männer im Ort rasiert, die sich nicht selbst rasieren.“. Und der Barbier? Wenn er sich selbst rasiert, dann rasiert er sich nicht selbst, und wenn er sich nicht selbst rasiert, dann rasiert er sich selbst. Was denn nun? – Quelle unbekannt) – Das Problem ist verwandt mit dem Problem der „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“.

²⁴⁾ Wird statt des Symbols der Name der zugehörigen Relation verwendet, ist dies unmittelbar einleuchtend. So wird z. B. aus der **Formel** $\langle\langle A < B \rangle\rangle$ die **Aussage** „ A ist kleiner als B “.

²⁵⁾ Das metasprachliche Symbol $\langle \sim \rangle$ unterscheidet sich von dem Beispielsymbol $\langle \sim \rangle$ dadurch, dass es fett gedruckt ist. Damit es nicht zu Verwechslungen führt verwenden wir für die metasprachliche Negation nicht das logische Symbol $\langle \neg \rangle$.

²⁶⁾ Man könnte **Metaoperationen** und **Metarelationen** auch als **Metajunktoren** bezeichnen. Zur Unterscheidung von **Operationen** und **Relationen** vergleiche aber auch die Fußnote 16 auf Seite 16.

zu machen. Für den Fall fehlender Klammern sind ihre Prioritäten in der Tabelle 3.2 auf Seite 18 angegeben.

Um Verwechslungen mit den **Junktoren** zu vermeiden, verwenden wir für die metasprachlichen **Operationen** „und“ und „oder“ die Symbole $\langle \& \rangle$ und $\langle || \rangle$. A und B können als Operanden von $\langle \& \rangle$, $\langle \& \rangle$ und $\langle || \rangle$ vertauscht werden, ohne das Ergebnis zu ändern.²⁷⁾ Wird in einer (Teil-)**Aussage** nur eine der **Operationen** $\&$ oder $||$ verwendet, können die Klammern dort weggelassen und die Operationen in beliebiger Reihenfolge ausgewertet werden, wiederum ohne das Ergebnis zu ändern.²⁸⁾ Zusammengefasst ist die Reihenfolge der **Operationen** und der Auswertung dort beliebig.

3.2.2. Mit Gleichheit verwandte Relationen

3.2.2.1. Vergleichbar

Zwei **Objekte** A und B sind **vergleichbar**, wenn beide von derselben Art sind, d. h. wenn z. B. jeweils beide Mengen, **Zeichenfolgen**, Zahlen, usw. sind. Dabei muss bei **Formeln** zwischen der **Formel** an sich und dem Ergebnis der **Formel** unterschieden werden. Siehe Beispiel (a).

Intuitiv scheint klar zu sein, was damit gemeint ist. Wenn aber entschieden werden muss, ob z. B. (a) „1+1“ gleich „2“ oder (b) „1+1“ gleich „1 + 1“ ist, muss man erst entscheiden, von welcher Art die beiden zu vergleichenden Ausdrücke sind, d. h. *wie* verglichen wird. Wenn sie als jeweiliges Ergebnis der beiden **Formeln**, d. h. als **Objekt**, verglichen werden, dann ist (a) richtig. Wenn sie als **Formeln**, d. h. als **Zeichenfolgen**, verglichen werden, ist (a) falsch. Wenn die Ausdrücke in (b) als **Zeichenfolgen** verglichen werden, dann ist (b) richtig. Wenn sie als **Zeichenketten** verglichen werden, ist (b) falsch.

Die folgende Tabelle fasst das zusammen:

A	B	Art	A gleich B
$1 + 1$	2	Objekt	richtig
$\langle\langle 1 + 1 \rangle\rangle$	$\langle\langle 2 \rangle\rangle$	Formel	falsch
$\langle\langle 1 + 1 \rangle\rangle$	$\langle\langle 1 + 1 \rangle\rangle$	Zeichenfolge	richtig
„1+1“	„1 + 1“	Zeichenkette	falsch

3.2.2.2. Vergleiche

A und B seien **Objekte**. Dann definieren wir:

= Gleichheit $\langle\langle A = B \rangle\rangle$ heißt, dass A und B in den **interessierende Eigenschaften** für $=$ übereinstimmen.²⁹⁾ Sprechweisen: „ A ist *dasselbe* wie B “ oder „ A ist *identisch* zu B “ – Inwieweit die Begriffe *Gleichheit* und *Identität* korrelieren, wird hier nicht erörtert.³⁰⁾

≠ Ungleichheit $\langle\langle A \neq B \rangle\rangle$ heißt, dass A und B in mindestens einer **interessierenden Eigenschaft** für $=$ nicht übereinstimmen. Sprechweisen: „ A ist *nicht dasselbe* wie B “ (aber vielleicht das gleiche; siehe \Rightarrow) oder „ A ist *nicht identisch* zu B “.

²⁷⁾ D. h. die **Operationen** $\langle \& \rangle$, $\langle \& \rangle$ und $\langle || \rangle$ sind *kommutativ*.

²⁸⁾ D. h. die **Operationen** $\&$ und $||$ sind auch *assoziativ*. Bei den den logischen **Operationen** \wedge und \vee müssen Kommutativität und Assoziativität durch **Axiome** gefordert werden. Die Kommutativität von $\&$ kann abgeleitet werden.

²⁹⁾ Z. B. sind zwei **Junktoren** üblicherweise dann gleich, wenn sie stets denselben **Wahrheitswert** liefern. Ihre Bezeichnungen oder **Symbole** können dabei durchaus verschieden sein, interessieren bei der Feststellung der **Gleichheit** aber nicht. Z. B. bezeichnen $\langle \& \rangle$ und $\langle || \rangle$ (siehe Abschnitt 5.3 auf Seite 41) dieselbe **Operation**, haben aber verschiedene Priorität. – siehe Tabelle 3.2 auf Seite 18

³⁰⁾ siehe [30]

\equiv **Äquivalenz** $\langle\langle A \equiv B \rangle\rangle$ heißt, dass A und B in den **interessierende Eigenschaften** für \equiv übereinstimmen. Sprechweisen: „ A ist *das gleiche* wie B “ (aber nicht unbedingt dasselbe; siehe $=$) oder „ A ist *so wie* B “. – Es kann auch verschiedene Äquivalenzen geben, für die dann verschiedene Bezeichnungen verwendet werden.

\neq **Kontravalenz** $\langle\langle A \neq B \rangle\rangle$ heißt, dass A und B in mindestens einer **interessierenden Eigenschaft** für \neq nicht übereinstimmen. Sprechweisen: „ A ist *nicht das gleiche* wie B “ oder „ A ist *nicht so wie* B “.

$=$, \neq , \equiv und \neq bezeichnen wir als **Gleichheitsrelationen**. Gleichheit und Äquivalenz sind **Äquivalenzrelationen**, d. h. sie sind *reflexiv* ($a \sim a$), *transitiv* ($((a \sim b) \& (b \sim c)) \Rightarrow (a \sim c)$) und *symmetrisch* ($((a \sim b) \Rightarrow (b \sim a))$) – jeweils für alle zulässigen Objekte a , b und c .

Jede **interessierende Eigenschaft** für \equiv oder eine andere **Äquivalenz** muss auch eine für $=$ sein. Daraus folgt insbesondere, dass mit $(A = B)$ auch $(A \equiv B)$ und mit $(A \neq B)$ auch $(A \neq B)$ gilt.

3.2.2.3. Definitionen

Seien A und B **Aussagen** bzw. **Objekte**³¹⁾.

$:\Leftrightarrow$ **Metadefinition** „ $A :\Leftrightarrow B$ “ heißt, dass die **Aussage** A *definitionsgemäß gleich* der **Aussage** B ist. Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B . „ A steht für B “; A und B können sich gegenseitig ersetzen.

$:=$ **Definition** „ $A := B$ “ heißt, dass das **Objekt** A *definitionsgemäß gleich* dem **Objekt** B ist. Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B . „ A steht für B “; A und B können sich gegenseitig ersetzen.³²⁾

Man beachte, dass $:\Leftrightarrow$ und $:=$ verschiedene Sprachebenen sind.

3.3. Beweise in ASBA

Die Regeln zur Formulierung und Prüfung der **Beweise** müssen in **ASBA** fest codiert werden. Sie sind quasi die **Axiome** von **ASBA** und sollten daher möglichst wenig voraussetzen. In **ASBA** wird dazu ein *Genzen-Kalkül*³³⁾ verwendet. Die Definition von **Schlussregel** und **Beweis** ist in diesem Dokument **ASBA**-spezifisch, um später eine leichtere Umsetzung in ein Programm zu erreichen. Insbesondere müssen alle abzuspeichernden Mengen endlich sein. Dies berücksichtigen wir in den Beispielen, fordern zunächst aber nicht notwendig Beschränktheit. Zuerst brauchen wir aber noch ein paar Definitionen.

3.3.1. Definitionen und Verabredungen

Zu $\langle \text{len} \rangle$ und $\langle \text{Set} \rangle$ Vergleiche die Definition von n -**Tupel** im Unterabschnitt 3.1.3 auf Seite 15.

³¹⁾ Die Anforderungen an A und B sind intuitiv klar. Insbesondere darf B nicht von einem bisher undefinierten Teil von A abhängig sein.

³²⁾ Nach den Definitionen von $:\Leftrightarrow$ und $:=$ sind zwei Ausdrücke P und Q schon dann gleich, wenn nach der Ersetzung aller Vorkommen von A durch B sowohl in P als auch in Q die resultierenden Ausdrücke \bar{P} und \bar{Q} gleich sind.

³³⁾ siehe [1] Kapitel 1.4 und [36, 37]

$ M $	$:=$	Kardinalität von M	, die Anzahl der Elemente aus M
M^n	$:=$	$M \times \cdots \times M$, für $n \in \mathbb{N}_0$, das kartesische Produkt aus n Mengen M
M^0	$=$	$\{()\}$, wobei $()$ das 0-Tupel ist
$\mathcal{S}(M)$	$:=$	$\{\vec{a} \mid \vec{a} \in M^n \wedge n \in \mathbb{N}_0\}$, die Menge der Tupel über M , ihre Tupelmenge
$(A, B)^<$	$:=$	A	, die linke Seite eines geordneten Paares.
$(A, B)^>$	$:=$	B	, die rechte Seite eines geordneten Paares.
$\mathcal{P}(M)$	$:=$	$\{A \mid A \subseteq M\}$, die Potenzmenge der Menge M
$\mathcal{P}_e(M)$	$:=$	$\{A \mid A \subseteq M \wedge A \in \mathbb{N}_0\}$, die endlichen Teilmengen von M
$\mathcal{R}(M)$	$:=$	$\{R \mid R \subseteq M \times M\}$, die Menge der binären Relationen in M
$\mathcal{R}_e(M)$	$:=$	$\{R \mid R \subseteq M \times M \wedge R \in \mathbb{N}_0\}$, die endlichen binären Relationen in M
\vdash_R	$:=$	R	, für Relationen $R \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$

Offensichtlich gilt für Mengen M und N :

$$\mathcal{P}_e(M) \subseteq \mathcal{P}(M) \quad , \quad \mathcal{R}_e(M) \subseteq \mathcal{R}(M) \quad (3.5)$$

$$\mathcal{R}(M) = \mathcal{P}(M \times M) = \mathcal{P}(M^2) \quad , \quad \mathcal{R}_e(M) = \mathcal{P}_e(M \times M) = \mathcal{P}_e(M^2) \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(M) \subset \mathcal{P}(N) & \Leftrightarrow \mathcal{P}_e(M) \subset \mathcal{P}_e(N) & \Leftrightarrow M \subset N \\ \mathcal{R}(M) \subset \mathcal{R}(N) & \Leftrightarrow \mathcal{R}_e(M) \subset \mathcal{R}_e(N) & \Leftrightarrow M \subset N \\ \vec{a} \in \mathcal{S}(M^2) & \Leftrightarrow \text{Set}(\vec{a}) \in \mathcal{R}_e(M) & (3.7) \end{aligned}$$

3.3.2. Formeln und Ableitungen

Im Folgenden sei \mathcal{L} stets eine gegebene Menge aus **Formeln**, z. B. alle korrekten **Formeln** der **Aussagenlogik** oder der **Prädikatenlogik**. Für die folgenden Betrachtungen ist aber nur nötig, dass die Elemente aus \mathcal{L} **Zeichenfolgen** sind. Die Teilmengen von \mathcal{L} nennen wir **Formelmengen**. Es sind genau die Elemente aus $\mathcal{P}(\mathcal{L})$.

Bei einem Beweis werden aus einer **Formelmenge** Γ von **Axiomen** und schon bewiesenen **Formeln** mittels zulässiger ³⁴⁾ **Ableitungen** die **Formeln** einer **Formelmenge** Δ abgeleitet; Schreibweise: $\langle\langle \Gamma \vdash \Delta \rangle\rangle$.

Für Teilmengen Γ und Δ von \mathcal{L} sei also:

- $\Gamma \vdash \Delta : \Leftrightarrow \Gamma$ **ableitbar** Δ ; oder auch Γ **beweisbar** Δ .
- $\Gamma \vdash \Delta$ nennen wir auch eine **Ableitung** in \mathcal{L} . Damit ist (Γ, Δ) ein Element einer binären Relation \vdash in $\mathcal{P}(\mathcal{L})$, einer sogenannten **Ableitungsrelation**.
- Wenn wir von einer Ableitung **a** sprechen, meinen wir immer ein Element einer **Ableitungsrelation**, d. h. ein geordnetes Paar, z. B. $(\Gamma, \Delta) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$, dargestellt als $\Gamma \vdash \Delta$.
- Um möglicherweise verschiedene **Ableitungsrelationen** unterscheiden zu können, indizieren wir $\langle\vdash\rangle$ ggf. mit der zugrundeliegenden **Relation** R , d. h. wir schreiben $\langle\vdash_R\rangle$ und sprechen dann von **R-ableitbar**, **R-beweisbar** und **R-Ableitung**.

Zur Vereinfachung der Darstellung und besseren Lesbarkeit treffen wir noch folgende Vereinbarungen für die beiden Seiten von $\langle\langle \Gamma \vdash \Delta \rangle\rangle$ (natürlich nur, wenn dies nicht zu Verwechslungen führt):

- Eine Aufzählung von **Formelmengen** und einzelnen **Formeln** steht für die Vereinigung der **Formelmengen** mit der Menge der einzeln angegebenen **Formeln**. Z. B. steht $\langle\langle \Gamma, \alpha \vdash \beta \rangle\rangle$ für $\langle\langle \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \{\beta\} \rangle\rangle$.

³⁴⁾ Was *zulässig* heißt, muss im entsprechenden Kontext jeweils definiert sein. Üblicherweise sind das bestimmte Ableitungsregeln und Substitutionen.

- Diese Aufzählungen können auch leer sein und stehen dann für die leere Menge. Z. B. steht $\langle\langle \vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rangle\rangle$ für $\langle\langle \emptyset \vdash \{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)\} \rangle\rangle$.
- Ist die Aufzählung links vom Relationssymbol $\langle\vdash\rangle$ leer, kann auch das Relationssymbol wegfallen. Im letzten Beispiel also einfach $\langle\langle \{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)\} \rangle\rangle$. Das entspricht dann einem **Axiom**.

Im Folgenden halten wir uns bei der Verwendung von Buchstaben so weit wie möglich an folgende Vereinbarungen:³⁵⁾

griechisch, klein:	$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	Formel	$\in \mathcal{L}$
griechisch, groß:	$\Gamma, \Delta, \Theta, \dots$	Formelmenge	$\in \mathcal{P}(\mathcal{L})$
lateinisch, fett, klein:	$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$	Ableitung	$\in \mathcal{P}(\mathcal{L})^2$
lateinisch, fett, groß:	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$	Ableitungsrelation	$\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2) = \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$

Damit definieren wir folgende Aussagen:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Ableitungen aus } \mathbf{A} \text{ lassen sich die aus } \mathbf{B} \text{ ableiten.} \quad (3.8)$$

$$\frac{\vec{\mathbf{a}}}{\vec{\mathbf{b}}} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Komponenten aus } \vec{\mathbf{a}} \text{ lassen sich die aus } \vec{\mathbf{b}} \text{ ableiten.} \quad (3.9)$$

$$\frac{\mathbf{a}_1 \mid \dots \mid \mathbf{a}_n}{\mathbf{b}_1 \mid \dots \mid \mathbf{b}_m} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Ableitungen } \mathbf{a}_i \text{ lassen sich die } \mathbf{b}_j \text{ ableiten.} \quad (3.10)$$

wobei in der letzten Definition $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ sei und die \mathbf{a}_i und die \mathbf{b}_j dabei jeweils beliebig permutiert werden können. $\langle\mid\rangle$ und Bruchstrich stehen für die **Metaoperationen** $\langle\&\rangle$ und $\langle\Rightarrow\rangle$.³⁶⁾ Wir nennen alle drei Formen **Schlussregeln**³⁷⁾. Die Elemente aus A bzw. die Komponenten a_i nennen wir die **Voraussetzungen** und die Elemente aus B bzw. die Komponenten b_j die **Folgerungen** der **Schlussregel**. Offensichtlich gilt:

$$\frac{a_1 \mid \dots \mid a_n}{b_1 \mid \dots \mid b_m} \Leftrightarrow \frac{\vec{\mathbf{a}}}{\vec{\mathbf{b}}} \Leftrightarrow \frac{\text{Set}(\vec{\mathbf{a}})}{\text{Set}(\vec{\mathbf{b}})} \quad (3.11)$$

Wir nennen eine **Schlussregel** auch einen **formalen Satz** und nennen sie **beschränkt**, wenn sie nur endlich viele **Voraussetzungen** und **Folgerungen** hat. Die **Schlussregeln** nach (3.9) und (3.10) sind per se beschränkt. Die nach (3.8) genau dann, wenn \mathbf{A} und \mathbf{B} endliche Mengen sind, d. h. wenn sie Elemente aus

Die Mengen der **Voraussetzungen** und **Folgerungen** dürfen auch leer sein. Dies führt zu den folgenden Spezialfällen:

Eine **Schlussregel** $\frac{A}{\emptyset}$ ohne **Folgerungen** ist immer gültig.

Ein Menge B von Ableitungen, die als **Axiome** dienen sollen, kann als **Schlussregel** $\frac{\emptyset}{B}$ ohne **Voraussetzungen** repräsentiert werden.

3.3.3. Schlussregeln

Nach diesen Vorbereitungen fassen wir noch mal zusammen:

Ein geordnetes Paar $(\mathbf{V}, \mathbf{F}) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)^2 = \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))^2$ heißt eine **Schlussregel** für \mathcal{L} , geschrieben $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{F}}$;

³⁵⁾ Die letzte Gleichung ergibt sich aus (3.6) auf Seite 22.

³⁶⁾ Der Bruchstrich hat die übliche Priorität, \mid die schwächste. Man beachte, dass Zähler und Nenner auch leer sein können, d. h. n und m gleich 0 sein dürfen. In der Praxis liegen sie bei kleinen Werten, typischerweise 0, 1 oder 2.

³⁷⁾ Genau genommen nur um die Darstellung einer Schlussregel. Die Exakte Definition erfolgt im Unterabschnitt 3.3.3.

und es gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} &\in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})) & , \text{ die } \mathbf{Voraussetzungen} & , \text{ eine Menge aus } \mathbf{V-Ableitungen}. \\
 \mathbf{F} &\in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})) & , \text{ die } \mathbf{Folgerungen} & , \text{ eine Menge aus } \mathbf{F-Ableitungen}. \\
 \mathbf{a} \in \mathbf{V} &\Rightarrow \mathbf{a} = (\Gamma, \Delta) \ \& \ \Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{L}) & , \text{ Schreibweise: } \Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \Delta \\
 \mathbf{a} \in \mathbf{F} &\Rightarrow \mathbf{a} = (\Gamma, \Delta) \ \& \ \Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{L}) & , \text{ Schreibweise: } \Gamma \vdash_{\mathbf{F}} \Delta
 \end{aligned}$$

mit Γ und Δ jeweils passend.

Die **Schlussregel** entspricht der **Aussage**:

Mit den **Voraussetzungen** aus **V** lassen sich alle **Folgerungen** aus **F** ableiten³⁸⁾.

Die **Schlussregel** heißt **allgemeingültig**, wenn aus den **Voraussetzungen** alle **Folgerungen** abgeleitet werden können. In diesem Fall kann sie zur **zulässigen Transformation** von weiteren **Formeln** dienen.

Die Mengen der **Voraussetzungen** und **Folgerungen** sowie die beiden Seiten einer **Ableitung** dürfen auch leer sein. Dies führt zu den folgenden semantischen Spezialfällen:

- Eine **Ableitung** (A, \emptyset) ist trivial allgemeingültig. Daher können solche Voraussetzungen und Folgerungen ohne Probleme weggelassen werden.
- Ein Menge B von **Formeln**, die **Axiome** sein sollen, kann durch eine **Voraussetzung** (\emptyset, B) repräsentiert werden.
- Ein Menge B von **Formeln**, die als allgemeingültig zu beweisen sind, kann durch eine **Folgerung** (\emptyset, B) repräsentiert werden.

Wenn eine Schlussregel $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{F}}$ beschränkt ist, sind **V** und **F** endliche Mengen und es gibt wegen (3.7) auf Seite 22 zwei **Tupel** $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{f}} \in \mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)$, so dass gilt:³⁹⁾

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} &= \text{Set}(\vec{\mathbf{v}}) & , \mathbf{F} &= \text{Set}(\vec{\mathbf{f}}) \\
 N &\geq |\mathbf{V}| & , M &\geq |\mathbf{F}| & , \text{ mit } N, M \in \mathbb{N}_0 \\
 \vec{\mathbf{v}} &= \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\} & , \vec{\mathbf{f}} &= \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_M\} \\
 \mathbf{v}_n &= (\mathbf{v}_n^<, \mathbf{v}_n^>) & , \mathbf{f}_m &= (\mathbf{f}_m^<, \mathbf{f}_m^>) & , \text{ für } 1 \leq n \leq N, 1 \leq m \leq M \\
 \mathbf{v}_n^< \vdash_{\mathbf{V}} \mathbf{v}_n^> & , \mathbf{f}_m^< \vdash_{\mathbf{F}} \mathbf{f}_m^> & , \text{ für } 1 \leq n \leq N, 1 \leq m \leq M
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

also

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{v}} &= \{(\mathbf{v}_n^<, \mathbf{v}_n^>) \mid 1 \leq n \leq N\} \\
 \vec{\mathbf{f}} &= \{(\mathbf{f}_m^<, \mathbf{f}_m^>) \mid 1 \leq m \leq M\}
 \end{aligned}$$

und wir nennen auch das Paar $(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{f}})$ **Schlussregel**. Diese ist per se **beschränkt** und ein Element aus $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)^2$. Nun haben wir alternative Schreibweisen für **beschränkte Schlussregeln**:⁴⁰⁾

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{F}} \Leftrightarrow \frac{\text{Set}(\vec{\mathbf{v}})}{\text{Set}(\vec{\mathbf{f}})} \Leftrightarrow \frac{\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{f}}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{v}_1^< \vdash_{\mathbf{V}} \mathbf{v}_1^> \mid \dots \mid \mathbf{v}_N^< \vdash_{\mathbf{V}} \mathbf{v}_N^>}{\mathbf{f}_1^< \vdash_{\mathbf{F}} \mathbf{f}_1^> \mid \dots \mid \mathbf{f}_M^< \vdash_{\mathbf{F}} \mathbf{f}_M^>} , \text{ **Schlussregel** oder **formaler Satz** } \quad (\text{FS})$$

³⁸⁾ mittels noch zu definierender **zulässiger Transformationen**

³⁹⁾ Statt \geq könnte in (3.12) auch $=$ genommen werden. Dann müssten die \mathbf{v}_n und die \mathbf{f}_m jeweils paarweise verschieden sein, was wir nicht voraussetzen wollen.

⁴⁰⁾ Nach (3.8), (3.9) und (3.10) auf Seite 23 sind die „Brüche“ **Aussagen**, und keine Paare mehr. Die Äquivalenz der Aussagen steht schon in (3.11) auf Seite 23

3.3.4. Beweise

Für einen **Beweis** in **ASBA** ist stets gegeben:⁴¹⁾

- \mathcal{L} , eine Menge aus **Formeln**, die zugrundeliegende **Sprache**.
- $\mathcal{E} \subseteq \{E \mid E : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}\}$, eine Menge aus **Funktionen**, die **Substitutionen**.
- $\mathcal{C} \in \mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})))$, eine Menge aus **Schlussregeln**.
- $\mathcal{O} \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$, eine Menge aus **Ableitungen**, die **Ergebnisse**.

Die **Substitutionen** sorgen z. B. dafür, dass aus einer allgemeingültigen Formel wie $\langle\langle \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rangle\rangle$ z. B. die allgemeingültige Formel $\langle\langle \gamma \rightarrow (\delta \rightarrow \gamma) \rangle\rangle$ abgeleitet werden kann. Die **Schlussregeln** geben erlaubte Schlussfolgerungen aus gegebenen Elementen an und umfassen auch die Voraussetzungen eines Satzes. Die **Ergebnisse** schließlich sind das, was mittels eines Beweises aus den gegebenen Voraussetzungen \mathcal{L} , \mathcal{E} und \mathcal{C} gefolgert werden soll.

Im Fall von **beschränkten Schlussregeln** können statt \mathcal{C} und \mathcal{O} auch

- $\vec{\mathcal{C}} \in \mathcal{S}(\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)^2)$, ein **Tupel** aus **Schlussregeln**.
- $\vec{\mathcal{O}} \in \mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)$, ein **Tupel** aus **Ableitungen**, die **Ergebnisse**.

gegeben sein. Mit

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &:= \{(\text{Set}(\vec{\mathbf{v}}), \text{Set}(\vec{\mathbf{f}})) \mid (\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{f}}) \in \text{Set}(\vec{\mathcal{C}})\} \\ \mathcal{O} &:= \text{Set}(\vec{\mathcal{O}})\end{aligned}$$

ergibt sich wegen (3.5) und (3.7) auf Seite 22 wieder die erste Form.

3.3.5. Beispiel für einen Beweis

***** Hier weitermachen *****

Zur Veranschaulichung ein Beispiel:⁴²⁾

- $E_{\alpha,\beta}(\delta)$:= das δ , bei dem alle Vorkommen von α durch β ersetzt wurden
- \mathcal{L} := die Menge aller **Formeln** der aussagenlogischen **Sprache**
- \mathbf{v}_1 := $(A, \{\alpha\})$
- \mathbf{v}_2 := $(B, \{\alpha \rightarrow \beta\})$
- \mathbf{v}_3 := $(A \cup B, \{\beta\})$
- \mathcal{E} := $\{E_{\alpha,\delta}, E_{\beta,B}, E_{\beta,B \rightarrow \delta}, E_{\gamma,\delta}\}$
- \mathcal{C} := ...
- χ_1 := $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- χ_2 := $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- \mathcal{X} := $\{\chi_1, \chi_2\}$
- $\vdash_{\mathbf{F}}$:= ...

⁴¹⁾ **ASBA** selbst kann nur endliche Mengen abspeichern. Für **ASBA** muss daher einschränkend $\mathcal{C} \in \mathcal{R}_e(\mathcal{R}_e(\mathcal{P}_e(\mathcal{L})))$ und $\mathcal{O} \in \mathcal{R}_e(\mathcal{P}_e(\mathcal{L}))$ sein.

⁴²⁾ siehe [29]

3.3.6. Beweisschritte

Ein Beweis⁴³⁾ in ASBA besteht aus

einer Schlussregel	$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{F}}$	
einer Folge	$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_K)$	von Beweissschritten b_k , die Beweissschrittfolge
einer Folge	$\mathcal{T} = (T_1, T_2, \dots, T_K)$	von Transformationen T_k , die Transformationsfolge

Dabei ist K ein Element aus \mathbb{N}_0 , $0 \leq k \leq K$, die Beweissschritte b_k sind Schlussregeln und die Transformationen T_k werden später definiert. Wir definieren noch:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k &:= \{b_1, b_2, \dots, b_k\}, \text{ für } 0 \leq k \leq K \\ \mathcal{B} &:= \mathcal{B}_K \end{aligned}$$

und nennen \mathcal{B} die Beweissschrittmenge der Beweissschrittfolge \vec{b} . Dann ist $\mathcal{B}_0 = \emptyset$ und $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{B}$ für $0 \leq i \leq j \leq K$. – Wir nennen die Beweissschrittfolge auch eine Ableitung aus \mathbf{F} aus \mathbf{V} .

Jeder Beweissschritt b_k für $1 \leq k \leq K$ muss entweder eine Voraussetzung aus \mathbf{V} oder durch Anwendung einer allgemeingültigen Schlussregel auf eine Teilmenge von \mathcal{B}_{k-1} eine wahre Formel oder eine weitere allgemeingültige Schlussregel sein. Schließlich muss noch

$$\mathbf{F} \subseteq \mathcal{B}$$

sein, da jede Folgerung aus \mathbf{F} in der Folge \vec{b} vorkommen und somit Element der Menge \mathcal{B} sein muss.

=====

Bevor die Schlussregel weiter behandelt werden, werden noch Elemente der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik behandelt. Wir stützen uns dabei weitgehend auf [1], ohne das jedes Mal anzugeben.

3.4. Aussagenlogik

3.4.1. Konstante und Operationen

Die Tabelle 3.3 auf der nächsten Seite⁴⁴⁾ definiert für die zweiwertige Logik Konstante und Junktoren über die Wahrheitswerte ihrer Anwendung. So ergeben sich, abhängig von den Wahrheitswerten der Operanden A und B ,⁴⁵⁾ die in der Tabelle angegebenen Wahrheitswerte für die Operationen. Die mit 0, 1 und 2 benannten Spalten werden jeweils nur für die 0-, 1- und 2-stelligen Junktoren, d. h. für die Konstanten, die unären und die binären Junktoren ausgefüllt. Dabei werden die Konstanten als 0-stellige Junktoren angesehen. Hat der Inhalt einer Zelle keine Relevanz, steht dort ein Minuszeichen, ist kein Wert bekannt, so bleibt sie leer.

Für einige Junktorsymbole⁴⁶⁾, Namen und Sprechweisen sind auch Alternativen angegeben. Die durchgestrichenen (d. h. negierten) Symbole sind ungebräuchlich und nur aus formalen Gründen aufgeführt. Wenn für eine bestimmte Kombination von Wahrheitswerten mehr als eine Zeile angegeben ist, so können die zugehörigen Junktoren zwar formal verschieden sein, liefern in der zweiwertigen Aussagenlogik jedoch dieselben Ergebnisse.

Die zur Einsparung von Klammern definierten Prioritäten sind in der Tabelle 3.2 auf Seite 18 angegeben.⁴⁷⁾

⁴³⁾ siehe [1] Kapitel 1.6 und 3.6

⁴⁴⁾ Die Tabelle basiert auf den Wahrheitstafeln in [31] Kapitel 2.2 und [1] Kapitel 1.1 Seite 3.

⁴⁵⁾ A und B können hier beliebige Aussagen sein – auch Formeln –, die jeweils genau einen Wahrheitswert repräsentieren.

⁴⁶⁾ Symbole, die für Junktoren verwendet werden.

⁴⁷⁾ Zur Erinnerung: Es gilt Rechtsklammerung. siehe Unterabschnitt 3.1.5 auf Seite 17

A	-	W	F	W	W	F	F	-	Aussage A	-
B	-	-	-	W	F	W	F	-	Aussage B	-
Junktor ¹⁾	0 ²⁾	1		2				Name ³⁾	Sprechweise	Prio ⁴⁾
\top	W	-	-	-	-	-	-	Verum	<i>wahr</i>	-
\perp	F	-	-	-	-	-	-	Falsum	<i>falsch</i>	-
	-	W	W	-	-	-	-			-
	-	W	F	-	-	-	-	Klammerung	A ist geklammert	5)
\neg	-	F	W	-	-	-	-	Negation	Nicht A	1 ⁶⁾
	-	F	F	-	-	-	-			-
	-	-	-	W	W	W	W	Tautologie		-
\vee	-	-	-	W	W	W	F	Disjunktion; Adjunktion; Alternative	A oder B	3
$\leftarrow \Leftarrow \subset$	-	-	-	W	W	F	W	Replikation; Konversion; konverse Implikation	A folgt aus B	4
\mid	-	-	-	W	W	F	F	Präpendenz	Identität von A	-
$\rightarrow \Rightarrow \supset$	-	-	-	W	F	W	W	Implikation; Subjunktion; Konditional	Aus A folgt B ; Wenn A dann B ; A nur dann wenn B	4
\mid	-	-	-	W	F	W	F	Postpendenz	Identität von B	-
$\leftrightarrow \Leftrightarrow$	-	-	-	W	F	F	W	Äquivalenz; Bijunktion; Bikonditional	A genau dann wenn B ; A dann und nur dann wenn B	5
$\wedge \& \cdot$	-	-	-	W	F	F	F	Konjunktion	A und B ; Sowohl A als auch B	2
$\uparrow \nearrow \mid$	-	-	-	F	W	W	W	NAND; Unverträglichkeit; Sheffer-Funktion	Nicht zugleich A und B	2
$+\dot{\vee} \vee \oplus$	-	-	-	F	W	W	F	XOR; Antivalenz; ausschließende Disjunktion	Entweder A oder B	3
$\leftrightarrow \Leftrightarrow \neq$	-	-	-	"	"	"	"	Kontravalenz		-
\mid	-	-	-	F	W	F	W	Postnonpendenz	Negation von B	-
$\rightarrow \Rightarrow \not\supset$	-	-	-	F	W	F	F	Postsektion		-
\mid	-	-	-	F	F	W	W	Pränonpendenz	Negation von A	-
$\leftarrow \Leftarrow \not\subset$	-	-	-	F	F	W	F	Präsektion		-
$\downarrow \nabla$	-	-	-	F	F	F	W	NOR; Nihilation; Peirce-Funktion	Weder A noch B	3
	-	-	-	F	F	F	F	Kontradiktion		-

Um vollständig zu sein, d. h. alle 22 möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten für höchstens zwei Variable zu berücksichtigen, enthält die Tabelle auch viele ungebräuchliche Symbole und Operationen. Die Zeilen mit den Klammern und den gebräuchlichsten Junktoren sind in der Tabelle grau hinterlegt. Hellgrau hinterlegt sind Zeilen mit weniger gebräuchlichen Junktoren. Die restlichen Junktoren sind uninteressant und brauchen daher keine Priorität. – Im Folgenden werden von den in der Tabelle aufgeführten Junktoren nur noch \top , \perp , \neg , \wedge , \vee , $+$, \rightarrow , \leftrightarrow , \leftarrow , \uparrow und \downarrow verwendet.

¹ Die Junktoren $\langle \subset \rangle$, $\langle \supset \rangle$, $\langle \Leftarrow \rangle$ und $\langle \not\supset \rangle$ haben hier nicht die Bedeutung der entsprechenden Operationen der Mengenlehre und dürfen nicht damit verwechselt werden; entsprechendes gilt für $\langle + \rangle$ und $\langle \cdot \rangle$ mit Addition und Multiplikation.

² 0-stellige Junktoren sind Konstante, hier Wahrheitswerte.

³ Ist eine Zelle in dieser Spalte leer, so ist die zugehörige Zeile nur vorhanden, um alle binären Junktoren aufzuführen.

⁴ Je kleiner die Zahl, je höher die Priorität.

⁵ Klammerung ist genau genommen keine Operation und wird nicht nur bei logischen, sondern auch bei anderen Ausdrücken verwendet. Ihre Priorität - sofern man überhaupt davon sprechen kann - kann nur höher als die aller Junktoren sein.

⁶ Die Priorität der unären Operationen muss höher sein als die aller mehrwertigen, also auch der binären Operationen. Wenn die Symbole aller unären Operationen auf derselben Seite des Operanden stehen, brauchen sie eigentlich keine Priorität, da die Auswertung nur von innen (dem Operanden) nach außen erfolgen kann. Nur wenn es sowohl links-, als auch rechtsseitige unäre Operationen gibt, muss man für diese Prioritäten definieren.

Tabelle 3.3.: Definition von aussagenlogischen Symbolen.

3.4.2. Formalisierung

Da sie die Grundlage – quasi das Fundament – des mathematischen Inhalts von **ASBA** sind, müssen die **Axiome**, **Sätze**, **Beweise**, usw. der **Aussagenlogik** (und später der **Prädikatenlogik**) in streng formaler Form vorliegen.⁴⁸⁾ Da Computerprogramme mit der **Polnischen Notation**⁴⁹⁾ besser umgehen können und Klammern dort überflüssig sind, werden viele **Formeln** auch parallel in der Polnischen Notation angegeben. Dies wird auf Wunsch auch bei Ausgaben von **ASBA** so gehandhabt.

3.4.2.1. Bausteine der aussagenlogischen Sprache

Zur Einteilung der **Junktoren** werden die folgenden Mengen definiert:

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &:= \{\top, \perp\} && , \text{ Menge der } \textbf{aussagenlogischen Konstanten} \\ \mathcal{U} &:= \{\neg\} && , \text{ Menge der } \textbf{unären Junktoren} \\ \mathcal{O} &:= \{\wedge, \vee, +, \rightarrow, \leftrightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\} && , \text{ Menge der } \textbf{binären Junktoren}\end{aligned}$$

Um damit **Formeln** zu bilden, werden noch Variable gebraucht:

$$\mathcal{Q} := \{q_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \quad , \text{ Menge der } \textbf{aussagenlogischen Variablen}$$

Die Mengen \mathcal{K} , \mathcal{U} , \mathcal{O} und \mathcal{Q} müssen paarweise disjunkt sein. – Damit können die folgende Mengen definiert werden:

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &:= \mathcal{K} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{O} && , \text{ Menge der } \textbf{Junktorsymbole} \\ \mathcal{A} &:= \mathcal{Q} \cup \mathcal{J} && , \text{ Alphabet der } \textbf{aussagenlogischen Sprache} \text{ (für } \mathcal{J} \text{)} \\ \mathcal{J}_x &\subseteq \mathcal{J} && , \text{ eine Teilmenge von } \mathcal{J} \text{ für eine Indexvariable } x \\ \mathcal{A}_x &:= \mathcal{Q} \cup \mathcal{J}_x && , \text{ das Alphabet der } \textbf{aussagenlogischen Sprache} \text{ für } \mathcal{J}_x\end{aligned}$$

Für Elemente aus \mathcal{Q} verwenden wir normalerweise die kleinen, lateinischen Buchstaben a, b, c , usw.

3.4.2.2. Aussagenlogische Formeln

Neben dem Alphabet \mathcal{A} bzw. \mathcal{A}_x werden noch Klammern als Gliederungszeichen verwendet. Damit können nun rekursiv für jede Teilmenge \mathcal{J}_x von \mathcal{J} zwei Mengen von aussagenlogischen **Formeln** definiert werden, wobei wir für diese Formeln die kleinen, griechischen Buchstaben α, β, γ , usw. verwenden.

\mathcal{L}_x^A sei die Menge der auf folgende Weise definierten **aussagenlogischen Formeln mit Klammerung** zum Alphabet \mathcal{A}_x :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &\subset \mathcal{L}_x^A && , \text{ die Variablen} \\ \mathcal{J}_x \cap \mathcal{K} &\subset \mathcal{L}_x^A && , \text{ die Konstanten} \\ \alpha \in \mathcal{L}_x^A &\Rightarrow (\neg \alpha) \in \mathcal{L}_x^A && , \text{ für } \neg \in \mathcal{U} \cap \mathcal{J}_x && (3.13) \\ \alpha, \beta \in \mathcal{L}_x^A &\Rightarrow (\alpha \circ \beta) \in \mathcal{L}_x^A && , \text{ für } \circ \in \mathcal{O} \cap \mathcal{J}_x && (3.14)\end{aligned}$$

⁴⁸⁾ Die Formalisierung stützt sich auf [27]; siehe auch [21, 24].

⁴⁹⁾ Bei der **Polnischen Notation** stehen die Operanden bzw. Argumente von **Relationen** und **Funktionen** stets rechts von den Relations- und Funktionssymbolen. Dadurch kann auf Gliederungszeichen wie Klammern und Kommata verzichtet werden. Noch einfacher für Computer ist die **umgekehrte Polnische Notation**, bei der die Operanden und Argumente links von den Symbolen stehen.

Nur die auf diese Weise konstruierten **Formeln** sind Elemente aus \mathcal{L}_x^A . – Für $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}$ sei noch $\mathcal{L}^A := \mathcal{L}_x^A$.

\mathcal{L}_x^{Ap} sei die Menge der auf folgende Weise definierten **aussagenlogischen Formeln** in **Polnischer Notation**:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &\subset \mathcal{L}_x^{Ap} && , \text{ die Variablen} \\ \mathcal{J}_x \cap \mathcal{K} &\subset \mathcal{L}_x^{Ap} && , \text{ die Konstanten} \\ \alpha \in \mathcal{L}_x^{Ap} &\Rightarrow \quad \ominus \alpha \in \mathcal{L}_x^{Ap} && , \text{ für } \ominus \in \mathcal{U} \cap \mathcal{J}_x && (3.15) \\ \alpha, \beta \in \mathcal{L}_x^{Ap} &\Rightarrow \quad \circledast \alpha \beta \in \mathcal{L}_x^{Ap} && , \text{ für } \circledast \in \mathcal{O} \cap \mathcal{J}_x && (3.16) \end{aligned}$$

Nur die auf diese Weise konstruierten **Formeln** sind Elemente aus \mathcal{L}_x^{Ap} . – Für $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}$ sei noch $\mathcal{L}^{Ap} := \mathcal{L}_x^{Ap}$.

Wie man leicht sieht, gilt

$$\mathcal{J}_x \subset \mathcal{J}_y \subseteq \mathcal{J} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}_x \subset \mathcal{A}_y \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{L}_x^A \subset \mathcal{L}_y^A \subseteq \mathcal{L}^A \\ \mathcal{L}_x^{Ap} \subset \mathcal{L}_y^{Ap} \subseteq \mathcal{L}^{Ap} \end{cases}$$

und weiterhin gibt es eine bijektive Abbildung von \mathcal{L}^A nach \mathcal{L}^{Ap} . Auf einen **Beweis** verzichten wir. Durch Anwendung der Klammerregeln von Paragraph 3.4.2.1 auf der vorherigen Seite lassen sich in der Regel noch viele Klammern der **Formeln** aus \mathcal{L}_x^A einsparen. Die **Formeln** aus \mathcal{L}_x^{Ap} sind frei von Klammern. Die Namen der **Junktoren** finden sich in der Tabelle 3.3 auf Seite 27.

Die **Formeln**, die nach einer der Regeln (3.13), (3.14), (3.15) oder (3.16) gebildet wurden, sind offensichtlich **zerlegbar**, die anderen, d. h. Variablen und Konstanten (aus \mathcal{Q} bzw. \mathcal{K}), sind **unzerlegbar**. Letztere bezeichnet man auch als **atomare Formeln**.

3.4.3. Definition von Junktoren durch andere

Im folgenden gelte für zwei aussagenlogische **Formeln** α und β :

$\alpha = \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha$ und β stimmen als **Zeichenkette** überein.

$\alpha \equiv \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha$ und β können mit Hilfe erlaubter **Substitutionen** und geltender **Axiome** – siehe Unterabschnitt 3.4.4 auf Seite 31 – ineinander überführt werden.

Es werden verschiedene Teilmengen von \mathcal{J} eingeführt, die jeweils ausreichen um alle anderen Elemente aus \mathcal{J} zu definieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\text{bool}} &:= \{\neg, \wedge, \vee\} && (\text{Boolesche Signatur}) \\ \mathcal{J}_{\text{and}} &:= \{\neg, \wedge\} \\ \mathcal{J}_{\text{or}} &:= \{\neg, \vee\} \\ \mathcal{J}_{\text{imp}} &:= \{\neg, \rightarrow\} \\ \mathcal{J}_{\text{rep}} &:= \{\neg, \leftarrow\} \\ \mathcal{J}_{\text{nand}} &:= \{\uparrow\} \\ \mathcal{J}_{\text{nor}} &:= \{\downarrow\} \end{aligned}$$

Solche Teilmengen heißen **logische Signatur**.

Im Folgenden stehen jeweils links die **Formeln** in üblicher Schreibweise vollständig geklammert und rechts in Polnischer Notation (ohne Klammern). Ferner seien α und β beliebige, nicht notwendig

verschiedene **Formeln** aus der passenden Menge \mathcal{L}_x^A bzgl. der um die mit Hilfe der Definitionen erweiterten **Formelmenge**.

Ausgehend von den **Junktoren** aus der **Boolesche Signatur** $\mathcal{J}_{\text{bool}}$ werden die restlichen **Junktoren** aus \mathcal{J} definiert. Die Definitionen sind in zwei Gruppen eingeteilt, und zwar die mit den **Junktoren** aus \mathcal{J}_{and} :

$$(\alpha \rightarrow \beta) := (\neg(\alpha \wedge (\neg\beta))) \quad \rightarrow \alpha \beta := \neg \wedge \alpha \neg \beta \quad (3.17)$$

$$(\alpha \leftarrow \beta) := (\neg(\beta \wedge (\neg\alpha))) \quad \leftarrow \beta \alpha := \neg \wedge \beta \neg \alpha \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} (\alpha \leftrightarrow \beta) &:= ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftarrow \beta)) & \leftrightarrow \alpha \beta &:= \wedge \rightarrow \alpha \beta \leftarrow \alpha \beta \\ \perp &:= (q_0 \wedge (\neg q_0)) & \perp &:= \wedge q_0 \neg q_0 \\ (\alpha \uparrow \beta) &:= (\neg(\alpha \wedge \beta)) & \uparrow \alpha \beta &:= \neg \wedge \alpha \beta \end{aligned} \quad (3.19)$$

und die mit den **Junktoren** aus \mathcal{J}_{or} :

$$(\alpha \downarrow \beta) := (\neg(\alpha \vee \beta)) \quad \downarrow \alpha \beta := \neg \vee \alpha \beta \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) &:= ((\alpha \vee \beta) \wedge (\neg(\alpha \wedge \beta))) & + \alpha \beta &:= \wedge \vee \alpha \beta \neg \wedge \alpha \beta \\ \top &:= (q_0 \vee (\neg q_0)) & \top &:= \vee q_0 \neg q_0 \end{aligned}$$

Ist $\langle \vee \rangle$ oder $\langle \wedge \rangle$ nicht vorgegeben, d. h. wird von den Elementen aus \mathcal{J}_{and} bzgl. \mathcal{J}_{or} statt von denen aus $\mathcal{J}_{\text{bool}}$ ausgegangen, so muss man den fehlenden **Junktor** mittels der passenden der beiden folgenden Definitionen einführen:

$$\begin{aligned} (\alpha \vee \beta) &:= (\neg((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))) & \vee \alpha \beta &:= \neg \wedge \neg \alpha \neg \beta \\ (\alpha \wedge \beta) &:= (\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))) & \wedge \alpha \beta &:= \neg \vee \neg \alpha \neg \beta \end{aligned}$$

Nun sind wieder alle **Junktoren** definiert.

Entsprechend wird bei Vorgabe von \mathcal{J}_{imp} bzgl. \mathcal{J}_{rep} die passende der beiden folgenden Definitionen ausgewählt:

$$\begin{aligned} (\alpha \vee \beta) &:= ((\neg\alpha) \rightarrow \beta) & \vee \alpha \beta &:= \rightarrow \neg \alpha \beta \\ (\alpha \wedge \beta) &:= (\neg((\neg\beta) \leftarrow \alpha)) & \wedge \alpha \beta &:= \neg \leftarrow \neg \beta \alpha \end{aligned}$$

woraufhin dann (3.17) bzgl. (3.18) als Gleichung nachzuweisen ist. Da aus (3.18) durch **Vertauschung** der Variablen unmittelbar

$$(\alpha \leftarrow \beta) \equiv (\beta \rightarrow \alpha) \quad \leftarrow \alpha \beta \equiv \rightarrow \beta \alpha$$

folgt, vermindert sich der Aufwand dazu erheblich.

Bei Vorgabe von $\mathcal{J}_{\text{nand}}$ bzgl. \mathcal{J}_{nor} schließlich werden die passenden Definition aus

$$\begin{aligned} (\neg\alpha) &:= (\alpha \downarrow \alpha) & \neg \alpha &:= \downarrow \alpha \alpha \\ (\neg\alpha) &:= (\alpha \uparrow \alpha) & \neg \alpha &:= \uparrow \alpha \alpha \end{aligned}$$

und, da $\langle \neg \rangle$ jetzt definiert ist, aus

$$\begin{aligned} (\alpha \vee \beta) &:= (\neg(\alpha \downarrow \beta)) & \vee \alpha \beta &:= \neg \downarrow \alpha \beta \\ (\alpha \wedge \beta) &:= (\neg(\alpha \uparrow \beta)) & \wedge \alpha \beta &:= \neg \uparrow \alpha \beta \end{aligned} \quad (3.21)$$

ausgewählt und es ist (3.19) bzgl. (3.20) als Gleichung nachzuweisen.

Abschließend ist noch nachzuweisen, dass mit Hilfe der jeweils passenden der Definitionen (3.17) bis (3.21), ausgehend vom jeweils passenden \mathcal{L}_x^A , genau die gesamte **Formelmenge** \mathcal{L}^A erzeugt werden kann.

3.4.4. Aussagenlogisches Axiomensystem

Ausgehend von der **logischen Signatur** $\mathcal{J}_{\text{and}} = \{\neg, \wedge\}$ und der Definition 3.17 auf der vorherigen Seite von $\langle \rightarrow \rangle$ werden die folgenden vier logischen **Axiome** definiert:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) & \rightarrow \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \gamma \rightarrow \rightarrow \alpha \beta \rightarrow \alpha \gamma \\
 \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta & \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \wedge \alpha \beta \\
 \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha ; \quad \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta & \rightarrow \wedge \alpha \beta \alpha ; \quad \rightarrow \wedge \alpha \beta \beta \\
 (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg \alpha) & \rightarrow \rightarrow \alpha \neg \beta \rightarrow \beta \neg \alpha
 \end{array}$$

> > > Aussagenlogik weiter bearbeiten. < < <

3.5. Prädikatenlogik

> > > Prädikatenlogik bearbeiten. < < <

3.6. Mengenlehre

> > > Mengenlehre bearbeiten. < < <

4. Ideen

4.1. Schlussregeln

In diesem Abschnitt geht es um **zulässige Transformationen**, d. h. **allgemeingültige Schlussregeln**. Dazu gehören zunächst die **Basisregeln**. Dann aber auch alle aus den **Basisregeln** und den bis dahin **allgemeingültigen Schlussregeln** korrekt abgeleiteten neuen **Schlussregeln**. Die **Schlussregeln** haben die Form eines Formalen **Satze**.

4.1.1. Basisregeln

Gemäß [1] Kapitel 1.4 *Ein vollständiger aussagenlogischer Kalkül* werden sechs **Basisregeln** definiert. Zuvor werden aber noch einige **Definitionen** gebraucht. Dazu seien n, m, k und l natürliche Zahlen (auch 0), α, α_i, β und β_j **Formeln** X, X_i, Y und Y_j Mengen von **Formeln** und

$$\begin{aligned} X &:= X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \\ Y &:= Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_k \cup \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l\} \end{aligned}$$

X und Y können auch die leere Menge sein. Damit wird definiert:

$$\begin{aligned} \alpha \vdash \beta &:\Leftrightarrow \beta \text{ ist mittels schrittweiser Anwendung } \textit{zulässiger Transformationen} \\ &\text{(siehe weiter unten) aus } \alpha \text{ ableitbar. Sprechweise: Aus } \alpha \text{ ist } \beta \\ &\text{ableitbar oder beweisbar; kurz: „} \alpha \text{ ableitbar } \beta \text{“ bzw. „} \alpha \text{ beweisbar} \\ &\beta \text{“ – Es kann auch } \langle \alpha \rangle \text{ durch } \langle X \rangle \text{ und/oder } \langle \beta \rangle \text{ durch } \langle Y \rangle \text{ ersetzt} \\ &\text{werden.} \\ \vdash \beta &:\Leftrightarrow \emptyset \vdash \beta \quad (\langle \vdash \rangle \text{ kann dann auch ganz entfallen}) \\ X_1, X_2, \dots, X_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \vdash Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m &:\Leftrightarrow X \vdash Y \end{aligned}$$

Eine **zulässige Transformation** ist die Anwendung einer **Substitution**¹⁾ (siehe unten), einer **Basisregel** (siehe unten) oder einer davon abgeleiteten sonstigen **Schlussregel**, z. B. aus Unterabschnitt 3.3.3 auf Seite 23. Bei den **Schlussregeln** und der **Substitution** $\langle \leftarrow \rangle$ soll das Komma stärker binden als $\langle \vdash \rangle$, $\langle \leftarrow \rangle$ und $\langle | \rangle$, wobei $\langle | \rangle$ für „und“ bzw. $\langle \& \rangle$ ²⁾ steht und schwächer bindet als $\langle \vdash \rangle$ und $\langle \leftarrow \rangle$.³⁾

Zur der Auswahl der **Basisregeln**, der Formulierung und der Bezeichnungen wird auf [1, 37] zurückgegriffen. Wie in [37] steht $\langle E \rangle$ für „Einführung“ und $\langle B \rangle$ für „Beseitigung“ (oder „Elimination“) von **Junktoren**.⁴⁾

Im Folgenden seien α und β **Formeln** und X und Y Mengen von **Formeln**. Für die sechs **Basisregeln** werden dann nur noch die **Junktoren** $\langle \rightarrow \rangle$ und $\langle \wedge \rangle$ benötigt. Bei den weiteren **Schlussregeln** wird noch $\langle \rightarrow \rangle$ gemäß der Definition 3.17 auf Seite 30 verwendet.

¹⁾ siehe Unterabschnitt 4.1.2 auf der nächsten Seite

²⁾ siehe Unterabschnitt 3.2.1 auf Seite 19

³⁾ siehe Fußnote 3 von Tabelle 3.2 auf Seite 18

⁴⁾ In der **Monotonieregel** wird hier, anders als in [1], $\langle \langle X, Y \rangle \rangle$ statt $\langle \langle Y, \text{für } Y \supseteq X \rangle \rangle$ genommen. Das ist gleichwertig, vermeidet aber den Zusatz $\langle \langle \text{für } Y \supseteq X \rangle \rangle$. Außerdem werden bei den Bezeichnungen $\langle \langle (\wedge 1) \rangle \rangle$ und $\langle \langle (\wedge 2) \rangle \rangle$ gemäß [37] durch $\langle \langle (\wedge E) \rangle \rangle$ bzw. $\langle \langle (\wedge B) \rangle \rangle$ ersetzt.

$\frac{}{\alpha \vdash \alpha}$	(Anfangsregel)	(AR)
$\frac{X \vdash \alpha}{X, Y \vdash \alpha}$	(Monotonieregel)	(MR)
$\frac{X \vdash \alpha, \neg \alpha}{X \vdash \beta}$	(Einführung/Beseitigung der Negation Teil 1)	(¬1)
$\frac{X, \alpha \vdash \beta \mid X, \neg \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$	(Einführung/Beseitigung der Negation Teil 2)	(¬2)
$\frac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta}$	(Einführung der Konjunktion)	(∧E)
$\frac{X \vdash \alpha \wedge \beta}{X \vdash \alpha, \beta}$	(Beseitigung der Konjunktion)	(∧B)

In einer **Schlussregel** werden die **Formeln**⁵⁾ über dem Querstrich als **Voraussetzungen** und die unter dem Querstrich als **Folgerungen** der Regel bezeichnet. Eine **Schlussregel** steht für die **Aussage**, dass mit ihren **Voraussetzungen** auch ihre **Folgerungen** gelten. – Im Gegensatz zu den weiteren **Schlussregeln** werden die oben aufgelisteten **Basisregeln** nicht weiter hinterfragt, d. h. sie gelten quasi als **Axiome**.

4.1.2. Identitätsregeln

Die **zulässigen Transformationen**, d. h. die Anwendung der **Schlussregeln**, erfordern **zulässige Substitutionen**. Damit wird dem Gleichheits- oder Identitätszeichen $\langle = \rangle$ mittels Einführungs- und Beseitigungsregel eine Bedeutung verliehen.⁶⁾ Dazu seien α , β und γ **vergleichbare**⁷⁾ **Formeln**.

Zunächst wird definiert:

$$\begin{aligned}
 \gamma(\alpha \leftarrow \beta) &:= \text{Die Formel, die man erhält, wenn in } \gamma \text{ alle oder nur einige Vorkommen von } \alpha \text{ durch } \beta \text{ ersetzt werden. – Gegebenenfalls muss noch die Auswahl der Ersetzungen angegeben werden, andernfalls werden alle Vorkommen ersetzt. Letzteres heißt dann } \mathbf{vollständige\ Substitution.} \\
 \gamma(\alpha \rightleftharpoons \beta) &:= \text{Die Formel, die man erhält, wenn in } \gamma \text{ alle } \alpha \text{ und } \beta \text{ miteinander vertauscht werden. Dazu ist es nötig, dass } \alpha \text{ und } \beta \text{ voneinander unabhängig sind, vorzugsweise zwei verschiedene Variable.}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

$\langle \alpha \leftarrow \beta \rangle$ heißt **Substitution** und $\langle \alpha \rightleftharpoons \beta \rangle$ **Vertauschung** oder kurz **Tausch**. – Sei noch $S = (s_1, s_2, \dots)$ eine endliche Folge aus **Substitutionen**, die auch **Vertauschungen** enthalten und auch leer sein kann.

⁵⁾ hier: **Aussagen** in einer formalen Form.

⁶⁾ siehe [37]

⁷⁾ siehe Ende von Unterabschnitt 3.2.1 auf Seite 19

Dann wird definiert:

$$\begin{aligned}\gamma(S) &:= \gamma(s_1)(s_2)\dots & (4.2) \\ \gamma(\emptyset) &= \gamma & \text{(nur zur Verdeutlichung)} \\ \gamma(s_1, s_2, \dots) &:= \gamma(S)\end{aligned}$$

Die **Vertauschung** ist eine spezielle Form der **Substitution**. Wenn x und y zwei verschiedene Variable, die in α , β und γ nicht vorkommen, gilt:

$$\gamma(\alpha \rightleftharpoons \beta) = \gamma(\alpha \leftarrow x, \beta \leftarrow y, y \leftarrow \alpha, x \leftarrow \beta)$$

Sei zusätzlich noch s eine **Substitution**. Folgende Sprechweisen werden verwendet:

$\gamma(\alpha \leftarrow \beta)$: In γ wird α (**vollständig**) durch β substituiert.

$\gamma(\alpha \rightleftharpoons \beta)$: In γ werden α und β vertauscht.

$\gamma(s)$: s wird auf γ angewendet.

$\gamma(S)$: Die **Substitutionen** aus S werden in der angegebenen Reihenfolge auf γ angewendet.

$\gamma(S)$: S wird auf γ angewendet.

Bei obiger Definition der **Substitution** bleibt noch offen, unter welchen **Voraussetzungen** sie angewendet werden darf. Das soll hier nicht untersucht werden. In diesem Abschnitt genügt es, dass nur **Vertauschung** und vollständige **Substitution** verwendet werden. In diesen Fällen sind beliebige **Substitutionen** von Variablen durch **Formeln** erlaubt.

Ist γ wie oben und S eine Menge aus **Substitutionen**.

Nun können die beiden **Identitätsregeln** definiert werden:

$$\frac{}{\alpha = \alpha} \quad \text{(Einführung der Identität)} \quad (= E)$$

$$\frac{\alpha = \beta \mid \gamma}{\gamma(\alpha \leftarrow \beta)} \quad \text{(Beseitigung der Identität)} \quad (= B)$$

Die **Identitätsregeln** werden hier eingeführt, um die **Substitution** zu rechtfertigen. Wie die **Basisregeln** gelten sie als **Axiome**, würden also eigentlich dazu gehören. Da sie aber nicht weiter verwendet werden, werden sie hier nicht zu den **Basisregeln** gezählt.

4.1.3. Weitere Schlussregeln

In [1] werden aus den **Basisregeln** mittels **zulässiger Transformationen** weitere **Schlussregeln** abgeleitet.⁸⁾ Man vergleiche auch mit [37].

⁸⁾ In [1] werden die **Identitätsregeln** zwar weder aufgeführt noch angewandt, ohne **Substitution** geht es aber nicht.

$\frac{X, \neg\alpha \vdash \alpha}{X \vdash \alpha}$	(Beseitigung der Negation; Indirekter Beweis)	(¬3)
$\frac{X, \neg\alpha \vdash \beta, \neg\beta}{X \vdash \alpha}$	(Reductio ad absurdum)	(¬4)
$\frac{X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}$	(Einführung der Implikation)	(→ E)
$\frac{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}{X, \alpha \vdash \beta}$	(Beseitigung der Implikation)	(→ B)
$\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$	(Schnittregel)	(SR)
$\frac{X \vdash \alpha \mid \alpha \rightarrow \beta}{X \vdash \beta}$	(Abtrennungsregel – <i>Modus ponens</i>)	(TR)

Dabei werden zum Beweis der Schlussregeln in [1] folgende Basisregeln verwendet:

Schlussregel : verwendete Basisregeln

¬3 : AR, MR, ¬2

¬4 : AR, MR, ¬1, ¬2

→ E : AR, MR, ¬1, ¬2, ∧E

→ B : AR, MR, ¬1, ¬2, ∧B

SR : AR, MR, ¬1, ¬2

TR : AR, MR, ¬1, ¬2, ∧E

4.1.4. Beispiel einer Ableitung

Als Beispiel wird hier die Schnittregel aus den Basisregeln abgeleitet.⁹⁾ Dazu wird verabredet, dass in der Tabelle 4.1 auf Seite 37 der Inhalt der Zelle in der Zeile i und der Spalte (X_n) mit X_i bezeichnet wird. Zur kürzeren Darstellung wird statt auf die vollständigen Spaltenüberschriften nur auf die dort notierten (X_n) verwiesen. Dass in der Spalte (n) stets die Zeilennummer steht, wird im folgenden nicht mehr extra erwähnt.

⁹⁾ Die Form der Tabelle ist angelehnt an [37] Kapitel 2.2.4 Eine Beispielableitung.

Für die ausgefüllten Felder wird nun definiert:¹⁰⁾

$$R_i := \begin{cases} - \text{„Voraussetzung“} = \text{Die Aussage } A_i \text{ ist eine Voraussetzung.} \\ - \text{„Folgerung“} = \text{Die Aussage } A_i \text{ ist eine Folgerung.} \\ - \text{„Annahme“} = \text{Die Aussage } A_i \text{ wird vorübergehend als zutreffend angenommen.} \\ - j = \text{Verweis auf die Schlussregel } \bar{R}_j \text{ für ein } j < i. \\ - \text{Verweis (ohne Klammern) auf eine allgemeingültige Schlussregel.} \end{cases}$$

S_i := Die Folge aus den anzuwendenden Substitutionen.

\bar{R}_i := Das Ergebnis der in der angegebenen Reihenfolge angewendeten Substitutionen aus S_i auf die Schlussregel R_i

Z_i := Die Indizes j (mit $j < i$) als Verweise auf eine oder mehrere Aussagen A_j , welche zusammen genau die Voraussetzungen der Schnittregel \bar{R}_i erfüllen.

A_i := Folgerung(en) der Schlussregel \bar{R}_i –

auch in Form der Indizes von einem oder mehreren von A_j (mit $j < i$).

In der Ergebniszeile kann hier auch die bewiesene Aussage als Schlussregel stehen.

D_i := die Indizes der A_j , von denen A_i abhängig ist.

Bis zur Zeile i hat man die folgende Schlussregel bewiesen:

$$\frac{A_{i_1} \mid A_{i_2} \dots}{A_i}, \text{ für alle } i_j \in D_i$$

Sei nun

$$\Gamma_i := \begin{cases} \text{leer} & \text{für } R_i = \text{„Voraussetzung“} \\ \text{leer} & \text{für } R_i = \text{„Folgerung“} \\ \text{leer} & \text{für } R_i = \text{„Annahme“} \\ \bar{R}_j & \text{für } R_i = j \text{ (eine interne Schlussregel)} \\ \text{die Schlussregel} & \text{für } R_i = \text{Verweis auf eine externe Schlussregel} \end{cases}$$

Damit gilt für die Einträge in einer Zeile i :

- Wenn Γ_i nicht leer ist, ist R_i eine Schlussregel mit $R_i = \Gamma_i(S_i)$ ¹¹⁾.
- Wenn A_i nicht leer ist, ist $R_i = \frac{A_{z_1} \mid A_{z_2} \mid \dots}{A_i}$ (alle $z_j \in Z_i$).
- Wenn A_i nicht leer ist, ist bis jetzt die Schlussregel $\frac{A_{d_1} \mid A_{d_2} \mid \dots}{A_i}$ (alle $d_j \in D_i$) schon bewiesen.

S_i , Z_i und D_i dürfen dabei auch leer sein.

Die Erzeugung einer Tabelle analog zu 4.1 auf der nächsten Seite wird im folgenden beschrieben. Zellen, für die kein Inhalt angegeben wird, bleiben leer. Rückwärts-Referenzen auf schon ausgefüllte Zellinhalte sind jederzeit möglich. Das Eintragen der Zeilennummer i wird nicht extra erwähnt. – Die Tabelle und die Beschreibung sind so ausführlich, damit man daraus leicht ein Computerprogramm erstellen kann.

1. Am Anfang der Tabelle werden zuerst Voraussetzungen, dann zu beweisende Folgerungen und schließlich Annahmen aufgeführt.¹²⁾ Jede der drei Gruppen kann auch leer sein und es ist auch

¹⁰⁾ Eigentlich müsste man für jede Substitution aus S_i eine eigene Zeile vorsehen. Um die Tabellen für die Beweise kürzer zu halten, werden aufeinanderfolgende Substitutionen zusammengefasst.

¹¹⁾ siehe Definition (4.2) von Unterabschnitt 4.1.2 auf Seite 33

¹²⁾ Die Angabe ist dann erforderlich, wenn darauf verwiesen wird. Durch die Auflistung hat man aber einen vollständigen Überblick über die Voraussetzungen und Folgerungen eines Beweises und die Zwischenannahmen. Auf jede nötige Voraussetzung und jede verwendete Zwischenannahme wird in der Spalte (Z_i) mindestens einmal verwiesen, so dass sie auch aufgeführt werden müssen. Die Angabe der Folgerungen erleichtert die Erstellung einer Ergebniszeile (siehe Punkt 3).

Zeile (n)	Regel (R_n)	Substitu- tionen (S_n)	erzeugte Regel (\bar{R}_n)	angewendet auf ... (Z_n)	Aussage (A_n)	Abhängig- keiten (D_n)
1	Voraus- setzung				$X \vdash \alpha$	1
2	Voraus- setzung				$X, \alpha \vdash \beta$	2
3	Folge- rung				$X \vdash \beta$	3
4	MR		$\frac{X \vdash \alpha}{X, Y \vdash \alpha}$			
5	4	$Y \leftarrow \neg \alpha$	$\frac{X \vdash \alpha}{X, \neg \alpha \vdash \alpha}$	1	$X, \neg \alpha \vdash \alpha$	1
6	AR		$\frac{}{\alpha \vdash \alpha}$			
7	6	$\alpha \leftarrow \neg \alpha$	$\frac{}{\neg \alpha \vdash \neg \alpha}$		$\neg \alpha \vdash \neg \alpha$	
8	4	$\alpha \leftarrow \neg \alpha$ $X \leftarrow \neg \alpha$ $Y \leftarrow X$	$\frac{\neg \alpha \vdash \neg \alpha}{X, \neg \alpha \vdash \neg \alpha}$	7	$X, \neg \alpha \vdash \neg \alpha$	
9	$\neg 1$		$\frac{X \vdash \alpha, \neg \alpha}{X \vdash \beta}$			
10	9	$X \leftarrow X, \neg \alpha$	$\frac{X, \neg \alpha \vdash \alpha, \neg \alpha}{X, \neg \alpha \vdash \beta}$	5, 8	$X, \neg \alpha \vdash \beta$	1
11	$\neg 2$		$\frac{X, \alpha \vdash \beta \mid X, \neg \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$	2, 10	3	1, 2
12	AR, MR, $\neg 1, \neg 2$		$\frac{A_1 \mid A_2}{A_3}$		$\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$	

Tabelle 4.1.: Ableitung der Schnittregel aus den Basisregeln

möglich, die Zeilen an anderen Stellen der Tabelle anzugeben, spätestens aber, wenn darauf verwiesen wird. Für jede **Voraussetzung**, **Folgerung** und Annahme gibt es eine Zeile:

- a) R_i = „**Voraussetzung**“, „**Folgerung**“ oder „**Annahme**“.
- b) A_i = Die aktuelle **Voraussetzung**, **Folgerung** oder Annahme.
- c) $D_i = i$ (ein Verweis auf A_i).

2. In den nächsten Zeilen werden die **Beweisschritte** aufgeführt, für jeden Schritt eine Zeile.

Zunächst kann R_i kann auf zwei Arten erzeugt werden:

- a) i. R_i = Verweis auf eine **allgemeingültige Schlussregel**.
- ii. \bar{R}_i = Die **Schlussregel**, auf die verwiesen wird.

oder

- a) i. $R_i = j$, wenn die schon bewiesene **Schlussregel** \bar{R}_j (mit $j < i$) angewendet werden soll.
- ii. S_i = Die auf die **Schlussregel** R_i anzuwendende **Substitution**.
- iii. \bar{R}_i = Das Ergebnis der **Substitution** S_i auf die **Schlussregel** R_i .

Man beachte, dass die **Schlussregel** \bar{R}_i , stets **allgemeingültig** ist, da sie ausschließlich aus **allgemeingültigen Schlussregeln** mittels **Substitutionen** abgeleitet worden ist. Daher gibt es auch keine Beschränkung weiterer **Substitutionen** durch irgendwelche Abhängigkeiten.

Nun kann die Zeile beendet werden, oder es geht weiter mit:

- b) Z_n = Die Indizes aller A_j (mit $j < i$), die eine **Voraussetzung** der **Schlussregel** \bar{R}_i sind, möglichst in der verwendeten Reihenfolge. – Für jedes angegebene j werden noch die Abhängigkeiten D_j den Abhängigkeiten D_i hinzugefügt.
- c) A_i = **Folgerung**(en) der **Schlussregel** \bar{R}_i . – Wenn diese **Folgerungen** schon als **Aussagen** A_j (mit $j < i$) vorhanden sind, können auch einfach deren Indizes eingetragen werden. Damit werden die Zusammenhänge und der Abschluss des **Beweises** besser ersichtlich.
- d) D_i = Die Verweise wurden schon in (2b) eingetragen.¹³⁾

Der **Beweis** muss so lange fortgeführt werden, bis alle **Folgerungen** als **Aussagen** in der Spalte (A_n) erschienen und dort jeweils nur von den gegebenen **Voraussetzungen** abhängig sind.

3. In einer **Ergebniszeile**, die dann die letzte ist, kann noch die bewiesene Behauptung in Form einer **Schlussregel** formuliert und in einer passenden Spalte notiert werden. Zusätzlich können dort auch noch alle verwendeten **Schlussregeln** gesammelt werden. Dies kann z. B. folgendermaßen geschehen:

- a) (R_n) = Verweise auf alle verwendeten externen **Schlussregeln**.
- b) (\bar{R}_n) = Die bewiesene Behauptung als **Schlussregeln**, wobei alle A_i , die **Voraussetzungen** sind, als **Voraussetzung** und alle A_j , die **Folgerungen** sind, als **Folgerung** eingesetzt werden, jeweils in der Form „ A_i “ bzgl. „ A_j “. Das ergibt dann:

$$\frac{A_{i_1} \mid A_{i_2} \mid \dots}{A_{j_1} \mid A_{j_2} \mid \dots}$$

- c) $(A_n) = \bar{R}_i$, wobei die **Voraussetzungen** und **Folgerungen** aufgelöst werden.
- d) (D_n) = Die Vereinigung aller Abhängigkeiten der **Folgerungen** vermindert um die **Voraussetzungen**. – Wenn das Feld dabei nicht leer bleibt, ist der **Beweis** missglückt!

Ein weiteres Beispiel in der Tabelle 4.2 auf der nächsten Seite soll verdeutlichen, wie Abhängigkeiten von Zwischenannahmen wieder beseitigt werden können.¹⁴⁾

> > > **Beispielableitung der Kontraposition vervollständigen** < < <

¹³⁾ Wenn D_n leer ist, dann ist A_n allgemeingültig.

¹⁴⁾ siehe [37], Kapitel 2.2.4 Eine Beispielableitung

Zeile (n)	Regel (R_n)	Substitu- tionen (S_n)	erzeugte Regel (\bar{R}_n)	angewendet auf ... (Z_n)	Aussage (A_n)	Abhängig- keiten (D_n)
1	Folge- rung				$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	1
2	An- nahme				$\alpha \rightarrow \beta$	2
3	An- nahme				$\neg\beta$	3
4	An- nahme				α	4
5	\rightarrow B		$\frac{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}{X, \alpha \vdash \beta}$			
6	-1	$X \leftrightarrow \emptyset$	$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha \vdash \beta}$	2	$\alpha \vdash \beta$	2
7	SR		$\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$			
8	-1	$X \leftrightarrow \emptyset$	$\frac{\alpha \mid \alpha \vdash \beta}{\beta}$	4, 6	β	4, 6
9'	\wedge E		$\frac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta}$			
10'	-1	$X \leftrightarrow \emptyset$	$\frac{\alpha \mid \beta}{\alpha \wedge \beta}$			
11'	-1	$\alpha \leftrightarrow \beta$ $\alpha \leftrightarrow \neg\beta$	$\frac{\beta \mid \neg\beta}{\beta \wedge \neg\beta}$	8, 3	$\beta \wedge \neg\beta$	
9	\neg 1		$\frac{X \vdash \alpha, \neg\alpha}{X \vdash \beta}$			
10	-1	$X \leftrightarrow \emptyset$	$\frac{\alpha \mid \neg\alpha}{\beta}$			
11	-1	$\alpha \leftrightarrow \beta$ $\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$	$\frac{\beta \mid \neg\beta}{\neg\alpha}$	8, 3	$\neg\alpha$	2, 3, 4
12	\rightarrow E		$\frac{X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}$			
13	-1	$X \leftrightarrow \emptyset$	$\frac{\alpha \vdash \beta}{\alpha \rightarrow \beta}$			
14	-1	$\alpha \leftrightarrow \beta$ $\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$ $\beta \leftrightarrow \neg\beta$ $\alpha \leftrightarrow \gamma$	$\frac{\neg\beta \vdash \neg\alpha}{\neg\beta \rightarrow \neg\alpha}$	3, 11, ???	$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	2, 3, 4, ???
15	\rightarrow E+1	$\beta \leftrightarrow \delta$ $\gamma \leftrightarrow \alpha \rightarrow \beta$ $\delta \leftrightarrow \neg\beta \rightarrow$ $\neg\alpha$	$\frac{\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha}{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)}$	2, 14	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	2, 3, 4, ???
16	\rightarrow E, \rightarrow B, SR		\bar{A}_1		$\overline{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)}$	

Tabelle 4.2.: Ableitung der Kontraposition aus allgemeingültigen Schlussregeln

5. Design

Dieses Projekt soll Open Source sein. Daher gilt für die Dokumente die *GNU Free Documentation License (FDL)* und für die Software die *GNU Affero General Public License (APGL)*. Die *GNU General Public License (GPL)* reicht für die Software nicht aus, da das Programm auch mittels eines Servers betrieben werden kann und soll. Damit das Projekt gegebenenfalls durch verschiedene Entwickler gleichzeitig bearbeitet werden kann und wegen des Konfigurationsmanagements wurde es als ein GitHub Projekt erstellt (siehe [20]).

Wenn die Lizenzen nicht mitgeliefert wurden, können sie unter <http://www.gnu.org/licenses/> gefunden werden.

5.1. Anforderungen

Die Anforderungen ergeben sich zunächst aus den Zielen im Abschnitt 2.3 auf Seite 7. Die beiden Ziele 1 *Daten* und 15 *Lizenz* sind für die Entwicklung von **ASBA** von sekundärer Bedeutung und werden daher in diesem Abschnitt nicht übernommen. Die anderen Ziele werden noch verfeinert.

> > > **Ziele aus Abschnitt “Ziele” in Anforderungen umwandeln.** < < <

1. *Form*: Die Daten liegt in formaler, geprüfter Form vor. (siehe Ziel 2 auf Seite 7)
2. *Eingaben*: Die Eingabe von Daten erfolgt in einer formalen Syntax unter Verwendung der üblichen mathematischen Schreibweise. Folgende Daten können eingegeben werden:
 - a) **Axiome**
 - b) **Sätze**
 - c) **Beweise**
 - d) **Fachbegriffe**
 - e) **Fachgebiete**
 - f) **Ausgabeschemata**

Dabei sind alle Begriffe nur innerhalb eines Fachgebiets und seiner untergeordneten **Fachgebiete** gültig, solange sie nicht undefiniert werden. Das oberste **Fachgebiet** ist die ganze Mathematik. – siehe Ziel 3 auf Seite 7

3. *Prüfung*: Vorhandene **Beweise** können automatisch geprüft werden. – siehe Ziel 4 auf Seite 7
4. *Ausgaben*: Die Ausgabe kann in einer eindeutigen, formalen Syntax gemäß vorhandener **Ausgabeschemata** erfolgen. – siehe Ziel 5 auf Seite 7 - *Ausgabe in polnischer Notation*
5. *Auswertungen*: Zusätzlich zur Ausgabe der Daten sind verschiedene Auswertungen möglich. Insbesondere kann zu jedem **Beweis** angegeben werden, wie lang er ist und welche **Axiome** und **Sätze**¹⁾ er benötigt. – siehe Ziel 6 auf Seite 7

¹⁾ Sätze, die quasi als **Axiome** verwendet werden.

6. *Anpassbarkeit*: **Fachbegriffe** und die Darstellung bei der Ausgabe können mit Hilfe von – gegebenenfalls unbenannten – untergeordneten **Fachgebieten** angepasst werden. – siehe Ziel 7 auf Seite 7
7. *Individualität*: **Axiome** und Sätze können für jeden **Beweis** individuell vorausgesetzt werden. Dabei sind fachgebietsspezifische **Fachbegriffe** erlaubt. – siehe Ziel 8 auf Seite 7)
8. *Internet*: Die Daten können auf mehrere Dateien verteilt sein. Ein Teil davon – oder sogar alle – können im Internet liegen. – siehe Ziel 9 auf Seite 8
9. *Kommunikation*: Die Kommunikation mit **ASBA** kann mit den **Fachbegriffen** der einzelnen **Fachgebiete** erfolgen. – siehe Ziel 10 auf Seite 8
10. *Zugriff*: Der Zugriff auf **ASBA** kann lokal und über das Internet erfolgen. – siehe Ziel 11 auf Seite 8
11. *Unabhängigkeit*: **ASBA** kann offline und online arbeiten. – siehe Ziel 12 auf Seite 8
12. *Rekursion*: Es kann rekursiv über alle verwendeten Dateien – auch solchen, die im Internet liegen – ausgewertet werden. – siehe Ziel 13 auf Seite 8
13. *Bedienbarkeit*: **ASBA** ist einfach zu bedienen. – siehe Ziel 14 auf Seite 8

5.2. Axiome

> > > Axiome auswählen und definieren. < < <

5.3. Beweise

> > > Schlussregeln auswählen und Beweise definieren. < < <

5.4. Datenstruktur

> > > Datenstruktur abstrakt und in XML definieren. < < <

5.5. Bausteine

> > > Bausteine? definieren. < < <

A. Anhang

A.1. Werkzeuge

Da dies ein Open Source Projekt sein soll, müssen alle Werkzeuge, die zum Ablauf der Software erforderlich sind, ebenfalls Open Source sein. Für die reine Entwicklung sollte das auch gelten, muss es aber nicht.

Werkzeuge zur Übersetzung der Quelldateien

1. Ein Übersetzer für \LaTeX Quellcode (*.tex). – Verwendet wird *MiKTeX*.
2. Ein Übersetzer für C++ Quellcode (*.c, *.cpp, *.h, *.hpp). – Verwendet wird *Visual Studio Community 2017*.

Nicht unbedingt nötig, aber sinnvoll:

3. Ein Dokumentationssystem für in C++ Quellcode und darin enthaltene Doxygen Kommentare (*.c, *.cpp, *.h, *.hpp). – Verwendet wird *Doxygen* mit Konfigurationsdatei „Doxyfile“.
4. Ein Konfigurationsmanagementsystem zur Verwaltung der Quelldateien. – Verwendet wird *GitHub*.

Werkzeuge für die Entwicklung

5. *GitHub* als Online Konfigurationsmanagementsystem zur Zusammenarbeit verschiedener Entwickler. → <https://github.com/> – Lizenz siehe [7]
6. *GitHub* benötigt *Git* als Konfigurationsmanagementsystem. → <https://git-scm.com/> – Lizenz siehe [7]
7. *MiKTeX* für Dokumentation und Ausgaben in \LaTeX . → <https://miktex.org/> – Lizenz siehe [11]
8. angedacht: *Visual Studio Community 2017*¹⁾ (VS) als Entwicklungsumgebung für C++. → <https://www.visualstudio.com/downloads/> – Lizenz siehe [10]
9. angedacht: In *Visual Studio Community 2015* integrierte Datenbank für *Ausgabeschemata*, *Sätze*, *Beweise*, *Fachbegriffe* und *Fachgebiete*. – Lizenz siehe [10]
10. angedacht: *RapidXml* für Ein- und Ausgabe in XML. → <http://rapidxml.sourceforge.net/index.htm> – Lizenz siehe [3] oder wahlweise [13]²⁾
11. angedacht: *Doxygen* als Dokumentationssystem für C++. → <http://www.stack.nl/~dimitri/doxygen/> – Lizenz siehe [7]
12. angedacht: *Doxygen* benötigt *Ghostscript* als Interpreter für Postscript und PDF. → <http://ghostscript.com/> – Lizenz siehe [5]

¹⁾ Visual Studio Community ist zwar nicht Open Source, darf aber zur Entwicklung von Open Source Software unentgeltlich verwendet werden.

²⁾ RapidXml stellt eine C++ Header-Datei zur Verfügung. Wenn diese im Quellcode eines Programms enthalten ist, gilt das ganze Programm als Open Source. Wenn diese Header-Datei nur in einer Bibliothek innerhalb eines Projekts verwendet wird, so gilt nur diese Bibliothek als Open Source.

13. angedacht: Doxygen benötigt *Graphviz* mit *Dot* zur Erzeugung und Visualisierung von Graphen.
→ <http://www.graphviz.org/Home.php> – Lizenz siehe [4]

Werkzeuge zur Bearbeitung der Quelldateien

14. *T_EXstudio* als Editor für L^AT_EX. → <http://www.texstudio.org/> – Lizenz siehe [7]
T_EXstudio benötigt einen Interpreter für Perl:
15. *Strawberry Perl* als Interpreter für Perl. → <http://strawberryperl.com/> – Lizenz: Various OSI-compatible Open Source licenses, or given to the public domain
16. *Notepad++* als Text-Editor. → <https://notepad-plus-plus.org/> – Lizenz siehe [6]
17. *WinMerge* zum Vergleich von Dateien und Verzeichnissen. → <http://winmerge.org/> – Lizenz siehe [6]

A.2. Offene Aufgaben

1. TODOs bearbeiten.
2. Eingabeprogramm erstellen (liest XML).
3. Prüfprogramm erstellen.
4. Ausgabeprogramm erstellen (schreibt XML).
5. FormelAusgabe erstellen (erzeugt L^AT_EX aus XML).
6. [Axiome](#) sammeln und eingeben.
7. Sätze sammeln und eingeben.
8. [Beweise](#) sammeln und eingeben.
9. [Fachbegriffe](#) und Symbole sammeln und eingeben.
10. [Fachgebiete](#) sammeln und eingeben.
11. [Ausgabeschemata](#) sammeln und eingeben.

B. Verzeichnisse

Tabellenverzeichnis

2.1. 2.1 Fragen → 2.2 Eigenschaften	7
2.2. 2.2 Eigenschaften → 2.3 Ziele	8
2.3. 2.1 Fragen → 2.3 Ziele	9
3.1. Beispiele für \simeq und \sim	17
3.2. Prioritäten in abnehmender Reihenfolge	18
3.3. Definition von aussagenlogischen Symbolen.	27
4.1. Ableitung der Schnittregel aus den Basisregeln	37
4.2. Ableitung der Kontraposition aus allgemeingültigen Schlussregeln	39

Abbildungsverzeichnis

2.1. Die Umgebung von ASBA	10
--------------------------------------	----

Literaturverzeichnis

- [1] Wolfgang Rautenberg, *Einführung in die Mathematische Logik*: Ein Lehrbuch, 3. Auflage, Vieweg+Teubner 2008 [5](#), [12](#), [17](#), [19](#), [21](#), [26](#), [32](#), [34](#), [35](#)
- [2] *Apache License*, Version 2.0 →¹⁾ <http://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0> 01.2004²⁾
- [3] *Boost Software License* 1.0 → <http://www.boost.org/users/license.html> 17.08.2003 [42](#)
- [4] *Eclipse Public License* Version 1.0 → <http://www.eclipse.org/org/documents/epl-v10.php> 09.03.2017 [43](#)
- [5] *GNU Affero General Public License* → <http://www.gnu.org/licenses/agpl> 19.11.2007 [42](#)
- [6] *GNU General Public License* → <http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-1.0> 02.1989 [43](#)
- [7] *GNU General Public License*, Version 2
→ <http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-2.0> 06.1991 [42](#), [43](#)
- [8] *GNU Lesser General Public License*, Version 2.1
→ <http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/lgpl-2.1> 02.1999
- [9] *Lizenz für Clover* → <https://www.atlassian.com/software/clover> 2017
- [10] *Lizenz für Microsoft Visual Studio Express* 2015
→ <https://www.visualstudio.com/de/license-terms/mt171551/> 2017 [42](#)
- [11] *Lizenz für MikTeX* → <https://miktex.org/kb/copying> 13.04.2017 [42](#)
- [12] *Lizenz für SAX* → <http://www.saxproject.org/copying.html> 05.05.2000
- [13] *MIT License* → <https://opensource.org/licenses/MIT/> 09.03.2017 [42](#)
- [14] *Oracle Binary Code License Agreement* → <http://java.com/license> 02.04.2013
- [15] *OSI Certified Open Source Software*
→ <https://opensource.org/pressreleases/certified-open-source.php> 16.06.1999
- [16] *W3C Document License* → <http://www.w3.org/Consortium/Legal/2015/doc-license> 01.02.2015
- [17] *W3C Software Notice and License*
→ <http://www.w3.org/Consortium/Legal/2002/copyright-software-20021231.html> 13.05.2015
- [18] *Hilbert II – Introduction* → <http://www.qedeq.org/> 20.01.2014 [5](#)
- [19] *Formal Correct Mathematical Knowledge*: GitHub Repository vom Projekt Hilbert II
→ <https://github.com/m-31/qedeq/> 18.03.2017 [5](#)

¹⁾ Der Pfeil (→) verweist stets auf einen Link zu einer Seite im Internet.

²⁾ Das Datum hinter dem Link gibt – je nachdem welches bekannt ist – das Datum der letzten Änderung, den Stand der Seite oder das Datum, an dem die Seite angeschaut wurde an. Sind mehrere Daten vorhanden, wird das erste vorhandene in der angegebenen Reihenfolge genommen. – Dies gilt für alle hier aufgelisteten Seiten im Internet.

- [20] ASBA – *Axiome, Sätze, Beweise und Auswertungen*. Projekt zur maschinellen Überprüfung von mathematischen Beweisen und deren Ausgabe in lesbarer Form: GitHub Repository vom Projekt ASBA – in Bearbeitung → <https://github.com/Dr-Winfried/ASBA> 40
- [21] Meyling, Michael: *Anfangsgründe der mathematischen Logik*
→ http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_logic_v1_de.pdf 24. Mai 2013 (in Bearbeitung) 28
- [22] Meyling, Michael: *Formale Prädikatenlogik*
→ http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_formal_logic_v1_de.pdf 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)
- [23] Meyling, Michael: *Axiomatische Mengenlehre*
→ http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_set_theory_v1_de.pdf 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)
- [24] Meyling, Michael: *Elements of Mathematical Logic*
→ http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_logic_v1_en.pdf 24. Mai 2013 (in Bearbeitung) 28
- [25] Meyling, Michael: *Formal Predicate Calculus*
→ http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_formal_logic_v1_en.pdf 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)
- [26] Meyling, Michael: *Axiomatic Set Theory*
→ http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_set_theory_v1_en.pdf 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)
- [27] Wikipedia: *Aussagenlogik Kapitel 4 Formaler Zugang*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Aussagenlogik#Formaler_Zugang 18.01.2018 28
- [28] Wikipedia: *Funktion (Mathematik) Kapitel 2.1 Mengentheoretische Definition* → [https://de.wikipedia.org/wiki/Funktion_\(Mathematik\)#Mengentheoretische_Definition](https://de.wikipedia.org/wiki/Funktion_(Mathematik)#Mengentheoretische_Definition) 27.01.2018 15
- [29] Wikipedia: *Hilbert-Kalkül Kapitel 1.4 Modus (ponendo) ponens*
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Hilbert-Kalk%C3%BCl#Modus_\(ponendo\)_ponens](https://de.wikipedia.org/wiki/Hilbert-Kalk%C3%BCl#Modus_(ponendo)_ponens) 18.06.16 25
- [30] Wikipedia: *Identität (Logik) Kapitel 2.3 Identität in der Informatik* → [https://de.wikipedia.org/wiki/Identit%C3%A4t_\(Logik\)#Identit.C3.A4t_in_der_Informatik](https://de.wikipedia.org/wiki/Identit%C3%A4t_(Logik)#Identit.C3.A4t_in_der_Informatik) 18.05.2017 20
- [31] Wikipedia: *Junktor Kapitel 2.2 Mögliche Junktoren*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Junktor#M.C3.B6gliche_Junktoren 21.10.2017 26
- [32] Wikipedia: *Kalkül* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Kalk%C3%BCl> 26.02.2017 11
- [33] Wikipedia: *Mengenlehre* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Mengenlehre> 17.01.2018
- [34] Wikipedia: *Prädikatenlogik erster Stufe*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik_erster_Stufe 26.11.2017
- [35] Wikipedia: *Relation (Mathematik) Kapitel 1.1 Mehrstellige Relation*
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Relation_\(Mathematik\)#Mehrstellige_Relation](https://de.wikipedia.org/wiki/Relation_(Mathematik)#Mehrstellige_Relation) 27.01.2018 15
- [36] Wikipedia: *Schlussregel* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Schlussregel> 29.03.2015 12, 21
- [37] Wikipedia: *Systeme natürlichen Schließens*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Systeme_nat%C3%BCrlichen_Schlie%C3%9Fens 25.10.2017 12, 21, 32, 33, 34, 35, 38

Index

Index und Symbolverzeichnis enthalten keine gemeinsamen Einträge. Andererseits erscheinen sie aber überwiegend auch im Glossar. Mit *fetten, kursiven* Seitenzahlen wird auf die Definition oder sonstige wichtige Stellen verwiesen.

Zerlegbar, [19](#)

ASBA, [5–8](#), [10–13](#), [17](#), [21](#), [23](#), [25](#), [26](#), [28](#), [40](#), [41](#), [44](#)

Ableitungsrelation, [18](#), [22](#), [22](#), [23](#)

Ableitung, [22](#), [22](#), [23–25](#), [25](#), [26](#), [37](#), [39](#), [44](#)

Abtrennungsregel, [35](#), [58](#)

Äquivalenzrelation, [21](#)

Äquivalenz, [21](#), [21](#), [27](#)

Anfangsregel, [33](#), [53](#)

Ausgabeschema, [7](#), [10](#), [11](#), [40](#), [42](#), [43](#)

Aussagenlogik, [22](#), [26](#), [28](#)

Aussage, [11](#), [14](#), [19](#), [19](#), [20](#), [21](#), [24](#), [26](#), [27](#), [33](#), [36–39](#)

Axiom, [1](#), [5–7](#), [9–13](#), [20–23](#), [23](#), [24](#), [28](#), [29](#), [31](#), [33](#), [34](#), [40](#), [41](#), [43](#)

Basisregel, [32–35](#), [37](#), [44](#)

Beweisschrittfolge, [26](#), [26](#)

Beweisschrittmenge, [26](#)

Beweisschritt, [11](#), [13](#), [17](#), [26](#), [26](#), [37](#)

Beweis, [1](#), [5–7](#), [9–13](#), [17](#), [21](#), [23](#), [25](#), [25](#), [26](#), [28](#), [29](#), [35](#), [36](#), [38](#), [40–43](#)

Signatur, Boolesche, [29](#), [30](#)

Definitionsbereich, [15](#)

Definition, [17](#), [18](#), [21](#), [32](#)

Ergebnis, [25](#), [25](#)

Fachbegriff, [5](#), [5](#), [6–8](#), [11](#), [40–43](#)

Fachgebiet, [5](#), [5](#), [6–8](#), [11](#), [40–43](#)

Folgerung, [17](#), [23](#), [23](#), [24](#), [24](#), [26](#), [33](#), [33](#), [36–38](#)

Formelmengen, [22](#), [22](#), [23](#), [30](#)

Formel, [14](#), [17–20](#), [22–26](#), [28](#), [28](#), [29](#), [29](#), [30](#), [32–34](#)

Funktionswert, [15](#)

Funktion, [15](#), [16](#), [25](#), [28](#)

Gleichheitsrelation, [18](#), [21](#)

Gleichheit, [20](#), [20](#), [21](#), [52](#)

Graph, [15](#)

Identitätsregel, [34](#)

Junktorsymbol, [26](#), [28](#)

Junktor, [16](#), [17](#), [20](#), [26–30](#), [32](#)

Kontraposition, [39](#), [44](#)

Kontravalenz, [21](#), [27](#)

Mengenlehre, [27](#)

Metadefinition, [18](#), [21](#)

Metaoperation, [17–19](#), [19](#), [23](#)

Metarelation, [19](#), [19](#)

Metasprache, [19](#), [19](#)

Monotonieregel, [32](#), [33](#), [56](#)

Objekt, [14](#), [20](#), [21](#)

Operation, [16–20](#), [26](#), [27](#)

Notation, Polnische, [28](#), [28](#)

Potenzmenge, [22](#)

Prädikatenlogik, [22](#), [26](#), [28](#)

Relation, [15–17](#), [19](#), [22](#), [28](#)

Satz, [1](#), [5–7](#), [10–13](#), [28](#), [32](#), [40](#), [42](#)

Schlussregel, [18](#), [21](#), [23](#), [23](#), [24](#), [24](#), [25](#), [25](#), [26](#), [32–39](#), [44](#)

Schnittregel, [35](#), [35](#), [36](#), [37](#), [44](#), [57](#)

Sprache, [14](#), [25](#), [25](#), [28](#)

Stelligkeit, [15](#), [15](#)

Substitution, [18](#), [25](#), [25](#), [29](#), [32](#), [33](#), [33](#), [34](#), [36](#), [37](#)

Symbol, [13](#), [14](#), [20](#)

Trägermenge, [15](#)

Transformationsfolge, [26](#)

Transformation, [24](#), [26](#), [32](#), [32](#), [33](#), [34](#)

Tupelmengen, [22](#)

Tupel, [15](#), [21](#), [22](#), [22](#), [24](#), [25](#), [57](#)

Umkehrrelation, [15](#), [15](#), [16](#)

Ungleichheit, [13](#), [20](#)

Vertauschung, [30](#), [33](#), [34](#)

Voraussetzung, [17](#), [23](#), [23](#), [24](#), [24](#), [26](#), [33](#), [33](#), [34](#), [36–38](#)

Wahrheitswert, [20](#), [26](#), [27](#)

Wort, [14](#)

Zeichenfolge, [14](#), [20](#), [22](#)

Zeichenkette, [14](#), [20](#), [29](#)

Zielbereich, [16](#)

Ziel, [7](#)

ableitbar, [22](#), [32](#), [32](#)

allgemeingültig, [24](#), [26](#), [32](#), [36](#), [37](#), [39](#), [44](#)

atomar, [19](#), [19](#), [29](#)

beschränkt, [23](#), [24](#), [25](#)

beweisbar, [22](#), [22](#), [32](#), [32](#)

Satz, formal, [23](#), [24](#), [54](#)

graph, [15](#), [55](#)

Eigenschaft, interessierende, [20](#), [21](#)

Signatur, logische, [29](#), [31](#)

unzerlegbar, [19](#), [19](#), [29](#)

vergleichbar, [20](#), [33](#)

zerlegbar, [19](#), [19](#), [29](#)

zulässig, [24](#), [32](#), [32](#), [33](#), [34](#)

Formel, aussagenlogisch in Polnischer Notation, [29](#)

Formel, aussagenlogisch mit Klammerung, [28](#)

Junktor, binär, Menge davon, [28](#)

Junktor, unär, Menge davon, [28](#)

Junktorsymbole, Menge der, [28](#)

Konstante, aussagenlogisch, Menge davon, [28](#)

Symbolverzeichnis

Index und Symbolverzeichnis enthalten keine gemeinsamen Einträge. Andererseits erscheinen sie aber überwiegend auch im Glossar. Mit *fetten, kursiven* Seitenzahlen wird auf die Definition oder sonstige wichtige Stellen verwiesen.

(\dots) , 27

AR, 33, 35, 37

FS, 24

\mathbb{N}_0 , 13, 13, 15, 22, 24, 26, 28

\mathbb{N} , 13

MR, 33, 35, 37

M^n , 16, 22, 22

M^0 , 22

\mathcal{P}_e , 22, 22, 25

\mathcal{P} , 22, 22, 23–25, 52

\mathcal{R}_e , 22, 22, 25

\mathcal{R} , 22, 22, 23–25

SR, 35

Set, 15, 21–25

TR, 35

\mathcal{A}_x , 28, 28, 29

\mathcal{A} , 28, 28, 29

\mathcal{O} , 28, 28, 29

\mathcal{K} , 28, 28, 29

$\mathcal{L}_x^{\text{Ap}}$, 29, 29

\mathcal{L}^{Ap} , 29, 29, 55

\mathcal{L}_x^{A} , 28, 28, 29, 30

\mathcal{L}^{A} , 29, 29, 30, 55

\mathcal{J}_x , 28, 28, 29

\mathcal{J} , 28, 28, 29–31

\mathcal{U} , 28, 28, 29

\mathcal{Q} , 28, 28, 29

$\wedge B$, 33, 35

$\wedge E$, 33, 35, 39

$:=$, 13, 15, 16, 18, 21, 21, 22, 25, 26, 28–30

\vdash_R , 22

\vdash , 18, 22, 22, 23–25, 32, 32, 33, 35, 37, 39, 54, 59

$= B$, 34

$= E$, 34

\equiv , 21, 29

$=$, 16–18, 20, 20, 21, 22, 24, 29, 33, 34

\mathcal{L} , 14, 22–25, 52

$\rightarrow B$, 35

$\rightarrow E$, 35

\wedge , 18, 20, 22, 27–33, 39

len, 15, 21

\leftrightarrow , 18, 27, 28, 30

\perp , 27, 28, 30

\rightarrow , 17, 18, 23, 25, 27–30, 30, 31, 32, 35, 39

\uparrow , 18, 27–30, 30

\downarrow , 18, 27–30, 30

\neg , 18, 19, 27–33, 35, 37, 39

\vee , 18, 20, 27–30

\leftarrow , 18, 27–30, 30

\top , 27, 28, 30

$+$, 18, 27, 28, 30

$\&$, 13, 16–19, 19, 20, 21, 23, 24, 32

$:\Leftrightarrow$, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 21, 22, 23, 29, 32

\Leftrightarrow , 16, 18, 19, 19, 20, 22–24

\Rightarrow , 18, 19, 19, 21, 23, 24, 28, 29

\sim , 18, 19, 19

$\|$, 13, 16, 18, 19, 19, 20

\Leftarrow , 17–19, 19

\neq , 21

\neq , 20

$\neg 1$, 33, 35, 37, 39

$\neg 2$, 33, 35, 37

$\neg 3$, 35

$\neg 4$, 35

\otimes , 16–18, 28, 29

\ominus , 16, 17, 28, 29

\smile , 16, 16, 18

\sqsubseteq , 16, 18

\sim , 16, 16, 17–19, 44

\simeq , 16, 16, 17, 18, 44

\nearrow , 16, 16, 18

\neq , 16, 18

$|$, 18, 20, 23, 32

\subseteq , 13, 13, 15, 18, 22, 25, 26, 28, 29

\subset , 13, 13, 18, 22, 27–29

\Leftarrow , 32, 33, 33

\supseteq , 18, 32

\supset , 18, 27

\Leftrightarrow , 33, 33

\mathcal{S} , 22, 22, 24, 25

Glossar

Die Einträge im Glossar kommen auch entweder im Index oder im Symbolverzeichnis vor. Die Sortierung insbesondere der Symbole unterscheidet sich dabei. Mit *fetten, kursiven* Seitenzahlen wird auf die Definition oder sonstige wichtige Stellen verwiesen.

[default](#) | [A](#) | [B](#) | [D](#) | [E](#) | [F](#) | [G](#) | [I](#) | [J](#) | [K](#) | [L](#) | [M](#) | [N](#) | [O](#) | [P](#) | [Q](#) | [R](#) | [S](#) | [T](#) | [U](#) | [V](#) | [W](#) | [Z](#)

default

- ⊖ Beispielsymbol für eine unäre [Operation](#).
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.4 auf Seite 16](#). [16, 17, 28, 29](#)
- ⊛ Beispielsymbol für eine binäre [Operation](#).
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.4 auf Seite 16](#). [16–18, 28, 29](#)
- ~ Beispielsymbol für eine binäre [Relation](#) mit [Umkehrrelation](#) \sim .
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.4 auf Seite 16](#). [16–19, 44, 50](#)
- ≈ Beispielsymbol für eine binäre [Relation](#) mit [Gleichheit](#) und [Umkehrrelation](#) \simeq .
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.4 auf Seite 16](#). [16–18, 44, 50](#)
- ↖ Beispielsymbol für eine binäre [Relation](#) mit [Umkehrrelation](#) \sim .
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.4 auf Seite 16](#). [16, 18, 50](#)
- ≅ Beispielsymbol für eine binäre [Relation](#) mit [Gleichheit](#) und [Umkehrrelation](#) \simeq .
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.4 auf Seite 16](#). [16, 18, 50](#)
- ¬ Verneinung von \sim .
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.4 auf Seite 16](#). [16, 18](#)
- ≠ Verneinung von \simeq .
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.4 auf Seite 16](#). [16, 18](#)
- ~ Eine unäre [Metaoperation](#): ... *gilt nicht*
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.2.1 auf Seite 19](#). [18, 19](#)
- & Eine [Metaoperation](#): ... *und* ...
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.2.1 auf Seite 19](#). [13, 16–21, 23, 24, 32](#)
- || Eine [Metaoperation](#): ... *oder* ...
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.2.1 auf Seite 19](#). [13, 16, 18–20](#)
- ⇒ Eine [Metarelation](#): ... *dann auch* ..., die [Umkehrrelation](#) zu \Leftarrow .
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.2.1 auf Seite 19](#). [18, 19, 21, 23, 24, 28, 29, 50](#)
- ⇐ Eine [Metarelation](#): ... *sofern* ..., die [Umkehrrelation](#) zu \Rightarrow .
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.2.1 auf Seite 19](#). [17–19, 50](#)
- ⇔ Eine [Metarelation](#): ... *genau dann wenn* ...
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.2.1 auf Seite 19](#). [16, 18–20, 22–24](#)

- = Eine **Metarelation**: ... *ist gleich* (dasselbe wie; identisch zu) ...
 - Siehe **Gleichheit**.
 - Zur Definition siehe Paragraph 3.2.2.2 auf Seite 20 und siehe Unterabschnitt 3.4.3 auf Seite 29. 16–18, 20–22, 24, 29, 33, 34
- \neq Eine **Metarelation**: ... *ist ungleich* (nicht dasselbe wie; nicht identisch zu) ... 20
- \equiv Eine **Metarelation**: ... *äquivalent* (so wie; ähnlich) ...
 - Siehe **Äquivalenz**.
 - Zur Definition siehe Paragraph 3.2.2.2 auf Seite 20 und siehe Unterabschnitt 3.4.3 auf Seite 29. 21, 29
- $\not\equiv$ Eine **Metarelation**: ... *nicht äquivalent* (nicht so wie; nicht ähnlich) ... 21
- $:\Leftrightarrow$ **Metadefinition**: ... *definitionsgemäß genau dann wenn* ... 13, 15, 16, 18, 19, 21–23, 29, 32
- $:=$ **Definition**: ... *definitionsgemäß gleich* (dasselbe wie; identisch zu) ... 13, 15, 16, 18, 21, 22, 25, 26, 28–30
- | Eine **Metaoperation**: ... *und* ...
 - Wird nur bei den **Schlussregeln** verwendet. 18, 20, 23, 32
- \vdash **Ableitungsrelation**: ... *ableitbar* (beweisbar) ... 18, 22–25, 32, 33, 35, 37, 39, 54, 59
- \vdash_R Eine Darstellung der **Relation** R aus $\mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$ als **Ableitungsrelation**. 22
- \Leftarrow **Substitution**: ... *substituiert durch* ...
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt 4.1.2 auf Seite 33. 32, 33
- \Leftrightarrow **Vertauschung**: ... *vertauscht mit* ...
 - Zur Definition siehe Unterabschnitt 4.1.2 auf Seite 33. 33
- \perp Ein 0-stelliger **Junktor**, d. h. eine aussagenlogische Konstante (**Wahrheitswert**): falsch
 - Zur Definition siehe Tabelle 3.3 auf Seite 27. 27, 28, 30
- \top Ein 0-stelliger **Junktor**, d. h. eine aussagenlogische Konstante (**Wahrheitswert**): wahr
 - Zur Definition siehe Tabelle 3.3 auf Seite 27. 27, 28, 30
- \neg Ein unärer **Junktor**: *nicht* ...
 - Zur Definition siehe Tabelle 3.3 auf Seite 27. 18, 19, 27–33, 35, 37, 39
- \wedge Ein binärer **Junktor**: ... *und* ...
 - Zur Definition siehe Tabelle 3.3 auf Seite 27. 18, 20, 22, 27–33, 39
- \vee Ein binärer **Junktor**: ... *oder* ...
 - Zur Definition siehe Tabelle 3.3 auf Seite 27. 18, 20, 27–30
- \rightarrow Ein binärer **Junktor**: *aus ... folgt* ...
 - Zur Definition siehe Tabelle 3.3 auf Seite 27. 17, 18, 23, 25, 27–32, 35, 39
- \leftarrow Ein binärer **Junktor**: ... *folgt aus* ...
 - Zur Definition siehe Tabelle 3.3 auf Seite 27. 18, 27–30
- \leftrightarrow Ein binärer **Junktor**: ... *genau dann wenn* ...
 - Zur Definition siehe Tabelle 3.3 auf Seite 27. 18, 27, 28, 30
- $+$ Ein binärer **Junktor**: *entweder ... oder* ...
 - Zur Definition siehe Tabelle 3.3 auf Seite 27. 18, 27, 28, 30
- \uparrow Ein binärer **Junktor**: *nicht zugleich ... und* ...
 - Zur Definition siehe Tabelle 3.3 auf Seite 27. 18, 27–30
- \downarrow Ein binärer **Junktor**: *weder ... noch* ...
 - Zur Definition siehe Tabelle 3.3 auf Seite 27. 18, 27–30

- \subset Teilmengenbeziehung: ... *ist echte Teilmenge von* ... ; Insbesondere kann keine **Gleichheit** bestehen.
In der Literatur wird \subset oft im Sinne von \subseteq verwendet.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.1.1 auf Seite 13. 13, 18, 22, 27–29
- \subseteq Teilmengenbeziehung: ... *ist Teilmenge von* ... ; Insbesondere kann **Gleichheit** bestehen.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.1.1 auf Seite 13. 13, 15, 18, 22, 25, 26, 28, 29
- \supset Teilmengenbeziehung: ... *ist echte Obermenge von* ... ; Insbesondere kann keine **Gleichheit** bestehen.
In der Literatur wird \supset oft im Sinne von \supseteq verwendet. 18, 27
- \supseteq Teilmengenbeziehung: ... *ist Obermenge von* ... ; Insbesondere kann **Gleichheit** bestehen. 18, 32
- $(\wedge B)$ Eine **Schlussregel** - Beseitigung von $\langle \wedge \rangle$. 33, 35
- $(\wedge E)$ Eine **Schlussregel** - Einführung von $\langle \wedge \rangle$. 33, 35, 39
- $(\rightarrow B)$ Eine **Schlussregel** - Beseitigung von $\langle \rightarrow \rangle$. 35
- $(\rightarrow E)$ Eine **Schlussregel** - Einführung von $\langle \rightarrow \rangle$. 35
- $(\neg 1)$ Eine **Schlussregel** - Einführung/Beseitigung von $\langle \neg \rangle$ Teil 1. 33, 35, 37, 39
- $(\neg 2)$ Eine **Schlussregel** - Einführung/Beseitigung von $\langle \neg \rangle$ Teil 2. 33, 35, 37
- $(\neg 3)$ Eine **Schlussregel** - Beweistechnik „Indirekter Beweis“. 35
- $(\neg 4)$ Eine **Schlussregel** - Reductio ad absurdum (Indirekter Beweis). 35
- $(= B)$ Eine **Schlussregel** - Beseitigung von $\langle = \rangle$. 34
- $(= E)$ Eine **Schlussregel** - Einführung von $\langle = \rangle$. 34

A

- \mathcal{A} Das Alphabet der aussagenlogischen **Sprache**.
– Zur Definition siehe Paragraph 3.4.2.2 auf Seite 28. 28, 29
- \mathcal{A}_x Eine Teilmenge des Alphabets \mathcal{A} der aussagenlogischen **Sprache**.
– Zur Definition siehe Paragraph 3.4.2.2 auf Seite 28. 28, 29
- ableitbar** Wenn sich eine **Formel** β aus einer anderen **Formel** α mittels ZULÄSSIGER TRANSFORMATIONEN ableiten lässt, heißt β **ableitbar** aus α . Sprechweise: $\langle\langle \alpha$ ableitbar $\beta \rangle\rangle$. Eine oder beide **Formeln** α bzw. β dürfen dabei durch **Formelmengen** ersetzt werden.
– Siehe **Ableitungsrelation** und \vdash .
– Synonym: **beweisbar**. 22, 32, 51–53
- Ableitung** Eine **Aussage** $A \vdash B$ bzw. allgemeiner $A \vdash_R B$. Dies entspricht einem Element (A, B) einer **Ableitungsrelation** \vdash bzw. \vdash_R . Die semantische Aussage ist, dass die **Formeln** aus B aus den **Formeln** aus A abgeleitet werden können. 22–26, 37, 39, 44
- Ableitungsrelation** Eine binäre **Relation** \vdash aus $\mathcal{P}(\mathcal{L})^2$. Für $R \in \mathcal{P}(\mathcal{L})^2$ auch mit \vdash_R bezeichnet. 18, 22, 23, 51, 52, siehe auch **Ableitung**
- Abtrennungsregel** Eine **Schlussregel** – siehe (TR). 35, 58
- Äquivalenz** Eine **Gleichheitsrelation**: Zwei Objekte A und B sind *äquivalent* (ähnlich), $A \equiv B$, wenn sie in den INTERESSIERENDEN EIGENSCHAFTEN für \equiv übereinstimmen.
– Zur Definition siehe Paragraph 3.2.2.2 auf Seite 20. 21, 27, 51
- Äquivalenzrelation** Eine binäre **Relation** \sim auf einer Menge M mit folgenden Eigenschaften:
 - reflexiv** ($a \sim a$)
 - transitiv** ($((a \sim b) \ \& \ (b \sim c)) \Rightarrow (a \sim c)$)

symmetrisch $((a \sim b) \Rightarrow (b \sim a))$

jeweils für alle Elemente a, b und c aus M .

– Siehe Paragraph 3.2.2.2 auf Seite 20. 21

allgemeingültig Eine **Schlussregel** heißt **allgemeingültig**, wenn sie aus den **Basisregeln** und schon bekannten ALLGEMEINGÜLTIGEN **Schlussregeln** abgeleitet werden kann.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.3.3 auf Seite 23. 24, 26, 32, 36, 37, 39, 44

Anfangsregel Die **Schlussregel** (AR) um anfangen zu können. 33, 53

(AR) Anfangsregel - Eine **Schlussregel**. 33, 35, 37, 53

ASBA Programmsystem, das **Axiome**, **Sätze**, **Beweise** und **Auswertungen** behandeln kann. 5–8, 10–13, 17, 21, 23, 25, 26, 28, 40, 41, 44, 59

atomar Synonym zu **unzerlegbar**, siehe dort; vergleiche auch **zerlegbar**. Das Attribut betrifft **Aussagen** und **Formeln**. 19, 29, 58

Ausgabeschema Ein Schema, mit dem bestimmte mathematische **Objekte** ausgegeben werden sollen. 7, 10, 11, 40, 42, 43

Aussage Eine **Aussage** in natürlicher Sprache oder als **Formel**, die einen **Wahrheitswert** liefert.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.2.1 auf Seite 19. 11, 14, 19–21, 24, 26, 27, 33, 36–39, 52, 53, 55–59

Aussagenlogik – Zur Definition siehe Abschnitt 3.4 auf Seite 26. 22, 26, 28

Axiom Eine **Formel**, die unbewiesen als wahr angesehen wird.

– Standardsymbole: X = ein Axiom, \mathcal{X} = eine Menge aus Axiomen

– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.3.3 auf Seite 23 und 3.4.4 auf Seite 31. 1, 5–7, 9–13, 20–24, 28, 29, 31, 33, 34, 40, 41, 43

B

Basisregel Eine **Schlussregel**, die nicht mehr auf andere zurückgeführt wird. Obwohl das auch auf die **Identitätsregeln** zutrifft, werden diese hier aber nicht dazu gezählt.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt 4.1.1 auf Seite 32. 32–35, 37, 44, 53, 55

beschränkt Eine **Schlussregel** heißt **beschränkt**, wenn sie nur endlich viele Voraussetzungen und Folgerungen hat. 23–25, 53

Beweis Eine zulässige Ableitung von **Folgerungen** aus gegebenen **Voraussetzungen**.

– Siehe Abschnitt 3.3 auf Seite 21. 1, 5–7, 9–13, 17, 21, 23, 25, 26, 28, 29, 35, 36, 38, 40–43, 52, 54

beweisbar Synonym zu **ableitbar**. 22, 32, 51, 52

Beweisschritt Eine Vorschrift, wie aus vorgegebenen **Aussagen** (den **Voraussetzungen**) weitere (die **Folgerungen**) folgen.

– Standardsymbole: b = ein Beweisschritt, \vec{b} = eine Folge aus Beweisschritten, \mathcal{B} = eine Menge aus Beweisschritten

– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.3.6 auf Seite 26. 11, 13, 17, 26, 37

Beweisschrittfolge Eine Folge aus BEWEISSCHRITTEN.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.3.6 auf Seite 26. 26, 53

Beweisschrittmenge Eine Menge aus BEWEISSCHRITTEN, insbesondere die Menge der Glieder einer **Beweisschrittfolge**.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.3.6 auf Seite 26. 26

D

Definition Eine Definition mit Hilfe des Symbols $\langle := \rangle$. $\langle\langle A := B \rangle\rangle$ steht für „*A ist definitionsgemäß gleich B*“ für **Objekte** A und B . Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B .
 – Man vergleiche auch den Begriff „**Metadefinition**“ und das zugehörige **Symbol** $\langle : \Leftrightarrow \rangle$.
 – Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.2.2.3 auf Seite 21. 17, 18, 21, 32, 51, 54, 56

Definitionsbereich einer **Funktion**.

- Symbol:
- Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt 3.1.3 auf Seite 15. 15, 54

E

Eigenschaft, interessierende Solche Eigenschaften von OBJEKTEN, die im aktuellen Zusammenhang von Interesse sind, z. B. einen bestimmten Wert zu haben, Element einer bestimmten Menge zu sein, ein bestimmtes **Objekt** zu bezeichnen, usw. 20, 21

Ergebnis Ein **Ergebnis** eines BEWEISES.

- Standardsymbole: O = ein Ergebnis \mathcal{O} = eine Menge aus Ergebnissen $\vdash_{\mathcal{O}}$ = eine Relation (als Menge aufgefasst) aus Ergebnissen
- Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.3.4 auf Seite 25. 25, 54

F

Fachbegriff Ein Name für einen mathematischen Begriff. 5–8, 11, 40–43

Fachgebiet Ein Teil der Mathematik mit einer zugehörigen Basis aus AXIOMEN, SÄTZEN, FACHBEGRIFFEN und Darstellungsweisen. 5–8, 11, 40–43

Folgerung Die **Folgerungen** einer **Schlussregel** $\forall_{\mathbb{F}}$ sind die Elemente von \mathbb{F} .

- Standardsymbole: f = eine Folgerung \mathbb{F} = eine Menge aus Folgerungen $\vdash_{\mathbb{F}}$ = eine Relation (als Menge aufgefasst) aus Folgerungen
- Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.3.3 auf Seite 23. 17, 23, 24, 26, 33, 36–38, 53, 54, 57

Formel Unter einer **Formel** verstehen wir stets eine mathematische **Formel**. Diese kann aus einem einzigen **Symbol** bestehen (ATOMARE FORMEL), andererseits aber auch mehrdimensional sein, lässt sich dann aber mittels geeigneter **Definitionen** immer eindeutig als eine **Zeichenfolge** schreiben. **Sätze**, **Beweise** und **Schlussregeln** betrachten wir *nicht* als **Formeln**.

- Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.1.1 auf Seite 13
- Zur Definition siehe Paragraph 3.4.2.2 auf Seite 28. 14, 17–20, 22–26, 28–30, 32–34, 52–59

Formelmenge Eine Menge aus **Formeln**, oft mit \mathcal{L} bezeichnet. Man nennt \mathcal{L} auch eine **Sprache** und ihre Elemente **Wörter**, insbesondere dann, wenn es eindeutige Regeln zur Konstruktion von \mathcal{L} gibt. Wir bevorzugen „**Formel**“ und „**Formelmenge**“. 22, 23, 30, 52, 54, 55, 57, 59

(FS) formaler Satz - Eine **Schlussregel**. 24, 57

Funktion Eine n -stellige **Funktion** f von einer Menge $A = A_1 \times \dots \times A_n$, dem **Definitionsbereich**, in eine Menge B , den **Zielbereich**, ist eine $(n+1)$ -stellige **Relation** (G, A_1, \dots, A_n, B) derart, dass es für jedes $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ genau ein $b \in B$ gibt mit $(a_1, \dots, a_n, b) \in f$. Dieses b wird auch mit $\langle\langle f(a_1, \dots, a_n) \rangle\rangle$, $\langle\langle f a_1 \dots a_n \rangle\rangle$, $\langle\langle f(\vec{a}) \rangle\rangle$ oder $\langle\langle f \vec{a} \rangle\rangle$ bezeichnet.

- Schreibweise: $\langle\langle f : A \rightarrow B \rangle\rangle$ bzw. $\langle\langle f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B \rangle\rangle$
 – Zur Definition siehe Abschnitt 3.1.3 auf Seite 15. 15, 16, 25, 28, 54–59

Funktionswert einer **Funktion**.

- Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt 3.1.3 auf Seite 15. 15

G

Gleichheit Eine **Gleichheitsrelation**: Zwei Objekte A und B sind *gleich* (dasselbe; identisch), $A = B$, wenn sie in den INTERESSIERENDEN EIGENSCHAFTEN für $=$ übereinstimmen.

– Zur Definition siehe Paragraph 3.2.2.2 auf Seite 20 20, 21, 50–52, 55

Gleichheitsrelation Eine mit **Gleichheit** verwandte **Relation**: $=$, \neq , \equiv und \neq . 18, 21, 52, 55, 58

Graph einer **Funktion** oder **Relation**.

– Symbol: **graph**

– Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt 3.1.3 auf Seite 15. 15, 55

graph (R) ist der **Graph** der Funktion bzw. Relation R .

– Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt 3.1.3 auf Seite 15. 15, 55

I

Identitätsregel Eigentlich eine **Basisregel** zur Identität. Da die **Identitätsregeln** nur zur Rechtfertigung der **Substitution** verwendet werden, werden sie hier nicht zu den **Basisregeln** gezählt.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt 4.1.2 auf Seite 33. 34, 53, 55

J

\mathcal{J} Die Menge der **Junktorsymbole**.

– Zur Definition siehe Paragraph 3.4.2.1 auf Seite 28. 28–31

\mathcal{J}_x Eine Teilmenge der Menge \mathcal{J} der **Junktorsymbole**.

– Zur Definition siehe Paragraph 3.4.2.1 auf Seite 28. 28, 29

Junktor Eine aussagenlogische **Operation**. Da die Werte einer aussagenlogischen **Operation Wahrheitswerte** sind, kann man einen **Junktor** auch als **Relation** verstehen.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.1.3 auf Seite 15

– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.4.3 auf Seite 29. 16, 17, 20, 26–30, 32, 51, 55, 56, 58

Junktorsymbol Ein **Symbol** für einen **Junktor**.³⁾ 26, 28, 55

K

\mathcal{K} Die Menge der aussagenlogischen Konstanten.

– Zur Definition siehe Paragraph 3.4.2.1 auf Seite 28. 28, 29

Kontraposition Die allgemeingültige **Aussage**: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$. 39, 44

Kontravalenz Eine **Gleichheitsrelation**: Zwei Objekte A und B sind *nicht äquivalent* (nicht ähnlich), $A \neq B$, wenn sie in mindestens einer INTERESSIERENDEN EIGENSCHAFT für \equiv nicht übereinstimmen.

– Zur Definition siehe Paragraph 3.2.2.2 auf Seite 20. 21, 27

L

\mathcal{L} **Formelmenge**. 14, 22–25, 52, 54

\mathcal{L}^A Die Menge der aussagenlogischen **Formeln** mit Klammerung. 29, 30, 55

\mathcal{L}_x^A Eine Teilmenge der Menge \mathcal{L}^A der aussagenlogischen **Formeln** mit Klammerung. 28–30

\mathcal{L}^{AP} Die Menge der aussagenlogischen **Formeln** in polnischer Notation. 29, 55

\mathcal{L}_x^{AP} Eine Teilmenge der Menge \mathcal{L}^{AP} der aussagenlogischen **Formeln** in polnischer Notation. 29

len $\text{len}(\vec{a})$ ist die Länge, d. h. die Anzahl der Komponenten eines Tupels bzw. einer Folge.

– Symbol: **len** 15, 21

³⁾ Entsprechend *Funktionssymbol*, *Operatorsymbol*, *Relationssymbol*, usw.

M

$M^0 \{()\}$, wobei $()$ das 0-Tupel ist.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.1 auf Seite 13](#). [22](#)

M^n Das kartesische Produkt $M \times \cdots \times M$ aus n Mengen M mit $n \in \mathbb{N}_0$.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.1 auf Seite 13](#). [16](#), [22](#)

Mengenlehre – Zur Definition siehe Abschnitt [3.6 auf Seite 31](#). [27](#)

Metadefinition Eine [Definition](#) in [Metasprache](#) mit Hilfe des *Metadefinitionssymbols* $\langle : \Leftrightarrow \rangle$. $\langle \langle A : \Leftrightarrow B \rangle \rangle$ steht für „ A ist definitionsgemäß äquivalent zu B “ für [Aussagen](#) A und B . Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B .

– Man vergleiche auch den Begriff „[Definition](#)“ und das zugehörige [Symbol](#) $\langle := \rangle$.

– Zur Definition siehe Paragraph [3.2.2.3 auf Seite 21](#). [18](#), [21](#), [51](#), [54](#)

Metaoperation Eine [Operation](#) der [Metasprache](#): $\&$, $\|$ oder $|$.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.2.1 auf Seite 19](#). [17–19](#), [23](#), [50](#), [51](#), [58](#), [59](#)

Metarelation Eine [Relation](#) der [Metasprache](#): \Rightarrow , \Leftarrow oder \Leftrightarrow .

– Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.2.1 auf Seite 19](#). [19](#), [50](#), [51](#)

Metasprache Eine Sprache, in der [Aussagen](#) über Elemente einer anderen Sprache getroffen werden können. In diesem Dokument ist dies immer die normale Sprache.

– Siehe Abschnitt [3.2 auf Seite 19](#). [19](#), [56](#)

Monotonieregel Eine [Schlussregel](#). – siehe (MR). [32](#), [33](#), [56](#)

(MR) [Monotonieregel](#) - Eine [Schlussregel](#). [33](#), [35](#), [37](#), [56](#)

N

\mathbb{N} Die Menge der natürlichen Zahlen ohne 0.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.1 auf Seite 13](#). [13](#)

\mathbb{N}_0 Die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.1 auf Seite 13](#). [13](#), [15](#), [22](#), [24](#), [26](#), [28](#)

Notation, Polnische Bei der POLNISCHEN NOTATION stehen die Operanden bzw. Argumente von [Relationen](#) und [Funktionen](#) stets rechts von den Relations- und Funktionssymbolen. Dadurch kann auf Gliederungszeichen wie Klammern und Kommata verzichtet werden. Noch einfacher für Computer ist die **umgekehrte** POLNISCHE NOTATION, bei der die Operanden und Argumente links von den Symbolen stehen. [28](#)

O

\mathcal{O} Die Menge der binären [Junktoren](#).

– Zur Definition siehe Paragraph [3.4.2.1 auf Seite 28](#). [28](#), [29](#)

Objekt [Symbole](#), [Formeln](#) und [Aussagen](#) sowie Mengen, [Zeichenfolgen](#), Zahlen; ganz allgemein reale oder gedachte Dinge an sich.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.1 auf Seite 13](#). [14](#), [20](#), [21](#), [53](#), [54](#), [59](#)

Operation Eine – meistens binäre, d. h. zweiwertige – Funktion $M^n \rightarrow M$. Für eine binäre [Operation](#)

$\otimes : M \times M \rightarrow M$ schreibt man meistens $x \otimes y$ statt $\otimes(x, y)$.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.3 auf Seite 15](#)

– Siehe Unterabschnitt [3.1.4 auf Seite 16](#) und [3.4.1 auf Seite 26](#). [16–20](#), [26](#), [27](#), [50](#), [55](#), [56](#), [58](#), [59](#)

P

\mathcal{P} [Potenzmenge](#). [22–25](#), [52](#)

\mathcal{P}_e Menge der endlichen Teilmengen. 22, 25

Potenzmenge Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge ihrer Teilmengen.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.1.1 auf Seite 13. 22, 56, 57

Prädikatenlogik – Zur Definition siehe Abschnitt 3.5 auf Seite 31. 22, 26, 28

Q

\mathcal{Q} Die Menge der aussagenlogischen Variablen q_i für $i \in \mathbb{N}_0$.

– Zur Definition siehe Paragraph 3.4.2.1 auf Seite 28. 28, 29

R

\mathcal{R} Menge der binären Relationen. 22–25

\mathcal{R}_e Menge der endlichen binären Relationen. 22, 25

Relation Eine n -stellige **Relation** R ist ein $(1+n)$ -Tupel (G, A_1, \dots, A_n) mit $G \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$.

– Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt 3.1.3 auf Seite 15

– Siehe Unterabschnitt 3.1.4 auf Seite 16 und 3.2.2 auf Seite 20. 15–17, 19, 22, 28, 50–52, 54–59

S

$\mathcal{S}(M)$ ist die Menge aller **Tupel** aus M . 22, 24, 25, siehe auch **Tupelmenge**

Satz Eine mathematische **Aussage**, dass bestimmte **Folgerungen** aus gegebenen **Voraussetzungen** abgeleitet werden können. 1, 5–7, 10–13, 28, 32, 40, 42, 54

Satz, formal Formale Darstellung eines mathematischen SATZES.

– Siehe (FS); zur Definition siehe Unterabschnitt 3.3.3 auf Seite 23. 23, 24, 54

Schlussregel Eine **Schlussregel** $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{F}}$ entspricht der **Aussage**:

Wenn alle **Voraussetzungen** \mathbf{v} aus \mathbf{V} zutreffen, dann auch alle **Folgerungen** \mathbf{f} aus \mathbf{F} .

Wenn diese **Aussage** zutrifft, kann die Schlussregel zur ZULÄSSIGEN TRANSFORMATION von **Formeln** dienen.

– Standardsymbole: C = eine Schlussregel \mathcal{C} = eine Menge aus Schlussregeln

– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.3.3 auf Seite 23. 18, 21, 23–26, 32–39, 44, 51–54, 56–59, siehe **allgemeingültig**

Schnittregel Eine ALLGEMEINGÜLTIGE SCHLUSSREGEL.

– Siehe (SR). 35–37, 44, 57

Set $\text{Set}(\vec{a})$ ist die Menge der Komponenten eines **Tupels** bzw. einer Folge.

– Symbol: **Set** 15, 21–25

Signatur, Boolesche Die LOGISCHE SIGNATUR $\{\neg, \wedge, \vee\}$. 29, 30

Signatur, logische Eine Teilmenge von \mathcal{J} , ausreichend um damit alle anderen Elemente aus \mathcal{J} zu definieren. 29, 31

Sprache – Siehe **Formelmenge**. 14, 25, 28, 52, 54, 59

(SR) **Schnittregel** - Eine **Schlussregel**. 35, 57

Stelligkeit einer **Funktion** oder **Relation**.

– Symbole: stel_f = Stelligkeit einer Funktion, stel_r = Stelligkeit einer Relation,

– Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt 3.1.3 auf Seite 15. 15

Substitution Eine [Funktion](#) zur [Transformation](#) einer [Formel](#) mittels [Substitution](#) in eine gleichwertige. Die [Substitution](#) heißt [zulässig](#), wenn sie vorgegebene Regeln erfüllt.
 – Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.3.4 auf Seite 25](#). [18, 25, 29, 32–34, 36, 37, 51, 55, 58, 59](#)

Symbol Ein [einfaches Symbol](#) ist ein druckbares typographisches Zeichen. Ein [zusammengesetztes Symbol](#) besteht aus mehreren einfachen [Symbole](#). In beiden Fällen wird ein [Symbol](#) als [unzerlegbar](#) angesehen.
 – Zur Definition siehe Abschnitt [3.1 auf Seite 13](#). [13, 14, 20, 54–56, 58, 59](#)

T

(TR) [Abtrennungsregel](#) - Eine [Schlussregel](#). [35, 52](#)

Trägermenge einer [Relation](#).

- Symbol: car
- Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt [3.1.3 auf Seite 15](#). [15](#)

Transformation Eine Umformung oder Erzeugung einer [Formel](#) aus einer vorgegebenen Menge aus [Formeln](#), d. h. die Anwendung einer [Schlussregel](#).

Eine [Transformation](#) heißt [zulässig](#), wenn sie Element einer vorgegebenen Menge aus [Transformationen](#) oder eine daraus zulässigerweise abgeleitete [Transformation](#) ist.

Standardsymbole: T = eine Transformation, \mathcal{T} = eine Folge aus Transformationen [24, 26, 32–34, 58, 59](#)

Transformationsfolge Eine Folge aus [Transformationen](#).

- Standardsymbol: \mathcal{T}
- Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.3.6 auf Seite 26](#). [26](#)

Tupel Ein n -[Tupel](#)⁴⁾ \vec{a} ist eine endliche Folge⁵⁾ (a_1, \dots, a_n) aus seinen **Komponenten** a_i . Sind alle Komponenten Elemente einer Menge M , so heißt \vec{a} ein n -[Tupel auf](#) M .
 – Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.3 auf Seite 15](#). [15, 21, 22, 24, 25, 57, 58](#)

Tupelmenge Die [Tupelmenge](#) $\mathcal{S}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller n -Tupel aus M^n für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
 – Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.1.1 auf Seite 13](#). [22, 58](#)

U

\mathcal{U} Die Menge der unären [Junktoren](#).

- Zur Definition siehe Paragraph [3.4.2.1 auf Seite 28](#). [28, 29](#)

Umkehrrelation Die [Umkehrrelation](#) zu einer binären [Relation](#) (G, A, B) ist die [Relation](#) (H, B, A) mit $H = \{(b, a) | (a, b) \in G\}$. Üblicherweise wird das zugehörige Relationssymbol gespiegelt. [15, 16, 50, 58](#)

Ungleichheit Eine [Gleichheitsrelation](#): Zwei Objekte A und B sind *nicht gleich* (nicht dasselbe; nicht identisch), $A \neq B$, wenn sie in mindestens einer INTERESSIERENDEN EIGENSCHAFT für $=$ nicht übereinstimmen.
 – Zur Definition siehe Paragraph [3.2.2.2 auf Seite 20](#). [13, 20](#)

unzerlegbar Eine [Aussage](#), die keine [Metaoperation](#), bzw. eine [Formel](#), die keine [Operation](#) und keine [Relation](#) enthält, heißt [unzerlegbar](#).
 – Synonym: [atomar](#); vergleiche auch [zerlegbar](#). [19, 29, 53, 58, 59](#)

V

⁴⁾ alternativ: **Vektor**

⁵⁾ alternativ: **Sequenz**

vergleichbar Zwei [Objekte](#) A und B sind [vergleichbar](#), wenn beide von derselben Art sind, d. h. wenn beide z. B. jeweils Mengen, [Zeichenfolgen](#), Zahlen, usw. sind. Dabei muss bei [Formeln](#) zwischen der [Formel](#) an sich und ihrem *Wert* oder *Ergebnis* unterschieden werden.

– Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.2.2.1 auf Seite 20](#). [20](#), [33](#), [59](#)

Vertauschung Die *Vertauschung* von zwei unabhängigen Teil-[Formeln](#) (α und β) in einer anderen [Formel](#) (γ)

– Formal: $\gamma(\alpha \rightleftharpoons \beta)$. Die *Vertauschung* ist eine spezielle Form der [Substitution](#).

– Zur Definition siehe [\(4.1\)](#) im Unterabschnitt [4.1.2 auf Seite 33](#). [30](#), [33](#), [34](#), [51](#)

Voraussetzung Die [Voraussetzungen](#) einer [Schlussregel](#) $\frac{V}{F}$ sind die Elemente aus V .

– Standardsymbole: v = eine Voraussetzung, V = eine Menge aus Voraussetzungen, \vdash_v = eine Relation (als Menge aufgefasst) aus Voraussetzungen

– Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.3.3 auf Seite 23](#). [17](#), [23](#), [24](#), [26](#), [33](#), [34](#), [36–38](#), [53](#), [57](#), [59](#)

W

Wahrheitswert Die Werte $\langle \top \rangle$ und $\langle \perp \rangle$, oft auch mit $\langle \text{wahr} \rangle$ bzw. $\langle \text{falsch} \rangle$, $\langle \text{true} \rangle$ bzw. $\langle \text{false} \rangle$ oder einfach $\langle 1 \rangle$ bzw. $\langle 0 \rangle$ bezeichnet. [20](#), [26](#), [27](#), [51](#), [53](#), [55](#)

Wort Ein Element einer [Sprache](#). In dem Fall Synonym zu [Formel](#).

– Siehe [Formelmenge](#). [14](#), [54](#)

Z

Zeichenfolge Eine Folge aus [Symbolen](#), wobei Leerstellen und sonstiger Zwischenraum nicht zählen und nur zur besseren Darstellung dienen. Dabei sind als spezielle [Symbole](#) auch [Zeichenketten](#) erlaubt, solange die Zerlegung eindeutig bleibt. Z. B. kann $\langle \sin \rangle$ als ein einzelnes [Symbol](#) – für die Sinusfunktion – aufgefasst werden, aber auch als Folge aus den Buchstaben $\langle s \rangle$, $\langle i \rangle$ und $\langle n \rangle$. [Formeln](#) werden immer als [Zeichenfolgen](#) aufgefasst.

– Siehe auch [Zeichenkette](#).

– Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.2.2.3 auf Seite 21](#). [14](#), [20](#), [22](#), [54](#), [56](#), [59](#)

Zeichenkette Eine Folge aus (typographischen) Zeichen, auch Leerstellen und sonstigem Zwischenraum.

– Siehe auch [Zeichenfolge](#).

– Zur Definition siehe Unterabschnitt [3.2.2.3 auf Seite 21](#). [14](#), [20](#), [29](#), [59](#)

zerlegbar Eine [Aussage](#), die eine [Metaoperation](#), bzw. eine [Formel](#), die eine [Operation](#) oder eine [Relation](#) enthält, heißen [zerlegbar](#).

– Vergleiche auch [unzerlegbar](#). [19](#), [29](#), [53](#), [58](#), [59](#)

Ziel In diesem Dokument sind [Ziele](#) die Anforderungen an [ASBA](#). [7](#), [59](#)

Zielbereich einer [Funktion](#).

– Symbol: tar

– Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt [3.1.3 auf Seite 15](#). [16](#), [54](#)

zulässig Eine Eigenschaft von [Formel](#), [Transformation](#) und [Substitution](#). [24](#), [32–34](#), [58](#)