Dr. Winfried Teschers
Anton-Günther-Straße 26c
91083 Baiersdorf
winfried.teschers@t-online.de

Projektdokument

ASBA

Axiome, Sätze, Beweise und Auswertungen

Projekt zur maschinellen Überprüfung von mathematischen Beweisen und deren Ausgabe in lesbarer Form

Winfried Teschers

19. Februar 2018

Es wird ein Programmsystem beschrieben, das zu eingegebenen Axiomen, Sätzen, und Beweisen letztere prüft, Auswertungen generiert und zu gegebenen Ausgabeschemata eine Ausgabe der Elemente in üblicher Formelschreibweise im LaTeX-Format erstellt.

Inhaltsverzeichnis

1. Analyse

In der Mathematik gibt es eine unüberschaubare Menge an Axiomen, Sätzen, Beweisen, *Fachbegriffen*[1)] und *Fachgebieten*[2)]. Zu den meisten Fachgebieten gibt es noch ungelöste Probleme.

Es fehlt ein System, das einen Überblick bietet und die Möglichkeit, Beweise automatisch zu überprüfen. Außerdem sollte all dies in üblicher mathematischer Schreibweise ein- und ausgegeben werden können. In diesem Dokument werden die Grundlagen für das zu entwickelnde Programmsystem, das **A**xiome, **S**ätze, **B**eweise und **A**uswertungen behandeln kann. (ASBA) behandelt.

Ein Programmsystem mit ähnlicher Aufgabenstellung findet sich im GitHub Projekt *Hilbert II* (siehe [18, 19]). Einige Ideen sind von dort übernommen worden.

1.1. Fragen

Einige der Fragen, die in diesem Zusammenhang auftauchen, werden nun formuliert:

1. *Grundlagen*: Was sind die Grundlagen? Z. B. welche Logik und Mengenlehre.
2. *Basis*: Welche wichtigen Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Fachgebiete gibt es? Welche davon sind Standard?
3. *Axiome*: Welche Axiome werden bei einem Satz oder Beweis vorausgesetzt? Allgemein anerkannte oder auch strittige, wie z. B. den *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* (*tertium non datur*) oder das *Auswahlaxiom*.
4. *Beweis*: Ist ein Beweis fehlerfrei?
5. *Konstruktion*: Gibt es einen konstruktiven Beweis?
6. *Vergleiche*: Welcher Beweis ist besser? Nach welchem Kriterium? Z. B. elegant, kurz, einsichtig oder wenige Axiome. Was heißt eigentlich *elegant*?
7. *Definitionen*: Was ist mit einem Fachbegriff jeweils genau gemeint? Z. B. *Stetigkeit*, *Integral* und *Analysis*.
8. *Abhängigkeiten*: Wie heißt ein Fachbegriff in einer anderen Sprache? Ist wirklich dasselbe gemeint? Was ist mit Fachbegriffen in verschiedenen Fachgebieten?
9. *Überblick*: Ist ein Axiom, Satz, Beweis oder Fachbegriff schon einmal – ggf. abweichend – definiert, formuliert oder bewiesen worden?
10. *Darstellung*: Wie kann man einen Satz und den zugehörigen Beweis – ggf. auch spezifisch für ein Fachgebiet – darstellen?

---

1) **Fachbegriffe** sind Namen für mathematische Elemente und Konstruktionen, z. B. Axiomen, Sätze, Beweise und Fachgebiete. *Symbole* können als spezielle Fachbegriffe aufgefasst werden.

2) Ein **Fachgebiet** ist ein Teil der Mathematik mit einer zugehörigen Basis an Axiomen, Sätzen, Fachbegriffen und Darstellungen, z. B. *Logik*, *Mengenlehre* und *Gruppentheorie*. Ein Fachgebiet kann sehr klein sein und im Extremfall kein einziges Element enthalten. *Umgebung* wäre eine bessere Bezeichnung, ist aber schon ein verbreiteter Fachbegriff, so dass hier die Bezeichnung Fachgebiet verwendet wird.
Statt „Fachgebiet“ könnte man auch „Theorie“ nehmen. An *Theorien* (siehe [1] Kapitel 2.5, Seite 64) werden aber bestimmte Anforderungen gestellt, die vom hier behandelten Programmsystem aber nicht notwendigerweise überprüft werden sollen. Theorien sind allerdings i. Alg. auch Fachgebiete.

11. *Forschung*: Welche Probleme gibt es noch zu erforschen.

1.2. Eigenschaften

ASBA soll ausgehend von den Fragen in Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite entwickelt werden, und die folgenden Eigenschaften haben:

1. *Daten*: Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Fachgebiete können in formaler Form gespeichert werden – auch (noch) nicht oder unvollständig bewiesene Sätze. Dabei soll die übliche mathematische Schreibweise verwendet werden können.

2. *Definitionen*: Es können Fachbegriffe für Axiome, Sätze, Beweise und Fachgebiete – letztere mit eigenen Axiomen, Sätzen, Beweisen, Fachbegriffen und über- oder untergeordneten Fachgebieten – definiert werden. Die Definitionen dürfen wiederum an dieser Stelle schon bekannte Fachbegriffe und Fachgebiete verwenden.

3. *Prüfung*: Vorhandene Beweise können automatisch geprüft werden.

4. *Ausgaben*: Die Axiome, Sätze und Beweise können in üblicher Schreibweise – abhängig von Sprache und Fachgebiet – ausgegeben werden.

5. *Auswertungen*: Zusätzlich zur Ausgabe der gespeicherten Daten sind verschiedene Auswertungen möglich, unter anderem für die meisten der unter Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite behandelten Fragen.

Damit ASBA nicht umsonst erstellt wird und möglichst breite Verwendung findet, werden noch zwei Punkte angefügt:

6. *Lizenz*: Die Software ist *Open Source*.

7. *Akzeptanz*: ASBA wird von Mathematikern akzeptiert und verwendet.

Tabelle 1.1 auf der nächsten Seite zeigt, wie sich die Eigenschaften zu den Fragen im Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite verhalten. Mit einem X werden die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Eigenschaften zur Beantwortung der entsprechenden Frage beitragen sollen. Idealerweise sollte die Erfüllung aller angegebenen Eigenschaften alle gestellten Fragen beantworten, was allerdings illusorisch ist.

Frage \ Eigenschaft		1 Daten	2 Definitionen	3 Prüfung	4 Ausgaben	5 Auswertungen	6 Lizenz	7 Akzeptanz
1	Grundlagen	X	X	-	X	X	-	-
2	Basis	X	X	-	X	X	-	-
3	Axiome	X	X	-	X	X	-	-
4	Beweis	X	-	X	X	-	-	-
5	Konstruktion	X	-	-	X	-	-	-
6	Vergleiche	X	-	-	-	X	-	-
7	Definitionen	X	X	-	X	-	-	-
8	Abhängigkeiten	X	-	-	X	-	-	-
9	Überblick	X	-	-	-	X	-	-
10	Darstellung	-	X	-	X	-	-	-
11	Forschung	X	-	-	-	X	-	-

Tabelle 1.1.: 1.1 Fragen → 1.2 Eigenschaften

1.3. Ziele

Um die Eigenschaften von Abschnitt 1.2 auf der vorherigen Seite zu erreichen, werden für ASBA die folgenden Ziele[3)] gesetzt:

1. *Daten*: Es enthält möglichst viele wichtige Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe, Fachgebiete und Ausgabeschemata[4)].
2. *Form*: Die Daten liegen in formaler, geprüfter Form vor.
3. *Eingaben*: Die Eingabe von Daten erfolgt in einer formalen Syntax unter Verwendung der üblichen mathematischen Schreibweise.
4. *Prüfung*: Vorhandene Beweise können automatisch geprüft werden.
5. *Ausgaben*: Die Ausgabe kann in einer eindeutigen, formalen Syntax gemäß vorhandener Ausgabeschemata erfolgen.
6. *Auswertungen*: Zusätzlich zur Ausgabe der Daten sind verschiedene Auswertungen möglich. Insbesondere kann zu jedem Beweis angegeben werden, wie lang er ist und welche Axiome und Sätze[5)] er benötigt.
7. *Anpassbarkeit*: Fachbegriffe und die Darstellung bei der Ausgabe können mit Hilfe von – gegebenenfalls unbenannten – untergeordneten Fachgebieten angepasst werden.
8. *Individualität*: Axiome und Sätze können für jeden Beweis individuell vorausgesetzt werden. Dabei sind fachgebietsspezifische Fachbegriffe erlaubt.

3) Es sind eigentlich Anforderungen. Da dieser Begriff auch im Kapitel 4 auf Seite 39 verwendet wird, werden die Anforderungen hier Ziele genannt.
4) Um den Punkt 4 von Abschnitt 1.2 auf der vorherigen Seite erfüllen zu können, werden noch fachgebietsspezifische Ausgabeschemata benötigt, welche die Art der Ausgaben beschreiben.
5) Sätze, die quasi als Axiome verwendet werden.

9. *Internet*: Die Daten können auf mehrere Dateien verteilt sein. Ein Teil davon – oder sogar alle – können im Internet liegen.
10. *Kommunikation*: Die Kommunikation mit ASBA kann mit den Fachbegriffen der einzelnen Fachgebiete erfolgen.
11. *Zugriff*: Der Zugriff auf ASBA kann lokal und über das Internet erfolgen.
12. *Unabhängigkeit*: ASBA kann online und offline arbeiten.
13. *Rekursion*: Es kann rekursiv über alle verwendeten Dateien – auch solchen, die im Internet liegen – ausgewertet werden.
14. *Bedienbarkeit*: ASBA ist einfach zu bedienen.
15. *Lizenz*: Die Software ist *Open Source*.
16. *Zwischenspeicher*: Wichtige Auswertungen können an vorhandenen Dateien angehängt oder separat in eigenen Dateien gespeichert werden.

Punkt 16 wurde noch eingefügt, damit ASBA effizient arbeiten kann und um die Akzeptanz zu erhöhen.

Die Tabelle 1.2 zeigt wieder, wie sich die Ziele zu den Eigenschaften im Abschnitt 1.2 auf Seite 5 verhalten. Mit einem X werden wieder die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Ziele zur Sicherstellung der entsprechenden Eigenschaft beitragen sollen. Idealerweise sollte durch Erreichen aller aufgestellten Ziele ASBA alle angegebenen Eigenschaften aufweisen, was wahrscheinlich ebenfalls illusorisch ist.

Eigenschaft \ Ziel	1 Daten	2 Form	3 Eingaben	4 Prüfung	5 Ausgaben	6 Auswertungen	7 Anpassbarkeit	8 Individualität	9 Internet	10 Kommunikation	11 Zugriff	12 Unabhängigkeit	13 Rekursion	14 Bedienbarkeit	15 Lizenz	16 Zwischenspeicher
1 Daten	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2 Definitionen	X	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3 Prüfung	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4 Ausgaben	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 Auswertungen	-	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6 Lizenz	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	-
7 Akzeptanz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabelle 1.2.: 1.2 Eigenschaften → 1.3 Ziele

1.4. Zusammenfassung

Ziel / **Frage**		1 Daten	2 Form	3 Eingaben	4 Prüfung	5 Ausgaben	6 Auswertungen	7 Anpassbarkeit	8 Individualität	9 Internet	10 Kommunikation	11 Zugriff	12 Unabhängigkeit	13 Rekursion	14 Bedienbarkeit	15 Lizenz
1	Grundlagen	X	X	X	-	X	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
2	Basis	X	X	X	-	X	X	x	x	-	-	-	-	-	-	-
3	Axiome	X	X	X	-	X	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
4	Beweis	X	X	X	X	X	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-
5	Konstruktion	X	X	X	-	X	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-
6	Vergleiche	X	X	X	-	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-
7	Definitionen	X	X	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-
8	Abhängigkeiten	X	X	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-
9	Überblick	X	X	X	-	-	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
10	Darstellung	X	-	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-
11	Forschung	X	X	X	-	-	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
Die nächsten beiden Punkte sind Eigenschaften aus Abschnitt 1.2 auf Seite 5:																
6	Lizenz	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X
7	Akzeptanz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabelle 1.3.: 1.1 Fragen → 1.3 Ziele

Die Tabelle 1.3 ist eine Kombination der Tabellen 1.1 und 1.2 und zeigt, wie sich die Ziele im Abschnitt 1.3 auf Seite 6 zu den Fragen im Abschnitt 1.1 auf Seite 4 verhalten. Auch hier werden mit einem X die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Ziele für die Beantwortung der entsprechenden Frage nötig sind. Mit einem kleinen x werden sie markiert, wenn sie zur Beantwortung der Fragen nicht nötig, aber von Interesse sind. Idealerweise sollte das Erreichen aller aufgestellten Ziele alle gestellten Fragen beantworten, was natürlich auch illusorisch ist.

1.5. Die Umgebung von ASBA

In der Abbildung 1.1 wird beschrieben, welche Interaktionen ASBA mit der Umgebung hat, d. h. welche Ein- und Ausgaben existieren und woher sie kommen bzw. wohin sie gehen.

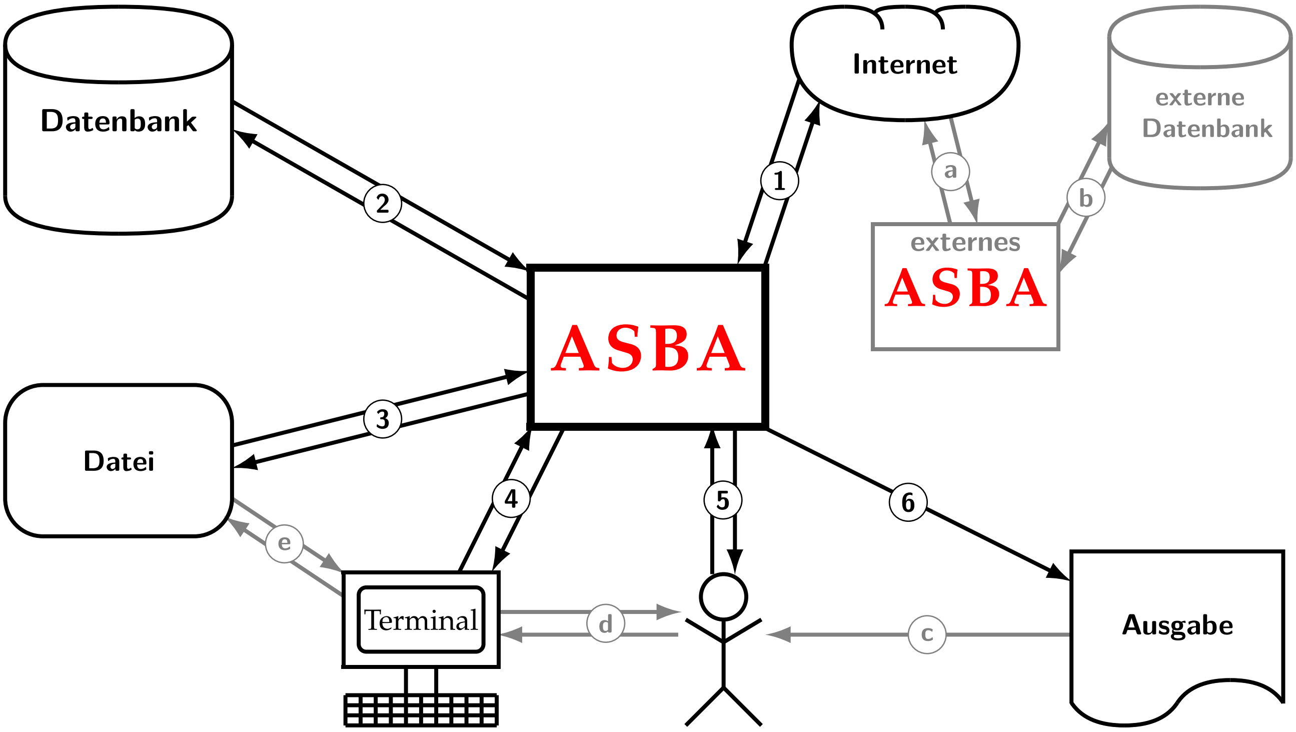

Abbildung 1.1.: Die Umgebung von ASBA

In den in der Abbildung 1.1 abgebildeten Datenflüssen (1) bis (6) und (a) bis (e) werden die folgenden Daten übertragen:

(1) **ASBA→ Internet** Inhalte der Datenbank.

Internet → ASBA Inhalte der externen Datenbank.

(2) **Datenbank → ASBA** Inhalte der Datenbank und Antworten auf Datenbankanweisungen.

ASBA→ Datenbank Inhalte der Datei, der externen Datenbank und Datenbankanweisungen.

(3) **Datei → ASBA** Inhalte der Datei.

ASBA→ Datei Die Datei wird um zusätzliche Auswertungen ergänzt, z. B. ob die Beweise korrekt sind, welche Axiome und Sätze – auch externe aus dem Internet – verwendet wurden, Länge des Beweises usw.

(4) **Terminal → ASBA** Anweisungen, Daten und Batchprogramme.

ASBA→ Terminal Antworten auf Anweisungen, Auswertungen usw.

Außerdem interaktive Ein- und Ausgabe durch einen Anwender, wie in (5) beschrieben.

(5) **Anwender ↔ ASBA** Interaktive Ein- und Ausgaben durch einen Anwender mit Komponenten von (3), (4) und (6). – Die Kommunikation läuft i. Alg. über ein Terminal.

(6) **ASBA→ Ausgabe** Inhalte von Datei und Datenbank in lesbarer Form, u. a. mit Hilfe von Ausgabeschemata auch in Formelschreibweise. Die Ausgabe kann auch in eine Datei erfolgen, z. B. im LaTeX-Format.

(a) **Internet → externes ASBA** Inhalte der Datenbank.

externes ASBA→ Internet Inhalte der externen Datenbank.

(b) **externe Datenbank → externes ASBA** Inhalte der externen Datenbank.

externes ASBA→ externe Datenbank Inhalte der Datenbank.

(c) **Ausgabe → Anwender** Alle Daten der Ausgabe.

(d) **Anwender ↔ Terminal** Interaktive Ein- und Ausgabe durch einen Anwender, wie in (5) beschrieben.

(e) **Terminal ↔ Datei** Erstellen und Bearbeiten der Datei durch einen Anwender. – siehe (d)

Die Datenflüsse (a) bis (e) erfolgen außerhalb von ASBAund werden nicht weiter behandelt.

Die Datenbank und die Datei enthalten im Prinzip die gleichen Daten, wobei sie in der Datei im Textformat in lesbarer Form und in der Datenbank in einem internen Format vorliegen. Zudem enthält die Datenbank i. Alg. sehr viel mehr Daten. Es handelt sich dabei jeweils um die folgenden Daten:

Axiome Ein Axiom ist eine *Aussage* oder Behauptung, die nicht aus anderen Aussagen abgeleitet werden kann. Es können wie bei Sätzen Voraussetzungen vorhanden sein, aber keine Beweise.

Sätze Ein Satz besteht aus einer Anzahl von Voraussetzungen, einer Behauptung und einem Beweis, der die Behauptung aus den Voraussetzungen ableitet. Letztere können Axiome und andere Sätze sein, auf die dann verwiesen wird.

Beweise Ein Beweis besteht aus einer Folge von Beweisschritten die aus gegebenen Voraussetzungen eine Behauptung ableiten.

Fachbegriffe Ein Fachbegriff ist ein Name für ein Objekt bzw. eine Eigenschaft in einem bestimmten Fachgebiet.

Fachgebiete Ein Fachgebiet ist ein Teil der Mathematik mit einer zugehörigen Basis von Axiomen, Sätzen, Fachbegriffen und Ausgabeschemata, quasi eine untergeordnete Datenbank.

Ausgabeschemata Eine Beschreibung, wie ein bestimmtes mathematisches Objekt ausgegeben werden soll. Dies kann z. B. ein Stück LaTeX-Code mit entsprechenden Parametern sein.

Auswertungen Statistische und andere Auswertungen, die bestimmten Elementen der Datei bzw. Datenbank zugeordnet sind. Z. B. können zu einem Satz alle für einen Beweis notwendigen Axiome angegeben werden – als Verweise.

Die Daten können interne und externe Verweise enthalten.

1.6. Basis von Beweisen

Da ein Computerprogramm erstellt werden soll, muss die Grundstruktur des Vorgehens bei Beweisen definiert werden.[6)]

Die logische Darstellung von mathematischen Aussagen, wozu auch Axiome und Sätze gehören, erfolgt, da es sich immer um Formeln handelt, an besten mit *Zeichenfolgen*[7)], d. h. Folgen von Zeichen und Symbolen, in denen Zwischenraum – insbesondere Leerstellen – nicht zählen.

[6)] siehe [32]

[7)] Die interne Darstellung der Zeichenfolgen kann zur Optimierung des Programms von der logischen abweichen.

Mehrdimensionale Formeln, wie z. B. Matrizen, Baumstrukturen, Funktionsschemata und anderes, können auch als (eindimensionale) Zeichenfolgen dargestellt werden.[8)] Beweise sind letztendlich nichts anderes, als erlaubte Transformationen dieser Zeichenfolgen.

Bausteine sind Grundelemente, auch **Zeichen** oder **(Satz-)Buchstaben** genannt, aus denen die Zeichenfolgen bestehen dürfen, und müssen definiert werden.

Formationsregeln dienen zur Festlegung, wie man aus den Bausteinen Ausdrücke erzeugen kann, und müssen ebenfalls definiert werden.

Sätze lassen sich als eine Menge von Formeln, den Voraussetzungen, wozu auch Axiome und andere Sätze gehören können, einer weiteren Menge von Formeln (Zeichenfolgen), den Folgerungen, und der Angabe eines Beweises darstellen.

Beweise zu gegebenen Voraussetzungen und Folgerungen lassen sich als Folge von zulässigen Transformationen, beginnend mit den Voraussetzungen und endend mit den Folgerungen, darstellen.

Transformationsregeln definieren, welche Transformationen mit gegebenen Formelmengen zulässig sind.[9)]

8) Z. B. könnte man eine 2×2-Matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ auch darstellen als Folge von Zeilen: „$[(a,b),(c,d)]$“, oder noch einfacher: „$[a,b;c,d]$“. In ASBAwird die LaTeX-Syntax verwendet. Damit wird die soeben angegebene Matrix codiert durch „$ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$“.

9) siehe [1, 36, 37]

2. Mathematische Grundlagen

Die mathematischen Grundlagen werden einerseits gebraucht, um die erlaubten Beweisschritte[1] zu definieren, andererseits dienen sie auch zum Testen von ASBA. Daher werden sie in diesem Kapitel 2 ausführlicher behandelt, als für die Erstellung von ASBA erforderlich ist. Alle hier aufgeführten Axiome, Sätze und Beweise sollen dazu kodiert und die Beweise dann von ASBA verifiziert werden.

2.1. Notationen

- Die in diesem Abschnitt 2.1 aufgeführten Notationen werden in diesem Kapitel 2 verwendet, ohne nochmals erläutert zu werden. Abweichungen davon müssen gesondert angegeben.
- Sätze mit „wir" bestimmen Notationen, die evtl. nur für dieses Dokument gelten. Bei allgemein bekannten Notationen wird „wir" nicht verwendet. Die Verwendung von „wir" ist allerdings möglicherweise nicht konsistent und soll nur als Hinweis dienen.
- Allgemein bekannte Notationen werden hier nicht alle angeführt. Nur solche, die in der Literatur unterschiedlich verwendet werden.
- Werden Begriffe definiert, so werden sie **in dieser** Schriftart hervorgehoben.

Im Vorgriff auf Paragraph 2.2.2.3 auf Seite 20 stehen „$A :\Leftrightarrow B$" und „$A := B$" für „*A ist definitionsgemäß gleich B*", „$A \mathbin{\&} B$" für „*A und B*" und „$A \mathbin{||} B$" für „*A oder B*". – Wir definieren für Mengen A und B:[2]

$A \subset B$	$:\Leftrightarrow$	A ist **echte Teilmenge** von B
$A \subseteq B$	$:\Leftrightarrow$	A ist **Teilmenge** von B
$\mathbb{N}$	$:=$	die Menge der **natürlichen Zahlen** ohne 0
$\mathbb{N}_0$	$:=$	die Menge der **natürlichen Zahlen** (einschließlich 0)

Wenn wir von einer **natürlichen Zahl** sprechen, meinen wir immer ein Element von $\mathbb{N}_0$.

2.1.1. Bezeichnungen

Symbole umfassen neben speziellen Symbolen auch Buchstaben, Ziffern und Sonderzeichen. Symbole, für die es kein eigenes typographisches Zeichen gibt, können auch durch Aufeinanderfolge mehrerer typographischer Zeichen, i. Alg. lateinische Buchstaben, dargestellt werden. Wir nennen sie dann **zusammengesetzte Symbole**, im Gegensatz zu den **einfachen Symbolen**. Charakteristisch für ein Symbol ist, dass es ohne Bedeutungsverlust nicht zerlegt werden kann. Einzelne Symbole werden $\langle$so$\rangle$ quotiert, z. B. $\langle\mathbb{N}_0\rangle$[3] für die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0 und $\langle$sin$\rangle$ für die Sinusfunktion. – Die Quotierung ist kein Bestandteil des Symbols!

[1] siehe Abschnitt 2.3.6 auf Seite 25

[2] In der Literatur wird $\langle\subset\rangle$ oft in der Bedeutung von $\langle\subseteq\rangle$ verwendet. Wir verwenden $\langle\subset\rangle$ jedoch nur, wenn wir explizit Ungleichheit verlangen.

[3] Man kann $\langle\mathbb{N}_0\rangle$ auch als als Aufeinanderfolge der beiden Symbole $\langle\mathbb{N}\rangle$ und $\langle{}_0\rangle$ betrachten. Welche Interpretation richtig ist, ist nicht immer wichtig und ergibt sich bei Bedarf aus dem Zusammenhang.

Wird für bestimmte Objekte ein Symbol verwendet, so nennen wir dies ein **Objektsymbol**. Ist das Objekt eine Funktion, Operation, Relation usw., so nennen wir das Symbol ein **Funktionssymbol**, **Operatorsymbol**, **Relationssymbol** usw.

Zeichenketten sind Folgen von einfachen Symbolen, in denen im Prinzip auch Leerstellen und andere nicht druckbare Zeichen zulässig sind.[4] Damit Leerstellen in Zeichenketten leicht bestimmt und sogar gezählt werden können, werden Zeichenketten stets “`in dieser`” Schriftart und Quotierung dargestellt. – Die Quotierung ist kein Bestandteil der Zeichenkette!

Zeichenfolgen sind ähnlich wie Zeichenketten, außer das sie neben einfachen auch zusammengesetzte Symbole enthalten können und Leerzeichen und andere Zwischenraumzeichen nicht zählen. Letztere dienen nur der optischen Trennung der Symbole und der besseren Lesbarkeit. Zeichenfolgen werden stets ⟪in dieser⟫ Quotierung dargestellt. – Die Quotierung ist kein Bestandteil der Zeichenfolge!

Formeln sind in diesem Dokument immer nach vorgegebenen Regeln aufgebaute Zeichenfolgen[5]. Daher werden sie wie Zeichenfolgen quotiert. – Die Quotierung ist kein Bestandteil der Zeichenfolge!

Man kann eine Formel auch dadurch charakterisieren, dass sie ein Element einer vorgegebenen Menge $\mathcal{L}$ von Zeichenfolgen ist.[6] Das ist dann so ziemlich die einfachste Regel.

Wenn eine Zeichenfolge nicht korrekt nach den vorgegebenen Regeln aufgebaut ist bzw. kein Element der vorgegebenen Menge $\mathcal{L}$ ist, werden wir sie *nicht* als Formel bezeichnen, auch nicht als „fehlerhafte Formel“ oder ähnlich. Sie ist dann einfach keine Formel.

Objekte sind z. B. Symbole, Zeichenketten, Zeichenfolgen und Formeln, oder auch Aussagen, Mengen, Zahlen, usw. – ganz allgemein reale oder gedachte Dinge an sich. Eine Formel, die nicht quotiert ist, steht für den Wert dieser Formel, der dann wieder ein Objekt ist. Entsprechend steht ein Symbol, das nicht quotiert ist, für das dadurch bezeichnete Objekt. Z. B.bezeichnet das Symbol $\langle\mathbb{N}\rangle$ die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ohne 0.

Fußnoten dienen nur zu weiteren Erläuterungen sowie Verweisen in dieses Dokument und in die Literatur. Daher können sie auch etwas „lascher“ formuliert sein. Für das Verständnis des Textes sollten sie nicht nötig sein, es reichen Grundkenntnisse der Mathematik.

2.1.2. Quotierung

Zur Verdeutlichung der soeben definierten Quotierungen ein Beispiel:

sin	Ein Objekt	die Sinusfunktion
$\langle\text{sin}\rangle$	Ein Symbol (Bezeichnung)	für das Objekt
⟪sin⟫	Eine Zeichenfolge (Formel)	aus dem zusammengesetzten[7] Symbol $\langle\text{sin}\rangle$
⟪sin⟫	Eine Zeichenfolge (Formel)	aus den einfachen Symbolen $\langle s\rangle$, $\langle i\rangle$ und $\langle n\rangle$
“`sin`”	Eine Zeichenkette	aus den einfachen Symbolen $\langle\mathtt{s}\rangle$, $\langle\mathtt{i}\rangle$ und $\langle\mathtt{n}\rangle$

Die Bezeichnung eines Objekts kann auch aus mehreren Symbolen bestehen, d. h. einer Zeichenfolge oder sogar einer ganzen Formel; z. B. ist die Bezeichnung für das indizierte Objekt a_i gleich ⟪a_i⟫.

[4] Da beim Ausdruck optisch nicht entschieden werden kann, ob ein Zwischenraum (white space) aus einem Tabulator oder evtl. mehreren Leerzeichen besteht, verwenden wir nur einzelne Leerzeichen als Zwischenraumzeichen und vermeiden Zeilenumbrüche.

[5] Es kann verschiedene Arten von Formeln geben, z. B. aussagenlogische, prädikatenlogische und solche, die ein Taschenrechner auswerten kann.

[6] Die Formel wird dann auch **Wort** der **Sprache** $\mathcal{L}$ genannt - besonders, wenn die Elemente von $\mathcal{L}$ Zeichenketten statt Zeichenfolgen sind. Wir bleiben der Klarheit willen bei „Formel“.

2.1.3. Weitere Bezeichnungen

Tupel Ein n-**Tupel** ist eine endliche Folge $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

- n, die **Länge**, d. h. die Anzahl der **Komponenten** von $\vec{a}$, ist eine natürliche Zahl.

  $\operatorname{len} \vec{a} := \operatorname{len}(\vec{a}) := n$

- Die a_i für $1 \leqslant i \leqslant n$ sind Elemente meist vorgegebener Mengen.

- $\operatorname{Set} \vec{a} := \operatorname{Set}(\vec{a}) :=$ die Menge aller Komponenten a_i von $\vec{a}$.

Für $n = 0$ ist $\vec{a} = ()$, das **leere Tupel** oder 0-**Tupel**.

Wo immer $\vec{a}$ und a_i mit $i \in \mathbb{N}_0$ gemeinsam vorkommen, ist a_i die i-te Komponente von $\vec{a}$.

Relation Eine n-**stellige Relation**[8] R ist ein (1+n)-Tupel $(G, A_1, \dots, A_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

- n, die **relationale Stelligkeit**, ist eine natürliche Zahl.

  $\operatorname{stel_r} R := \operatorname{stel_r}(R) := n$

- Die A_i für $1 \leqslant i \leqslant n$ sind Mengen, die **Trägermengen** (carrier) von R.

  $\operatorname{car}_i R := \operatorname{car}_i(R) := A_i$

- G, der **Graph** von R, ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A_1 \times \cdots \times A_n$.

  $\operatorname{graph} R := \operatorname{graph}(R) := G$ (oft einfach mit R bezeichnet)

- $R(a_1, \dots a_n) :\Leftrightarrow (a_1, \dots a_n) \in G$

Für $n = 0$ ist $G \subseteq \{()\}$[9], d. h. $R()$ ist entweder *wahr* (true) oder *falsch* (false).
Für $n = 1$ ist $G \subseteq A_1$, d. h. R kann als Teilmenge von A_1 aufgefasst werden.
Für $n = 2$ heißt die Relation **binär** und man schreibt „xRy“ statt „$R(x, y)$“ bzw. „$(x, y) \in R$“.

Ist $R = (G, M, \dots, M)$, so heißt R eine n-stellige Relation **in** oder **auf** M.

Ist $|G|$ endlich, so nennen wir R eine **endliche** Relation.

Umkehrrelation Die **Umkehrrelation** einer binären Relation (G, A, B) ist die Relation (G', B, A) mit $G' := \{(b, a) \mid (a, b) \in G\}$. Üblicherweise wird das zugehörige Relationssymbol gespiegelt.

Funktion Eine n-**stellige Funktion**[10] ist ein (1+n+1)-Tupel $f = (G, A_1, \dots, A_n, B)$ mit folgenden Eigenschaften:

- n, die **Stelligkeit**[11], ist eine natürliche Zahl.

  $\operatorname{stel_f} f := \operatorname{stel_f}(f) := n$

- f ist eine (n+1)-stellige Relation.

- Zu jedem n-Tupel $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a_1, \dots, a_n, b) \in G$, den **Funktionswert** von $\vec{a}$.

  $f\vec{a} := fa_1 \dots a_n := f(\vec{a}) := f(a_1, \dots, a_n) := b$ [12]

- $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ ist der **Definitionsbereich** (domain) von f.

  $\operatorname{dom} f := \operatorname{dom}(f) := A_1 \times \cdots \times A_n$

---

8) siehe [35]
9) Das kartesische Produkt enthält nur noch das 0-Tupel ().
10) siehe [28]
11) Die Werte der Stelligkeit als Relation und als Funktion sind verschieden, d. h. es gilt stets: $\operatorname{stel_r}(f) = \operatorname{stel_f}(f) + 1$.
12) $f(a_1, \dots, a_n)$ und $f(a_1, \dots, a_n, b)$ sind wohl zu unterscheiden. Ersteres ist ein Funktionsaufruf mit einem Funktionswert, letzteres eine Relation mit einem Wahrheitswert.

- B ist der **Zielbereich** (target) von f

  $\operatorname{tar} f := \operatorname{tar}(f)$

Für $n = 0$ ist $G = ((), b)$ für ein $b \in B$ und somit $f() = b$. f kann damit auch als Konstante b aufgefasst werden.[13)]

Man sagt: f ist eine n-stellige Funktion von $A_1 \times \cdots \times A_n$ **in** (oder auch **nach**) B (Schreibweise: $f : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$) oder, im Fall $n = 1$, f ist eine Funktion von A in (oder nach) B (Schreibweise: $f : A \to B$). Mit $A := A_1 \times \cdots \times A_n$ kann für $n > 0$ jede Funktion als 1-stellig aufgefasst werden.

Operationen in oder auf einer Menge M sind n-stellige Funktionen $M^n \to M$. Für eine **binäre**, d. h. 2-stellige Operation $\circledast$ schreibt man i. Alg. „$x \circledast y$“ statt „$\circledast(x, y)$“. Wenn nicht anders angegeben, sind Operationen stets binär. 0-stellige Operationen können wieder als Konstante aufgefasst werden.

Um Missverständnisse zu vermeiden, werden wir den Begriff „Operator“ nicht verwenden.

Junktoren sind aussagenlogische Relationen und Operationen.[14)]

2.1.4. Relationen und Operationen

Als Beispielsymbol für unäre Operationen wird $\langle\ominus\rangle$ und für binäre Operationen $\langle\circledast\rangle$ verwendet. Beispielsymbole für binäre Relationen sind $\langle\sim\rangle$ und $\langle\simeq\rangle$, ihre Umkehrrelationen$\langle\backsim\rangle$ bzw. $\langle\backsimeq\rangle$ sowie ihre **Negationen** $\langle\nsim\rangle$ bzw. $\langle\not\simeq\rangle$.[15)] Wenn nichts anderes gesagt wird, gelte mit diesen Symbolen bei gegebenem $\langle\sim\rangle$ stets:

$$(A \backsim B) \quad :\Leftrightarrow \quad (B \sim A) \tag{2.1}$$
$$(A \nsim B) \quad :\Leftrightarrow \quad ((A \sim B) \text{ gilt nicht}) \tag{2.2}$$

Dabei ist $\langle\backsim\rangle$ ist die waagerechte Spiegelung von $\langle\sim\rangle$ und statt des schrägen kann bei der Negation auch ein senkrechter Strich genommen werden.

Ist $\langle\backsim\rangle$, $\langle\simeq\rangle$ oder $\langle\backsimeq\rangle$, statt $\langle\sim\rangle$ gegeben, so müssen die Symbole entsprechend ausgetauscht werden. Entsprechend für die nächsten beiden Definitionen.

Je nachdem ob $\sim$ oder $\simeq$ gegeben ist gelte ferner:

$$(A \simeq B) \quad :\Leftrightarrow \quad ((A \sim B) \mathrel{||} (A = B)) \tag{2.3}$$
$$(A \sim B) \quad :\Leftrightarrow \quad ((A \simeq B) \mathrel{\&} (A \neq B)) \tag{2.4}$$

Man beachte, dass, wenn man $\langle :\Leftrightarrow\rangle$ durch $\langle\Leftrightarrow\rangle$ ersetzt, weder (2.3) aus (2.4) folgt noch umgekehrt.(2.3) und (2.4) folgen aber dann auseinander, wenn aus $\langle\sim\rangle$ die Ungleichheit bzw. aus der Gleichheit $\langle\simeq\rangle$ folgt. Beispiele dazu sind in der Tabelle 2.1 auf der nächsten Seite angegeben.

13) Bei der Schreibweise ohne Klammern steht da statt $\langle\!\langle f() \rangle\!\rangle$ nur noch $\langle\!\langle f \rangle\!\rangle$ und statt $\langle\!\langle f() = b \rangle\!\rangle$, insgesamt also nur noch $\langle\!\langle f = b \rangle\!\rangle$.

14) Ein n-stelliger Junktor J sei eine Operation und somit eine Funktion. Wegen $M = \{\text{true}, \text{false}\}$ kann er auch als eine n-stellige Relation J' aufgefasst werden: $J' := \{\vec{a} \in M^n \mid J(\vec{a}) = \text{true}\}$.
Umgekehrt kann eine n-stellige aussagenlogische Relation J' mittels: $J''(\vec{a}) :=$ true für $\vec{a} \in J'$, false sonst, für $\vec{a} \in M^n$, als n-stellige Operation aufgefasst werden.
Falls $J(\vec{a}) = \text{true}$ ist $\vec{a} \in J'$ und somit $J''(\vec{a}) = \text{true}$. Für $J(\vec{a}) = \text{false}$ ist $\vec{a} \notin J'$ und somit $J''(\vec{a}) = \text{false}$. Also ist $J = J''$ und so können die aussagenlogischen n-stelligen Relationen und Operationen einander eineindeutig zugeordnet werden.
Daher sind in der Aussagenlogik Relationen und Operationen nicht von vornherein unterscheidbar. Wegen der Verabredungen in Unterabschnitt 2.1.4 muss für die verwendeten Junktoren daher jeweils wohl definiert sein, ob sie als Relation und Operation zu verstehen sind.

15) Die Relationen brauchen keine Äquivalenzrelationen sein, auch wenn die angegebenen Symbole dies nahe legen. Wenn eine der Relationen $\sim$, $\simeq$, $\backsim$ oder $\backsimeq$ definiert ist, sind wegen (2.1), (2.3) und (2.4) auch die anderen drei Relationen definiert sowie wegen (2.2) auch $\nsim$, $\not\simeq$, $\not\backsim$ und $\not\backsimeq$. (Für die letzten beiden habe ich keine schöneren Symbole gefunden.)

	$A,\ A$	$A,\ B$	$B,\ A$	$B,\ B$	
$=$	$A = A$			$B = B$	
$\simeq$	$A \simeq A$	$A \simeq B$		$B \simeq B$	Es gilt (2.3)
$\sim$		$A \sim B$			und (2.4)
$\simeq$	$A \simeq A$	$A \simeq B$		$B \simeq B$	Es gilt (2.3)
$\sim$		$A \sim B$		$B \sim B$	aber nicht (2.4)
$\simeq$	$A \simeq A$	$A \simeq B$			Es gilt (2.4)
$\sim$		$A \sim B$			aber nicht (2.3)

Tabelle 2.1.: Beispiele für $\simeq$ und $\sim$

Wird eine binäre Relation $\sim$ zusammen mit einer binären Operation $\circledast$ oder einer weiteren binären Relation $\approx$ verwendet wird, treffen wir folgende Vereinbarung:[16)]

$A \circledast B \sim C$	steht für	$A \circledast B$	&	$B \sim C$
$A \sim B \circledast C$	steht für	$A \sim B$	&	$B \circledast C$
$A \sim B \approx C$	steht für	$A \sim B$	&	$B \approx C$

Besondere Vereinbarungen für die unäre Operation $\langle\ominus\rangle$ treffen wir nicht.

Es sei noch angemerkt, dass wegen (2.1) die Definition von $\langle\Leftarrow\rangle$ im Unterabschnitt 2.2.1 auf Seite 18 überflüssig ist. Wegen der angegebenen Sprechweise ist sie dennoch angegeben. Für den Fall fehlender Klammern sind die Prioritäten in der Tabelle 2.2 auf der nächsten Seite angegeben. Damit wären dann alle Klammern in diesem Unterabschnitt 2.1.4 überflüssig.

2.1.5. Prioritäten

Die Tabelle 2.2 auf der nächsten Seite listet zur Vermeidung von Klammern die Prioritäten der in diesem Dokument verwendeten Operationen, Relationen, Junktoren und Definitionen in absteigender Folge von höherer zu niedrigerer Priorität, d. h. von starker zu schwacher Bindung auf.[17)] Das Weglassen redundanter Klammern wird in diesem Kapitel 2 nicht weiter thematisiert.[18)] Zur besseren Verständlichkeit werden aber gelegentlich auch redundante Klammern verwendet, insbesondere wenn Prioritäten unklar oder in der Literatur auch anders definiert sind. Die Prioritäten der Junktoren wurden aus [1] Kapitel 1.1 Seite 5 entnommen und ergänzt und die der Metaoperationen daran angeglichen.

Für Operationen derselben Priorität wählen wir in diesem Dokument Rechtsklammerung[19)].

[16)] wird auch in der Literatur verwendet, z. B. z. B. [1], Notationen Seite xxi

[17)] Priorität 1 ist höher und bindet damit stärker als Priorität 2, usw.

[18)] Gesetzt den Fall, dass ASBA die Voraussetzungen und Folgerungen eines mathematischen Satzes richtig und die Beweisschritte, z. B. durch fehlerhafte Interpretation einer Formel, falsch einliest, ansonsten aber richtig arbeitet. Dann kann man folgende Fälle unterscheiden:
– Ein falscher Satz kann dadurch nicht als richtig bewertet werden.
– Ein richtiger Satz wird wahrscheinlich auch bei eigentlich richtigem Beweis als nicht bewiesen gelten, was natürlich unbefriedigend ist.
– In äußerst unwahrscheinlichen Fällen kann dabei auch ein eigentlich falscher Beweis in einen richtigen verwandelt werden, was zwar schön ist, aber leider steht in der Dokumentation dann ein falscher Beweis.
In keinem Fall wird durch diesen Fehler die Menge der richtigen Sätze durch einen falschen Satz „verunreinigt".

[19)] Die Symbole unärer Operationen stehen in diesem Dokument stets links *vor* dem Operanden, so dass es für sie nur Rechtsklammerung geben kann. Zur Rechtsklammerung bei binären Operationen ein Zitat aus [1] Kapitel 1.1 Seite 5: „Diese hat gegenüber Linksklammerung Vorteile bei der Niederschrift von Tautologien in $\rightarrow$, [...]". Die meisten Autoren bevorzugen Linksklammerung, was natürlicher erscheint. Dann sollte man aber für die Potenz doch noch Rechtsklammerung wählen, sonst ist $\langle\!\langle a^{x^y} = (a^x)^y = a^{(x*y)} \rangle\!\rangle$ und nicht wie wahrscheinlich erwünscht $\langle\!\langle a^{(x^y)} \rangle\!\rangle$.

Klammern	( ) ⟨ ⟩ ⟪ ⟫ “ ”
Operationen haben unterschiedliche Priorität.	
Unäre Operationen [1)] [2)]	$\ominus$ $\neg$ $\sim$
Binäre Operationen für Mengen	$\times$ $\cup$ $\cap$
Binäre Operationen [1)]	$\circledast$
Binäre Junktoren [2)]	$\wedge$ $\uparrow$ $\vee$ $+$ $\downarrow$ $\leftarrow$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$
Binäre Relationen haben gleiche Priorität.	
Binäre Relationen für Mengen [3)]	$\subset$ $\subseteq$ $\in$ $\notin$ $\supset$ $\supseteq$ $\ni$ $\not\ni$
Binäre Relationen [1)]	$\sim$ $\nsim$ $\simeq$ $\not\simeq$ $\backsim$ $\backsimeq$
Gleichheitsrelation [4)]	$=$ $\neq$ $\equiv$ $\not\equiv$
Ableitungsrelation [5)]	$\vdash$
Substitution [5)]	$\longmapsfrom$
Sonstige binäre Verknüpfungen haben unterschiedliche Priorität.	
Definition [6)]	$:=$
Binäre Metaoperationen [7)] [8)]	& $\|\|$ $\|$ $\Leftarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Rightarrow$
Metadefinition [6)]	$:\Leftrightarrow$
Natürliche Sprache	
Innerhalb natürlicher Sprache deren Strukturelemente, z. B. Satzzeichen [9)]	. , ; usw.

[1] siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 15
[2] siehe Tabelle 2.3 auf Seite 26
[3] siehe Unterabschnitt 2.1.1 auf Seite 12
[4] siehe Paragraph 2.2.2.2 auf Seite 19
[5] siehe Unterabschnitt 3.1.1 auf Seite 31
[6] siehe Paragraph 2.2.2.3 auf Seite 20
[7] siehe Unterabschnitt 2.2.1 auf der nächsten Seite
[8] ⟨|⟩ wird nur bei den Schlussregeln (siehe Unterabschnitt 2.3.3 auf Seite 22) verwendet. Zwar bezeichnen ⟨&⟩ und ⟨|⟩ dieselbe Operation, aber je nach verwendetem Symbol hat sie eine unterschiedliche Priorität.
[9] Innerhalb von Formeln können Satzzeichen eine andere Bedeutung und Priorität haben.

Tabelle 2.2.: Prioritäten in abnehmender Reihenfolge

2.2. Metasprache

Wenn man über eine Sprache spricht, braucht man eine zweite Sprache, die **Metasprache**, in der Aussagen über erstere getroffen werden können.[20] Wenn die zuerst genannte Sprache die der Mathematik ist, wählt man üblicherweise die natürliche Sprache als Metasprache. Leider ist diese oft ungenau, nicht immer eindeutig und abhängig vom Zusammenhang, in dem sie gesprochen wird.[21] Um diese Probleme in den Griff zu bekommen, kann die Metasprache teilweise formalisiert werden. Durch diese Formalisierung erinnert sie dann schon an mathematische Formeln. Die Sprachebenen sollten aber sorgfältig unterschieden werden.

2.2.1. Aussagen und Metaoperationen

Beispiele für **Aussagen** in Metasprache sind (a) „Morgen scheint die Sonne.“, (b) „Ich bin 1,83 m groß.“, (c) „Ich habe ein rotes Auto und das kann 200 km/h schnell fahren.“, usw. Wie Beispiel (c) zeigt, kann eine Aussage auch aus anderen Aussagen zusammengesetzt sein. In diesem Fall bezeichnen wir sie als **zerlegbar**, ansonsten als **unzerlegbar** oder auch **atomar**. – Wir betrachten auch Relationen einschließlich ihrer Operanden als Aussagen.[22]

Während die Beispiele (a) und (b) unzerlegbare (atomare) Aussagen sind, ist Beispiel (c) zerlegbar. Für alle drei Aussagen lässt sich feststellen, ob sie richtig sind oder nicht; für (a) allerdings nur im Nachhinein und für den zweiten Teil von (c) nur weil klar ist, worauf sich „das“ bezieht. Natürlich muss auch der Zusammenhang, in dem eine Aussage formuliert wird, bekannt sein. Z. B. ist die Bedeutung von „Ich“ nur dann bekannt, wenn man weiss, von wem die Aussage ist. Auf eine exakte Definition von Aussage wird verzichtet, weil das intuitive Verständnis hier ausreicht.

Zerlegbare Aussagen wie (c) können zum Teil formalisiert werden. Dies wird mit den folgenden Definitionen erreicht:[23]

$\sim A$	$:\Leftrightarrow$	A **gilt nicht**.
$A \Rightarrow B$	$:\Leftrightarrow$	**Wenn** A gilt **dann** gilt auch B.
$A \Leftarrow B$	$:\Leftrightarrow$	A gilt **sofern** B gilt.
$A \Leftrightarrow B$	$:\Leftrightarrow$	A gilt **genau dann wenn** B gilt.
$A \,\&\, B$	$:\Leftrightarrow$	A **und** B.
$A \,\|\|\, B$	$:\Leftrightarrow$	A **oder** B.

Offensichtlich sind das alles ebenfalls Aussagen, jetzt aber teilweise formalisiert. (c) lässt sich dann ausdrücken als „‚Ich habe ein rotes Auto‘ & ‚das kann 200 km/h schnell fahren.‘“. „$A \Leftarrow B$“ ist nur eine andere Schreibweise für „$B \Rightarrow A$“. – Ein Symbol für „nicht“ wird hier nicht gebraucht.

Wir nennen & und || **Metaoperationen** und $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ und $\Leftrightarrow$ **Metarelationen**[24]. Die damit gebildeten Aussagen können natürlich auch geklammert werden, um die Reihenfolge der Auswertung eindeutig

[20] Die beiden Sprachen können auch übereinstimmen, z. B. wenn man über die natürliche Sprache spricht.

[21] Man betrachte die beiden Aussagen „Studenten und Rentner zahlen die Hälfte.“ und „Studenten oder Rentner zahlen die Hälfte.“, die beide das gleiche meinen. – Entnommen aus [1] Abschnitt 1.2 Bemerkung 1.
Ein weiteres Problem ist, dass man unauflösbare Widersprüche formulieren kann, z. B. „Der Barbier ist der Mann im Ort, der genau die Männer im Ort rasiert, die sich nicht selbst rasieren.“. Und der Barbier? Wenn er sich selbst rasiert, dann rasiert er sich nicht selbst, und wenn er sich nicht selbst rasiert, dann rasiert er sich selbst. Was denn nun? – Quelle unbekannt) – Das Problem ist verwandt mit dem Problem der „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“.

[22] Wird statt des Symbols der Name der zugehörigen Relation verwendet, ist dies unmittelbar einleuchtend. So wird z. B. aus der Formel $\langle\!\langle A < B \rangle\!\rangle$ die Aussage „A ist kleiner als B“.

[23] Das metasprachliche Symbol $\langle \sim \rangle$ unterscheidet sich von dem Beispielsymbol $\langle \sim \rangle$ dadurch, das es fett gedruckt ist. Damit es nicht zu Verwechslungen führt verwenden wir für die metasprachliche Negation nicht das logische Symbol $\langle \neg \rangle$.

[24] Man könnte Metaoperationen und Metarelationen auch als **Metajunktoren** bezeichnen. Zur Unterscheidung von Operationen und Relationen vergleiche aber auch die Fußnote 14 auf Seite 15.

zu machen. Für den Fall fehlender Klammern sind ihre Prioritäten in der Tabelle 2.2 auf Seite 17 angegeben.

Um Verwechslungen mit den Junktoren zu vermeiden, verwenden wir für die metasprachlichen Operationen „und“ und „oder“ die Symbole $\langle\&\rangle$ und $\langle||\rangle$. A und B können als Operanden von $\langle\Leftrightarrow\rangle$, $\langle\&\rangle$ und $\langle||\rangle$ vertauscht werden, ohne das Ergebnis zu ändern.[25] Wird in einer (Teil-)Aussage nur eine der Operationen & oder || verwendet, können die Klammern dort weggelassen und die Operationen in beliebiger Reihenfolge ausgewertet werden, wiederum ohne das Ergebnis zu ändern.[26] Zusammengefasst ist die Reihenfolge der Operationen und der Auswertung dort beliebig.

2.2.2. Mit Gleichheit verwandte Relationen

2.2.2.1. Vergleichbar

Zwei Objekte A und B sind **vergleichbar**, wenn beide von derselben Art sind, d. h. wenn z. B. jeweils beide Mengen, Zeichenfolgen, Zahlen, usw. sind. Dabei muss bei Formeln zwischen der Formel an sich und dem Ergebnis der Formel unterschieden werden. Siehe Beispiel (a).

Intuitiv scheint klar zu sein, was damit gemeint ist. Wenn aber entschieden werden muss, ob z. B. (a) „1+1“ gleich „2“ oder (b) „1+1“ gleich „1 + 1“ ist, muss man erst entscheiden, von welcher Art die beiden zu vergleichenden Ausdrücke sind, d. h. *wie* verglichen wird. Wenn sie als jeweiliges Ergebnis der beiden Formeln, d. h. als Objekt, verglichen werden, dann ist (a) richtig. Wenn sie als Formeln, d. h. als Zeichenfolgen, verglichen werden, ist (a) falsch. Wenn die Ausdrücke in (b) als Zeichenfolgen verglichen werden, dann ist (b) richtig. Wenn sie als Zeichenketten verglichen werden, ist (b) falsch.

Die folgende Tabelle fasst dass zusammen:

A	B	Art	A gleich B
$1+1$	2	Objekt	richtig
$\langle\langle 1+1\rangle\rangle$	$\langle\langle 2\rangle\rangle$	Formel	falsch
$\langle\langle 1+1\rangle\rangle$	$\langle\langle 1\ +\ 1\rangle\rangle$	Zeichenfolge	richtig
“`1+1`”	“`1 + 1`”	Zeichenkette	falsch

2.2.2.2. Vergleiche

A und B seien Objekte. Dann definieren wir:

$=$ **Gleichheit** $\langle\langle A = B\rangle\rangle$ heißt, dass A und B in den interessierenden Eigenschaften für $=$ übereinstimmen.[27] Sprechweisen: „A ist *dasselbe* wie B“ oder „A ist *identisch* zu B“ – Inwieweit die Begriffe *Gleichheit* und *Identität* korrelieren, wird hier nicht erörtert.[28]

$\neq$ **Ungleichheit** $\langle\langle A \neq B\rangle\rangle$ heißt, dass A und B in mindestens einer interessierenden Eigenschaft für $=$ nicht übereinstimmen. Sprechweisen: „A ist *nicht dasselbe* wie B“ (aber vielleicht das gleiche; siehe $\equiv$) oder „A ist *nicht identisch* zu B“.

[25] D. h. die Operationen $\langle\Leftrightarrow\rangle$, $\langle\&\rangle$ und $\langle||\rangle$ sind *kommutativ*.

[26] D. h. die Operationen & und || sind auch *assoziativ*. Bei den den logischen Operationen $\wedge$ und $\vee$ müssen Kommutativität und Assoziativität durch Axiome gefordert werden. Die Kommutativität von $\Leftrightarrow$ kann abgeleitet werden.

[27] Z. B. sind zwei Junktoren üblicherweise dann gleich, wenn sie stets denselben *Wahrheitswert* liefern. Ihre Bezeichnungen oder Symbole können dabei durchaus verschieden sein, interessieren bei der Feststellung der Gleichheit aber nicht. Z. B. bezeichnen $\langle\&\rangle$ und $\langle|\rangle$ (siehe Abschnitt 4.3 auf Seite 40) dieselbe Operation, haben aber verschiedene Priorität. – siehe Tabelle 2.2 auf Seite 17

[28] siehe [30]

$\equiv$ **Äquivalenz** $\langle\!\langle A \equiv B \rangle\!\rangle$ heißt, dass A und B in den interessierenden Eigenschaften für $\equiv$ übereinstimmen. Sprechweisen: „A ist *das gleiche* wie B“ (aber nicht unbedingt dasselbe; siehe $=$) oder „A ist *so wie* B“. – Es kann auch verschiedene Äquivalenzen geben, für die dann verschiedene Bezeichnungen verwendet werden.

$\not\equiv$ **Kontravalenz** $\langle\!\langle A \not\equiv B \rangle\!\rangle$ heißt, dass A und B in mindestens einer interessierenden Eigenschaft für $\not\equiv$ nicht übereinstimmen. Sprechweisen: „A ist *nicht das gleiche* wie B“ oder „A ist *nicht so wie* B“.

$=$, $\neq$, $\equiv$ und $\not\equiv$ bezeichnen wir als **Gleichheitsrelationen**. Gleichheit und Äquivalenz sind **Äquivalenzrelationen**, d. h. sie sind *reflexiv* $(a \sim a)$, *transitiv* $(((a \sim b)\ \&\ (b \sim c)) \Rightarrow (a \sim c))$ und *symmetrisch* $((a \sim b) \Rightarrow (b \sim a))$ – jeweils für alle zulässigen Objekte a, b und c.

Jede interessierende Eigenschaft für $\equiv$ oder eine andere Äquivalenz muss auch eine für $=$ sein. Daraus folgt insbesondere, dass mit $(A = B)$ auch $(A \equiv B)$ und mit $(A \not\equiv B)$ auch $(A \neq B)$ gilt.

2.2.2.3. Definitionen

Seien A und B Aussagen bzw. Objekte[29].

$:\Leftrightarrow$ **Metadefinition** „$A :\Leftrightarrow B$“ heißt, dass die Aussage A *definitionsgemäß gleich* der Aussage B ist. Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B. „A *steht für* B“; A und B können sich gegenseitig ersetzten.

$:=$ **Definition** „$A := B$“ heißt, dass das Objekt A *definitionsgemäß gleich* dem Objekt B ist. Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B. „A *steht für* B“; A und B können sich gegenseitig ersetzten.[30]

Man beachte, dass $:\Leftrightarrow$ und $:=$ verschiedene Sprachebenen sind.

2.3. Beweise in ASBA

Die Regeln zur Formulierung und Prüfung der Beweise müssen in ASBA fest codiert werden. Sie sind quasi die Axiome von ASBA und sollten daher möglichst wenig voraussetzen. In ASBA wird dazu ein *Genzen-Kalkül*[31] verwendet. Die Definition von *Schlussregel* und *Beweis* ist in diesem Dokument ASBA-spezifisch, um später eine leichtere Umsetzung in ein Programm zu erreichen. Insbesondere müssen alle abzuspeichernden Mengen endlich sein. Dies berücksichtigen wir in den Beispielen, fordern zunächst aber nicht notwendig Beschränktheit. Zuerst brauchen wir aber noch ein paar Definitionen.

2.3.1. Definitionen und Verabredungen

Zu $\langle$len$\rangle$ und $\langle$Set$\rangle$ Vergleiche die Definition von *n-Tupel* im Unterabschnitt 2.1.3 auf Seite 14.

[29] Die Anforderungen an A und B sind intuitiv klar. Insbesondere darf B nicht von dem bisher undefinierten Teil von A abhängig sein.

[30] Nach den Definitionen von $:\Leftrightarrow$ und $:=$ sind zwei Ausdrücke P und Q schon dann gleich, wenn nach der Ersetzung aller Vorkommen von A durch B sowohl in P als auch in Q die resultierenden Ausdrücke $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ gleich sind.

[31] siehe [1] Kapitel 1.4 und [36, 37]

$\vert M\vert$	$:=$	Kardinalität von M	, die **Anzahl der Elemente** von M
M^n	$:=$	$M \times \cdots \times M$, für $n \in \mathbb{N}_0$	, das **kartesische Produkt** aus n Mengen M
M^0	$=$	$\{()\}$	, wobei $()$ das **0-Tupel** ist
$\mathcal{T}(M)$	$:=$	$\{\vec{a} \mid \vec{a} \in M^n \wedge n \in \mathbb{N}_0\}$	, die Menge der **Tupel über** M
$(A,B)^<$	$:=$	A	, die **linke Seite** eines geordneten Paares.
$(A,B)^>$	$:=$	B	, die **rechte Seite** eines geordneten Paares.
$\mathcal{P}(M)$	$:=$	$\{A \mid A \subseteq M\}$	, die **Potenzmenge** der Menge M
$\mathcal{P}_e(M)$	$:=$	$\{A \mid A \subseteq M \wedge \vert A\vert \in \mathbb{N}_0\}$	, die **endlichen Teilmengen** von M
$\mathcal{R}(M)$	$:=$	$\{R \mid R \subseteq M \times M\}$	, die Menge der **binären Relationen** in M
$\mathcal{R}_e(M)$	$:=$	$\{R \mid R \subseteq M \times M \wedge \vert R\vert \in \mathbb{N}_0\}$	, die **endlichen binären Relationen** in M
$\vdash_R$	$:=$	R	, für Relationen $R \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$

Offensichtlich gilt für Mengen M und N:

$$\mathcal{P}_e(M) \subseteq \mathcal{P}(M) \quad , \quad \mathcal{R}_e(M) \subseteq \mathcal{R}(M) \tag{2.5}$$

$$\mathcal{R}(M) = \mathcal{P}(M \times M) = \mathcal{P}(M^2) \quad , \quad \mathcal{R}_e(M) = \mathcal{P}_e(M \times M) = \mathcal{P}_e(M^2) \tag{2.6}$$

$$\mathcal{P}(M) \subset \mathcal{P}(N) \Leftrightarrow \mathcal{P}_e(M) \subset \mathcal{P}_e(N) \Leftrightarrow M \subset N$$

$$\mathcal{R}(M) \subset \mathcal{R}(N) \Leftrightarrow \mathcal{R}_e(M) \subset \mathcal{R}_e(N) \Leftrightarrow M \subset N$$

$$\vec{a} \in \mathcal{T}(M^2) \Leftrightarrow \mathrm{Set}(\vec{a}) \in \mathcal{R}_e(M) \tag{2.7}$$

2.3.2. Formeln und Ableitungen

Im Folgenden sei $\mathcal{L}$ stets eine gegebene Menge von Formeln, z. B. alle korrekten Formeln der Aussagenlogik oder der Prädikatenlogik. Für die folgenden Betrachtungen ist aber nur nötig, dass die Elemente von $\mathcal{L}$ Zeichenfolgen sind. Die Teilmengen von $\mathcal{L}$ nennen wir **Formelmengen**. Es sind genau die Elemente von $\mathcal{P}(\mathcal{L})$.

Bei einem Beweis werden aus einer Formelmenge Γ von Axiomen und schon bewiesenen Formeln mittels zulässiger [32] Ableitungen die Formeln einer Formelmenge Δ abgeleitet; Schreibweise: $\langle\!\langle \Gamma \vdash \Delta \rangle\!\rangle$.

Für Teilmengen Γ und Δ von $\mathcal{L}$ sei also:

- $\Gamma \vdash \Delta :\Leftrightarrow \Gamma$ **ableitbar** Δ; oder auch Γ **beweisbar** Δ.
- $\Gamma \vdash \Delta$ nennen wir auch eine **Ableitung in** $\mathcal{L}$. Damit ist (Γ, Δ) ein Element einer binären Relation $\vdash$ in $\mathcal{P}(\mathcal{L})$, einer sogenannten **Ableitungsrelation**.
- Wenn wir von einer Ableitung **a** sprechen, meinen wir immer ein Element einer Ableitungsrelation, d. h. ein geordnetes Paar, z. B. $(\Gamma, \Delta) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$, dargestellt als $\Gamma \vdash \Delta$.
- Um möglicherweise verschiedene Ableitungsrelationen unterscheiden zu können, indizieren wir $\langle \vdash \rangle$ ggf. mit der zugrundeliegenden Relation R, d. h. wir schreiben $\langle \vdash_R \rangle$ und sprechen dann von R-**ableitbar**, R-**beweisbar** und R-**Ableitung**.

Zur Vereinfachung der Darstellung und besseren Lesbarkeit treffen wir noch folgende Vereinbarungen für die beiden Seiten von $\langle\!\langle \Gamma \vdash \Delta \rangle\!\rangle$ (natürlich nur, wenn dies nicht zu Verwechslungen führt):

- Eine Aufzählung von Formelmengen und einzelnen Formeln steht für die Vereinigung der Formelmengen mit der Menge der einzeln angegebenen Formeln. Z. B. steht $\langle\!\langle \Gamma, \alpha \vdash \beta \rangle\!\rangle$ für $\langle\!\langle (\Gamma \cup \{\alpha\}) \vdash \{\beta\} \rangle\!\rangle$.

[32] Was *zulässig* heißt, muss im entsprechenden Kontext jeweils definiert sein. Üblicherweise sind das bestimmte Ableitungsregeln und Substitutionen.

- Diese Aufzählungen können auch leer sein und stehen dann für die leere Menge. Z. B. steht $\langle\!\langle \vdash \alpha \to (\beta \to \alpha) \rangle\!\rangle$ für $\langle\!\langle \varnothing \vdash \{\alpha \to (\beta \to \alpha)\} \rangle\!\rangle$.
- Ist die Aufzählung links vom Relationssymbol $\langle \vdash \rangle$ leer, kann auch das Relationssymbol wegfallen. Im letzten Beispiel also einfach $\langle\!\langle \{\alpha \to (\beta \to \alpha)\} \rangle\!\rangle$. Das entspricht dann einem **Axiom**.

Im Folgenden halten wir uns bei der Verwendung von Buchstaben so weit wie möglich an folgende Vereinbarungen:

griechisch, klein:	$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	Formel	$\in \mathcal{L}$
griechisch, groß:	$\Gamma, \Delta, \Theta, \ldots$	Formelmenge	$\in \mathcal{P}(\mathcal{L})$
lateinisch, fett, klein:	$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$	Ableitung	$\in \mathcal{P}(\mathcal{L})^2$
lateinisch, fett, groß:	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	Ableitungsrelation	$\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2) = \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$

[33] Damit definieren wir folgende Aussagen:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Ableitungen aus } \mathbf{A} \text{ lassen sich die aus } \mathbf{B} \text{ ableiten.} \tag{2.8}$$

$$\frac{\vec{\mathbf{a}}}{\vec{\mathbf{b}}} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Komponenten von } \vec{\mathbf{a}} \text{ lassen sich die von } \vec{\mathbf{b}} \text{ ableiten.} \tag{2.9}$$

$$\frac{\mathbf{a}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_n}{\mathbf{b}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_m} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Ableitungen } \mathbf{a}_i \text{ lassen sich die } \mathbf{b}_j \text{ ableiten.} \tag{2.10}$$

wobei in der letzten Definition $1 \leqslant i \leqslant n$ und $1 \leqslant j \leqslant m$ sei und die $\mathbf{a}_i$ und die $\mathbf{b}_j$ dabei jeweils beliebig permutiert werden können. $\langle | \rangle$ und Bruchstrich stehen für die Metaoperationen $\langle \& \rangle$ und $\langle \Rightarrow \rangle$.[34] Wir nennen alle drei Formen **Schlussregeln**[35]. Die Elemente von A bzw. die Komponenten a_i nennen wir die **Voraussetzungen** und die Elemente von B bzw. die Komponenten b_j die **Folgerungen** der Schlussregel. Offensichtlich gilt:

$$\frac{a_1 \mid \cdots \mid a_n}{b_1 \mid \cdots \mid b_m} \Leftrightarrow \frac{\vec{a}}{\vec{b}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{Set}(\vec{a})}{\mathrm{Set}(\vec{b})} \tag{2.11}$$

Wir nennen eine Schlussregel auch einen **formalen Satz** und nennen sie **beschränkt**, wenn sie nur endlich viele Voraussetzungen und Folgerungen hat. Die Schlussregeln nach (2.9) und (2.10) sind per se beschränkt. Die nach (2.8) genau dann, wenn **A** und **B** endliche Mengen sind, d. h. wenn sie Elemente von

Die Mengen der Voraussetzungen und Folgerungen dürfen auch leer sein. Dies führt zu den folgenden Spezialfällen:

Eine Schlussregel $\frac{A}{\varnothing}$ ohne Folgerungen ist immer gültig.

Ein Menge B von Ableitungen, die als Axiome dienen sollen, kann als Schlussregel $\frac{\varnothing}{B}$ ohne Voraussetzungen repräsentiert werden.

2.3.3. Schlussregeln

Nach diesen Vorbereitungen fassen wir noch mal zusammen:
Ein geordnetes Paar $(\mathbf{V}, \mathbf{F}) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)^2 = \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))^2$ heißt eine **Schlussregel für** $\mathcal{L}$, geschrieben $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{F}}$;

[33] Die letzte Gleichung ergibt sich aus (2.6) auf Seite 21.
[34] Der Bruchstrich hat die übliche Priorität, | die schwächste. Man beachte, dass Zähler und Nenner auch leer sein können, d. h. n und m gleich 0 sein dürfen. In der Praxis liegen sie bei kleinen Werten, typischerweise 0, 1 oder 2.
[35] Genau genommen nur um die Darstellung einer Schlussregel. Die Exakte Definition erfolgt im Unterabschnitt 2.3.3.

und es gilt:

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{V} \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})) & \text{, die } \textbf{Voraussetzungen} & & \text{, eine Menge von } \textbf{V-Ableitungen}. \\
\mathbf{F} \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})) & \text{, die } \textbf{Folgerungen} & & \text{, eine Menge von } \textbf{F-Ableitungen}. \\
\mathbf{a} \in \mathbf{V} \quad \Rightarrow & \mathbf{a} = (\Gamma, \Delta) \ \& \ \Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{L}) & & \text{, Schreibweise: } \Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \Delta \\
\mathbf{a} \in \mathbf{F} \quad \Rightarrow & \mathbf{a} = (\Gamma, \Delta) \ \& \ \Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{L}) & & \text{, Schreibweise: } \Gamma \vdash_{\mathbf{F}} \Delta
\end{array}$$

mit Γ und Δ jeweils passend.

Die Schlussregel entspricht der Aussage:

Mit den Voraussetzungen aus **V** *lassen sich alle Folgerungen aus* **F** *ableiten*[36].

Die Schlussregel heißt **allgemeingültig**, wenn aus den Voraussetzungen alle Folgerungen abgleitet werden können. In diesem Fall kann sie zur zulässigen Transformation von weiteren Formeln dienen.

Die Mengen der Voraussetzungen und Folgerungen sowie die beiden Seiten einer Ableitung dürfen auch leer sein. Dies führt zu den folgenden semantischen Spezialfällen:

- Eine Ableitung $(A, \emptyset)$ ist trivial allgemeingültig. Daher können solche Voraussetzungen und Folgerungen ohne Probleme weggelassen werden.
- Ein Menge B von Formeln, die Axiome sein sollen, kann durch eine Voraussetzung $(\emptyset, B)$ repräsentiert werden.
- Ein Menge B von Formeln, die als allgemeingültig zu beweisen sind, kann durch eine Folgerung $(\emptyset, B)$ repräsentiert werden.

Wenn eine Schlussregel $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{F}}$ beschränkt ist, sind $\mathbf{V}$ und $\mathbf{F}$ endliche Mengen und es gibt wegen (2.7) auf Seite 21 zwei Tupel $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{f}} \in \mathcal{T}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)$, so dass gilt: [37]

$$\begin{array}{lllllllll}
\mathbf{V} & = & \mathsf{Set}(\vec{\mathbf{v}}) & , \mathbf{F} & = & \mathsf{Set}(\vec{\mathbf{f}}) & & \\
N & \geqslant & |\mathbf{V}| & , M & \geqslant & |\mathbf{F}| & , \text{mit } N, M \in \mathbb{N}_0 \\
\vec{\mathbf{v}} & = & \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N\} & , \vec{\mathbf{f}} & = & \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_M\} & \\
\mathbf{v}_n & = & (\mathbf{v}_n^<, \mathbf{v}_n^>) & , \mathbf{f}_m & = & (\mathbf{f}_m^<, \mathbf{f}_m^>) & , \text{für } 1 \leqslant n \leqslant N, 1 \leqslant m \leqslant M \\
\mathbf{v}_n^< & \vdash_{\mathbf{V}} & \mathbf{v}_n^> & , \mathbf{f}_m^< & \vdash_{\mathbf{F}} & \mathbf{f}_m^> & , \text{für } 1 \leqslant n \leqslant N, 1 \leqslant m \leqslant M
\end{array} \tag{2.12}$$

also

$$\begin{array}{lll}
\vec{\mathbf{v}} & = & \{(\mathbf{v}_n^<, \mathbf{v}_n^>) \mid 1 \leqslant n \leqslant N\} \\
\vec{\mathbf{f}} & = & \{(\mathbf{f}_m^<, \mathbf{f}_m^>) \mid 1 \leqslant m \leqslant M\}
\end{array}$$

und wir nennen auch das Paar $(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{f}})$ Schlussregel. Diese ist per se beschränkt und ein Element von $\mathcal{T}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)^2$. Nun haben wir alternative Schreibweisen für beschränkte Schlussregeln:[38]

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{F}} \Leftrightarrow \frac{\mathsf{Set}(\vec{\mathbf{v}})}{\mathsf{Set}(\vec{\mathbf{f}})} \Leftrightarrow \frac{\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{f}}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{v}_1^< \vdash_{\mathbf{V}} \mathbf{v}_1^> \mid \cdots \mid \mathbf{v}_N^< \vdash_{\mathbf{V}} \mathbf{v}_N^>}{\mathbf{f}_1^< \vdash_{\mathbf{F}} \mathbf{f}_1^> \mid \cdots \mid \mathbf{f}_M^< \vdash_{\mathbf{F}} \mathbf{f}_M^>} \text{, } \textbf{Schlussregel} \text{ oder } \textbf{formaler Satz} \tag{FS}$$

[36] mittels noch zu definierender *zulässiger Transformationen*

[37] Statt $\geqslant$ könnte in (2.12) auch $=$ genommen werden. Dann müssten die $\mathbf{v}_n$ und die $\mathbf{f}_m$ jeweils paarweise verschieden sein, was wir nicht voraussetzen wollen.

[38] Nach (2.8), (2.9) und (2.10) auf Seite 22 sind die „Brüche" Aussagen, und keine Paare mehr. Die Äquivalenz der Aussagen steht schon in (2.11) auf Seite 22

2.3.4. Beweise

Für einen **Beweis** in ASBA ist stets gegeben:[39)]

$$\begin{array}{lll} \mathcal{L} & & \text{, eine Menge von Formeln, die zugrundeliegende } \textbf{Sprache}. \\ \mathcal{E} & \subseteq \{E \mid E : \mathcal{L} \to \mathcal{L}\} & \text{, eine Menge von Funktionen, die } \textbf{Substitutionen}. \\ \mathcal{C} & \in \mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))) & \text{, eine Menge von } \textbf{Schlussregeln}. \\ \mathcal{O} & \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})) & \text{, eine Menge von Ableitungen, die } \textbf{Ergebnisse}. \end{array}$$

Die *Substitutionen* sorgen z. B. dafür, dass aus einer allgemeingültigen Formel wie $\langle\!\langle \alpha \to (\beta \to \alpha) \rangle\!\rangle$ z. B. die allgemeingültige Formel $\langle\!\langle \gamma \to (\delta \to \gamma) \rangle\!\rangle$ abgeleitet werden kann. Die *Schlussregeln* geben erlaubte Schlussfolgerungen aus gegebenen Elementen an und umfassen auch die Voraussetzungen eines Satzes. Die *Ergebnisse* schließlich sind das, was mittels eines Beweises aus den gegebenen Voraussetzungen $\mathcal{L}$, $\mathcal{E}$ und $\mathcal{C}$ gefolgert werden soll.

Im Fall von beschränkten Schlussregeln können statt $\mathcal{C}$ und $\mathcal{O}$ auch

$$\begin{array}{lll} \vec{\mathcal{C}} & \in \mathcal{T}(\mathcal{T}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)^2) & \text{, ein Tupel von } \textbf{Schlussregeln}. \\ \vec{\mathcal{O}} & \in \mathcal{T}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2) & \text{, ein Tupel von } \textbf{Ableitungen} \text{, die } \textbf{Ergebnisse}. \end{array}$$

gegeben sein. Mit

$$\mathcal{C} := \{(\mathrm{Set}(\vec{\mathbf{v}}), \mathrm{Set}(\vec{\mathbf{f}})) \mid (\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{f}}) \in \mathrm{Set}(\vec{\mathcal{C}})\}$$
$$\mathcal{O} := \mathrm{Set}(\vec{\mathcal{O}})$$

ergibt sich wegen (2.5) und (2.7) auf Seite 21 wieder die erste Form.

2.3.5. Beispiel für einen Beweis

****** **Hier weitermachen** ******************

Zur Veranschaulichung ein Beispiel:[40)]

$$\begin{array}{lll} E_{\alpha,\beta}(\delta) & := & \text{das } \delta\text{, bei dem alle Vorkommen von } \alpha \text{ durch } \beta \text{ ersetzt wurden} \\ \mathcal{L} & := & \text{die Menge aller Formeln der aussagenlogischen Sprache} \\ \mathbf{v}_1 & := & (A, \{\alpha\}) \\ \mathbf{v}_2 & := & (B, \{\alpha \to \beta\}) \\ \mathbf{v}_3 & := & (A \cup B, \{\beta\}) \\ \mathcal{E} & := & \{E_{\alpha,\delta}, E_{\beta,B}, E_{\beta,B\to\delta}, E_{\gamma,\delta}\} \\ \mathcal{C} & := & \ldots \\ \quad \chi_1 & := & \alpha \to (\beta \to \alpha) \\ \quad \chi_2 & := & (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \\ \mathcal{X} & := & \{\chi_1, \chi_2\} \\ \vdash_{\mathbf{F}} & := & \ldots \end{array}$$

39) ASBA selbst kann nur endliche Mengen abspeichern. Für ASBAmuss daher einschränkend $\mathcal{C} \in \mathcal{R}_e(\mathcal{R}_e(\mathcal{P}_e(\mathcal{L})))$ und $\mathcal{O} \in \mathcal{R}_e(\mathcal{P}_e(\mathcal{L}))$ sein.

40) siehe [29]

2.3.6. Beweisschritte

Ein Beweis[41)] in ASBA besteht aus

einer Schlussregel	$\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{F}}$		
einer Folge	$\mathcal{S} = (B_1, B_2, ..., B_K)$	von *Beweisschritten* B_k	, die **Beweisschrittfolge**
einer Folge	$\mathcal{T} = (T_1, T_2, ..., T_K)$	von *Transformationen* T_k	, die **Transformationsfolge**

Dabei ist K ein Element von $\mathbb{N}_0$, $0 \leqslant k \leqslant K$, die **Beweisschritte** B_k sind Schlussregeln und die Transformationen T_k werden später definiert. Wir definieren noch:

$$\mathcal{B}_k := \{B_1, B_2, ..., B_k\} \quad , \text{für } 0 \leqslant k \leqslant K$$
$$\mathcal{B} := \mathcal{B}_K$$

und nennen $\mathcal{B}$ die **Beweisschrittmenge** der Beweisschrittfolge $\mathcal{S}$. Dann ist $\mathcal{B}_0 = \varnothing$ und $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{B}$ für $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant K$. – Wir nennen die Beweisschrittfolge auch eine **Ableitung** von **F** aus **V**.

Jeder Beweisschritt B_k für $1 \leqslant k \leqslant K$ muss entweder eine Voraussetzung aus **V** oder durch Anwendung einer allgemeingültigen Schlussregel auf eine Teilmenge von $\mathcal{B}_{k-1}$ eine wahre Formel oder eine weitere allgemeingültige Schlussregel sein. Schließlich muss noch

$$\mathbf{F} \subseteq \mathcal{B}$$

sein, da jede Folgerung aus **F** in der Folge $\mathcal{S}$ vorkommen und somit Element der Menge $\mathcal{B}$ sein muss.

==

Bevor die Schlussregel weiter behandelt werden, werden noch Elemente der *Aussagenlogik* und der *Prädikatenlogik* behandelt. Wir stützen uns dabei weitgehend auf [1], ohne das jedes Mal anzugeben.

2.4. Aussagenlogik

2.4.1. Konstante und Operationen

Die Tabelle 2.3 auf der nächsten Seite[42)] definiert für die zweiwertige Logik Konstante und Junktoren über die Wahrheitswerte ihrer Anwendung. So ergeben sich, abhängig von den Wahrheitswerten der Operanden A und B,[43)] die in der Tabelle angegebenen Wahrheitswerte für die Operationen. Die mit 0, 1 und 2 benannten Spalten werden jeweils nur für die 0-, 1- und 2-stelligen Junktoren, d. h. für die Konstanten, die unären und die binären Junktoren ausgefüllt. Dabei werden die Konstanten als 0-stellige Junktoren angesehen. Hat der Inhalt einer Zelle keine Relevanz, steht dort ein Minuszeichen, ist kein Wert bekannt, so bleibt sie leer.

Für einige Junktorsymbole[44)], Namen und Sprechweisen sind auch Alternativen angegeben. Die durchgestrichenen (d. h. negierten) Symbole sind ungebräuchlich und nur aus formalen Gründen aufgeführt. Wenn für eine bestimmte Kombination von Wahrheitswerten mehr als eine Zeile angegeben ist, so können die zugehörigen Junktoren zwar formal verschieden sein, liefern in der zweiwertigen Aussagenlogik jedoch dieselben Ergebnisse.

Die zur Einsparung von Klammern definierten Prioritäten sind in der Tabelle 2.2 auf Seite 17 angegeben.[45)]

41) siehe [1] Kapitel 1.6 und 3.6
42) Die Tabelle basiert auf den Wahrheitstafeln in [31] Kapitel 2.2 und [1] Kapitel 1.1 Seite 3.
43) A und B können hier beliebige Aussagen sein – auch Formeln –, die jeweils genau einen Wahrheitswert repräsentieren.
44) Symbole, die für Junktoren verwendet werden.
45) Zur Erinnerung: Es gilt Rechtsklammerung. siehe Unterabschnitt 2.1.5 auf Seite 16

A	-	W	F	W	W	F	F	-	Aussage A	-
B	-	-	-	W	F	W	F	-	Aussage B	-
Junktor[1]	**0**[2]	**1**		**2**				**Name**[3]	**Sprechweise**	**Prio**[4]
$\top$	W	-	-	-	-	-	-	Verum	***wahr***	-
$\bot$	F	-	-	-	-	-	-	Falsum	***falsch***	-
	-	W	W	-	-	-	-			-
	-	W	F	-	-	-	-	Klammerung	A **ist geklammert**	-[5]
$\neg$	-	F	W	-	-	-	-	Negation	**Nicht** A	1[6]
	-	F	F	-	-	-	-			-
	-	-	-	W	W	W	W	Tautologie		-
$\vee$	-	-	-	W	W	W	F	Disjunktion; Adjunktion; Alternative	A **oder** B	3
$\leftarrow\ \Leftarrow\ \subset$	-	-	-	W	W	F	W	Replikation; Konversion; konverse Implikation	A **folgt aus** B	4
$\rfloor$	-	-	-	W	W	F	F	Präpendenz	Identität von A	-
$\rightarrow\ \Rightarrow\ \supset$	-	-	-	W	F	W	W	Implikation; Subjunktion; Konditional	**Aus** A **folgt** B; Wenn A dann B; A nur dann wenn B	4
$\lfloor$	-	-	-	W	F	W	F	Postpendenz	Identität von B	-
$\leftrightarrow\ \Leftrightarrow$	-	-	-	W	F	F	W	Äquivalenz; Bijunktion; Bikonditional	A **genau dann wenn** B; A dann und nur dann wenn B	5
$\wedge\ \&\ \cdot$	-	-	-	W	F	F	F	Konjunktion	A **und** B; Sowohl A als auch B	2
$\uparrow\ \barwedge\ \mid$	-	-	-	F	W	W	W	NAND; Unverträglichkeit; Sheffer-Funktion	**Nicht zugleich** A **und** B	2
$+\ \dot\vee\ \veebar\ \oplus$	-	-	-	F	W	W	F	XOR; Antivalenz; ausschließende Disjunktion	**Entweder** A **oder** B	3
$\not\leftrightarrow\ \not\Leftrightarrow\ \not\equiv$	-	-	-	"	"	"	"	Kontravalenz		-
$\lceil$	-	-	-	F	W	F	W	Postnonpendenz	Negation von B	-
$\not\rightarrow\ \not\Rightarrow\ \not\supset$	-	-	-	F	W	F	F	Postsektion		-
$\rceil$	-	-	-	F	F	W	W	Pränonpendenz	Negation von A	-
$\not\leftarrow\ \not\Leftarrow\ \not\subset$	-	-	-	F	F	W	F	Präsektion		-
$\downarrow\ \overline{\vee}$	-	-	-	F	F	F	W	NOR; Nihilation; Peirce-Funktion	**Weder** A **noch** B	3
	-	-	-	F	F	F	F	Kontradiktion		-

Um vollständig zu sein, d. h. alle 22 möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten für höchstens zwei Variable zu berücksichtigen, enthält die Tabelle auch viele ungebräuchliche Symbole und Operationen. Die Zeilen mit den Klammern und den gebräuchlichsten Junktoren sind in der Tabelle grau hinterlegt. Hellgrau hinterlegt sind Zeilen mit weniger gebräuchlichen Junktoren. Die restlichen Junktoren sind uninteressant und brauchen daher keine Priorität. – Im Folgenden werden von den in der Tabelle aufgeführten Junktoren nur noch $\top$, $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $+$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\leftarrow$, $\uparrow$ und $\downarrow$ verwendet.

1 Die Junktoren $\langle\subset\rangle$, $\langle\supset\rangle$, $\langle\not\subset\rangle$ und $\langle\not\supset\rangle$ haben hier nicht die Bedeutung der entsprechenden Operationen der Mengenlehre und dürfen nicht damit verwechselt werden; entsprechendes gilt für $\langle+\rangle$ und $\langle\cdot\rangle$ mit Addition und Multiplikation.
2 0-stellige Junktoren sind Konstante, hier *Wahrheitswerte*.
3 Ist eine Zelle in dieser Spalte leer, so ist die zugehörige Zeile nur vorhanden, um alle binären Junktoren aufzuführen.
4 Je kleiner die Zahl, je höher die Priorität.
5 Klammerung ist genau genommen keine Operation und wird nicht nur bei logischen, sondern auch bei anderen Ausdrücken verwendet. Ihre Priorität - sofern man überhaupt davon sprechen kann - kann nur höher als die aller Junktoren sein.
6 Die Priorität der unären Operationen muss höher sein als die aller mehrwertigen, also auch der binären Operationen. Wenn die Symbole aller unären Operationen auf derselben Seite des Operanden stehen, brauchen sie eigentlich keine Priorität, da die Auswertung nur von innen (dem Operanden) nach außen erfolgen kann. Nur wenn es sowohl links-, als auch rechtsseitige unäre Operationen gibt, muss man für diese Prioritäten definieren.

Tabelle 2.3.: Definition von aussagenlogischen Symbolen.

2.4.2. Formalisierung

Da sie die Grundlage – quasi das Fundament – des mathematischen Inhalts von ASBA sind, müssen die Axiome, Sätze, Beweise, usw. der Aussagenlogik (und später der Prädikatenlogik) in streng formaler Form vorliegen.[46] Da Computerprogramme mit der *Polnischen Notation*[47] besser umgehen können und Klammern dort überflüssig sind, werden viele Formeln auch parallel in der Polnischen Notation angegeben. Dies wird auf Wunsch auch bei Ausgaben von ASBA so gehandhabt.

2.4.2.1. Bausteine der aussagenlogischen Sprache

Zur Einteilung der Junktoren werden die folgenden Mengen definiert:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{K} & := & \{\top, \bot\} \end{array}$$, Menge der **aussagenlogischen Konstanten**

$$\begin{array}{lll} \mathcal{U} & := & \{\neg\} \end{array}$$, Menge der **unären Junktoren**

$$\begin{array}{lll} \mathcal{O} & := & \{\wedge, \vee, +, \rightarrow, \leftrightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\} \end{array}$$, Menge der **binären Junktoren**

Um damit Formeln zu bilden, werden noch Variable gebraucht:

$$\mathcal{Q} := \{q_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$, Menge der **aussagenlogischen Variablen**

Die Mengen $\mathcal{K}, \mathcal{U}, \mathcal{O}$ und $\mathcal{Q}$ müssen paarweise disjunkt sein. – Damit können die folgende Mengen definiert werden:

$$\mathcal{J} := \mathcal{K} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{O}$$, Menge der **Junktorsymbole**

$$\mathcal{A} := \mathcal{Q} \cup \mathcal{J}$$, **Alphabet der aussagenlogischen Sprache (für $\mathcal{J}$)**

$$\mathcal{J}_x \subseteq \mathcal{J}$$, eine Teilmenge der Junktorsymbole für eine Indexvariable x

$$\mathcal{A}_x := \mathcal{Q} \cup \mathcal{J}_x$$, Alphabet der aussagenlogischen Sprache für $\mathcal{J}_x$

Für Elemente von $\mathcal{Q}$ verwenden wir normalerweise die kleinen, lateinischen Buchstaben a, b, c, usw.

2.4.2.2. Aussagenlogische Formeln

Neben dem Alphabet $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}_x$ werden noch Klammern als Gliederungszeichen verwendet. Damit können nun rekursiv für jede Teilmenge $\mathcal{J}_x$ von $\mathcal{J}$ zwei Mengen von aussagenlogischen Formeln definiert werden, wobei wir für diese Formeln die kleinen, griechischen Buchstaben α, β, γ, usw. verwenden.

$\mathcal{L}_x$ sei die Menge der auf folgende Weise definierten **aussagenlogischen Formeln mit Klammerung** zum Alphabet $\mathcal{A}_x$% :

$$\mathcal{Q} \subset \mathcal{L}_x \quad \text{, die Variablen}$$

$$\mathcal{J}_x \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{L}_x \quad \text{, die Konstanten}$$

$$\alpha \in \mathcal{L}_x \Rightarrow (\ominus\alpha) \in \mathcal{L}_x \quad \text{, für } \ominus \in \mathcal{U} \cap \mathcal{J}_x \tag{2.13}$$

$$\alpha, \beta \in \mathcal{L}_x \Rightarrow (\alpha \circledast \beta) \in \mathcal{L}_x \quad \text{, für } \circledast \in \mathcal{O} \cap \mathcal{J}_x \tag{2.14}$$

Nur die auf diese Weise konstruierten Formeln sind Elemente von $\mathcal{L}_x$. – Für $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}$ sei noch $\mathcal{L} := \mathcal{L}_x$.

[46] Die Formalisierung stützt sich auf [27]; siehe auch [21, 24].

[47] Bei der **Polnischen Notation** stehen die Operanden bzw. Argumente von Relationen und Funktionen stets rechts von den Relations- und Funktionssymbolen. Dadurch kann auf Gliederungszeichen wie Klammern und Kommata verzichtet werden. Noch einfacher für Computer ist die **umgekehrte Polnische Notation**, bei der die Operanden und Argumente links von den Symbolen stehen.

$\mathcal{L}_x^{\mathrm{P}}$ sei die Menge der auf folgende Weise definierten **aussagenlogischen Formeln in Polnischer Notation**:

$$\begin{aligned}
& & \mathcal{Q} \subset \mathcal{L}_x^{\mathrm{P}} & \quad \text{, die Variablen} \\
& & \mathcal{J}_x \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{L}_x^{\mathrm{P}} & \quad \text{, die Konstanten} \\
\alpha \in \mathcal{L}_x^{\mathrm{P}} & \Rightarrow & \ominus\alpha \in \mathcal{L}_x^{\mathrm{P}} & \quad \text{, für } \ominus \in \mathcal{U} \cap \mathcal{J}_x \qquad (2.15) \\
\alpha, \beta \in \mathcal{L}_x^{\mathrm{P}} & \Rightarrow & \circledast\alpha\beta \in \mathcal{L}_x^{\mathrm{P}} & \quad \text{, für } \circledast \in \mathcal{O} \cap \mathcal{J}_x \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Nur die auf diese Weise konstruierten Formeln sind Elemente von $\mathcal{L}_x^{\mathrm{P}}$. – Für $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}$ sei noch $\mathcal{L}^{\mathrm{P}} := \mathcal{L}_x^{\mathrm{P}}$.

Wie man leicht sieht, gilt

$$\mathcal{J}_x \subset \mathcal{J}_y \subseteq \mathcal{J} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}_x \subset \mathcal{A}_y \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{L}_x \subset \mathcal{L}_y \subseteq \mathcal{L} \\ \mathcal{L}_x^{\mathrm{P}} \subset \mathcal{L}^{\mathrm{P}}{}_y \subseteq \mathcal{L}^{\mathrm{P}} \end{cases}$$

und weiterhin gibt es eine bijektive Abbildung von $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{L}^{\mathrm{P}}$. Auf einen Beweis verzichten wir. Durch Anwendung der Klammerregeln von Paragraph 2.4.2.1 auf der vorherigen Seite lassen sich in der Regel noch viele Klammern der Formeln aus $\mathcal{L}_x$ einsparen. Die Formeln aus $\mathcal{L}_x^{\mathrm{P}}$ sind frei von Klammern. Die Namen der Junktoren finden sich in der Tabelle 2.3 auf Seite 26.

Die Formeln, die nach einer der Regeln (2.13), (2.14), (2.15) oder (2.16) gebildet wurden, sind offensichtlich **zerlegbar**, die anderen, d. h. Variablen und Konstanten (aus $\mathcal{Q}$ bzw. $\mathcal{K}$), sind **unzerlegbar**. Letztere bezeichnet man auch als **atomare Formeln**.

2.4.3. Definition von Junktoren durch andere

Im folgenden gelte für zwei aussagenlogische Formeln α und β:

$\alpha = \beta \quad :\Leftrightarrow \quad$ α und β stimmen als Zeichenkette überein.

$\alpha \equiv \beta \quad :\Leftrightarrow \quad$ α und β können mit Hilfe erlaubter Substitutionen und geltender Axiome – siehe Unterabschnitt 2.4.4 auf Seite 30 – ineinander überführt werden.

Es werden verschiedene Teilmengen von $\mathcal{J}$ eingeführt, die jeweils ausreichen um alle anderen Elemente von $\mathcal{J}$ zu definieren:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\text{bool}} &:= \{\neg, \wedge, \vee\} \qquad (\textbf{Boolsche Signatur}) \\
\mathcal{J}_{\text{and}} &:= \{\neg, \wedge\} \\
\mathcal{J}_{\text{or}} &:= \{\neg, \vee\} \\
\mathcal{J}_{\text{imp}} &:= \{\neg, \rightarrow\} \\
\mathcal{J}_{\text{rep}} &:= \{\neg, \leftarrow\} \\
\mathcal{J}_{\text{nand}} &:= \{\uparrow\} \\
\mathcal{J}_{\text{nor}} &:= \{\downarrow\}
\end{aligned}$$

Solche Teilmengen heißen logische Signatur.

Im Folgenden stehen jeweils links die Formeln in üblicher Schreibweise vollständig geklammert und rechts in Polnischer Notation (ohne Klammern). Ferner seien α und β beliebige, nicht notwendig verschiedene Formeln aus der passenden Menge $\mathcal{L}_x$ bzgl. der um die mit Hilfe der Definitionen erweiterten Formelmenge.

Ausgehend von den Junktoren aus der Boolsche Signatur $\mathcal{J}_{\text{bool}}$ werden die restlichen Junktoren aus $\mathcal{J}$ definiert. Die Definitionen sind in zwei Gruppen eingeteilt, und zwar die mit den Junktoren aus $\mathcal{J}_{\text{and}}$:

$$\begin{aligned}
(\alpha \to \beta) &:= (\neg(\alpha \wedge (\neg\beta))) & \to \alpha\beta &:= \neg \wedge \alpha \neg\beta && (2.17)\\
(\alpha \leftarrow \beta) &:= (\neg(\beta \wedge (\neg\alpha))) & \leftarrow \beta\alpha &:= \neg \wedge \beta \neg\alpha && (2.18)\\
(\alpha \leftrightarrow \beta) &:= ((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \leftarrow \beta)) & \leftrightarrow \alpha\beta &:= \wedge \to \alpha\beta \leftarrow \alpha\beta &&\\
\bot &:= (q_0 \wedge (\neg q_0)) & \bot &:= \wedge q_0 \neg q_0 &&\\
(\alpha \uparrow \beta) &:= (\neg(\alpha \wedge \beta)) & \uparrow \alpha\beta &:= \neg \wedge \alpha\beta && (2.19)
\end{aligned}$$

und die mit den Junktoren aus $\mathcal{J}_{\text{or}}$:

$$\begin{aligned}
(\alpha \downarrow \beta) &:= (\neg(\alpha \vee \beta)) & \downarrow \alpha\beta &:= \neg \vee \alpha\beta && (2.20)\\
(\alpha + \beta) &:= ((\alpha \vee \beta) \wedge (\neg(\alpha \wedge \beta))) & + \alpha\beta &:= \wedge \vee \alpha\beta \neg \wedge \alpha\beta &&\\
\top &:= (q_0 \vee (\neg q_0)) & \top &:= \vee q_0 \neg q_0 &&
\end{aligned}$$

Ist $\langle \vee \rangle$ oder $\langle \wedge \rangle$ nicht vorgegeben, d. h. wird von den Elementen aus $\mathcal{J}_{\text{and}}$ bzgl. $\mathcal{J}_{\text{or}}$ statt von denen aus $\mathcal{J}_{\text{bool}}$ ausgegangen, so muss man den fehlenden Junktor mittels der passenden der beiden folgenden Definitionen einführen:

$$\begin{aligned}
(\alpha \vee \beta) &:= (\neg((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))) & \vee\alpha\beta &:= \neg \wedge \neg\alpha\neg\beta\\
(\alpha \wedge \beta) &:= (\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))) & \wedge\alpha\beta &:= \neg \vee \neg\alpha\neg\beta
\end{aligned}$$

Nun sind wieder alle Junktoren definiert.

Entsprechend wird bei Vorgabe von $\mathcal{J}_{\text{imp}}$ bzgl. $\mathcal{J}_{\text{rep}}$ die passende der beiden folgenden Definitionen ausgewählt:

$$\begin{aligned}
(\alpha \vee \beta) &:= ((\neg\alpha) \to \beta) & \vee\alpha\beta &:= \to \neg\alpha\beta\\
(\alpha \wedge \beta) &:= (\neg((\neg\beta) \leftarrow \alpha)) & \wedge\alpha\beta &:= \neg \leftarrow \neg\beta\alpha
\end{aligned}$$

woraufhin dann (2.17) bzgl. (2.18) als Gleichung nachzuweisen ist. Da aus (2.18) durch Vertauschung der Variablen unmittelbar

$$(\alpha \leftarrow \beta) \equiv (\beta \to \alpha) \qquad \leftarrow \alpha\beta \equiv \to \beta\alpha$$

folgt, vermindert sich der Aufwand dazu erheblich.

Bei Vorgabe von $\mathcal{J}_{\text{nand}}$ bzgl. $\mathcal{J}_{\text{nor}}$ schließlich werden die passenden Definition aus

$$\begin{aligned}
(\neg\alpha) &:= (\alpha \downarrow \alpha) & \neg\alpha &:= \downarrow \alpha\alpha\\
(\neg\alpha) &:= (\alpha \uparrow \alpha) & \neg\alpha &:= \uparrow \alpha\alpha
\end{aligned}$$

und, da $\langle \neg \rangle$ jetzt definiert ist, aus

$$\begin{aligned}
(\alpha \vee \beta) &:= (\neg(\alpha \downarrow \beta)) & \vee\alpha\beta &:= \neg \downarrow \alpha\beta &&\\
(\alpha \wedge \beta) &:= (\neg(\alpha \uparrow \beta)) & \wedge\alpha\beta &:= \neg \uparrow \alpha\beta && (2.21)
\end{aligned}$$

ausgewählt und es ist (2.19) bzgl. (2.20) als Gleichung nachzuweisen.

Abschließend ist noch nachzuweisen, dass mit Hilfe der jeweils passenden der Definitionen (2.17) bis (2.21), ausgehend vom jeweils passenden $\mathcal{L}_x$, genau die gesamte Formelmenge $\mathcal{L}$ erzeugt werden kann.

2.4.4. Aussagenlogisches Axiomensystem

Ausgehend von der logischen Signatur $\mathcal{J}_{\text{and}} = \{\neg, \wedge\}$ und der Definition 2.17 auf der vorherigen Seite von $\langle\rightarrow\rangle$ werden die folgenden vier logischen Axiome definiert:

$(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	$\rightarrow\rightarrow \alpha \rightarrow \beta\gamma \rightarrow\rightarrow \alpha\beta \rightarrow \alpha\gamma$
$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$	$\rightarrow \alpha \rightarrow \beta \wedge \alpha\beta$
$\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha\,; \quad \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$	$\rightarrow \wedge\alpha\beta\alpha\,; \quad \rightarrow \wedge\alpha\beta\beta$
$(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$	$\rightarrow\rightarrow \alpha\neg\beta \rightarrow \beta\neg\alpha$

> > > Aussagenlogik weiter bearbeiten. < < <

2.5. Prädikatenlogik

> > > Prädikatenlogik bearbeiten. < < <

2.6. Mengenlehre

> > > Mengenlehre bearbeiten. < < <

3. Ideen

3.1. Schlussregeln

In diesem Abschnitt geht es um zulässige Transformationen, d. h. allgemeingültige Schlussregeln. Dazu gehören zunächst die Basisregeln. Dann aber auch alle aus den Basisregeln und den bis dahin allgemeingültigen Schlussregeln korrekt abgeleiteten neuen Schlussregeln. Die Schlussregeln haben die Form eines Formalen Satze.

3.1.1. Basisregeln

Gemäß [1] Kapitel 1.4 *Ein vollständiger aussagenlogischer Kalkül* werden sechs Basisregeln definiert. Zuvor werden aber noch einige Definitionen gebraucht. Dazu seien n, m, k und l natürliche Zahlen (auch 0), α, α_i, β und β_j Formeln X, X_i, Y und Y_j Mengen von Formeln und

$$X := X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$$
$$Y := Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k \cup \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l\}$$

X und Y können auch die leere Menge sein. Damit wird definiert:

$\alpha \vdash \beta$ $:\Leftrightarrow$ β ist mittels schrittweiser Anwendung *zulässiger Transformationen* (siehe weiter unten) aus α ableitbar. Sprechweise: Aus α ist β **ableitbar** oder **beweisbar**; kurz: „α *ableitbar* β" bzw. „α *beweisbar* β" – Es kann auch $\langle\alpha\rangle$ durch $\langle X\rangle$ und/oder $\langle\beta\rangle$ durch $\langle Y\rangle$ ersetzt werden.

$\vdash \beta$ $:\Leftrightarrow$ $\varnothing \vdash \beta$ ($\langle\vdash\rangle$ kann dann auch ganz entfallen)

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \vdash Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \quad :\Leftrightarrow \quad X \vdash Y$$

Eine **zulässige Transformation** ist die Anwendung einer *Substitution*[1)] (siehe unten), einer *Basisregel* (siehe unten) oder einer davon abgeleiteten sonstigen *Schlussregel*, z. B. aus Unterabschnitt 2.3.3 auf Seite 22. Bei den Schlussregeln und der Substitution $\langle\leftarrowtail\rangle$ soll das Komma stärker binden als $\langle\vdash\rangle$, $\langle\leftarrowtail\rangle$ und $\langle|\rangle$, wobei $\langle|\rangle$ für „und" bzw. $\langle\&\rangle$[2)] steht und schwächer bindet als $\langle\vdash\rangle$ und $\langle\leftarrowtail\rangle$.[3)]

Zur der Auswahl der Basisregeln, der Formulierung und der Bezeichnungen wird auf [1, 37] zurückgegriffen. Wie in [37] steht $\langle\mathrm{E}\rangle$ für „-Einführung" und $\langle\mathrm{B}\rangle$ für „-Beseitigung" (oder „-Elimination") von Junktoren.[4)]

Im Folgenden seien α und β Formeln und X und Y Mengen von Formeln. Für die sechs Basisregeln werden dann nur noch die Junktoren$\langle\neg\rangle$ und $\langle\wedge\rangle$ benötigt. Bei den weiteren Schlussregeln wird noch $\langle\rightarrow\rangle$ gemäß der Definition 2.17 auf Seite 29 verwendet.

1) siehe Unterabschnitt 3.1.2 auf der nächsten Seite
2) siehe Unterabschnitt 2.2.1 auf Seite 18
3) siehe Fußnote 3 von Tabelle 2.2 auf Seite 17
4) In der Monotonieregel wird hier, anders als in [1], $\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ statt $\langle\langle Y$, für $Y \supseteq X\rangle\rangle$ genommen. Das ist gleichwertig, vermeidet aber den Zusatz $\langle\langle$, für $Y \supseteq X\rangle\rangle$. Außerdem werden bei den Bezeichnungen $\langle\langle(\wedge 1)\rangle\rangle$ und $\langle\langle(\wedge 2)\rangle\rangle$ gemäß [37] durch $\langle\langle(\wedge \mathrm{E})\rangle\rangle$ bzw. $\langle\langle(\wedge \mathrm{B})\rangle\rangle$ ersetzt.

$$\frac{}{\alpha \vdash \alpha} \qquad \text{(**Anfangsregel**)} \qquad \text{(AR)}$$

$$\frac{X \vdash \alpha}{X, Y \vdash \alpha} \qquad \text{(**Monotonieregel**)} \qquad \text{(MR)}$$

$$\frac{X \vdash \alpha, \neg\alpha}{X \vdash \beta} \qquad \text{(Einführung/Beseitigung der Negation Teil 1)} \qquad (\neg 1)$$

$$\frac{X, \alpha \vdash \beta \mid X, \neg\alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta} \qquad \text{(Einführung/Beseitigung der Negation Teil 2)} \qquad (\neg 2)$$

$$\frac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta} \qquad \text{(Einführung der Konjunktion)} \qquad (\wedge \mathrm{E})$$

$$\frac{X \vdash \alpha \wedge \beta}{X \vdash \alpha, \beta} \qquad \text{(Beseitigung der Konjunktion)} \qquad (\wedge \mathrm{B})$$

In einer Schlussregel werden die Formeln[5] über dem Querstrich als **Voraussetzungen** und die unter dem Querstrich als **Folgerungen** der Regel bezeichnet. Eine Schlussregel steht für die Aussage, dass mit ihren Voraussetzungen auch auch ihre Folgerungen gelten. – Im Gegensatz zu den weiteren Schlussregeln werden die oben aufgelisteten Basisregeln nicht weiter hinterfragt, d. h. sie gelten quasi als Axiome.

3.1.2. Identitätsregeln

Die zulässigen Transformationen, d. h. die Anwendung der Schlussregeln, erfordern zulässige Substitutionen. Damit wird dem Gleichheits- oder Identitätszeichen $\langle = \rangle$ mittels Einführungs- und Beseitigungsregel eine Bedeutung verliehen.[6] Dazu seien α, β und γ vergleichbare[7]Formeln.

Zunächst wird definiert:

$\gamma(\alpha \leftarrow\!\!\prec \beta)$:= Die Formel, die man erhält, wenn in γ alle oder nur einige Vorkommen von α durch β ersetzt werden. – Gegebenenfalls muss noch die Auswahl der Ersetzungen angegeben werden, andernfalls werden alle Vorkommen ersetzt. Letzteres heißt dann **vollständige** Substitution.

$\gamma(\alpha \leftrightarrows \beta)$:= Die Formel, die man erhält, die man erhält, wenn in γ alle α und β miteinander vertauscht werden. Dazu ist es nötig, das α und β voneinander unabhängig sind, vorzugsweise zwei verschiedene Variable. (3.1)

$\langle\!\langle \alpha \leftarrow\!\!\prec \beta \rangle\!\rangle$ heißt **Substitution** und $\langle\!\langle \alpha \leftrightarrows \beta \rangle\!\rangle$ **Vertauschung** oder kurz **Tausch**. – Sei noch $S = (s_1, s_2, ...)$ eine endliche Folge von Substitutionen, die auch Vertauschungen enthalten und auch leer sein kann.

---

5) hier: Aussagen in einer formalen Form.
6) siehe [37]
7) siehe Ende von Unterabschnitt 2.2.1 auf Seite 18

Dann wird definiert:

$$\begin{aligned} \gamma(S) &:= \gamma(s_1)(s_2)... \\ \gamma(\varnothing) &= \gamma \qquad \text{(nur zur Verdeutlichung)} \\ \gamma(s_1, s_2, ...) &:= \gamma(S) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die Vertauschung ist eine spezielle Form der Substitution. Wenn x und y zwei verschiedene Variable, die in α, β und γ nicht vorkommen, gilt:

$$\gamma(\alpha \leftrightarrows \beta) = \gamma(\alpha \longleftarrow x, \beta \longleftarrow y, y \longleftarrow \alpha, x \longleftarrow \beta)$$

Sei zusätzlich noch s eine Substitution. Folgende Sprechweisen werden verwendet:

$\gamma(\alpha \longleftarrow \beta)$: In γ wird α **(vollständig) durch** β **substituiert**.

$\gamma(\alpha \leftrightarrows \beta)$: In γ werden α und β **vertauscht**.

$\gamma(s)$: s wird auf γ **angewendet**.

$\gamma(S)$: Die Substitutionen aus S werden in der angegebenen Reihenfolge auf γ angewendet.

$\gamma(S)$: S wird auf γ angewendet.

Bei obiger Definition der Substitution bleibt noch offen, unter welchen Voraussetzungen sie angewendet werden darf. Das soll hier nicht untersucht werden. In diesem Abschnitt genügt es, das nur Vertauschung und vollständige Substitution verwendet werden. In diesen Fällen sind beliebige Substitutionen von Variablen durch Formeln erlaubt.

Ist γ wie oben und S eine Menge von Substitutionen.

Nun können die beiden Identitätsregeln definiert werden:

$$\frac{}{\alpha = \alpha} \qquad \text{(Einführung der Identität)} \tag{= E}$$

$$\frac{\alpha = \beta \mid \gamma}{\gamma(\alpha \longleftarrow \beta)} \qquad \text{(Beseitigung der Identität)} \tag{= B}$$

Die Identitätsregeln werden hier eingeführt, um die Substitution zu rechtfertigen. Wie die Basisregeln gelten sie als Axiome, würden also eigentlich dazu gehören. Da sie aber nicht weiter verwendet werden, werden sie hier nicht zu den Basisregeln gezählt.

3.1.3. Weitere Schlussregeln

In [1] werden aus den Basisregeln mittels zulässiger Transformationen weitere Schlussregeln abgeleitet.[8)] Man vergleiche auch mit [37].

[8)] In [1] werden die Identitätsregeln zwar weder aufgeführt noch angewandt, ohne Substitution geht es aber nicht.

$$\frac{X, \neg\alpha \vdash \alpha}{X \vdash \alpha} \quad \text{(Beseitigung der Negation; Indirekter Beweis)} \tag{$\neg 3$}$$

$$\frac{X, \neg\alpha \vdash \beta, \neg\beta}{X \vdash \alpha} \quad \text{(Reductio ad absurdum)} \tag{$\neg 4$}$$

$$\frac{X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \to \beta} \quad \text{(Einführung der Implikation)} \tag{$\to$ E}$$

$$\frac{X \vdash \alpha \to \beta}{X, \alpha \vdash \beta} \quad \text{(Beseitigung der Implikation)} \tag{$\to$ B}$$

$$\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta} \quad \text{(\textbf{Schnittregel})} \tag{SR}$$

$$\frac{X \vdash \alpha \mid \alpha \to \beta}{X \vdash \beta} \quad \text{(\textbf{Abtrennungsregel} – \textit{Modus ponens})} \tag{TR}$$

Dabei werden zum Beweis der Schlussregeln in [1] folgende Basisregeln verwendet:

$$\begin{aligned} \neg 3 &: \text{AR, MR, } \neg 2 \\ \neg 4 &: \text{AR, MR, } \neg 1, \neg 2 \\ \to \text{E} &: \text{AR, MR, } \neg 1, \neg 2, \wedge\text{E} \\ \to \text{B} &: \text{AR, MR, } \neg 1, \neg 2, \wedge\text{B} \\ \text{SR} &: \text{AR, MR, } \neg 1, \neg 2 \\ \text{TR} &: \text{AR, MR, } \neg 1, \neg 2, \wedge\text{E} \end{aligned}$$

3.1.4. Beispiel einer Ableitung

Als Beispiel wird hier die Schnittregel aus den Basisregeln abgeleitet.[9)] Dazu wird verabredet, dass in der Tabelle 3.1 auf Seite 36 der Inhalt der Zelle in der Zeile i und der Spalte (X_n) mit X_i bezeichnet wird. Zur kürzeren Darstellung wird statt auf die vollständigen Spaltenüberschriften nur auf die dort notierten (X_n) verwiesen. Dass in der Spalte (n) stets die Zeilennummer steht, wird im folgenden nicht mehr extra erwähnt.

9) Die Form der Tabelle ist angelehnt an [37] Kapitel 2.2.4 *Eine Beispielableitung*.

Für die ausgefüllten Felder wird nun definiert:[10)]

$$R_i := \begin{cases} \text{- „Voraussetzung" = Die Aussage } A_i \text{ ist eine Voraussetzung.} \\ \text{- „Folgerung" = Die Aussage } A_i \text{ ist eine Folgerung.} \\ \text{- „Annahme" = Die Aussage } A_i \text{ wird vorübergehend als zutreffend angenommen.} \\ \text{- } j \text{ = Verweis auf die Schlussregel } \overline{R}_j \text{ für ein } j < i. \\ \text{- Verweis (ohne Klammern) auf eine allgemeingültige Schlussregel.} \end{cases}$$

$S_i :=$ Die Reihe der anzuwendenden Substitutionen.

$\overline{R}_i :=$ Das Ergebnis der in der angegebenen Reihenfolge angewendeten Substitutionenaus S_i auf die Schlussregel R_i

$Z_i :=$ Die Indizes j (mit $j < i$) als Verweise auf eine oder mehrere Aussagen A_j, welche zusammen genau die Voraussetzungen der Schnittregel $\overline{R}_i$ erfüllen.

$A_i :=$ Folgerung(en) der Schlussregel $\overline{R}_i$ – auch in Form der Indizes von einem oder mehreren von Aj (mit $j < i$). In der Ergebniszeile kann hier auch die bewiesene Aussage als Schlussregel stehen.

$D_i :=$ die Indizes der A_j, von denen A_i abhängig ist.

Bis zur Zeile i hat man die folgende Schlussregel bewiesen:

$$\frac{A_{i_1} \mid A_{i_2} \ldots}{A_i} \quad \text{, für alle } i_j \in D_i$$

Sei nun

$$\Gamma_i := \begin{cases} \text{leer} & \text{für } R_i = \text{„Voraussetzung"} \\ \text{leer} & \text{für } R_i = \text{„Folgerung"} \\ \text{leer} & \text{für } R_i = \text{„Annahme"} \\ \overline{R}_j & \text{für } R_i = j \quad \text{(eine \textbf{interne} Schlussregel)} \\ \text{die Schlussregel} & \text{für } R_i = \text{Verweis auf eine \textbf{externe} Schlussregel} \end{cases}$$

Damit gilt für die Einträge in einer Zeile i:

- Wenn Γ_i nicht leer ist, ist R_i eine Schlussregel mit $R_i = \Gamma_i(S_i)$[11)].
- Wenn A_i nicht leer ist, ist $R_i = \dfrac{A_{z_1} \mid A_{z_2} \mid \ldots}{A_i}$ (alle $z_j \in Z_i$).
- Wenn A_i nicht leer ist, ist bis jetzt die Schlussregel $\dfrac{A_{d_1} \mid A_{d_2} \mid \ldots}{A_i}$ (alle $d_j \in D_i$) schon bewiesen.

S_i, Z_i und D_i dürfen dabei auch leer sein.

Die Erzeugung einer Tabelle analog zu 3.1 auf der nächsten Seite wird im folgenden beschrieben. Zellen, für die kein Inhalt angegeben wird, bleiben leer. Rückwärts-Referenzen auf schon ausgefüllte Zellinhalte sind jederzeit möglich. Das Eintragen der Zeilennummer i wird nicht extra erwähnt. – Die Tabelle und die Beschreibung sind so ausführlich, damit man daraus leicht ein Computerprogramm erstellen kann.

1. Am Anfang der Tabelle werden zuerst Voraussetzungen, dann zu beweisende Folgerungen und schließlich Annahmen aufgeführt.[12)] Jede der drei Gruppen kann auch leer sein und es ist auch

[10)] Eigentlich müsste man für jede Substitution aus S_i eine eigene Zeile vorsehen. Um die Tabellen für die Beweise kürzer zu halten, werden aufeinanderfolgende Substitutionen zusammengefasst.

[11)] siehe Definition (3.2) von Unterabschnitt 3.1.2 auf Seite 32

[12)] Die Angabe ist dann erforderlich, wenn darauf verwiesen wird. Durch die Auflistung hat man aber einen vollständigen Überblick über die Voraussetzungen und Folgerungen eines Beweises und die Zwischenannahmen. Auf jede nötige Voraussetzung und jede verwendete Zwischenannahme wird in der Spalte (Z_n) mindestens einmal verwiesen, so dass sie auch aufgeführt werden müssen. Die Angabe der Folgerungen erleichtert die Erstellung einer *Ergebniszeile* (siehePunkt 3).

Zeile (n)	Regel (R_n)	Substitutionen (S_n)	erzeugte Regel ($\overline{R}_n$)	angewendet auf ... (Z_n)	Aussage (A_n)	Abhängigkeiten (D_n)
1	Voraussetzung				$X \vdash \alpha$	1
2	Voraussetzung				$X, \alpha \vdash \beta$	2
3	Folgerung				$X \vdash \beta$	3
4	MR		$\frac{X \vdash \alpha}{X, Y \vdash \alpha}$			
5	4	$Y \leftarrowtail \neg\alpha$	$\frac{X \vdash \alpha}{X, \neg\alpha \vdash \alpha}$	1	$X, \neg\alpha \vdash \alpha$	1
6	AR		$\frac{}{\alpha \vdash \alpha}$			
7	6	$\alpha \leftarrowtail \neg\alpha$	$\frac{}{\neg\alpha \vdash \neg\alpha}$		$\neg\alpha \vdash \neg\alpha$	
8	4	$\alpha \leftarrowtail \neg\alpha$ $X \leftarrowtail \neg\alpha$ $Y \leftarrowtail X$	$\frac{\neg\alpha \vdash \neg\alpha}{X, \neg\alpha \vdash \neg\alpha}$	7	$X, \neg\alpha \vdash \neg\alpha$	
9	$\neg 1$		$\frac{X \vdash \alpha, \neg\alpha}{X \vdash \beta}$			
10	9	$X \leftarrowtail X, \neg\alpha$	$\frac{X, \neg\alpha \vdash \alpha, \neg\alpha}{X, \neg\alpha \vdash \beta}$	5, 8	$X, \neg\alpha \vdash \beta$	1
11	$\neg 2$		$\frac{X, \alpha \vdash \beta \mid X, \neg\alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$	2, 10	3	1, 2
12	AR, MR, $\neg 1$, $\neg 2$		$\frac{A_1 \mid A_2}{A_3}$		$\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$	

Tabelle 3.1.: Ableitung der Schnittregel aus den Basisregeln

möglich, die Zeilen an anderen Stellen der Tabelle anzugeben, spätestens aber, wenn darauf verwiesen wird. Für jede Voraussetzung, Folgerung und Annahme gibt es eine Zeile:

a) $R_i =$ „Voraussetzung“, „Folgerung“ oder „Annahme“.

b) $A_i =$ Die aktuelle Voraussetzung, Folgerung oder Annahme.

c) $D_i = i$ (ein Verweis auf A_i).

2. In den nächsten Zeilen werden die Beweisschritte aufgeführt, für jeden Schritt eine Zeile.

Zunächst kann R_i kann auf zwei Arten erzeugt werden:

a) i. $R_i =$ Verweis auf eine allgemeingültige Schlussregel.

ii. $\overline{R}_i =$ Die Schlussregel, auf die verwiesen wird.

oder

a) i. $R_i = j$, wenn die schon bewiesene Schlussregel $\overline{R}_j$ (mit $j < i$) angewendet werden soll.

ii. $S_i =$ Die auf die Schlussregel R_i anzuwendende Substitution.

iii. $\overline{R}_i =$ Das Ergebnis der Substitution S_i auf die Schlussregel R_i.

Man beachte, dass die Schlussregel $\overline{R}_i$, stets allgemeingültig ist, da sie ausschließlich aus allgemeingültigen Schlussregeln mittels Substitutionen abgeleitet worden ist. Daher gibt es auch keine Beschränkung weiterer Substitutionen durch irgendwelche Abhängigkeiten.

Nun kann die Zeile beendet werden, oder es geht weiter mit:

b) Z_n = Die Indizes aller A_j (mit $j < i$), die eine Voraussetzung der Schlussregel $\overline{R}_i$ sind, möglichst in der verwendeten Reihenfolge. – Für jedes angegebene j werden noch die Abhängigkeiten D_j den Abhängigkeiten D_i hinzugefügt.

c) A_i = Folgerung(en) der Schlussregel $\overline{R}_i$. – Wenn diese Folgerungen schon als Aussagen A_j (mit $j < i$) vorhanden sind, können auch einfach deren Indizes eingetragen werden. Damit werden die Zusammenhänge und der Abschluss des Beweises besser ersichtlich.

d) D_i = Die Verweise wurden schon in (2b) eingetragen.[13)]

Der Beweis muss so lange fortgeführt werden, bis alle Folgerungen als Aussagen in der Spalte (A_n) erschienen und dort jeweils nur von den gegebenen Voraussetzungen abhängig sind.

3. In einer **Ergebniszeile**, die dann die letzte ist, kann noch die bewiesene Behauptung in Form einer Schlussregel formuliert und in einer passenden Spalte notiert werden. Zusätzlich können dort auch noch alle verwendeten Schlussregeln gesammelt werden. Dies kann z. B. folgendermaßen geschehen:

a) (R_n) = Verweise auf alle verwendeten externen Schlussregeln.

b) $(\overline{R}_n)$ = Die bewiesene Behauptung als Schlussregeln, wobei alle A_i, die Voraussetzungen sind, als Voraussetzung und alle A_j, die Folgerungen sind, als Folgerung eingesetzt werden, jeweils in der Form „A_i“ bzgl. „A_j“. Das ergibt dann:

$$\frac{A_{i_1} \mid A_{i_2} \mid \ldots}{A_{j_1} \mid A_{j_2} \mid \ldots}$$

c) $(A_n) = \overline{R}_i$, wobei die Voraussetzungen und Folgerungen aufgelöst werden.

d) (D_n) = Die Vereinigung aller Abhängigkeiten der Folgerungen vermindert um die Voraussetzungen. – Wenn das Feld dabei nicht leer bleibt, ist der Beweis missglückt!

Ein weiteres Beispiel in der Tabelle 3.2 auf der nächsten Seite soll verdeutlichen, wie Abhängigkeiten von Zwischenannahmen wieder beseitigt werden können.[14)]

> > > Beispielableitung der Kontraposition vervollständigen < < <

13) Wenn D_n leer ist, dann ist A_n allgemeingültig.
14) siehe [37], Kapitel 2.2.4 *Eine Beispielableitung*

Zeile (n)	**Regel** (R_n)	**Substitutionen** (S_n)	**erzeugte Regel** ($\overline{R}_n$)	**angewendet auf ...** (Z_n)	**Aussage** (A_n)	**Abhängigkeiten** (D_n)
1	Folgerung				$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	1
2	Annahme				$\alpha \to \beta$	2
3	Annahme				$\neg\beta$	3
4	Annahme				α	4
5	$\to$ B		$\frac{X \vdash \alpha \to \beta}{X, \alpha \vdash \beta}$			
6	-1	$X \leftarrowtail \varnothing$	$\frac{\alpha \to \beta}{\alpha \vdash \beta}$	2	$\alpha \vdash \beta$	2
7	SR		$\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$			
8	-1	$X \leftarrowtail \varnothing$	$\frac{\alpha \mid \alpha \vdash \beta}{\beta}$	4, 6	β	4, 6
9′	$\wedge$E		$\frac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta}$			
10′	-1	$X \leftarrowtail \varnothing$	$\frac{\alpha \mid \beta}{\alpha \wedge \beta}$			
11′	-1	$\alpha \leftrightarrows \beta$ $\alpha \leftarrowtail \neg\beta$	$\frac{\beta \mid \neg\beta}{\beta \wedge \neg\beta}$	8, 3	$\beta \wedge \neg\beta$	
9	$\neg$1		$\frac{X \vdash \alpha, \neg\alpha}{X \vdash \beta}$			
10	-1	$X \leftarrowtail \varnothing$	$\frac{\alpha \mid \neg\alpha}{\beta}$			
11	-1	$\alpha \leftrightarrows \beta$ $\alpha \leftarrowtail \neg\alpha$	$\frac{\beta \mid \neg\beta}{\neg\alpha}$	8, 3	$\neg\alpha$	2, 3, 4
12	$\to$ E		$\frac{X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \to \beta}$			
13	-1	$X \leftarrowtail \varnothing$	$\frac{\alpha \vdash \beta}{\alpha \to \beta}$			
14	-1	$\alpha \leftrightarrows \beta$ $\alpha \leftarrowtail \neg\alpha$ $\beta \leftarrowtail \neg\beta$	$\frac{\neg\beta \vdash \neg\alpha}{\neg\beta \to \neg\alpha}$	3, 11, ???	$\neg\beta \to \neg\alpha$	2, 3, 4, ???
15	$\to$ E+1	$\alpha \leftarrowtail \gamma$ $\beta \leftarrowtail \delta$ $\gamma \leftarrowtail \alpha \to \beta$ $\delta \leftarrowtail \neg\beta \to \neg\alpha$	$\frac{\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha}{(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)}$	2, 14	$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	2, 3, 4, ???
16	$\to$ E, $\to$ B, SR		$\overline{A_1}$		$\overline{(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)}$	

Tabelle 3.2.: Ableitung der Kontraposition aus allgemeingültigen Schlussregeln

4. Design

Dieses Projekt soll Open Source sein. Daher gilt für die Dokumente die *GNU Free Documentation License (FDL)* und für die Software die *GNU Affero General Public License (APGL)*. Die *GNU General Public License (GPL)* reicht für die Software nicht aus, da das Programm auch mittels eines Servers betrieben werden kann und soll. Damit das Projekt gegebenenfalls durch verschiedene Entwickler gleichzeitig bearbeitet werden kann und wegen des Konfigurationsmanagements wurde es als ein GitHub Projekt erstellt (siehe [20]).

Wenn die Lizenzen nicht mitgeliefert wurden, können sie unter `http://www.gnu.org/licenses/` gefunden werden.

4.1. Anforderungen

Die Anforderungen ergeben sich zunächst aus den Zielen im Abschnitt 1.3 auf Seite 6. Die beiden Ziele 1 *Daten* und 15 *Lizenz* sind für die Entwicklung von ASBA von sekundärer Bedeutung und werden daher in diesem Abschnitt nicht übernommen. Die anderen Ziele werden noch verfeinert.

> > > Ziele aus Abschnitt "Ziele" in Anforderungen umwandeln. < < <

1. *Form*: Die Daten liegt in formaler, geprüfter Form vor. (siehe Ziel 2 auf Seite 6)
2. *Eingaben*: Die Eingabe von Daten erfolgt in einer formalen Syntax unter Verwendung der üblichen mathematischen Schreibweise. Folgende Daten können eingegeben werden:
    a) Axiome
    b) Sätze
    c) Beweise
    d) Fachbegriffe
    e) Fachgebiete
    f) Ausgabeschemata

    Dabei sind alle Begriffe nur innerhalb eines Fachgebiets und seiner untergeordneten Fachgebiete gültig, solange sie nicht umdefiniert werden. Das oberste Fachgebiet ist die ganze Mathematik. – siehe Ziel 3 auf Seite 6
3. *Prüfung*: Vorhandene Beweise können automatisch geprüft werden. – siehe Ziel 4 auf Seite 6
4. *Ausgaben*: Die Ausgabe kann in einer eindeutigen, formalen Syntax gemäß vorhandener Ausgabeschemata erfolgen. – siehe Ziel 5 auf Seite 6 - *Ausgabe in polnischer Notation*
5. *Auswertungen*: Zusätzlich zur Ausgabe der Daten sind verschiedene Auswertungen möglich. Insbesondere kann zu jedem Beweis angegeben werden, wie lang er ist und welche Axiome und Sätze[1)] er benötigt. – siehe Ziel 6 auf Seite 6

[1)] Sätze, die quasi als Axiome verwendet werden.

6. *Anpassbarkeit*: Fachbegriffe und die Darstellung bei der Ausgabe können mit Hilfe von – gegebenenfalls unbenannten – untergeordneten Fachgebieten angepasst werden. – siehe Ziel 7 auf Seite 6
7. *Individualität*: Axiome und Sätze können für jeden Beweis individuell vorausgesetzt werden. Dabei sind fachgebietsspezifische Fachbegriffe erlaubt. – siehe Ziel 8 auf Seite 6)
8. *Internet*: Die Daten können auf mehrere Dateien verteilt sein. Ein Teil davon – oder sogar alle – können im Internet liegen. – siehe Ziel 9 auf Seite 7
9. *Kommunikation*: Die Kommunikation mit ASBA kann mit den Fachbegriffen der einzelnen Fachgebiete erfolgen. – siehe Ziel 10 auf Seite 7
10. *Zugriff*: Der Zugriff auf ASBA kann lokal und über das Internet erfolgen. – siehe Ziel 11 auf Seite 7
11. *Unabhängigkeit*: ASBA kann offline und online arbeiten. – siehe Ziel 12 auf Seite 7
12. *Rekursion*: Es kann rekursiv über alle verwendeten Dateien – auch solchen, die im Internet liegen – ausgewertet werden. – siehe Ziel 13 auf Seite 7
13. *Bedienbarkeit*: ASBA ist einfach zu bedienen. – siehe Ziel 14 auf Seite 7

4.2. Axiome

> > > Axiome auswählen und definieren. < < <

4.3. Beweise

> > > Schlussregeln auswählen und Beweise definieren. < < <

4.4. Datenstruktur

> > > Datenstruktur abstrakt und in XML definieren. < < <

4.5. Bausteine

> > > Bausteine? definieren. < < <

A. Anhang

A.1. Werkzeuge

Da dies ein Open Source Projekt sein soll, müssen alle Werkzeuge, die zum Ablauf der Software erforderlich sind, ebenfalls Open Source sein. Für die reine Entwicklung sollte das auch gelten, muss es aber nicht.

Werkzeuge zur Übersetzung der Quelldateien

1. Ein Übersetzer für LaTeXQuellcode (*.tex). – Verwendet wird *MiKTeX*.
2. Ein Übersetzer für C++ Quellcode (*.c, *.cpp, *.h, *.hpp). – Verwendet wird *Visual Studio Community 2017*.

Nicht unbedingt nötig, aber sinnvoll:

3. Ein Dokumentationssystem für in C++ Quellcode und darin enthaltene Doxygen Kommentare (*.c, *.cpp, *.h, *.hpp). – Verwendet wird *Doxygen* mit Konfigurationsdatei „Doxyfile“.
4. Ein Konfigurationsmanagementsystem zur Verwaltung der Quelldateien. – Verwendet wird *GitHub*.

Werkzeuge für die Entwicklung

5. *GitHub* als Online Konfigurationsmanagementsystem zur Zusammenarbeit verschiedener Entwickler. → `https://github.com/` – Lizenz siehe [7]
6. GitHub benötigt *Git* als Konfigurationsmanagementsystem. → `https://git-scm.com/` – Lizenz siehe [7]
7. *MiKTeX* für Dokumentation und Ausgaben in LaTeX. → `https://miktex.org/` – Lizenz siehe [11]
8. angedacht: *Visual Studio Community 2017*[1)] (*VS*) als Entwicklungsumgebung für C++. → `https://www.visualstudio.com/downloads/` – Lizenz siehe [10]
9. angedacht: In *Visual Studio Community 2015* integrierte Datenbank für Ausgabeschemata, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Fachgebiete. – Lizenz siehe [10]
10. angedacht: *RapidXml* für Ein- und Ausgabe in XML. → `http://rapidxml.sourceforge.net/index.htm` – Lizenz siehe [3] oder wahlweise [13] [2)]
11. angedacht: *Doxygen* als Dokumentationssystem für C++. → `http://www.stack.nl/~dimitri/doxygen/` – Lizenz siehe [7]
12. angedacht: Doxygen benötigt *Ghostscript* als Interpreter für Postscript und PDF. → `http://ghostscript.com/` – Lizenz siehe [5]

[1)] Visual Studio Community ist zwar nicht Open Source, darf aber zur Entwicklung von Open Source Software unentgeltlich verwendet werden.

[2)] RapidXml stellt eine C++ Header-Datei zur Verfügung. Wenn diese im Quellcode eines Programms enthalten ist, gilt das ganze Programm als Open Source. Wenn diese Header-Datei nur in einer Bibliothek innerhalb eines Projekts verwendet wird, so gilt nur diese Bibliothek als Open Source.

13. angedacht: Doxygen benötigt *Graphviz* mit *Dot* zur Erzeugung und Visualisierung von Graphen. → `http://www.graphviz.org/Home.php` – Lizenz siehe [4]

Werkzeuge zur Bearbeitung der Quelldateien

14. *TEXstudio* als Editor für LATEX. → `http://www.texstudio.org/` – Lizenz siehe [7]
TEXstudio benötigt einen Interpreter für Perl:

15. *Strawberry Perl* als Interpreter für Perl. → `http://strawberryperl.com/` – Lizenz: Various OSI-compatible Open Source licenses, or given to the public domain

16. *Notepad++* als Text-Editor. → `https://notepad-plus-plus.org/` – Lizenz siehe [6]

17. *WinMerge* zum Vergleich von Dateien und Verzeichnissen. → `http://winmerge.org/` – Lizenz siehe [6]

A.2. Offene Aufgaben

1. TODOs bearbeiten.
2. Eingabeprogramm erstellen (liest XML).
3. Prüfprogramm erstellen.
4. Ausgabeprogramm erstellen (schreibt XML).
5. Formelausgabe erstellen (erzeugt LATEX aus XML).
6. Axiome sammeln und eingeben.
7. Sätze sammeln und eingeben.
8. Beweise sammeln und eingeben.
9. Fachbegriffe und Symbole sammeln und eingeben.
10. Fachgebiete sammeln und eingeben.
11. Ausgabeschemata sammeln und eingeben.

B. Verzeichnisse

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Wolfgang Rautenberg, *Einführung in die Mathematische Logik*: Ein Lehrbuch, 3. Auflage, Vieweg+Teubner 2008

[2] *Apache License*, Version 2.0 →[1)] http://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0 01.2004[2)]

[3] *Boost Software License* 1.0 → http://www.boost.org/users/license.html 17.08.2003

[4] *Eclipse Public License* Version 1.0 → http://www.eclipse.org/org/documents/epl-v10.php 09.03.2017

[5] *GNU Affero General Public License* → http://www.gnu.org/licenses/agpl 19.11.2007

[6] *GNU General Public License* → http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-1.0 02.1989

[7] *GNU General Public License*, Version 2 → http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-2.0 06.1991

[8] *GNU Lesser General Public License*, Version 2.1 → http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/lgpl-2.1 02.1999

[9] Lizenz für *Clover* → https://www.atlassian.com/software/clover 2017

[10] Lizenz für *Microsoft Visual Studio Express 2015* → https://www.visualstudio.com/de/license-terms/mt171551/ 2017

[11] Lizenz für *MikTeX* → https://miktex.org/kb/copying 13.04.2017

[12] Lizenz für *SAX* → http://www.saxproject.org/copying.html 05.05.2000

[13] *MIT License* → https://opensource.org/licenses/MIT/ 09.03.2017

[14] *Oracle Binary Code License Agreement* → http://java.com/license 02.04.2013

[15] *OSI Certified Open Source Software* → https://opensource.org/pressreleases/certified-open-source.php 16.06.1999

[16] *W3C Document License* → http://www.w3.org/Consortium/Legal/2015/doc-license 01.02.2015

[17] *W3C Software Notice and License* → http://www.w3.org/Consortium/Legal/2002/copyright-software-20021231.html 13.05.2015

[18] *Hilbert II – Introduction* → http://www.qedeq.org/ 20.01.2014

[19] *Formal Correct Mathematical Knowledge*: GitHub Repository vom Projekt Hilbert II → https://github.com/m-31/qedeq/ 18.03.2017

[20] *ASBA – Axiome, Sätze, Beweise und Auswertungen*. Projekt zur maschinellen Überprüfung von mathematischen Beweisen und deren Ausgabe in lesbarer Form: GitHub Repository vom Projekt ASBA – in Bearbeitung → https://github.com/Dr-Winfried/ASBA

1) Der Pfeil (→) verweist stets auf einen Link zu einer Seite im Internet.

2) Das Datum hinter dem Link gibt – je nachdem welches bekannt ist – das Datum der letzten Änderung, den Stand der Seite oder das Datum, an dem die Seite angeschaut wurde an. Sind mehrere Daten vorhanden, wird das erste vorhandene in der angegebenen Reihenfolge genommen. – Dies gilt für alle hier aufgelisteten Seiten im Internet.

[21] Meyling, Michael: *Anfangsgründe der mathematischen Logik* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_logic_v1_de.pdf 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)

[22] Meyling, Michael: *Formale Prädikatenlogik* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_formal_logic_v1_de.pdf 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)

[23] Meyling, Michael: *Axiomatische Mengenlehre* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_set_theory_v1_de.pdf 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)

[24] Meyling, Michael: *Elements of Mathematical Logic* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_logic_v1_en.pdf 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)

[25] Meyling, Michael: *Formal Predicate Calculus* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_formal_logic_v1_en.pdf 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)

[26] Meyling, Michael: *Axiomatic Set Theory* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_set_theory_v1_en.pdf 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)

[27] Wikipedia: *Aussagenlogik* Kapitel 4 *Formaler Zugang* → https://de.wikipedia.org/wiki/Aussagenlogik#Formaler_Zugang 18.01.2018

[28] Wikipedia: *Funktion (Mathematik)* Kapitel 2.1 *Mengentheoretische Definition* → https://de.wikipedia.org/wiki/Funktion_(Mathematik)#Mengentheoretische_Definition 27.01.2018

[29] Wikipedia: *Hilbert-Kalkül* Kapitel 1.4 *Modus (ponendo) ponens* → https://de.wikipedia.org/wiki/Hilbert-Kalk%C3%BCl#Modus_(ponendo)_ponens 18.06.16

[30] Wikipedia: *Identität (Logik)* Kapitel 2.3 *Identität in der Informatik* → https://de.wikipedia.org/wiki/Identit%C3%A4t_(Logik)#Identit.C3.A4t_in_der_Informatik 18.05.2017

[31] Wikipedia: *Junktor* Kapitel 2.2 *Mögliche Junktoren* → https://de.wikipedia.org/wiki/Junktor#M.C3.B6gliche_Junktoren 21.10.2017

[32] Wikipedia: *Kalkül* → https://de.wikipedia.org/wiki/Kalk%C3%BCl 26.02.2017

[33] Wikipedia: *Mengenlehre* → https://de.wikipedia.org/wiki/Mengenlehre 17.01.2018

[34] Wikipedia: *Prädikatenlogik erster Stufe* → https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik_erster_Stufe 26.11.2017

[35] Wikipedia: *Relation (Mathematik)* Kapitel 1.1 *Mehrstellige Relation* → https://de.wikipedia.org/wiki/Relation_(Mathematik)#Mehrstellige_Relation 27.01.2018

[36] Wikipedia: *Schlussregel* → https://de.wikipedia.org/wiki/Schlussregel 29.03.2015

[37] Wikipedia: *Systeme natürlichen Schließens* → https://de.wikipedia.org/wiki/Systeme_nat%C3%BCrlichen_Schlie%C3%9Fens 25.10.2017

Index

Index und Symbolverzeichnis enthalten keine gemeinsamen Einträge. Andererseits erscheinen sie aber überwiegend auch im Glossar. Mit *kursiven* Seitenzahlen wird auf die Definition oder sonstige wichtige Stellen verwiesen.

Symbolverzeichnis

Index und Symbolverzeichnis enthalten keine gemeinsamen Einträge. Andererseits erscheinen sie aber überwiegend auch im Glossar. Mit *kursiven* Seitenzahlen wird auf die Definition oder sonstige wichtige Stellen verwiesen.

Glossar

Die Einträge im Glossar kommen auch entweder im Index oder im Symbolverzeichnis vor. Die Sortierung insbesondere der Symbole unterscheidet sich dabei. Mit *kursiven* Seitenzahlen wird auf die Definition oder sonstige wichtige Stellen verwiesen.

$:=$ DEFINITION: … *definitionsgemäß gleich* … 12, 14, 15, 17, 20, 21, 24, 25, 27–29

$\vdash_R$ Eine Darstellung der RELATION R aus $\mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$ als ABLEITUNGSRELATION. 21

$\vdash$ ABLEITUNGSRELATION: … ABLEITBAR (BEWEISBAR) … 17, 21–24, 31, 32, 34, 36, 38, 53, 57

$=$ Eine METARELATION: … *gleich* (ist dasselbe wie; ist identisch zu) …
– Siehe GLEICHHEIT.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.2.2.2 auf Seite 19 und siehe Unterabschnitt 2.4.3 auf Seite 28.
15–17, 19–21, 23, 28, 32, 33

$\equiv$ Eine METARELATION: … *äquivalent zu* (ist das gleiche wie; ist so wie) …
– Siehe ÄQUIVALENZ.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.2.2.2 auf Seite 19 und siehe Unterabschnitt 2.4.3 auf Seite 28.
20, 28

$\wedge$ Ein binärer JUNKTOR: … *und* …
– Zur Definition siehe Tabelle 2.3 auf Seite 26. 17, 19, 21, 26–32, 38

$\leftrightarrow$ Ein binärer JUNKTOR: … *genau dann wenn* …
– Zur Definition siehe Tabelle 2.3 auf Seite 26. 17, 26, 27, 29

$\perp$ Ein 0-stelliger JUNKTOR, d. h. eine aussagenlogische Konstante (WAHRHEITSWERT): falsch
– Zur Definition siehe Tabelle 2.3 auf Seite 26. 26, 27, 29

$\rightarrow$ Ein binärer JUNKTOR: *Aus* … *folgt* …
– Zur Definition siehe Tabelle 2.3 auf Seite 26. 16, 17, 22, 24, 26–31, 34, 38

$\uparrow$ Ein binärer JUNKTOR: *Nicht zugleich… und* …
– Zur Definition siehe Tabelle 2.3 auf Seite 26. 17, 26–29

$\downarrow$ Ein binärer JUNKTOR: *Weder* … *noch* …
– Zur Definition siehe Tabelle 2.3 auf Seite 26. 17, 26–29

$\neg$ Ein unärer JUNKTOR: *Nicht* …
– Zur Definition siehe Tabelle 2.3 auf Seite 26. 17, 18, 26–32, 34, 36, 38

$\vee$ Ein binärer JUNKTOR: … *oder* …
– Zur Definition siehe Tabelle 2.3 auf Seite 26. 17, 19, 26–29

$\leftarrow$ Ein binärer JUNKTOR: … *folgt aus* …
– Zur Definition siehe Tabelle 2.3 auf Seite 26. 17, 26–29

$\top$ Ein 0-stelliger JUNKTOR, d. h. eine aussagenlogische Konstante (WAHRHEITSWERT): wahr
– Zur Definition siehe Tabelle 2.3 auf Seite 26. 26, 27, 29

$+$ Ein binärer JUNKTOR: *entweder* … *oder* …
– Zur Definition siehe Tabelle 2.3 auf Seite 26. 17, 26, 27, 29

& Eine METAOPERATION: … *und* …
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.2.1 auf Seite 18. 12, 15–20, 22, 23, 31

:⇔ Eine METADEFINITION: … *definitionsgemäß genau dann wenn* … 12, 14, 15, 17, 18, 20–22, 28, 31

⇔ Eine METARELATION: … *genau dann wenn* …
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.2.1 auf Seite 18. 15, 17–19, 21–23

⇒ Eine METARELATION: … *dann auch* …, die Umkehrrelation zu ⇐
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.2.1 auf Seite 18. 17, 18, 20, 22, 23, 27, 28

∼ Eine unäre METAOPERATION: …emphgilt nicht
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.2.1 auf Seite 18. 17, 18

|| Eine METAOPERATION: … *oder* …
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.2.1 auf Seite 18. 12, 15, 17–19

⇐ Eine METARELATION: … *sofern* …, die Umkehrrelation zu ⇒
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.2.1 auf Seite 18. 16–18

≠ Eine (META-)OPERATION: … *ungleich* (nicht dasselbe wie; nicht identisch zu) … 19

≢ Eine METARELATION: … *nicht äquivalent* (ist nicht das gleiche wie; ist nicht so wie) … 20

⊛ Beispielsymbol für eine binäre OPERATION.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 15. 15–17, 27, 28

⊖ Beispielsymbol für eine unäre OPERATION.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 15. 15, 16, 27, 28

∽ Beispielsymbol für eine binäre RELATION
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 15. 15, 17

⋍ Beispielsymbol für eine binäre RELATION mit GLEICHHEIT
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 15. 15, 17

∼ Beispielsymbol für eine binäre RELATION mit UMKEHRRELATION ∽
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 15. 15–18, 43

≃ Beispielsymbol für eine binäre RELATION mit GLEICHHEIT und UMKEHRRELATION ⋍
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 15. 15–17, 43

≁ Verneinung von ∼.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 15. 15, 17

≄ Verneinung von ≃.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 15. 15, 17

| Eine METAOPERATION: … *und* …
– Wird nur bei den SCHLUSSREGELN verwendet. 17, 19, 22, 31

⊂ Teilmengenbeziehung: … *ist echte Teilmenge von* … ; Insbesondere kann keine Gleichheit bestehen. In der Literatur wird ⊂ oft im Sinne von ⊆ verwendet.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.1 auf Seite 12. 12, 17, 21, 26–28

⊆ Teilmengenbeziehung: … *ist Teilmenge von* … ; Insbesondere kann Gleichheit bestehen.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.1 auf Seite 12. 12, 14, 17, 21, 24, 25, 27, 28

⟻ SUBSTITUTION: … *substituiert durch* …
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.1.2 auf Seite 32. 31, 32

⊃ Teilmengenbeziehung: … *ist echte Obermenge von* … ; Insbesondere kann keine Gleichheit bestehen. In der Literatur wird ⊃ oft im Sinne von ⊇ verwendet. 17, 26

$\supseteq$ Teilmengenbeziehung: ... *ist Obermenge von* ... ; Insbesondere kann Gleichheit bestehen. 17, 31

$\leftrightarrows$ VERTAUSCHUNG: ... *vertauscht mit* ...
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.1.2 auf Seite 32. 32

($\neg$1) Eine SCHLUSSREGEL - Einführung/Beseitigung von $\langle\neg\rangle$ Teil 1. 48

($\neg$2) Eine SCHLUSSREGEL - Einführung/Beseitigung von $\langle\neg\rangle$ Teil 2. 48

($\neg$3) Eine SCHLUSSREGEL - Beweistechnik „Indirekter BEWEIS“. 48

($\neg$4) Eine SCHLUSSREGEL - Reductio ad absurdum (Indirekter BEWEIS). 48

$\mathcal{A}$ Das Alphabet der aussagenlogischen SPRACHE.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.4.2.2 auf Seite 27. 27, 28

ableitbar Wenn sich eine FORMEL β aus einer anderen FORMEL α mittels ZULÄSSIGER TRANSFORMATIONEN ableiten lässt, heißt β ABLEITBAR aus α. Sprechweise: ⟪α ableitbar β⟫. Eine oder beide FORMELN α bzw. β dürfen dabei durch FORMELMENGEN ersetzt werden.
– Siehe ABLEITUNGSRELATION und $\vdash$.
– Synonym: BEWEISBAR. 21, 31

Ableitung Eine AUSSAGE $A \vdash B$ bzw. allgemeiner $A \vdash_R B$. Dies entspricht einem Element (A, B) einer ABLEITUNGSRELATION $\vdash$ bzw. $\vdash_R$. Die semantische Aussage ist, das die FORMELN von B aus den FORMELN von A abgeleitet werden können. 21–25, 36, 38, 43

Ableitungsrelation Eine binäre RELATION $\vdash$ bzw. allgemeiner $\vdash_R$ aus $\mathcal{P}(\mathcal{L})$. Siehe auch ABLEITUNG 17, 21, 22

Abtrennungsregel Eine SCHLUSSREGEL – siehe TR. 34

allgemeingültig Eine SCHLUSSREGEL heißt **allgemeingültig**, wenn sie aus den BASISREGELN und schon bekannten ALLGEMEINGÜLTIGEN SCHLUSSREGELN abgeleitet werden kann.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.3.3 auf Seite 22. 23, 25, 31, 35, 36, 38, 43

Anfangsregel Die SCHLUSSREGEL AR um anfangen zu können. 32

Äquivalenz Eine GLEICHHEITSRELATION: Zwei Objekte A und B sind *gleich* (äquivalent), $A \equiv B$, wenn sie in den INTERESSIERENDEN EIGENSCHAFTEN für $\equiv$ übereinstimmen.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.2.2.2 auf Seite 19. 20, 26

Äquivalenzrelation Eine binäre RELATION $\sim$ auf einer Menge M mit folgenden Eigenschaften:

reflexiv $(a \sim a)$

transitiv $(((a \sim b) \mathbin{\&} (b \sim c)) \Rightarrow (a \sim c))$

symmetrisch $((a \sim b) \Rightarrow (b \sim a))$

jeweils für alle Elemente a, b und c aus M.
– Siehe Paragraph 2.2.2.2 auf Seite 19. 20

ASBA Programmsystem, das **A**xiome, **S**ätze, **B**eweise und **A**uswertungen behandeln kann. 4–7, 9–12, 16, 20, 21, 23–25, 27, 39, 40, 43

atomar Synonym zu UNZERLEGBAR, siehe dort; vergleiche auch ZERLEGBAR. Das Attribut betrifft AUSSAGEN und FORMELN. 18, 28

Ausgabeschema Ein Schema, mit dem bestimmte mathematische OBJEKTE ausgegeben werden sollen. 6, 9, 10, 39, 41, 42

Aussage Eine AUSSAGE in natürlicher Sprache oder als FORMEL, die einen WAHRHEITSWERT liefert.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.2.1 auf Seite 18. 10, 13, 18–20, 23, 25, 26, 32, 35–38

Aussagenlogik – Zur Definition siehe Abschnitt 2.4 auf Seite 25. 21, 25, 27

$\mathcal{A}_x$ Eine Teilmenge des Alphabets $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen SPRACHE.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.4.2.2 auf Seite 27. 27, 28

Axiom Eine FORMEL, die unbewiesen als wahr angesehen wird.
– Standardsymbole: X = ein Axiom, $\mathcal{X}$ = eine Menge von Axiomen
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.3.3 auf Seite 22 und 2.4.4 auf Seite 30. 1, 4–6, 8–12, 19–23, 27, 28, 30, 32, 33, 39, 40, 42

($\wedge$B) Eine SCHLUSSREGEL - Beseitigung von $\langle\wedge\rangle$. 48

($\rightarrow$ B) Eine SCHLUSSREGEL - Beseitigung von $\langle\rightarrow\rangle$. 48

($=$ B) Eine SCHLUSSREGEL - Beseitigung von $\langle=\rangle$. 48

Basisregel Eine SCHLUSSREGEL, die nicht mehr auf andere zurückgeführt wird. Obwohl das auch auf die IDENTITÄTSREGELN zutrifft, werden diese hier aber nicht dazu gezählt.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.1.1 auf Seite 31. 31–34, 36, 43

beschränkt Eine SCHLUSSREGEL heißt BESCHRÄNKT, wenn sie nur endlich viele Voraussetzungen und Folgerungen hat. 22–24

Beweis Eine zulässige Ableitung von FOLGERUNGEN aus gegebenen VORAUSSETZUNGEN.
– Siehe Abschnitt 2.3 auf Seite 20. 1, 4–6, 8–12, 16, 20, 21, 23–25, 27, 28, 34, 35, 37, 39–42

beweisbar Synonym zu ABLEITBAR. 21, 31

Beweisschritt Eine Vorschrift, wie aus vorgegebenen AUSSAGEN (den VORAUSSETZUNGEN) weitere (die FOLGERUNGEN) folgen.
– Standardsymbole: B = ein Beweisschritt, $\mathcal{S}$ = eine Folge von Beweisschritten, $\mathcal{B}$ = eine Menge von Beweisschritten
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.3.6 auf Seite 25. 10, 12, 16, 25, 36

Beweisschrittfolge Eine Folge von BEWEISSCHRITTEN.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.3.6 auf Seite 25. 25

Beweisschrittmenge Eine Menge von BEWEISSCHRITTEN, insbesondere die Menge der Glieder einer BEWEISSCHRITTFOLGE.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.3.6 auf Seite 25. 25

Definition Eine Definition mit Hilfe des Symbols $\langle:=\rangle$. $\langle\langle A := B\rangle\rangle$ steht für „*A ist definitionsgemäß gleich B*“ für OBJEKTE A und B. Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B.
– Man vergleiche auch den Begriff „METADEFINITION“ und das zugehörige SYMBOL $\langle:\Leftrightarrow\rangle$.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.2.2.3 auf Seite 20. 16, 17, 20, 31

Definitionsbereich einer FUNKTION.
– Symbol:
– Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt 2.1.3 auf Seite 14. 14

($\wedge$E) Eine SCHLUSSREGEL - Einführung von $\langle\wedge\rangle$. 48

($\rightarrow$ E) Eine SCHLUSSREGEL - Einführung von $\langle\rightarrow\rangle$. 48

($=$ E) Eine SCHLUSSREGEL - Einführung von $\langle=\rangle$. 48

Eigenschaft, interessierende Solche Eigenschaften von OBJEKTEN, die im aktuellen Zusammenhang von Interesse sind, z. B. einen bestimmten Wert zu haben, Element einer bestimmten Menge zu sein, ein bestimmtes OBJEKT zu bezeichnen, usw. 19, 20

Ergebnis Ein ERGEBNIS eines BEWEISES.
– Standardsymbole: O = ein Ergebnis $\mathcal{O}$ = eine Menge von Ergebnissen $\vdash_{\mathcal{O}}$ = eine Relation (als Menge aufgefasst) aus Ergebnissen
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.3.4 auf Seite 24. 24

Fachbegriff Ein Name für einen mathematischen Begriff. 4–7, 10, 39–42

Fachgebiet Ein Teil der Mathematik mit einer zugehörigen Basis aus AXIOMEN, SÄTZEN, FACHBEGRIFFEN und Darstellungsweisen. 4–7, 10, 39–42

Folgerung Die FOLGERUNGEN einer SCHLUSSREGEL $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{F}}$ sind die Elemente von $\mathbf{F}$.
– Standardsymbole: $\mathbf{f}$ = eine Folgerung $\mathbf{F}$ = eine Menge von Folgerungen $\vdash_{\mathbf{F}}$ = eine Relation (als Menge aufgefasst) aus Folgerungen
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.3.3 auf Seite 22. 16, 22, 23, 25, 32, 35–37

Formel Unter einer FORMEL verstehen wir stets eine mathematische FORMEL. Diese kann aus einem einzigen SYMBOL bestehen (ATOMARE FORMEL), andererseits aber auch mehrdimensional sein, lässt sich dann aber mittels geeigneter DEFINITIONEN immer eindeutig als eine ZEICHENFOLGE schreiben. SÄTZE, BEWEISE und SCHLUSSREGELN betrachten wir *nicht* als FORMELN.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.1 auf Seite 12
– Zur Definition siehe Paragraph 2.4.2.2 auf Seite 27. 13, 16–19, 21–25, 27, 28, 31–33

Formelmenge Eine Menge von FORMELN, oft mit $\mathcal{L}$ bezeichnet. Man nennt $\mathcal{L}$ auch eine SPRACHE und ihre Elemente WORTE, insbesondere dann, wenn es eindeutige Regeln zur Konstruktion von $\mathcal{L}$ gibt. Wir bevorzugen „FORMEL“ und „FORMELMENGE“. 21, 28, 29

Funktion Eine n-STELLIGE FUNKTION f von einer Menge $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, dem DEFINITIONSBEREICH, in eine Menge B, den ZIELBEREICH, ist eine (n+1)-stellige RELATION $(G, A_1, \ldots, A_n, B)$ derart, dass es für jedes $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ genau ein $b \in B$ gibt mit $(a_1, \ldots, a_n, b) \in f$. Dieses b wird auch mit $\langle\langle f(a_1, \ldots, a_n)\rangle\rangle$, $\langle\langle f a_1 \ldots a_n\rangle\rangle$, $\langle\langle f(\vec{a})\rangle\rangle$ oder $\langle\langle f\vec{a}\rangle\rangle$ bezeichnet.
Schreibweise: $\langle\langle f : A \to B\rangle\rangle$ bzw. $\langle\langle f : A_1 \times \cdots \times A_n \to B\rangle\rangle$
– Zur Definition siehe Abschnitt 2.1.3 auf Seite 14. 14, 15, 24, 27

Funktionswert einer FUNKTION.
– Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt 2.1.3 auf Seite 14. 14

Gleichheit Eine GLEICHHEITSRELATION: Zwei Objekte A und B sind *identisch*, $A = B$, wenn sie in den INTERESSIERENDEN EIGENSCHAFTEN für $=$ übereinstimmen.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.2.2.2 auf Seite 19 19, 20, 50, 51

Gleichheitsrelation Eine mit GLEICHHEIT verwandte RELATION: $=$, $\neq$, $\equiv$ und $\not\equiv$. 17, 20

Graph einer FUNKTION oder RELATION.
– Symbol: graph graph
– Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt 2.1.3 auf Seite 14. 14

graph graph(X) ist der GRAPH der Funktion bzw. Relation X.
– Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt 2.1.3 auf Seite 14. 53

Identitätsregel Eigentlich eine BASISREGEL zur Identität. Da die IDENTITÄTSREGELN nur zur Rechtfertigung der SUBSTITUTION verwendet werden, werden sie hier nicht zu den BASISREGELN gezählt.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 3.1.2 auf Seite 32. 33

$\mathcal{J}$ Die Menge der JUNKTORSYMBOLE.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.4.2.1 auf Seite 27. 27–30

Junktor Eine aussagenlogische OPERATION. Da die Werte einer aussagenlogischen OPERATION WAHRHEITSWERTE sind, kann man einen JUNKTOR auch als RELATION verstehen.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.3 auf Seite 14
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.4.3 auf Seite 28. 15, 16, 19, 25–29, 31

Junktorsymbol Ein SYMBOL für einen JUNKTOR.[3] 25, 27

$\mathcal{J}_x$ Eine Teilmenge der Menge $\mathcal{J}$ der JUNKTORSYMBOLE.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.4.2.1 auf Seite 27. 27, 28

$\mathcal{K}$ Die Menge der aussagenlogischen Konstanten.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.4.2.1 auf Seite 27. 27, 28

Kontraposition Die allgemeingültige AUSSAGE: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$. 38, 43

Kontravalenz Eine GLEICHHEITSRELATION: Zwei Objekte A und B sind *nicht gleich* (nicht äquivalent), $A \not\equiv B$, wenn sie in mindestens einer INTERESSIERENDEN EIGENSCHAFT für $\equiv$ nicht übereinstimmen.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.2.2.2 auf Seite 19. 20, 26

$\mathcal{L}$ Die Menge der aussagenlogischen FORMELN mit Klammerung. 27–29

len len$(\vec{a})$ ist die Länge, d. h. die Anzahl der Elemente eines Vektors.
– Symbol: len 14, 20

$\mathcal{L}^{\mathrm{P}}$ Die Menge der aussagenlogischen FORMELN in polnischer Notation. 28

$\mathcal{L}^{\mathrm{P}}_x$ Eine Teilmenge der Menge $\mathcal{L}^{\mathrm{P}}$ der aussagenlogischen FORMELN in polnischer Notation. 28

$\mathcal{L}_x$ Eine Teilmenge der Menge $\mathcal{L}$ der aussagenlogischen FORMELN mit Klammerung. 27–29

M^0 $\{()\}$, wobei $()$ das 0-Tupel ist.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.1 auf Seite 12. 21

Mengenlehre – Zur Definition siehe Abschnitt 2.6 auf Seite 30. 26

Metadefinition Eine DEFINITION in der METASPRACHE mit Hilfe des *Metadefinitionssymbols* $\langle :\Leftrightarrow \rangle$. $\langle\!\langle A :\Leftrightarrow B \rangle\!\rangle$ steht für „*A ist definitionsgemäß gleich B*“ für AUSSAGEN A und B. Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B.
– Man vergleiche auch den Begriff „DEFINITION“ und das zugehörige SYMBOL $\langle := \rangle$.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.2.2.3 auf Seite 20. 17, 20

Metaoperation Eine OPERATION der METASPRACHE: &, || oder |.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.2.1 auf Seite 18. 16–18, 22

Metarelation Eine RELATION der METASPRACHE: $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ oder $\Leftrightarrow$.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.2.1 auf Seite 18. 18

Metasprache Eine Sprache, in der AUSSAGEN über Elemente einer anderen Sprache getroffen werden können. In diesem Dokument ist dies immer die normale Sprache.
– Siehe Abschnitt 2.2 auf Seite 18. 18

M^n Das kartesische Produkt $M \times \cdots \times M$ aus n Mengen M mit $n \in \mathbb{N}_0$.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.1 auf Seite 12. 15, 21

Monotonieregel Eine SCHLUSSREGEL. – siehe MR. 31, 32

$\mathbb{N}$ Die Menge der natürlichen Zahlen ohne 0.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.1 auf Seite 12 12

[3] Entsprechend *Funktionssymbol*, *Operatorsymbol*, *Relationssymbol*, usw.

$\mathbb{N}_0$ Die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.1 auf Seite 12. 12, 14, 21, 23, 25, 27

Notation, Polnische Bei der POLNISCHEN NOTATION stehen die Operanden bzw. Argumente von RELATIONEN und FUNKTIONEN stets rechts von den Relations- und Funktionssymbolen. Dadurch kann auf Gliederungszeichen wie Klammern und Kommata verzichtet werden. Noch einfacher für Computer ist die **umgekehrte** POLNISCHE NOTATION, bei der die Operanden und Argumente links von den Symbolen stehen. 27

$\mathcal{O}$ Die Menge der binären JUNKTOREN.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.4.2.1 auf Seite 27. 27, 28

Objekt SYMBOLE, FORMELN und AUSSAGEN sowie Mengen, ZEICHENFOLGEN, Zahlen; ganz allgemein reale oder gedachte Dinge an sich.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.1 auf Seite 12. 13, 19, 20

Operation Eine – meistens binäre, d. h. zweiwertige – Funktion $M^n \to M$. Für eine binäre OPERATION $\circledast : M \times M \to M$ schreibt man meistens $x \circledast y$ statt $\circledast(x, y)$.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.3 auf Seite 14
– Siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 15 und 2.4.1 auf Seite 25. 15–19, 25, 26

$\mathcal{P}$ POTENZMENGE. 21–24, 51

$\mathcal{P}_e$ Menge der endlichen Teilmengen. 21, 24

Potenzmenge Die POTENZMENGE $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge ihrer Teilmengen.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.1 auf Seite 12. 21

Prädikatenlogik – Zur Definition siehe Abschnitt 2.5 auf Seite 30. 21, 25, 27

$\mathcal{Q}$ Die Menge der aussagenlogischen Variablen q_i für $i \in \mathbb{N}_0$.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.4.2.1 auf Seite 27. 27, 28

$\mathcal{R}$ Menge der binären Relationen. 21–24

$\mathcal{R}_e$ Menge der endlichen binären Relationen. 21, 24

Relation Eine n-STELLIGE RELATION R ist ein (1+n)-Tupel $(G, A_1, \ldots, A_n)$ mit $G \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n)$.
– Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt 2.1.3 auf Seite 14
– Siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 15 und 2.2.2 auf Seite 19. 14–16, 18, 21, 27

Satz Eine mathematische AUSSAGE, dass bestimmte FOLGERUNGEN aus gegebenen VORAUSSETZUNGEN abgeleitet werden können. 1, 4–6, 9–12, 27, 31, 39, 41

Satz, formal Formale Darstellung eines mathematischen SATZES.
– Siehe FS; zur Definition siehe Unterabschnitt 2.3.3 auf Seite 22. 22, 23

Schlussregel Eine SCHLUSSREGEL $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{F}}$ entspricht der AUSSAGE:

> Wenn alle VORAUSSETZUNGEN $\mathbf{v}$ aus $\mathbf{V}$ zutreffen, dann auch alle FOLGERUNGEN $\mathbf{f}$ aus $\mathbf{F}$.

Wenn diese AUSSAGE zutrifft, kann die Schlussregel zur ZULÄSSIGEN TRANSFORMATION von FORMELN dienen.
– Standardsymbole: C = eine Schlussregel $\mathcal{C}$ = eine Menge von Schlussregeln
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.3.3 auf Seite 22. 17, 20, 22–25, 31–38, 43, *siehe* allgemeingültig

Schnittregel Eine ALLGEMEINGÜLTIGE SCHLUSSREGEL.
– Siehe SR. 34–36, 43

Set $\mathrm{Set}(\vec{a})$ ist die Menge der Elemente eines Vektors.
– Symbol: Set 14, 20–24

Signatur, Boolsche Die LOGISCHE SIGNATUR $\{\neg, \wedge, \vee\}$. 28, 29

Signatur, logische Eine Teilmenge von $\mathcal{J}$, ausreichend um damit alle anderen Elemente von $\mathcal{J}$ zu definieren. 28, 30

Sprache – Siehe FORMELMENGE. 13, 24, 27

Stelligkeit einer FUNKTION oder RELATION.
– Symbole: $\mathrm{stel_f}$ = Stelligkeit einer Funktion, $\mathrm{stel_r}$ = Stelligkeit einer Relation,
– Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt 2.1.3 auf Seite 14. 14

Substitution Eine FUNKTION zur TRANSFORMATION einer FORMEL mittels SUBSTITUTION in eine gleichwertige. Die SUBSTITUTION heißt **zulässig**, wenn sie vorgegebene Regeln erfüllt.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.3.4 auf Seite 24. 17, 24, 28, 31–33, 35, 36, 57

Symbol Ein **einfaches** SYMBOL ist ein druckbares typographisches Zeichen. Ein **zusammengesetztes** SYMBOL besteht aus mehreren einfachen SYMBOLEN. In beiden Fällen wird ein SYMBOL als **UNZERLEGBAR** angesehen.
– Zur Definition siehe Abschnitt 2.1 auf Seite 12. 12, 13, 19

$\mathcal{T}$ TUPELMENGE. 21, 23, 24

Transformation Eine Umformung oder Erzeugung einer FORMEL aus einer vorgegebenen Menge von FORMELN, d. h. die Anwendung einer SCHLUSSREGEL.

Eine TRANSFORMATION heißt **zulässig**, wenn sie Element einer vorgegebenen Menge von TRANSFORMATIONEN oder eine daraus zulässigerweise abgeleitete TRANSFORMATION ist.

Standardsymbole: T = eine Transformation, $\mathcal{T}$ = eine Folge von Transformationen 23, 25, 31–33

Transformationsfolge Eine Folge von TRANSFORMATIONEN.
– Standardsymbol: $\mathcal{T}$
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.3.6 auf Seite 25. 25

Trägermenge einer RELATION.
– Symbol: car
– Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt 2.1.3 auf Seite 14. 14

Tupel Ein n-TUPEL $\vec{a}$ ist eine endliche Folge $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ seiner Komponenten a_i.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.1.3 auf Seite 14. 14, 20, 21, 23, 24

$\mathcal{U}$ Die Menge der unären JUNKTOREN.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.4.2.1 auf Seite 27. 27, 28

Umkehrrelation Die UMKEHRRELATION zu einer binären RELATION (G, A, B) ist die RELATION $(\{(b, a) | (a, b) \in G\}, B, A)$. Üblicherweise wird das zugehörige Relationssymbol gespiegelt. 14, 15

Ungleichheit Eine GLEICHHEITSRELATION: Zwei Objekte A und B sind *nicht identisch*, $A \neq B$, wenn sie in mindestens einer INTERESSIERENDEN EIGENSCHAFT für $=$ nicht übereinstimmen.
– Zur Definition siehe Paragraph 2.2.2.2 auf Seite 19. 12, 19

unzerlegbar Eine AUSSAGE, die keine METAOPERATION, bzw. eine FORMEL, die keine OPERATION und keine RELATION enthält, heißt UNZERLEGBAR.
– Synonym: ATOMAR; vergleiche auch ZERLEGBAR. 18, 28

vergleichbar Zwei OBJEKTE A und B sind VERGLEICHBAR, wenn beide von derselben Art sind, d. h. wenn beide z. B. jeweils Mengen, ZEICHENFOLGEN, Zahlen, usw. sind. Dabei muss bei FORMELN zwischen der FORMEL an sich und dem Ergebnis der FORMEL unterschieden werden.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.2.2.1 auf Seite 19. 19, 32

Vertauschung Die VERTAUSCHUNG von zwei unabhängigen Teil-FORMELN (α und β) in einer anderen FORMEL (γ)
– Formal: $\gamma(\alpha \leftrightarrows \beta)$. Die VERTAUSCHUNG ist eine spezielle Form der SUBSTITUTION.
– Zur Definition siehe (3.1) im Unterabschnitt 3.1.2 auf Seite 32. 29, 32, 33

Voraussetzung Die VORAUSSETZUNGEN einer SCHLUSSREGEL $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{F}}$ sind die Elemente von $\mathbf{V}$.
– Standardsymbole: $\mathbf{v}$ = eine Voraussetzung, $\mathbf{V}$ = eine Menge von Voraussetzungen, $\vdash_{\mathbf{V}}$ = eine Relation (als Menge aufgefasst) aus Voraussetzungen
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.3.3 auf Seite 22. 16, 22, 23, 25, 32, 33, 35–37

Wahrheitswert Die Werte $\langle\top\rangle$ und $\langle\bot\rangle$, oft auch mit $\langle$*wahr*$\rangle$ bzw. $\langle$*falsch*$\rangle$, $\langle$true$\rangle$ bzw. $\langle$false$\rangle$ oder einfach $\langle 1\rangle$ bzw. $\langle 0\rangle$ bezeichnet. 19, 25, 26

Wort Ein Element einer SPRACHE. In dem Fall Synonym zu FORMEL.
– Siehe FORMELMENGE. 13

Zeichenfolge Folgen von SYMBOLEN, wobei Leerstellen und sonstiger Zwischenraum nicht zählen und nur zur besseren Darstellung dienen. Dabei sind als spezielle SYMBOLE auch ZEICHENKETTEN erlaubt, solange die Zerlegung eindeutig bleibt. Z. B. kann $\langle$sin$\rangle$ als ein einzelnes SYMBOL – für die Sinusfunktion – aufgefasst werden, aber auch als Folge der Buchstaben $\langle$s$\rangle$, $\langle$i$\rangle$ und $\langle$n$\rangle$. FORMELN werden immer als ZEICHENFOLGEN aufgefasst.
– Siehe auch ZEICHENKETTE.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.2.2.3 auf Seite 20. 13, 19, 21

Zeichenkette Folgen von SYMBOLEN, auch Leerstellen und sonstigem Zwischenraum.
– Siehe auch ZEICHENFOLGE.
– Zur Definition siehe Unterabschnitt 2.2.2.3 auf Seite 20. 13, 19, 28

zerlegbar Eine AUSSAGE, die eine METAOPERATION, bzw. eine FORMEL, die eine OPERATION oder eine RELATION enthält, heißen ZERLEGBAR.
– Vergleiche auch UNZERLEGBAR. 18, 28

Ziel In diesem Dokument sind ZIELE die Anforderungen an ASBA. 6

Zielbereich einer FUNKTION.
– Symbol: tar
– Zur genaueren Definition siehe Unterabschnitt 2.1.3 auf Seite 14. 15

zulässig Ein Attribut einer TRANSFORMATION bzw. SUBSTITUTION. 23, 31–33