

ASBA

Axiome, Sätze, Beweise und Ausgaben

**Projekt zur maschinellen Überprüfung von mathematischen Beweisen und deren
Ausgabe in lesbarer Form**

Winfried Teschers

13. Februar 2017

Es wird ein System beschrieben, das zu eingegebenen Axiomen, Sätzen, und
Beweisen letztere prüft, Auswertungen generiert und zu gegebenen
Ausgabeschemata eine Ausgabe der Elemente in üblicher Formelschreibweise
im \LaTeX -Format erstellt.

Inhaltsverzeichnis

1. Analyse	3
1.1. Fragen	3
1.2. Mission	4
1.3. Ziele	4
1.4. Zusammenhänge	5
2. Design	8
2.1. Anforderungen	8
2.2. Datenstruktur	8
2.3. Bausteine	8
2.4. Werkzeuge	8
A. Anhang	9
A.1. Offene Aufgaben	9
Tabellenverzeichnis	10
Abbildungsverzeichnis	10
Literaturverzeichnis	10

Copyright (C) 2017 Winfried Teschers

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. You should have received a copy of the GNU Free Documentation License along with this document. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.

Dr. Winfried Teschers
Anton-Günther-Straße 26c
91083 Baiersdorf
Germany

e-mail: winfried.teschers@t-online.de

1. Analyse

In der Mathematik gibt es eine unüberschaubare Menge an Axiomen, Sätzen, Beweisen, Fachbegriffen¹ und Fachgebieten. Dabei verstehen wir unter einem *Fachgebiet* einen Teil der Mathematik mit einer zugehörigen Basis von Axiomen, Sätzen und spezifischen Fachbegriffen, zum Beispiel *Logik*, *Mengenlehre* und *Gruppentheorie*². Zu den meisten Fachgebieten gibt es auch noch ungelöste Probleme.

Es fehlt ein System, das einen Überblick bietet und die Möglichkeit, Beweise automatisch zu überprüfen. Außerdem sollte all dies in üblicher mathematischer Schreibweise ein- und ausgegeben werden können.

Ein System mit ähnlicher Aufgabenstellung findet sich in [1] und das zugehörige GitHub Repository in [2]. Einige Ideen sind von dort übernommen worden. Das GitHub Repository dieses Projekts findet sich in [3].

1.1. Fragen

Einige der Fragen, die in diesem Zusammenhang auftauchen, werden hier formuliert:

1. *Grundlagen*: Was sind die Grundlagen? Zum Beispiel welche Logik und Mengenlehre.
2. *Basis*: Welche wichtigen Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Fachgebiete gibt es? Welche davon sind Standard?
3. *Axiome*: Welche Axiome werden bei einem Satz oder Beweis vorausgesetzt? Allgemein anerkannte oder auch strittige, wie zum Beispiel den *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* (*tertium non datur*) oder das *Auswahlaxiom*.
4. *Beweis*: Ist ein Beweis fehlerfrei?
5. *Konstruktion*: Gibt es einen konstruktiven Beweis?
6. *Vergleiche*: Welcher Beweis ist besser? Nach welchem Kriterium? Zum Beispiel elegant, kurz, einsichtig oder wenige Axiome. Was heißt eigentlich *elegant*?
7. *Definitionen*: Was ist mit einem Fachbegriff oder Fachgebiet jeweils genau gemeint? Zum Beispiel *Stetigkeit*, *Integral* und *Analysis*.
8. *Abhängigkeiten*: Wie heißt ein Fachbegriff oder Fachgebiet in einer anderen Sprache? Ist wirklich dasselbe gemeint? Was ist mit Fachbegriffen in verschiedenen Fachgebieten?
9. *Überblick*: Ist ein Axiom, Satz, Beweis, Fachbegriff oder Fachgebiet schon einmal – ggf. abweichend – definiert, formuliert oder bewiesen worden?
10. *Darstellung*: Wie kann man einen Satz und den zugehörigen Beweis – ggf. auch spezifisch für ein Fachgebiet – darstellen?
11. *Forschung*: Welche Probleme gibt es noch zu erforschen.

¹ *Fachbegriffe* sind Namen für Axiome, Sätze, Beweise und Fachgebiete. Symbole können als spezielle Fachbegriffe aufgefasst werden.

² Ein Fachgebiet kann hier sehr klein sein und im Extremfall einen einzigen Satz enthalten. *Umgebung* wäre in diesem Projekt eine bessere Bezeichnung, könnte aber zu Verwechslungen führen, da dies schon ein verbreiteter Fachbegriff ist.

1.2. Mission

Um zur Lösung obiger Fragen beizutragen, soll ein System entwickelt werden, das die folgenden Eigenschaften hat:

1. *Daten*: Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Fachgebiete können in formaler Form gespeichert werden – auch nicht oder unvollständig bewiesene Sätze. Dabei soll die übliche mathematische Schreibweise verwendet werden können.
2. *Definitionen*: Es können Fachbegriffe für Axiome, Sätze, Beweise und Fachgebiete – letztere mit eigenen Axiomen, Sätzen, Beweisen, Fachbegriffen und über- oder untergeordneten Fachgebieten – definiert werden. Die Definitionen dürfen wiederum an dieser Stelle schon bekannte Fachbegriffe und Fachgebiete verwenden.
3. *Prüfung*: Vorhandene Beweise können automatisch geprüft werden.
4. *Ausgaben*: Die Axiome, Sätze und Beweise können in üblicher Schreibweise – abhängig von Sprache und Fachgebiet – ausgegeben werden.
5. *Auswertungen*: Zusätzlich zur Ausgabe der gespeicherten Daten sind verschiedene Auswertungen möglich, unter anderem für die meisten der unter Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite behandelten Fragen.

Damit das System nicht umsonst erstellt wird und möglichst breite Verwendung findet, werden noch zwei Punkte angefügt:

6. *Lizenz*: Die Software ist *Open Source*.
7. *Akzeptanz*: Das System wird von den Fachleuten akzeptiert und verwendet.

1.3. Ziele

Um die Mission zu erfüllen, soll ein System entwickelt werden, das die folgenden Anforderungen erfüllt:

1. *Daten*: Es enthält möglichst viele wichtige Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe, Fachgebiete und Ausgabeschemata³.
2. *Form*: Die Daten liegt in formaler, geprüfter Form vor.
3. *Eingaben*: Die Eingabe von Daten erfolgt in einer formalen Syntax unter Verwendung der üblichen mathematischen Schreibweise. Folgende Daten können eingegeben werden:
 - a) Axiome
 - b) Sätze
 - c) Beweise
 - d) Fachbegriffe
 - e) Fachgebiete
 - f) Ausgabeschemata

Dabei sind alle Begriffe nur innerhalb eines Fachgebietes und seiner untergeordneten Fachgebiete gültig, solange sie nicht undefiniert werden. Das oberste Fachgebiet ist die ganze Mathematik.

³ Um den Punkt 4 von Abschnitt 1.2 erfüllen zu können, brauchen wir noch für Fachgebiete spezifische Ausgabeschemata, welche die Art der Ausgabe von Daten beschreiben.

4. *Prüfung*: Vorhandene Beweise können automatisch geprüft werden.
5. *Ausgaben*: Die Ausgabe kann in einer eindeutigen, formalen Syntax gemäß vorhandener Ausgabeschemata erfolgen.
6. *Auswertungen*: Zusätzlich zur Ausgabe der Daten sind verschiedene Auswertungen möglich. Insbesondere kann zu jedem Beweis angegeben werden, wie viele Beweisschritte und welche Axiome und Sätze⁴ er benötigt.
7. *Anpassbarkeit*: Fachbegriffe und die Darstellung bei der Ausgabe können mit Hilfe von – gegebenenfalls unbenannten – untergeordneten Fachgebieten angepasst werden.
8. *Individualität*: Axiome und Sätze können für jeden Beweis individuell vorausgesetzt werden. Dabei sind fachgebietsspezifische Fachbegriffe erlaubt.
9. *Internet*: Die Daten können auf mehrere Dateien verteilt sein. Ein Teil davon – oder sogar alle – können im Internet liegen.
10. *Kommunikation*: Die Kommunikation mit dem System kann mit den Fachbegriffen der einzelnen Fachgebiete erfolgen.
11. *Zugriff*: Der Zugriff auf das System kann lokal und über das Internet erfolgen.
12. *Unabhängigkeit*: Das System kann offline und online arbeiten.
13. *Rekursion*: Es kann rekursiv über alle verwendeten Dateien – auch solchen, die im Internet liegen – ausgewertet werden.
14. *Bedienbarkeit*: Das System ist einfach zu bedienen.
15. *Lizenz*: Die Software ist *Open Source*.

1.4. Zusammenhänge

Ausgehend von einer Liste der Fragen haben wir über die Zwischenstufe Mission Anforderungen an das zu realisierende System gestellt. Mit einem großen X werden Spalten markiert, deren Punkte für die Erfüllung der Anforderungen in den Zeilen nötig sind. Idealerweise soll die Erfüllung der Anforderungen die Fragen beantworten bzw. zur Beantwortung beitragen.

⁴ Sätze, die quasi als Axiome verwendet werden.

Mission \ Fragen	Ziele						
	1 Daten	2 Definitionen	3 Prüfung	4 Ausgaben	5 Auswertungen	6 Lizenz	7 Akzeptanz
1 Grundlagen	X	X	-	X	X	-	-
2 Basis	X	X	-	X	X	-	-
3 Axiome	X	X	-	X	X	-	-
4 Beweis	X	-	X	X	-	-	-
5 Konstruktion	X	-	-	X	-	-	-
6 Vergleiche	X	-	-	-	X	-	-
7 Definitionen	X	X	-	X	-	-	-
8 Abhängigkeiten	X	-	-	X	-	-	-
9 Überblick	X	-	-	-	X	-	-
10 Darstellung	-	X	-	X	-	-	-
11 Forschung	X	-	-	-	X	-	-

Tabelle 1.1.: Fragen → Mission

Mission \ Ziele	Ziele														
	1 Daten	2 Form	3 Eingaben	4 Prüfung	5 Ausgaben	6 Auswertungen	7 Anpassbarkeit	8 Individualität	9 Internet	10 Kommunikation	11 Zugriff	12 Unabhängigkeit	13 Rekursion	14 Bedienbarkeit	15 Lizenz
1 Daten	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2 Definitionen	X	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3 Prüfung	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4 Ausgaben	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 Auswertungen	-	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6 Lizenz	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X
7 Akzeptanz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabelle 1.2.: Mission → Ziele (Anforderungen)

Die nächste Tabelle ist eine Kombination aus den Tabellen 1.1 und 1.2. Die Fragen *Akzeptanz* und *Lizenz* kommen aus Abschnitt 1.2 *Mission* dazu. Mit einem kleinen x werden Spalten markiert, deren Punkte für die Erfüllung der Anforderungen in den Zeilen nicht nötig, aber von Interesse sind.

Fragen \ Ziele															
	1 Daten	2 Form	3 Eingaben	4 Prüfung	5 Ausgaben	6 Auswertungen	7 Anpassbarkeit	8 Individualität	9 Internet	10 Kommunikation	11 Zugriff	12 Unabhängigkeit	13 Rekursion	14 Bedienbarkeit	15 Lizenz
1 Grundlagen	X	X	X	-	X	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
2 Basis	X	X	X	-	X	X	x	x	-	-	-	-	-	-	-
3 Axiome	X	X	X	-	X	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
4 Beweis	X	X	X	X	X	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-
5 Konstruktion	X	X	X	-	X	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-
6 Vergleiche	X	X	X	-	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-
7 Definitionen	X	X	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-
8 Abhängigkeiten	X	X	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-
9 Überblick	X	X	X	-	-	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
10 Darstellung	X	-	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-
11 Forschung	X	X	X	-	-	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
Lizenz	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X
Akzeptanz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabelle 1.3.: Fragen → Ziele (Anforderungen)

2. Design

Diese Projekt soll Open Source sein. Daher gilt für die Dokumente die *GNU Free Documentation License (FDL)* und für die Software die *GNU Affero General Public License (APGL)*. Die *GNU General Public License (GPL)* reicht für die Software nicht, da das Programm auch mittels eines Servers betrieben werden kann und soll. Damit das Projekt gegebenenfalls durch verschiedene Entwickler gleichzeitig bearbeitet werden kann und wegen des Konfigurationsmanagements wurde es als ein GitHub Projekt erstellt (siehe [3]).

Wenn die Lizenzen nicht mitgeliefert wurden, können sie unter <http://www.gnu.org/licenses/> gefunden werden.

2.1. Anforderungen

1. *key*: ???

2.2. Datenstruktur

1. *key*: ???

2.3. Bausteine

1. *key*: ???

2.4. Werkzeuge

Da dies ein Open Source Projekt sein soll, müssen alle Werkzeuge, die zum Ablauf der Software erforderlich sind, ebenfalls Open Source sein.

- *MiKTeX* für Dokumentation und Ausgaben in \LaTeX .
- *TeXstudio* als Editor für \LaTeX .

Angedachte Werkzeuge:

- *Visual Studio Community 2015 (VS)* als Entwicklungsumgebung für C++.
- In *Visual Studio Community 2015* integrierte Datenbank für Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Fachgebiete.
- *RapidXml* für ein- und Ausgabe in XML.

A. Anhang

A.1. Offene Aufgaben

1. Werkzeuge aussuchen (siehe 2.4)
2. Formale Syntax definieren
3. Datenstruktur definieren
4. Formale Prüfung definieren
5. Axiome für das System bestimmen
6. Visual Studio mit GitHub verbinden
7. Eingabeprogramm erstellen (liest XML)
8. Prüfprogramm erstellen
9. Ausgabeprogramm erstellen (schreibt XML)
10. Formelausgabe erstellen (erzeugt \LaTeX aus XML)
11. Axiome sammeln und eingeben
12. Sätze sammeln und eingeben
13. Beweise sammeln und eingeben
14. Fachbegriffe und Symbole sammeln und eingeben
15. Fachgebiete sammeln und eingeben
16. Ausgabeschemata sammeln und eingeben

Tabellenverzeichnis

1.1. Fragen → Mission	6
1.2. Mission → Ziele (Anforderungen)	6
1.3. Fragen → Ziele (Anforderungen)	7

Abbildungsverzeichnis

<Noch keine Abbildungen vorhanden.>	10
---	----

Literaturverzeichnis

- [1] *Hilbert II - Introduction*. <http://www.qedeq.org/>
- [2] *Formal Correct Mathematical Knowledge*. GitHub Repository of Projekt Hilbert II <https://github.com/m-31/qedeq/>
- [3] *Axiome, Sätze, Beweise und Ausgaben - Projekt zur maschinellen Überprüfung von mathematischen Beweisen und deren Ausgabe in lesbarer Form* GitHub Repository von Projekt ASBA <https://github.com/Dr-Winfried/ASBA>