

---

Dr. Winfried Teschers  
Anton-Günther-Straße 26c  
91083 Baiersdorf  
winfried.teschers@t-online.de

## Projektdokument

# ASBA

## Axiome, Sätze, Beweise und Auswertungen

Projekt zur maschinellen Überprüfung von mathematischen **Beweisen** und deren Ausgabe in lesbarer Form

Winfried Teschers

11. Dezember 2018

Es wird ein Programmsystem beschrieben, das zu eingegebenen **Axiomen**, **Sätzen** und **Beweisen** letztere prüft, **Auswertungen** generiert und unter Zuhilfenahme gegebener **Ausgabeschemata** eine Ausgabe im  $\text{\LaTeX}$ -Format in mathematisch üblicher Schreibweise mit **Formeln** erstellt.

Copyright © 2018 Winfried Teschers

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. You should have received a copy of the GNU Free Documentation License along with this document. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.

# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Vorwort</b>                                   | <b>4</b>  |
| <b>Vereinbarungen</b>                            | <b>5</b>  |
| <b>1. Analyse</b>                                | <b>7</b>  |
| 1.1. Fragen                                      | 7         |
| 1.2. Eigenschaften                               | 8         |
| 1.3. Ziele                                       | 9         |
| 1.4. Zusammenfassung                             | 11        |
| 1.5. Die Umgebung von ASBA                       | 12        |
| 1.6. Basis von Beweisen                          | 14        |
| <b>2. Logische Grundlagen</b>                    | <b>15</b> |
| 2.1. Metasprache                                 | 15        |
| 2.1.1. Sprachebenen                              | 16        |
| 2.1.2. Aussagen                                  | 16        |
| 2.1.3. Bereiche                                  | 18        |
| 2.1.4. Metaoperationen                           | 19        |
| 2.1.5. Mit Gleichheit verwandte Relationen       | 20        |
| 2.1.5.1. Vergleichbar                            | 20        |
| 2.1.5.2. Vergleiche                              | 20        |
| 2.1.6. Bezeichnungen                             | 21        |
| 2.1.7. Quotierung                                | 22        |
| 2.1.8. Weitere Bezeichnungen                     | 22        |
| 2.1.9. Relationen und Operationen                | 24        |
| 2.1.10. Prioritäten                              | 25        |
| 2.2. Beweise in ASBA                             | 27        |
| 2.2.1. Definitionen und Verabredungen            | 27        |
| 2.2.2. Formeln und Ableitungen                   | 28        |
| 2.2.3. Schlussregeln                             | 29        |
| 2.2.4. Beweise                                   | 31        |
| 2.2.5. Beispiel für einen Beweis                 | 31        |
| 2.2.6. Beweisschritte                            | 32        |
| <b>3. Ideen</b>                                  | <b>33</b> |
| 3.1. Schlussregeln                               | 33        |
| 3.1.1. Basisregeln                               | 33        |
| 3.1.2. Identitätsregeln                          | 34        |
| 3.1.3. Weitere Schlussregeln                     | 35        |
| 3.1.4. Beispiel einer Ableitung                  | 36        |
| 3.2. Aussagenlogik                               | 41        |
| 3.2.1. Konstante und Operationen                 | 41        |
| 3.2.2. Formalisierung                            | 41        |
| 3.2.2.1. Bausteine der aussagenlogischen Sprache | 43        |
| 3.2.2.2. Aussagenlogische Formeln                | 43        |
| 3.2.3. Definition von Junktoren durch andere     | 44        |

|   |           |
|---|-----------|
| 3.2.4. Aussagenlogisches Axiomensystem . . . . .                    | 45        |
| 3.3. Prädikatenlogik . . . . .                                      | 46        |
| 3.4. Mengenlehre . . . . .  | 46        |
| <b>4. Design</b> . . . . .  | <b>47</b> |
| 4.1. Anforderungen . . . . .  | 47        |
| 4.2. Axiome . . . . .   | 48        |
| 4.3. Beweise . . . . .  | 48        |
| 4.4. Datenstruktur . . . . .  | 48        |
| 4.5. Bausteine . . . . .  | 48        |
| <b>A. Anhang</b> . . . . .  | <b>49</b> |
| A.1. Werkzeuge . . . . .  | 49        |
| A.2. Die Struktur ausgewählter Begriffe und Bezeichnungen . . . . . | 51        |
| A.3. Offene Aufgaben . . . . .                                      | 53        |
| <b>B. Verzeichnisse</b> . . . . .                                   | <b>54</b> |
| Tabellenverzeichnis . . . . .                                       | 54        |
| Abbildungsverzeichnis . . . . .                                     | 54        |
| Literaturverzeichnis . . . . .                                      | 55        |
| Index . . . . .   | 60        |
| Symbolverzeichnis . . . . .   | 64        |
| Glossar . . . . .   | 72        |

## Vorwort

Schon während meiner aktiven Zeit habe ich davon geträumt, ein Programm zu erstellen, mit dem man mathematische Sätze und Beweise speichern und überprüfen kann. Es sollte auch statistische Auswertungen beherrschen und u. a. Fragen beantworten können wie z. B. „Welche Axiome sind zum Beweis eines bestimmten Satzes erforderlich?“ oder „Wie viele Beweisschritte erfordert ein bestimmter Beweis?“. Ein Beweis mit weniger Axiomen und weniger Beweisschritten wäre dann vorzuziehen.

Einige Jahre nach meiner Pensionierung habe ich Ende 2016 endlich damit angefangen, das Projekt ASBA zu starten. Im Internet habe ich das Projekt „Hilbert II“ [\[22\]](#) gefunden, dass eine ähnliche Zielsetzung hat. Ich habe dann mit dem Projektleiter Michael Meyling Kontakt aufgenommen und war zuversichtlich, Synergien nutzen zu können. Leider hat sich dann herausgestellt, dass mein Ansatz viel umfangreicher und somit mit „Hilbert II“ wohl nicht kompatibel ist. Daher betreibe ich ASBA als ein Ein-Mann-Projekt und dies wird bis zur Fertigstellung der ersten Version dieses Dokuments wohl so bleiben müssen. Vielleicht ergibt sich dann ja eine Zusammenarbeit mit anderen Enthusiasten.

Da in diesem Dokument viele mathematische Formeln vorkommen und ASBA auch  $\text{\LaTeX}$ -Code generieren soll, ist es in  $\text{\LaTeX}$  verfasst. Dieses für mich neue Textsystem war eine große, spannende Herausforderung und ist einer der Gründe für die lange Dauer der Erstellung dieses Dokuments. Hinzu kommt, dass ich keinen Termindruck habe und endlich mal 100% versuchen kann – in meinem Job wurde ich daran aus verständlichen Gründen gehindert.

ASBA soll eine Basis für die Überprüfung und Archivierung mathematischer Sätze und Beweise sein. Daher halte ich es für unerlässlich, alle verwendeten Begriffe und Bezeichnungen (d. h. Benennungen und Symbole) eindeutig genug zu definieren (100%!). Natürlich will ich mich dabei an die übliche Nomenklatur halten. Aber was ist üblich? Steht  $\subset$  für „Teilmenge“ oder „echteTeilmenge“? Ist 0 ein Element aus  $\mathbb{N}$  oder nicht? Daher habe ich versucht, alle wichtigen, verwendeten Bezeichnungen der Mathematik, mit dem Schwerpunkt Logik, aber auch der formalen Metasprache streng zu definieren, normalerweise im Text, teilweise aber nur in einer Fußnote, auf jeden Fall aber im Glossar. Dort sind auch manche Bezeichnungen aufgeführt, die im Text nicht definiert wurden.

Baiersdorf, den 07. Dezember 2018

Winfried Teschers

# Vereinbarungen

In diesem Dokument werden verschiedene Textauszeichnungen mit folgenden Bedeutungen verwendet:

- In mathematischen Formeln:
  - *Variable allgemein*; normalerweise ein Buchstabe.
  - **Variablensymbol**; normalerweise ein Kleinbuchstabe.
  - Konstante; normalerweise ein Wort.
  - Konstanter Index; normalerweise ein Buchstabe.
  - *VORGEGEBENE BEREICHE*; normalerweise ein Großbuchstabe.<sup>1)</sup>
  - *Element daraus*; normalerweise ein Großbuchstabe.
  - *Bereichsoperation*; normalerweise ein Wort.
  - **Bereich von Ableitungen**; normalerweise ein Großbuchstabe.
  - **Element daraus**; normalerweise ein Buchstabe.
  - Prädikat; normalerweise ein Wort.
- In Zitaten aus [Wikipedia](#):
  - Wie im Original.
  - **Wie im Original.**
  - *Wie im Original.*
  - [Wie im Original, aber ohne Link.](#)
- In sonstigem Text (ohne Überschriften):
  - [Interner Link](#); auch in Überschriften. Die Farbe kann mit anderen Textauszeichnungen kombiniert werden.
  - [Nummer als Link ins Literaturverzeichnis.](#)
  - **Zeichen [in Zeichenketten]**.
  - **Definition.**
  - *Optionale Teile von Sprechweisen.*
  - **Notwendige Teile von Sprechweisen.**
  - **Erstmalige Selbstreferenz (ohne Link).**
  - Selbstreferenz (ohne Link).
  - Prädikat.
  - Teile, deren Bearbeitung zurückgestellt ist.

<sup>1)</sup> Kleinbuchstaben gibt es in dieser Schriftart nicht.

Fußnoten dienen nur zu weiteren Erläuterungen sowie Verweisen in dieses Dokument und die Literatur. Daher können sie auch etwas „lascher“ formuliert sein. Für das Verständnis des Textes sollten sie nicht nötig sein, es reichen Grundkenntnisse der Mathematik.

# 1. Analyse

In der Mathematik gibt es eine unüberschaubare Menge an **Axiomen**, **Sätzen**, **Beweisen**, **Fachbegriffen** und **Fachgebieten**. Zu den meisten **Fachgebieten** gibt es noch ungelöste Probleme.

Es fehlt ein System, das einen Überblick bietet und die Möglichkeit, **Beweise** automatisch zu überprüfen. Außerdem sollte all dies in üblicher mathematischer Schreibweise ein- und ausgegeben werden können. In diesem Dokument werden die Grundlagen für das zu entwickelnde Programmsystem **ASBA** (ein Akronym für „**A**xiome, **S**ätze, **B**eweise und **A**uswertungen“) behandelt.

Ein Programmsystem mit ähnlicher Aufgabenstellung findet sich im GitHub Projekt *Hilbert II* ([22, 23]). Einige Ideen sind von dort übernommen worden.

## 1.1. Fragen

Einige der Fragen, die in diesem Zusammenhang auftauchen, werden nun formuliert:

1. **Grundlagen:** Was sind die Grundlagen? Z. B. welche **Logik** und welche **Mengenlehre**.
2. **Basis:** Welche wichtigen **Axiome**, **Sätze**, **Beweise**, **Fachbegriffe** und **Fachgebiete** gibt es? Welche davon sind Standard?
3. **Axiome:** Welche **Axiome** werden bei einem **Satz** oder **Beweis** vorausgesetzt? Allgemein anerkannte oder auch strittige, wie z. B. den *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* (*tertium non datur*) oder das *Auswahlaxiom*.
4. **Beweis:** Ist ein **Beweis** fehlerfrei?
5. **Konstruktion:** Gibt es einen konstruktiven **Beweis**?
6. **Vergleiche:** Welcher **Beweis** ist besser? Nach welchem Kriterium? Z. B. elegant, kurz, einsichtig oder wenige **Axiome**. Was heißt eigentlich *elegant*?
7. **Definitionen:** Was ist mit einem **Fachbegriff** jeweils genau gemeint? Z. B. *Stetigkeit*, *Integral* und *Analysis*.
8. **Abhängigkeiten:** Wie heißt ein **Fachbegriff** in einer anderen Sprache? Ist wirklich dasselbe gemeint? Was ist mit **Fachbegriffen** in verschiedenen **Fachgebieten**?
9. **Überblick:** Ist ein **Axiom**, **Satz**, **Beweis** oder **Fachbegriff** schon einmal — ggf. abweichend — definiert, formuliert oder bewiesen worden?
10. **Darstellung:** Wie kann man einen **Satz** und den zugehörigen **Beweis** — ggf. auch spezifisch für ein **Fachgebiet** — darstellen?
11. **Forschung:** Welche Probleme gibt es noch zu erforschen.

## 1.2. Eigenschaften

ASBA soll ausgehend von den Fragen in Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite entwickelt werden, und die folgenden Eigenschaften haben:

1. **Daten:** Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Fachgebiete können in formaler Form gespeichert werden — auch (noch) nicht oder unvollständig bewiesene Sätze. Dabei soll die übliche mathematische Schreibweise verwendet werden können.
2. **Definitionen:** Es können Fachbegriffe für Axiome, Sätze, Beweise und Fachgebiete — letztere mit eigenen Axiomen, Sätzen, Beweisen, Fachbegriffen und über- oder untergeordneten Fachgebieten — definiert werden. Die Definitionen dürfen an anderer Stelle definierte Fachbegriffe und Fachgebiete verwenden.<sup>1)</sup>
3. **Prüfung:** Vorhandene Beweise können automatisch geprüft werden.
4. **Ausgaben:** Die Axiome, Sätze und Beweise können in üblicher Schreibweise — abhängig von Sprache und Fachgebiet — ausgegeben werden.
5. **Auswertungen:** Zusätzlich zur Ausgabe der gespeicherten Daten sind verschiedene Auswertungen möglich, unter anderem für die meisten der unter Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite behandelten Fragen.

Damit ASBA nicht umsonst erstellt wird und möglichst breite Verwendung findet, werden noch zwei Punkte angefügt:

6. **Lizenz:** Die Software ist *Open Source*.
7. **Akzeptanz:** ASBA wird von Mathematikern akzeptiert und verwendet.

Tabelle 1.1 auf der nächsten Seite zeigt, wie sich die Eigenschaften zu den Fragen im Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite verhalten. Mit einem X werden die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Eigenschaften zur Beantwortung der entsprechenden Frage beitragen sollen. Idealerweise sollte die Erfüllung aller angegebenen Eigenschaften alle gestellten Fragen beantworten, was allerdings illusorisch ist.

<sup>1)</sup> Rekursive Definitionen sollten ebenfalls möglich sein.



| Frage \ Eigenschaft |         |                |           |            |                |          |             |
|---------------------|---------|----------------|-----------|------------|----------------|----------|-------------|
|                     | 1 Daten | 2 Definitionen | 3 Prüfung | 4 Ausgaben | 5 Auswertungen | 6 Lizenz | 7 Akzeptanz |
| 1 Grundlagen        | X       | X              | -         | X          | X              | -        | -           |
| 2 Basis             | X       | X              | -         | X          | X              | -        | -           |
| 3 Axiome            | X       | X              | -         | X          | X              | -        | -           |
| 4 Beweis            | X       | -              | X         | X          | -              | -        | -           |
| 5 Konstruktion      | X       | -              | -         | X          | -              | -        | -           |
| 6 Vergleiche        | X       | -              | -         | -          | X              | -        | -           |
| 7 Definitionen      | X       | X              | -         | X          | -              | -        | -           |
| 8 Abhängigkeiten    | X       | -              | -         | X          | -              | -        | -           |
| 9 Überblick         | X       | -              | -         | -          | X              | -        | -           |
| 10 Darstellung      | -       | X              | -         | X          | -              | -        | -           |
| 11 Forschung        | X       | -              | -         | -          | X              | -        | -           |

Tabelle 1.1.: Fragen (1.1) → Eigenschaften (1.2)

### 1.3. Ziele

Um die Eigenschaften von Abschnitt 1.2 auf der vorherigen Seite zu erreichen, werden für ASBA die folgenden Ziele<sup>2)</sup> gesetzt:

1. **Daten:** Die verteilte Datenbank von ASBA enthält möglichst viele wichtige Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe, Fachgebiete und Ausgabeschemata<sup>3)</sup>.
2. **Form:** Die Daten liegen in formaler, geprüfter Form vor.
3. **Eingaben:** Die Eingabe von Daten erfolgt in einer formalen Syntax unter Verwendung der üblichen mathematischen Schreibweise.
4. **Prüfung:** Beweise können automatisch geprüft<sup>4)</sup> werden.
5. **Ausgaben:** Die Ausgabe kann in einer eindeutigen, formalen Syntax gemäß vorhandener Ausgabeschemata erfolgen.
6. **Auswertungen:** Zusätzlich zur Ausgabe der Daten sind verschiedene Auswertungen möglich. Insbesondere kann zu jedem Beweis angegeben werden, wie lang er ist und welche Axiome und Sätze<sup>5)</sup> er benötigt.
7. **Anpassbarkeit:** Fachbegriffe und die Darstellung bei der Ausgabe können mit Hilfe von — gegebenenfalls unbenannten — untergeordneten Fachgebieten angepasst werden.

<sup>2)</sup> Es sind eigentlich Anforderungen. Diese Bezeichnung wird aber schon im Kapitel 4 auf Seite 47 verwendet.

<sup>3)</sup> Um den Punkt 4 von Abschnitt 1.2 auf der vorherigen Seite erfüllen zu können, werden noch fachgebietsspezifische Ausgabeschemata benötigt, welche die Art der Ausgaben beschreiben.

<sup>4)</sup> An dieser Stelle soll ASBA keine Beweise finden — das ist Ziel von Punkt 17, sondern nur vorhandene prüfen.

<sup>5)</sup> Sätze, die quasi als Axiome verwendet werden.

8. **Individualität:** **Axiome** und **Sätze** können für jeden **Beweis** individuell vorausgesetzt werden. Dabei sind fachgebietsspezifische **Fachbegriffe** erlaubt.
9. **Internet:** Die Daten können auf mehrere Dateien verteilt sein. Ein Teil davon — oder sogar alle — können im Internet liegen.
10. **Kommunikation:** Die Kommunikation mit **ASBA** kann mit den **Fachbegriffen** der einzelnen **Fachgebiete** erfolgen.
11. **Zugriff:** Der Zugriff auf **ASBA** kann lokal und über das Internet erfolgen.
12. **Unabhängigkeit:** **ASBA** kann online und offline arbeiten.
13. **Rekursion:** Es kann rekursiv über alle verwendeten Dateien — auch solchen, die im Internet liegen — ausgewertet werden.
14. **Bedienbarkeit:** **ASBA** ist einfach zu bedienen.
15. **Lizenz:** Die Software ist *Open Source*.
16. **Zwischenspeicher:** Wichtige Auswertungen können an vorhandenen Dateien angehängt oder separat in eigenen Dateien gespeichert werden.
17. **Beweisunterstützung:** **ASBA** hilft bei der Erstellung von **Beweisen**.

Punkt 16 wurde noch angefügt, damit **ASBA** effizient arbeiten kann und um die Akzeptanz zu erhöhen. Um letzteres zu erreichen, dafür ist auch Punkt 17 nützlich. Es bietet sich ja auch an, die Fähigkeiten, die **ASBA** mit der Prüfung von Beweisen haben wird, auch auf die Erstellung von Beweisen anzuwenden. Die Reihenfolge der **Ziele** stellt noch keine Priorisierung fest.

Die Tabelle 1.2 zeigt wieder, wie sich die Ziele zu den Eigenschaften im Abschnitt 1.2 auf Seite 8 verhalten. Mit einem X werden wieder die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Ziele zur Sicherstellung der entsprechenden Eigenschaft beitragen sollen. Idealerweise sollte durch Erreichen aller aufgestellten Ziele **ASBA** alle angegebenen Eigenschaften aufweisen, was wahrscheinlich ebenfalls illusorisch ist.

| Eigenschaft \ Ziel |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 1 Daten            | X | X | X | - | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  |
| 2 Definitionen     | X | - | X | - | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  |
| 3 Prüfung          | - | - | - | X | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  |
| 4 Ausgaben         | - | - | - | - | X | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  |
| 5 Auswertungen     | - | - | - | - | - | X | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  |
| 6 Lizenz           | - | - | - | - | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -  | X  | -  | -  |
| 7 Akzeptanz        | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  |

Tabelle 1.2.: Eigenschaften (1.2) → Ziele (1.3)

## 1.4. Zusammenfassung

| Frage \ Ziel   |            |           |               |              |               |                   |                    |                     |               |                     |               |                      |                 |                     | 15 | 16 | 17 |
|--|------------|-----------|---------------|--------------|---------------|-------------------|--------------------|---------------------|---------------|---------------------|---------------|----------------------|-----------------|---------------------|----|----|----|
|  | Daten<br>1 | Form<br>2 | Eingaben<br>3 | Prüfung<br>4 | Ausgaben<br>5 | Auswertungen<br>6 | Anpassbarkeit<br>7 | Individualität<br>8 | Internet<br>9 | Kommunikation<br>10 | Zugriff<br>11 | Unabhängigkeit<br>12 | Rekursion<br>13 | Bedienbarkeit<br>14 |    |    |    |
| 1 Grundlagen   | X          | X         | X             | -            | X             | X                 | x                  | -                   | -             | -                   | -             | -                    | -               | -                   | -  | -  | -  |
| 2 Basis  | X          | X         | X             | -            | X             | X                 | x                  | x                   | -             | -                   | -             | -                    | -               | -                   | -  | -  | -  |
| 3 Axiome   | X          | X         | X             | -            | X             | X                 | x                  | -                   | -             | -                   | -             | -                    | -               | -                   | -  | -  | -  |
| 4 Beweis   | X          | X         | X             | X            | X             | -                 | -                  | x                   | -             | -                   | -             | -                    | -               | -                   | -  | -  | -  |
| 5 Konstruktion   | X          | X         | X             | -            | X             | -                 | -                  | x                   | -             | -                   | -             | -                    | -               | -                   | -  | -  | -  |
| 6 Vergleiche   | X          | X         | X             | -            | -             | X                 | -                  | x                   | -             | -                   | -             | -                    | -               | -                   | -  | -  | -  |
| 7 Definitionen   | X          | X         | X             | -            | X             | -                 | x                  | -                   | -             | -                   | -             | -                    | -               | -                   | -  | -  | -  |
| 8 Abhängigkeiten   | X          | X         | X             | -            | X             | -                 | x                  | -                   | -             | -                   | -             | -                    | -               | -                   | -  | -  | -  |
| 9 Überblick  | X          | X         | X             | -            | -             | X                 | x                  | -                   | -             | -                   | -             | -                    | -               | -                   | -  | -  | -  |
| 10 Darstellung   | X          | -         | X             | -            | X             | -                 | x                  | -                   | -             | -                   | -             | -                    | -               | -                   | -  | -  | -  |
| 11 Forschung   | X          | X         | X             | -            | -             | X                 | x                  | -                   | -             | -                   | -             | -                    | -               | -                   | -  | -  | -  |
| Die nächsten beiden Punkte sind Eigenschaften aus Abschnitt 1.2 auf Seite 8:   |            |           |               |              |               |                   |                    |                     |               |                     |               |                      |                 |                     |    |    |    |
| 6 Lizenz   | -          | -         | -             | -            | -             | -                 | -                  | -                   | -             | -                   | -             | -                    | -               | -                   | X  | -  | -  |
| 7 Akzeptanz  | X          | X         | X             | X            | X             | X                 | X                  | X                   | X             | X                   | X             | X                    | X               | X                   | X  | X  | X  |
| Tabelle 1.3.: Fragen (1.1) → Ziele (1.3)   |            |           |               |              |               |                   |                    |                     |               |                     |               |                      |                 |                     |    |    |    |
| <p>Die Tabelle 1.3 ist eine Kombination der Tabellen 1.1 und 1.2 und zeigt, wie sich die Ziele im Abschnitt 1.3 auf Seite 9 zu den Fragen im Abschnitt 1.1 auf Seite 7 verhalten. Auch in dieser Tabelle werden mit einem X die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Ziele für die Beantwortung der entsprechenden Frage nötig sind. Mit einem kleinen x werden sie markiert, wenn sie zur Beantwortung der Fragen nicht nötig, aber von Interesse sind. Idealerweise sollte das Erreichen aller aufgestellten Ziele alle gestellten Fragen beantworten, was natürlich auch illusorisch ist.</p> |            |           |               |              |               |                   |                    |                     |               |                     |               |                      |                 |                     |    |    |    |

## 1.5. Die Umgebung von ASBA

In der Abbildung 1.1 wird beschrieben, welche Interaktionen ASBA mit der Umgebung hat, d. h. welche Ein- und Ausgaben existieren und woher sie kommen bzw. wohin sie gehen.

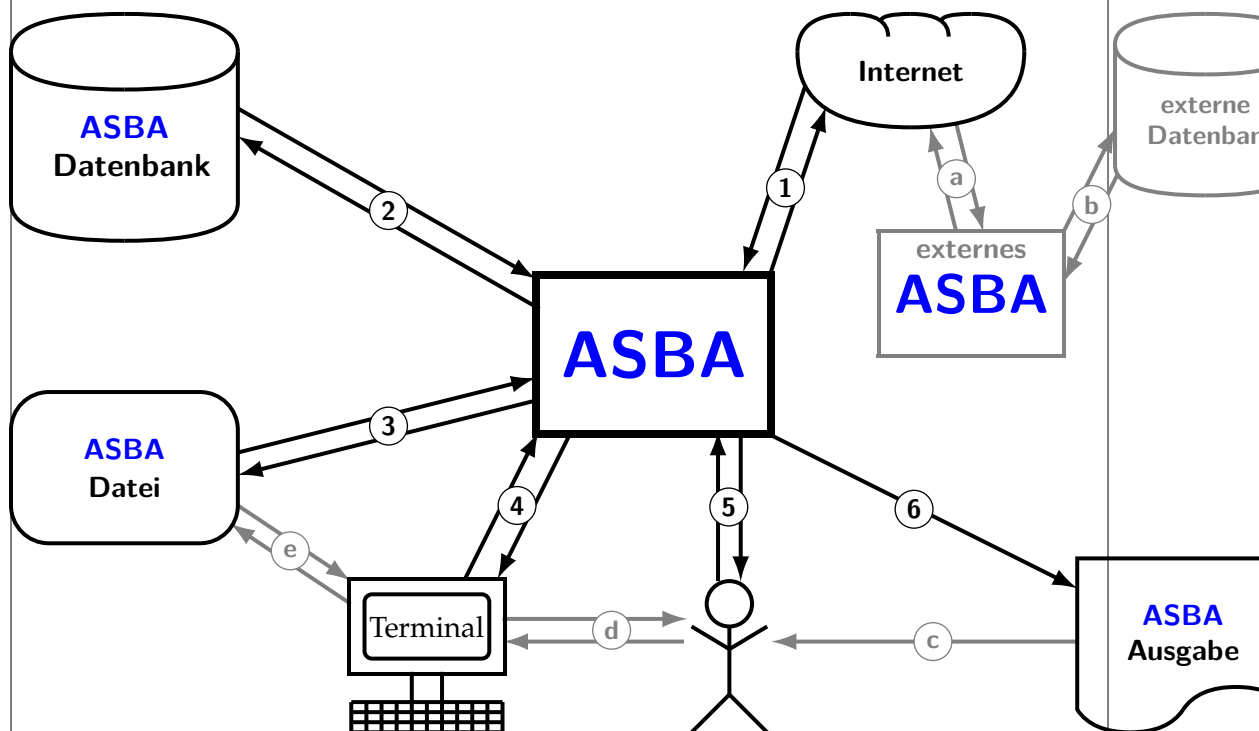


Abbildung 1.1.: Die Umgebung von ASBA

In den in der Abbildung 1.1 abgebildeten Datenflüssen (1) bis (6) und (a) bis (e) werden die folgenden Daten übertragen:

- (1) **ASBA** → **Internet** Inhalte der Datenbank.  
**Internet** → **ASBA** Inhalte der externen Datenbank.
- (2) **Datenbank** → **ASBA** Inhalte der Datenbank und Antworten auf Datenbankankweisungen.  
**ASBA** → **Datenbank** Inhalte der Datei, der externen Datenbank und Datenbankankweisungen.
- (3) **Datei** → **ASBA** Inhalte der Datei.  
**ASBA** → **Datei** Die Datei wird um zusätzliche Auswertungen ergänzt, z. B. ob die **Beweise** korrekt sind, welche **Axiome** und **Sätze** — auch externe aus dem Internet — verwendet wurden, Länge des **Beweises** usw.
- (4) **Terminal** → **ASBA** Anweisungen, Daten und Batchprogramme.  
**ASBA** → **Terminal** Antworten auf Anweisungen, Auswertungen usw.  
 Außerdem interaktive Ein- und Ausgabe durch einen Anwender, wie in (5) beschrieben.
- (5) **Anwender** ↔ **ASBA** Interaktive Ein- und Ausgaben durch einen Anwender mit Komponenten von (3), (4) und (6). — Die Kommunikation läuft i. Alg. über ein Terminal.

- (6) **ASBA** → **Ausgabe** Inhalte von Datei und Datenbank in lesbarer Form, u. a. mit Hilfe von **Ausgabeschemata** auch mit **Formeln**. Die Ausgabe kann auch in eine Datei erfolgen, z. B. im  $\text{\LaTeX}$ -Format.
- (a) **Internet** → **externes ASBA** Inhalte der Datenbank.  
**externes ASBA** → **Internet** Inhalte der externen Datenbank.
- (b) **externe Datenbank** → **externes ASBA** Inhalte der externen Datenbank.  
**externes ASBA** → **externe Datenbank** Inhalte der Datenbank.
- (c) **Ausgabe** → **Anwender** Alle Daten der Ausgabe.
- (d) **Anwender** ↔ **Terminal** Interaktive Ein- und Ausgabe durch einen Anwender, wie in (5) beschrieben.
- (e) **Terminal** ↔ **Datei** Erstellen und Bearbeiten der Datei durch einen Anwender. — siehe (d)

Die Datenflüsse (a) bis (e) erfolgen außerhalb von **ASBA** und werden nicht weiter behandelt.

Die Datenbank und die Datei enthalten im Prinzip die gleichen Daten, wobei sie in der Datei im Textformat in lesbarer Form und in der Datenbank in einem internen Format vorliegen. Zudem enthält die Datenbank i. Alg. sehr viel mehr Daten. Es handelt sich dabei jeweils um die folgenden Daten:

**Axiome** [ok] Ein **Axiom** ist eine **Aussage**, die nicht aus anderen Aussagen abgeleitet werden kann. Es können wie bei **Sätzen** **Prämissen** und **Konklusionen** vorhanden sein, aber keine **Beweise**.

**Sätze** [ok] Ein **Satz** ist eine **Aussage**, bestehend aus einer Anzahl von **Prämissen** und **Konklusionen** und einem **Beweis**, der die **Konklusionen** aus den **Prämissen** ableitet.

**Beweise** [ok] (Ein Auszug aus [Wikipedia](#)[38] steht im Glossar.)  
 Ein **Beweis** besteht aus einer **Folge** von **Beweisschritten**, die aus gegebenen **Prämissen** **Konklusionen** ableitet.

**Fachbegriffe** [ok] (Ein Auszug aus [Wikipedia](#)[73] steht im Glossar.)  
 Ein **Fachbegriff** ist für **ASBA** eine **Benennung** für einen **Begriff** aus einem **Fachgebiet**. Insbesondere kann es auch ein spezielles **Symbol** sein.

**Fachgebiete** [ok] (Ein Auszug aus [Wikipedia](#)[44] steht im Glossar.)  
 Ein **Fachgebiet** ist für **ASBA** ein Teilgebiet der Mathematik mit einer zugehörigen Basis aus **Axiomen**, **Sätzen**, **Fachbegriffen** und **Darstellungsweisen**, z. B. **Logik** und **Mengenlehre**.

Ein **Fachgebiet** kann bei **ASBA** sehr klein sein und im Extremfall kein einziges **Element** enthalten. *Umgebung* wäre vielleicht eine bessere **Bezeichnung**, ist aber schon ein verbreiteter **Fachbegriff**, so dass in diesem Dokument die **Bezeichnung** "Fachgebiet" verwendet wird.

**Ausgabeschemata** [!] Ein **Ausgabeschema** ist für **ASBA** eine Beschreibung, wie ein bestimmtes mathematisches **Objekt** ausgegeben werden soll. Dies kann z. B. ein Stück  $\text{\LaTeX}$ -Code mit entsprechenden Parametern sein.

**Auswertungen** [ok] Eine **Auswertung** ist für **ASBA** eine statistische oder andere Auswertung, die bestimmten Elementen der Datei bzw. Datenbank zugeordnet sind. Z. B. können zu einem **Satz** alle für einen **Beweis** notwendigen **Axiome** angegeben werden.

Alle Daten können interne und externe Verweise enthalten.

## 1.6. Basis von Beweisen

Da ein Computerprogramm erstellt werden soll, muss die Grundstruktur des Vorgehens bei **Beweisen** definiert werden.<sup>6)</sup>

Die **logische Darstellung** von mathematischen **Aussagen**, wozu auch **Axiome** und **Sätze** gehören, erfolgt, da es sich immer um **Formeln** handelt, an besten mit **Symbolfolgen**<sup>7)</sup>, d. h. Folgen von Zeichen und Symbolen, in denen Zwischenraum — insbesondere Leerstellen — nicht zählen. Mehrdimensionale **Formeln**, wie z. B. Matrizen, Baumstrukturen, Funktionsschemata und anderes, können auch als (eindimensionale) Symbolfolgen dargestellt werden.<sup>8)</sup> **Beweise** sind letztendlich nichts anderes, als erlaubte **Transformationen** dieser **Symbolfolgen**.

**Bausteine** sind Grundelemente, auch **Zeichen** oder **(Satz-)Buchstaben** genannt, aus denen die Symbolfolgen bestehen dürfen, und müssen definiert werden.

**Formationsregeln** dienen zur Festlegung, wie man aus den Bausteinen Ausdrücke erzeugen kann, und müssen ebenfalls definiert werden.

**Sätze** lassen sich als eine **Menge** von **Formeln**, den **Prämissen**, wozu auch **Axiome** und andere **Sätze** gehören können, einer weiteren **Menge** von **Formeln** (**Symbolfolgen**), den **Konklusionen**, und der Angabe eines **Beweises** darstellen.

**Beweise** zu gegebenen **Prämissen** und **Konklusionen** lassen sich als **Folge** von **Transformationen**, beginnend mit den **Prämissen** und endend mit den **Konklusionen**, darstellen.

**Transformationsregeln** definieren, welche **Transformationen** mit gegebenen **Formelmengen** zulässig sind.<sup>9)</sup>

<sup>6)</sup> siehe [52]

<sup>7)</sup> Die **interne Darstellung** der **Symbolfolgen** kann zur Optimierung von **ASBA** von der **logischen** abweichen.

<sup>8)</sup> Z. B. könnte man eine  $2 \times 2$ -Matrix  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  auch darstellen als Folge von Zeilen:  $\langle[(a, b), (c, d)]\rangle$ , oder noch einfacher:  $\langle[a, b; c, d]\rangle$ . In **ASBA** wird die L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Syntax verwendet.

Damit wird die soeben angegebene Matrix codiert durch  $\langle\langle\begin{matrix} \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \end{matrix}\rangle\rangle$

<sup>9)</sup> siehe [2, 68, 70]

## 2. Logische Grundlagen

Die logischen Grundlagen werden einerseits gebraucht, um die erlaubten **Beweisschritte**<sup>1)</sup> zu definieren, andererseits dienen sie auch zum Testen von ASBA. Daher werden sie in diesem Kapitel 2 ausführlicher behandelt, als für die Erstellung von ASBA erforderlich ist. Alle in diesem Dokument aufgeführten **Axiome**, **Sätze** und **Beweise** sollen dazu kodiert und die **Beweise** dann von ASBA verifiziert werden.

Speziell in diesem Kapitel 2 wollen wir mit möglichst exakt definierten **Begriffen**<sup>0)</sup> und den zugehörigen einheitlichen, systematischen **Bezeichnungen**<sup>0)</sup> (d. h. **Benennungen**<sup>0)</sup> und **Symbolen**) arbeiten. Wenn sie **in dieser** Schriftart erscheinen, gibt es eine Definition im Symbolverzeichnis (ab Seite 64) oder Glossar (ab Seite 72)<sup>2)</sup>, und diese Bedeutung ist dann gemeint. Gleichzeitig ist damit im PDF-Dokument ein Link dorthin verbunden. An Stellen, wo eine **Benennung**<sup>3)</sup> definiert wird, wird sie **in dieser** Schriftart ausgegeben. Wenn die **Benennung** mit der Fußnote „<sup>0)</sup>“ versehen ist, steht die vollständige Definition nur im Glossar und nicht im laufenden Text. Eine vertiefende Beschreibung im Glossar oder Symbolverzeichnis ist unabhängig davon immer möglich.

|                     |                                  |
|---------------------|----------------------------------|
| Die Sache an sich:  | <b>Begriff</b>                   |
| Darstellung:        | <b>Bezeichnung</b>               |
| Darstellungsmittel: | <b>Benennung</b>   <b>Symbol</b> |

Wenn im Text „wir“ verwendet wird, geht es um Definitionen, die von allgemein bekannten möglicherweise abweichen.<sup>4)</sup> Die Verwendung von „wir“ ist allerdings möglicherweise nicht konsistent und soll nur als Hinweis dienen.

### 2.1. Metasprache

Wenn man über eine Sprache, die sogenannte **Objektsprache**, spricht, braucht man eine zweite Sprache, die sogenannte **Metasprache**, in der **Aussagen** über erstere getroffen werden können.<sup>5)</sup> Wenn die **Objektsprache** die der Mathematik ist, wählt man üblicherweise die natürliche Sprache als **Metasprache**. Leider ist diese oft ungenau, nicht immer eindeutig und abhängig vom Zusammenhang, in dem sie gesprochen wird.<sup>6)</sup> Um diese Probleme in den Griff zu bekommen, kann die **Metasprache** auch formalisiert werden. Durch diese Formalisierung erinnert sie dann schon an mathematische **Formeln**. Die **Sprachebenen**<sup>0)</sup> sollten aber sorgfältig unterschieden werden.

<sup>0)</sup> Die vollständige Definition steht nur im Glossar.

<sup>1)</sup> siehe Abschnitt 2.2.6 auf Seite 32

<sup>2)</sup> Möglicherweise steht dort statt einer Definition auch nur eine Referenz zur Definition im laufenden Text.

<sup>3)</sup> Für Symbole gilt kann leider nur die Farbe, nicht die Schriftart geändert werden.

<sup>4)</sup> „Wir“ und nicht „ich“, da der Leser eingeschlossen werden soll und in Zukunft möglicherweise auch andere Autoren an diesem Dokument beteiligt sein werden.

<sup>5)</sup> Die beiden Sprachen können auch übereinstimmen, z. B. wenn man über die natürliche Sprache spricht.

<sup>6)</sup> Man betrachte die beiden formal verschiedenen **Aussagen** „Studenten und Rentner zahlen die Hälfte.“ und „Studenten oder Rentner zahlen die Hälfte.“, die beide das gleiche meinen. — Entnommen aus [2] Abschnitt 1.2 Bemerkung 1.



### 2.1.1. Sprachebenen

**Metasprache** In diesem Dokument die obere **Sprachebene**: [ok] Die **Sprache**, in der **Aussagen** über eine andere **Sprache** getroffen werden können. In diesem Dokument ist dies immer die normale Umgangssprache. Ihre **Syntax** ist gegeben, bzgl. der **Semantik** bemühen wir uns um exakte Definitionen der **Begriffe** und **Bezeichnungen**. Ihre **Syntax** und **Semantik** wird in diesem Dokument nicht behandelt.

**formale Metasprache** In diesem Dokument die mittlere **Sprachebene**: [ok] Die **Metasprache**, deren Ausdrucksmittel nur **atomare Aussagen** und definierte **Metasymbole** sind. In diesem Dokument ist ihre Syntax und Semantik passend für **ASBA** definiert, in der Regel parallel zur **Prädikatenlogik**. Ihre **Syntax** und **Semantik** werden im Folgenden noch entwickelt.

**Objektsprache** In diesem Dokument die untere **Sprachebene**: [ok] Die **Sprache**, über die mittels einer (**formalen**) **Metasprache** "geredet" wird. Unser **Objekt**, mit dem mathematische **Beweise** formuliert werden sollen, ist die **Logik**. Demnach sind die Ausdrucksmittel der **Objektsprache** die der **Logik**. Wir verwenden in diesem Dokument die **Prädikatenlogik** oder, als **echte Teilsprache**, die **Aussagenlogik**.

Die entsprechende **Syntax** wird im Folgenden noch entwickelt. Die **Semantik** kann bis zu einem gewissen Grad offen bleiben, um so auch Raum für alternative **Logiken** zu lassen.

### 2.1.2. Aussagen

Wir definieren zunächst noch einige **Begriffe**.

**Wahrheitswert** [ok] (Ein Auszug aus **Wikipedia**[76] steht im Glossar.)

Ein **Wahrheitswert** ist ein **Wert**, den eine **Aussage** in Bezug auf Wahrheit annehmen kann. Für die **Darstellung** der **Wahrheitswerte** abhängig von der **Sprachebene** und dem logischen Wert der Aussage definieren wir:

| <b>Sprachebene</b>  | <b>Aussagewert</b> |               | <b>Symbolart</b> |
|---------------------|--------------------|---------------|------------------|
|                     | <b>wahr</b>        | <b>falsch</b> |                  |
| Metasprache         | <i>wahr</i>        | <i>falsch</i> | normaler Text    |
| formale Metasprache | true               | false         | Metasymbol       |
| Objektsprache       | $\top$             | $\perp$       | Objektsymbol     |

**Tabelle 2.1.: Darstellung der Wahrheitswerte**

Wir schließen nicht aus, dass es weitere Wahrheitswerte gibt.

**Aussage** [ok] **Wikipedia**[33] schreibt dazu:

Eine **Aussage** im Sinn der **aristotelischen Logik** ist ein sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist zu *fragen*, ob es **wahr** oder falsch ist (so genanntes Aristotelisches **Zweiwertigkeitsprinzip**). Es ist nicht erforderlich, *sagen* zu können, ob das Gebilde wahr oder falsch ist. Es genügt, dass die Frage nach Wahrheit („Zutreffen“) oder Falschheit („Nicht-Zutreffen“) sinnvoll ist, – was zum Beispiel bei Fragesätzen, Ausrufen und Wünschen nicht der Fall ist. Aussagen sind somit Sätze, die **Sachverhalte** beschreiben und denen man einen **Wahrheitswert** zuordnen kann.



Dies gilt natürlich auch, wenn **metasprachliche Symbole** verwendet werden, wovon wir im Folgenden reichlich Gebrauch machen. Da man **Relationen** und **logischen Ausdrücken** ebenfalls einen **Wahrheitswert** zuordnen kann<sup>7)</sup>, können wir sie auch als Aussagen behandeln. Es handelt sich dann um **logische**, im Gegensatz zu **metasprachlichen Aussagen**.

Beispiele für **Aussagen** in **Metasprache** sind

- (a) „Morgen scheint die Sonne.“
- (b) „Ich bin 1,83 m groß.“
- (c) „Ich habe ein rotes Auto und das kann 200 km/h schnell fahren.“
- (d) „Alle Iren haben rote Haare.“

Wie (c) zeigt, kann eine **Aussage** auch aus anderen **Aussagen** zusammengesetzt sein. Wir definieren daher:

**Teilaussage** [ok] Eine **Aussage** *A* heißt eine **Teilaussage**<sup>8)</sup> von einer **Aussage** *B*, wenn sie Teil von *B* ist und man sie ohne Bedeutungsänderung von *B* dort klammern könnte.

**echte Teilaussage** [ok] Eine **Teilaussage** *A* einer **Aussage** *B* heißt **echte Teilaussage** von *B*, wenn *A* verschieden von *B* ist.

**atomare Aussage** [ok] Eine **Aussage** heißt **atomar**<sup>9)</sup>, wenn sie nicht **zerlegbar** ist, d. h. wenn sie keine **echte Teilaussage** enthält.

**zerlegbare Aussage** [ok] Eine **Aussage** heißt **zerlegbar**<sup>10)</sup> wenn sie mindestens eine **echte Teilaussage** enthält.

Während (a) und (b) **atomare Aussagen** sind, ist (c) **zerlegbar**. Für alle vier **Aussagen** ist es sinnvoll zu fragen, ob sie gelten oder nicht; für (a) allerdings nur im Nachhinein und für den zweiten Teil von (c) nur weil klar ist, worauf sich „das“ bezieht. Offensichtlich muss manchmal der Zusammenhang, in dem eine **Aussage** formuliert wird, bekannt sein. Z. B. ist die Bedeutung von „Ich“ nur dann bekannt, wenn man weiss, von wem die **Aussage** ist.

In (b) kann man „Ich“ durch irgend eine andere Person *X* ersetzen<sup>11)</sup> und (d) kann umformuliert werden. Es ergeben sich dann die **Aussagen**

- (e) „*X* ist 1,83 m groß“
- (f) „Für alle *X* gilt: Wenn *X* ein Ire ist, dann hat *X* rote Haare.“

Den **Wahrheitswert** von (e) kann man erst dann bestimmen, wenn der **Wert** der **Variablen** *X* bekannt ist, während bei (f) alle zulässigen Werte für *X* im Prinzip schon bekannt sind. Man sagt, dass die **Variable** *X* in (e) **frei** und in (f) **gebunden** vorkommt. Die **freien Variablen** einer **Aussage** nennt man auch ihre **Parameter** und eine **Aussage** mit mindestens einem **Parameter** eine **parametrisierte Aussage**.

Die **Parameter** einer **Aussage** dürfen, soweit nicht anderweitig eingeschränkt, durch jedes zulässige **Objekt**<sup>12)</sup> ersetzt werden. Denkbar sind **Symbole**, **Formeln** und **Aussagen**

<sup>7)</sup> Zumindest prinzipiell nach Ersetzung von **Variablen** durch konkrete Werte.

<sup>8)</sup> synonym: **Unteraussage**

<sup>9)</sup> synonym: **unzerlegbar**

<sup>10)</sup> alternativ: **zusammengesetzt**— wir unterscheiden allerdings die beiden **Begriffe**. Aus **zerlegbar** folgt **zusammengesetzt**, aber nicht immer umgekehrt.

<sup>11)</sup> Dass dann auch „bin“ durch „ist“ ersetzt werden muss, ist von untergeordneter Bedeutung.

<sup>12)</sup> [ok] (Ein Auszug aus [Wikipedia\[59\]](#) steht im Glossar.)

Ein **Objekt** ist in diesem Dokument immer ein **Element** aus  $\mathcal{U}$ .

sowie **Mengen**, **Symbolfolgen** und Zahlen; ganz allgemein jedes reale oder gedachte Ding an sich.

Wir definieren noch für **Aussagen** bzw. **Objekte**  $A$  und  $B$ :<sup>13)</sup>

**Eigenschaft** [?] Ist  $x$  ein **Parameter** einer **Aussage**  $A$ , so ist die **Aussage** „ $x$  hat die **Eigenschaft**  $A$ “ gleichbedeutend damit, dass  $A$  gilt. Wir schreiben etwas unpräzise auch  $A(x)$ , besonders dann, wenn auch  $A(y)$  für  $y \neq x$  von Interesse ist.

$\equiv$  **Objektdefinition** [ok] Eine **Metadefinition**: Die formale Definition eines **Objekts**.  
 $\langle\langle A \equiv B \rangle\rangle$  steht für „ $A$  ist **definitionsgemäß gleich**  $B$ “ für **Objekte**  $A$  und  $B$ . Gewissermaßen ist  $A$  nur eine andere Schreibweise für  $B$ .<sup>14)</sup>

$\Leftrightarrow$  **Aussagedefinition** [ok] Eine **Metadefinition**: Die formale Definition einer **Aussage**.  
 $\langle\langle A \Leftrightarrow B \rangle\rangle$  steht für „ $A$  ist **definitionsgemäß äquivalent zu**  $B$ “ für **Aussagen**  $A$  und  $B$ . Gewissermaßen ist  $A$  nur eine andere Schreibweise für  $B$ .<sup>15)</sup>

### 2.1.3. Bereiche

Wir definieren:

**Bereich, Element** [ok] Ein **Bereich** ist eine Zusammenfassung von **Aussagen** und **Objekten**. Für solche Zusammenfassungen brauchen wir nur wenige Eigenschaften, die explizit angegeben werden. Die in einem Bereich zusammengefassten **Aussagen** und **Objekte** bezeichnen wir wie üblich als seine **Elemente**. **Klassen** und **Mengen** sind spezielle Bereiche.<sup>16)</sup>

und für **Aussagen** und **Objekte**  $a$  und **Bereiche**  $A$ :

$$a \in A \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ ist ein } \mathbf{Element} \text{ aus } A$$

$\in$  ist eine **Relation**. Gemäß (2.1) Seite 24 ist  $\ni$  die **Umkehrrelationen** zu  $\in$  (Sprechweise: ... *enthält als Element* ...). Schließlich sind  $\notin$  und  $\nexists$  gemäß (2.2) Seite 24 noch die zugehörigen **Negationen**. Diese vier **Relationen** bezeichnen wir als **Elementrelationen**.

Wir definieren noch für **Bereiche**  $A$  und  $B$ :<sup>17)</sup>

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \text{alle } \mathbf{Elemente} \text{ aus } A \text{ sind auch } \mathbf{Elemente} \text{ aus } B$$

Sprechweise:  $A$  ist ein **Teilbereich** von  $B$

$$A \equiv B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A$$

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ und nicht } A \equiv B$$

Sprechweise:  $A$  ist **echter Teilbereich** von  $B$

<sup>13)</sup> Üblicherweise werden mit den Definitionen neue, ggf. parametrisierte, **Begriffe** und **Symbole** eingeführt. Die Anforderungen an  $A$  und  $B$  sind intuitiv klar. Insbesondere darf  $B$  nicht von  $A$  abhängig sein. Rekursive Definitionen sind allerdings zulässig. Man betrachtet dann die gegebenen Definitionen mit **Parametern** als eine **Menge** von Definitionen, in denen für bestimmte **Parameter** alle möglichen **Ersetzungen** durchgeführt wurden. Dann muss diese **Menge** nur noch in die richtige Reihenfolge gebracht werden können.

<sup>14)</sup> Nach den Definitionen von  $\Leftrightarrow$  und  $\equiv$  sind zwei Ausdrücke  $P$  und  $Q$  schon dann gleich, wenn nach der Ersetzung aller Vorkommen von  $A$  durch  $B$  sowohl in  $P$  als auch in  $Q$  die resultierenden Ausdrücke  $\bar{P}$  und  $\bar{Q}$  gleich sind.

<sup>15)</sup> Wenn **Aussagen** auch **Objekte** sind, kann  $\Leftrightarrow$  durch  $\equiv$  ersetzt werden.

<sup>16)</sup> In der Tat ist  $\mathcal{U}$  nur eine **Klasse** und keine **Menge**.

<sup>17)</sup> In der Literatur wird  $\langle \subset \rangle$  oft in der Bedeutung von  $\langle \subseteq \rangle$  verwendet. Wir verwenden  $\langle \subset \rangle$  jedoch nur, wenn wir explizit **Ungleichheit** verlangen.

Gemäß (2.1) Seite 24 sind  $\supset$  und  $\supseteq$  die **Umkehrrelationen** zu  $\subset$  und  $\subseteq$  (Sprechweise: ... ist [echte] **Obermenge** von ...). Es gelten entsprechende Gleichungen wie (2.3) und (2.4) Seite 24. Schließlich sind  $\nmid$ ,  $\nsubseteq$ ,  $\nmid$  und  $\nsubseteq$  gemäß (2.2) Seite 24 noch die zugehörigen **Negationen**. Diese acht **Relationen** bezeichnen wir als **Bereichsrelationen**.

Wir definieren:

**Diskursuniversum**  $\mathcal{U}$  [?] (Ein Auszug aus Wikipedia[41] steht im Glossar.)

Das **Diskursuniversum**  $\mathcal{U}$  ist der vorgegebene **Bereich** aller **Objekte**, die in **Aussagen** einen **Parameter** ersetzen dürfen.  $\mathcal{U}$

**Aussagenbereich**  $\mathcal{A}$  [ok] Der **Aussagenbereich**  $\mathcal{A}$  ist der **Bereich** aller **formalen Aussagen**, d. h. der **Aussagen** in **Objektsprache**. Es kann  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$  gelten, muss es aber nicht.

**Objektbereich**  $\mathcal{O}$  [ok] Der **Objektbereich**  $\mathcal{O}$  ist der **Bereich** aller **formalen Objekte**, d. h. der **Objekte**, die in **Aussagen** in **Objektsprache** einen **Parameter** ersetzen dürfen. Diese Objekte sind notwendigerweise auch in **Objektsprache** geschrieben und offensichtlich ist  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ .

$\mathbb{N}$  ist der **Bereich** der **natürlichen Zahlen**<sup>0)</sup> ohne 0

$\mathbb{N}_0$  ist der **Bereich** der **natürlichen Zahlen**<sup>0)</sup> (einschließlich 0)

Wenn wir von einer **natürlichen Zahl** sprechen, meinen wir immer ein **Element** aus  $\mathbb{N}_0$ .

## 2.1.4. Metaoperationen

**Zerlegbare Aussagen** wie (c) können zum Teil formalisiert werden. Dies wird mit den folgenden Definitionen erreicht.<sup>18)</sup>

|                       |                   |  |
|-----------------------|-------------------|--|
| $\sim A$              | $\Leftrightarrow$ | $A$ <b>gilt nicht</b> .                          |
| $A \Rightarrow B$     | $\Leftrightarrow$ | <b>Wenn</b> $A$ <b>gilt dann</b> gilt auch $B$ . |
| $A \Leftarrow B$      | $\Leftrightarrow$ | $A$ gilt <b>sofern</b> $B$ gilt.                 |
| $A \Leftrightarrow B$ | $\Leftrightarrow$ | $A$ gilt <b>genau dann wenn</b> $B$ gilt.        |
| $A \& B$              | $\Leftrightarrow$ | $A$ <b>und</b> $B$ .                             |
| $A \parallel B$       | $\Leftrightarrow$ | $A$ <b>oder</b> $B$ .                            |

Offensichtlich sind das alles ebenfalls **Aussagen**, jetzt aber teilweise formalisiert. (c) lässt sich dann ausdrücken als „Ich habe ein rotes Auto' & ,das kann 200 km/h schnell fahren.'“.  $\langle A \Leftarrow B \rangle$  ist nur eine andere Schreibweise für  $\langle B \Rightarrow A \rangle$ . – Ein Symbol für „nicht“ wird in diesem Dokument nicht gebraucht.

Wir nennen  $\&$  und  $\parallel$  **Metaoperationen** und  $\Rightarrow$ ,  $\Leftarrow$  und  $\Leftrightarrow$  **Metarelationen**<sup>19)</sup>. Die damit gebildeten **Aussagen** können natürlich auch geklammert werden, um die Reihenfolge der Auswertung eindeutig zu machen. Für den Fall fehlender Klammern sind ihre Prioritäten in der Tabelle 2.3 auf Seite 26 angegeben.

Um Verwechslungen mit den **Junktoren** zu vermeiden, verwenden wir für die metasprachlichen **Operationen** „und“ und „oder“ die Symbole  $\langle \& \rangle$  und  $\langle \parallel \rangle$ .  $A$  und  $B$

<sup>18)</sup> Damit es nicht zu Verwechslungen führt, verwenden wir für die metasprachliche Negation nicht das logische Symbol  $\neg$ . Wegen (2.1) Seite 24 ist die Definition von  $\langle \Leftrightarrow \rangle$  überflüssig, wird wegen der angegebenen Sprechweise aber dennoch angegeben.

<sup>19)</sup> Man könnte **Metaoperationen** und **Metarelationen** auch als **Metajunktoren** bezeichnen. Zur Unterscheidung von **Operationen** und **Relationen** vergleiche aber auch die Fußnote 37 auf Seite 24.

können als Operanden von  $\langle \Leftrightarrow \rangle$ ,  $\langle \& \rangle$  und  $\langle || \rangle$  vertauscht werden, ohne das Ergebnis zu ändern.<sup>20)</sup> Wird in einer (Teil-)Aussage nur eine der Operationen  $\&$  oder  $||$  verwendet, können die Klammern dort weggelassen und die Operationen in beliebiger Reihenfolge ausgewertet werden, wiederum ohne das Ergebnis zu ändern.<sup>21)</sup> Zusammengefasst ist die Reihenfolge der Operationen und der Auswertung dort beliebig.

### 2.1.5. Mit Gleichheit verwandte Relationen

#### 2.1.5.1. Vergleichbar

Zwei Objekte  $A$  und  $B$  sind **vergleichbar**, wenn beide von derselben Objektart sind, d. h. wenn z. B. jeweils beide Mengen, Symbolfolgen, Zahlen, usw. sind. Dabei muss bei Formeln zwischen der Formel an sich und dem Ergebnis der Formel unterschieden werden. Siehe Beispiel (a).

Intuitiv scheint klar zu sein, was damit gemeint ist. Wenn aber entschieden werden muss, ob z. B. (a) „1+1“ gleich „2“ oder (b) „1+1“ gleich „1 + 1“ ist, muss man erst entscheiden, von welcher Objektart die beiden zu vergleichenden Ausdrücke sind, d. h. wie verglichen wird. Wenn sie als jeweiliges Ergebnis der beiden Formeln, verglichen werden, dann ist (a) richtig. Wenn sie als Formeln, d. h. als Symbolfolgen, verglichen werden, ist (a) falsch. Wenn die Ausdrücke in (b) als Symbolfolgen verglichen werden, dann ist (b) richtig. Wenn sie als Zeichenketten verglichen werden, ist (b) falsch.

Die folgende Tabelle fasst das zusammen:

| $A$                     | $B$                     | Objektart    | $A$ gleich $B$ |
|-------------------------|-------------------------|--------------|----------------|
| $1 + 1$                 | $2$                     | Objekt       | richtig        |
| $\langle 1 + 1 \rangle$ | $\langle 2 \rangle$     | Formel       | falsch         |
| $\langle 1 + 1 \rangle$ | $\langle 1 + 1 \rangle$ | Symbolfolge  | richtig        |
| „1+1“                   | „1 + 1“                 | Zeichenkette | falsch         |

#### 2.1.5.2. Vergleiche

$A$  und  $B$  seien Objekte. Dann definieren wir:

$\equiv$  **Gleichheit**  $\langle A \equiv B \rangle$  heißt, dass  $A$  und  $B$  in den interessierenden Eigenschaften für  $\equiv$  übereinstimmen.<sup>22)</sup> Sprechweisen: „ $A$  ist dasselbe wie  $B$ “ oder „ $A$  ist identisch zu  $B$ “ — Inwieweit die Begriffe Gleichheit und Identität korrelieren, wird in diesem Dokument nicht erörtert.<sup>23)</sup>

$\neq$  **Ungleichheit**  $\langle A \neq B \rangle$  heißt, dass  $A$  und  $B$  in mindestens einer interessierenden Eigenschaft für  $\equiv$  nicht übereinstimmen. Sprechweisen: „ $A$  ist nicht dasselbe wie  $B$ “ (aber vielleicht das gleiche; siehe  $\Leftrightarrow$ ) oder „ $A$  ist nicht identisch zu  $B$ “.

<sup>20)</sup> D. h. die Operationen  $\langle \Leftrightarrow \rangle$ ,  $\langle \& \rangle$  und  $\langle || \rangle$  sind kommutativ.

<sup>21)</sup> D. h. die Operationen  $\&$  und  $||$  sind auch assoziativ. Bei den logischen Operationen  $\wedge$  und  $\vee$  müssen Kommutativität und Assoziativität durch Axiome gefordert werden. Die Kommutativität von  $\Leftrightarrow$  kann abgeleitet werden.

<sup>22)</sup> Z. B. sind zwei Junktoren üblicherweise dann gleich, wenn sie stets denselben Wahrheitswert liefern. Ihre Bezeichnungen können dabei durchaus verschieden sein, interessieren bei der Feststellung der Gleichheit aber nicht. Z. B. bezeichnen  $\langle \& \rangle$  und  $\langle || \rangle$  dieselbe Operation, haben aber verschiedene Priorität. — siehe Tabelle 2.3 auf Seite 26

<sup>23)</sup> siehe [48]

$\equiv$  und  $\neq$  bezeichnen wir als **Gleichheitsrelationen**. Gleichheit ist eine **Äquivalenzrelation**, d. h. sie ist *reflexiv* ( $a \sim a$ ), *transitiv* ( $((a \sim b) \& (b \sim c)) \Rightarrow (a \sim c)$ ) und *symmetrisch* ( $((a \sim b) \Rightarrow (b \sim a))$ ) – jeweils für alle zulässigen Objekte  $a$ ,  $b$  und  $c$ .

### 2.1.6. Bezeichnungen

**Symbole** umfassen neben speziellen **Symbolen** auch Buchstaben, Ziffern und Sonderzeichen. **Symbole**, für die es kein eigenes typographisches Zeichen gibt, können auch durch Aufeinanderfolge mehrerer typographischer Zeichen, i. Alg. lateinische Buchstaben, dargestellt werden. Wir nennen sie dann **zusammengesetzte Symbole**, im Gegensatz zu den **einfachen Symbolen**. Charakteristisch für ein Symbol ist, dass es ohne Bedeutungsverlust nicht zerlegt werden kann. Ein **zusammengesetztes Symbol** ist i. Alg. **zerlegbar**, kann aber auch als **atomar**, d. h. **unzerlegbar**, definiert werden, wie z. B.  $\sin$  als **Symbol** für die Sinusfunktion. **Symbole** werden  $\langle \text{so} \rangle$  quotiert; **zerlegbare** können aber auch wie **Symbolfolgen** quotiert werden. — Die Quotierung ist kein Bestandteil des **Symbols**!

Wird für bestimmte **Objekte** ein **Symbol** verwendet, so nennen wir dies ein **Objektsymbol**. Ist das Objekt eine Funktion, Operation, Relation usw., so nennen wir das Symbol ein **Funktionssymbol**, **Operationssymbol**, **Relationssymbol** usw.

**Zeichenketten** sind Folgen von einfachen **Symbolen**, in denen im Prinzip auch Leerstellen und andere nicht druckbare Zeichen zulässig sind.<sup>24)</sup> Damit Leerstellen in **Zeichenketten** leicht bestimmt und sogar gezählt werden können, werden **Zeichenketten** stets „in dieser“ Schriftart und Quotierung dargestellt. — Die Quotierung ist kein Bestandteil der **Zeichenkette**!

**Symbolfolgen** sind ähnlich wie **Zeichenketten**, außer dass sie als Bausteine neben einfachen auch zusammengesetzte, aber **atomare Symbole** enthalten können und Leerzeichen und andere Zwischenraumzeichen nicht zählen. Letztere dienen nur der optischen Trennung der **Symbole** und der besseren Lesbarkeit. **Symbolfolgen** werden stets  $\langle \langle \text{in dieser} \rangle \rangle$  Quotierung dargestellt. — Die Quotierung ist kein Bestandteil der **Symbolfolge**!

**Formeln** sind in diesem Dokument immer nach vorgegebenen Regeln aufgebaute **Symbolfolgen**<sup>25)</sup>. Daher werden sie wie **Symbolfolgen** quotiert. — Die Quotierung ist kein Bestandteil der **Symbolfolge**!

Man kann eine **Formel** auch dadurch charakterisieren, dass sie ein **Element** aus einer vorgegebenen **Menge  $\mathcal{L}$**  von **Symbolfolgen** ist.<sup>26)</sup> Das ist dann so ziemlich die einfachste Regel.

Wenn eine **Symbolfolge** nicht korrekt nach den vorgegebenen Regeln aufgebaut ist bzw. kein **Element** aus der vorgegebenen **Menge  $\mathcal{L}$**  ist, werden wir sie *nicht* als **Formel** bezeichnen, auch nicht als „fehlerhafte Formel“ oder ähnlich. Sie ist dann einfach keine **Formel**.

<sup>24)</sup> Da beim Ausdruck optisch nicht entschieden werden kann, ob ein Zwischenraum (white space) aus einem Tabulator oder evtl. mehreren Leerzeichen besteht, verwenden wir nur einzelne Leerzeichen als Zwischenraumzeichen und vermeiden Zeilenumbrüche.

<sup>25)</sup> Es kann verschiedene Arten von **Formeln** geben, z. B. **aussagenlogische**, **prädikatenlogische** und solche, die ein Taschenrechner auswerten kann.

<sup>26)</sup> Die **Formel** wird dann auch **Wort** der **Sprache  $\mathcal{L}$**  genannt – besonders, wenn die **Elemente** aus  $\mathcal{L}$  **Zeichenketten** statt **Symbolfolgen** sind. Wir bleiben der Klarheit willen bei „**Formel**“.

**Objekte** sind z. B. **Symbole**, **Zeichenketten**, **Symbolfolgen** und **Formeln**, oder auch **Aussagen**, Mengen, Zahlen, usw. — ganz allgemein reale oder gedachte Dinge an sich. Eine **Formel**, die nicht quotiert ist, steht für den Wert dieser **Formel**, der dann wieder ein **Objekt** ist. Entsprechend steht ein **Symbol**, das nicht quotiert ist, für das dadurch bezeichnete **Objekt**. Z. B. bezeichnet das **Symbol**  $\langle \mathbb{N} \rangle$  die **Menge**  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen ohne 0.

### 2.1.7. Quotierung

Zur Verdeutlichung der soeben definierten Quotierungen ein Beispiel:<sup>27)</sup>

|                                      |                             |   |
|--------------------------------------|-----------------------------|---|
| $\sin$                               | <b>Objekt</b>               | die Sinusfunktion   |
| $\langle \sin \rangle$               | <b>Bezeichnung</b>          | für das <b>Objekt</b>   |
| $\langle\langle \sin \rangle\rangle$ | <b>Symbolfolge (Formel)</b> | aus dem zusammengesetzten, <b>atomaren Symbol</b> $\langle \sin \rangle$                            |
| $\langle\langle \sin \rangle\rangle$ | <b>Symbolfolge (Formel)</b> | aus den einfachen <b>Symbolen</b> $\langle s \rangle$ , $\langle i \rangle$ und $\langle n \rangle$ |
| "sin"                                | <b>Zeichenkette</b>         | aus den einfachen <b>Symbolen</b> $\langle s \rangle$ , $\langle i \rangle$ und $\langle n \rangle$ |

Die **Bezeichnung** eines **Objekts** kann auch aus mehreren Symbolen bestehen, d. h. einer **Symbolfolge** oder sogar einer ganzen **Formel**; z. B. ist die Bezeichnung für das indizierte **Objekt**  $a_i$  gleich  $\langle\langle a_i \rangle\rangle$ .

### 2.1.8. Weitere Bezeichnungen

#### Folge

**Tupel** Ein  $n$ -**Tupel** ist eine endliche Folge  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  mit folgenden Eigenschaften:

- $n$ , die **Länge**, d. h. die Anzahl der **Komponenten** aus  $\vec{a}$ , ist eine natürliche Zahl.
- $\text{len } \vec{a} \equiv \text{len}(\vec{a}) \equiv n$
- Die  $a_i$  für  $1 \leq i \leq n$  sind **Elemente** meist vorgegebener **Mengen**.
- $\text{set } \vec{a} \equiv \text{set}(\vec{a}) \equiv$  die **Menge** aller Komponenten  $a_i$  aus  $\vec{a}$ .

Für  $n = 0$  ist  $\vec{a} = ()$ , das **leere Tupel** oder **0-Tupel**.

Wo immer  $\vec{a}$  und  $a_i$  mit  $i \in \mathbb{N}_0$  gemeinsam vorkommen, ist  $a_i$  die  $i$ -te Komponente aus  $\vec{a}$ .

**Relation** Eine  $n$ -**stellige Relation**<sup>28)</sup>  $R$  ist ein  $(1+n)$ -**Tupel**  $(G, A_1, \dots, A_n)$  mit folgenden Eigenschaften:

- $n$ , die **relationale Stelligkeit**, ist eine natürliche Zahl.
- $\text{stel}_r R \equiv \text{stel}_r(R) \equiv n$
- Die  $A_i$  für  $1 \leq i \leq n$  sind Mengen, die **Trägermengen** (carrier) von  $R$ .
- $\text{car}_i R \equiv \text{car}_i(R) \equiv A_i$
- $G$ , der **Graph** von  $R$ , ist eine **Teilmenge** des kartesischen Produkts  $A_1 \times \dots \times A_n$ .
- $\text{graph } R \equiv \text{graph}(R) \equiv G$  (oft einfach mit  $R$  bezeichnet)

<sup>27)</sup> Was **atomare** und was **zerlegbare Symbole** sind, muss jeweils definiert werden, bzw. ergibt sich aus dem Zusammenhang.

<sup>28)</sup> siehe [66]



- $R(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow (a_1, \dots, a_n) \in G$

Für  $n = 0$  ist  $G \subseteq \{()\}^{29}$ , d. h.  $R()$  ist entweder *wahr* (true) oder *falsch* (false).

Für  $n = 1$  ist  $G \subseteq A_1$ , d. h.  $R$  kann als *Teilmenge* von  $A_1$  aufgefasst werden.

Für  $n = 2$  heißt die Relation *binär* und man schreibt  $\langle\langle xRy \rangle\rangle$  statt  $\langle\langle R(x, y) \rangle\rangle$  bzw.  $\langle\langle (x, y) \in R \rangle\rangle$ .

Ist  $R = (G, M, \dots, M)$ , so heißt  $R$  eine  $n$ -stellige Relation *auf*<sup>30)</sup>  $M$ .

Ist  $|G|$  endlich, so nennen wir auch  $R$  *endlich*.

**Umkehrrelation** Die *Umkehrrelation* von<sup>31)</sup> einer *binären* Relation  $(G, A, B)$  ist die Relation  $(G', B, A)$  mit  $G' \equiv \{(b, a) \mid (a, b) \in G\}$ . Üblicherweise wird das zugehörige Relationssymbol gespiegelt.

**Funktion** Eine  $n$ -stellige *Funktion*<sup>32)</sup> ist ein  $(1+n+1)$ -*Tupel*  $f = (G, A_1, \dots, A_n, B)$  mit folgenden Eigenschaften:

- $n$ , die *Stelligkeit*<sup>33)</sup>, ist eine natürliche Zahl.

$$\text{stel}_f f \equiv \text{stel}_f(f) \equiv n$$

- $f$  ist eine  $(n+1)$ -stellige Relation.
- Zu jedem  $n$ -*Tupel*  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  mit  $a_i \in A_i$  für  $1 \leq i \leq n$  gibt es genau ein  $b \in B$  mit  $(a_1, \dots, a_n, b) \in G$ , den *Funktionswert* von  $\vec{a}$ .

$$f\vec{a} \equiv fa_1 \dots a_n \equiv f(\vec{a}) \equiv f(a_1, \dots, a_n) \equiv b^{34)}$$

- $A = A_1 \times \dots \times A_n$  ist der *Definitionsbereich* (domain) von  $f$ .

$$\text{dom } f \equiv \text{dom}(f) \equiv A_1 \times \dots \times A_n$$

- $B$  ist der *Zielbereich* (target) von  $f$

$$\text{tar } f \equiv \text{tar}(f)$$

Für  $n = 0$  ist  $G = ((), b)$  für ein  $b \in B$  und somit  $f() = b$ .  $f$  kann damit auch als Konstante  $b$  aufgefasst werden.<sup>35)</sup>

Man sagt:  $f$  ist eine  $n$ -stellige *Funktion* von  $A_1 \times \dots \times A_n$  *nach*<sup>36)</sup>  $B$  (Schreibweise:  $f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ ) oder, im Fall  $n = 1$ ,  $f$  ist eine Funktion von  $A$  nach  $B$  (Schreibweise:  $f : A \rightarrow B$ ). Mit  $A \equiv A_1 \times \dots \times A_n$  kann für  $n > 0$  jede Funktion als 1-stellig aufgefasst werden.

**Operationen** in oder auf einer *Menge*  $M$  sind  $n$ -stellige Funktionen  $M^n \rightarrow M$ . Für eine *binäre*, d. h. 2-stellige *Operation*  $\circledast$  schreibt man i. Alg.  $\langle\langle x \circledast y \rangle\rangle$  statt  $\langle\langle \circledast(x, y) \rangle\rangle$ . Wenn nicht anders angegeben, sind *Operationen* stets *binär*. 0-stellige *Operationen* können wieder als Konstante aufgefasst werden.

Um Missverständnisse zu vermeiden, werden wir die *Bezeichnung* „Operator“ nicht verwenden.

<sup>29)</sup> Das kartesische Produkt enthält nur noch das 0-*Tupel*  $()$ .

<sup>30)</sup> alternativ: **in**

<sup>31)</sup> alternativ: **für**

<sup>32)</sup> siehe [46]

<sup>33)</sup> Die Werte der Stelligkeit als Relation und als Funktion sind verschieden, d. h. es gilt stets:  $\text{stel}_f(f) = \text{stel}_f(f) + 1$ .

<sup>34)</sup>  $f(a_1, \dots, a_n)$  und  $f(a_1, \dots, a_n, b)$  sind wohl zu unterscheiden. Ersteres ist ein Funktionsaufruf mit einem Funktionswert, letzteres eine Relation mit einem Wahrheitswert.

<sup>35)</sup> Bei der Schreibweise ohne Klammern steht da statt  $\langle\langle f() \rangle\rangle$  nur noch  $\langle\langle f \rangle\rangle$  und statt  $\langle\langle f() = b \rangle\rangle$ , insgesamt also nur noch  $\langle\langle f = b \rangle\rangle$ .

<sup>36)</sup> alternativ: **in**

**Junktoren** sind aussagenlogische Relationen und Operationen.<sup>37)</sup>

### 2.1.9. Relationen und Operationen

Als Beispielsymbol für **unäre Operationen** wird  $\langle \ominus \rangle$  und für **binäre Operationen**  $\langle \otimes \rangle$  verwendet. Beispielsymbole für **binäre Relationen** sind  $\langle < \rangle$  und  $\langle \leq \rangle$ , für ihre **Umkehrrelationen**  $\langle > \rangle$  bzw.  $\langle \geq \rangle$  sowie für ihre **Negationen**  $\langle \nless \rangle$  bzw.  $\langle \nless \rangle$ .<sup>38)</sup> Wenn nichts anderes gesagt wird, gelte mit diesen Symbolen bei gegebenem  $\langle < \rangle$ <sup>39)</sup> stets:

$$(A > B) \Leftrightarrow (B < A) \quad , \text{ die Umkehrrelation von } < \quad (2.1)$$

$$(A \nless B) \Leftrightarrow \sim (A < B) \quad , \text{ die Negation von } < \quad (2.2)$$

Dabei ist  $\langle > \rangle$  ist die waagerechte Spiegelung von  $\langle < \rangle$  und statt des senkrechten kann auch ein schräger Strich genommen werden.

Sei nun  $<$  gegeben und  $\nless$  die **Umkehrrelation** der **Negation** von  $<$ . Dann gilt wegen 2.1 und 2.2

$$(A \nless B) \Leftrightarrow (B \nless A) \Leftrightarrow \sim (B < A)$$

Sei nun umgekehrt  $\nless$  die **Negation** der **Umkehrrelation** von  $<$ . Dann gilt wegen 2.2 und 2.1

$$(A \nless B) \Leftrightarrow \sim (A > B) \Leftrightarrow \sim (B < A)$$

Also stimmt die **Umkehrrelation** der **Negation** mit der **Negation** der **Umkehrrelation** überein und wir brauchen keine verschiedenen Symbole dafür.

Je nachdem ob  $<$  oder  $\leq$  gegeben ist<sup>40)</sup> gelte ferner:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow ((A < B) \parallel (A \equiv B)) \quad (2.3)$$

$$(A < B) \Leftrightarrow ((A \leq B) \& (A \neq B)) \quad (2.4)$$

Man beachte, dass, wenn man  $\langle \Leftrightarrow \rangle$  durch  $\langle \Rightarrow \rangle$  ersetzt, weder (2.3) aus (2.4) folgt noch umgekehrt. (2.3) und (2.4) folgen aber dann auseinander, wenn aus  $\langle < \rangle$  die Ungleichheit bzw. aus der Gleichheit  $\langle \leq \rangle$  folgt. Beispiele dazu sind in der Tabelle 2.2 auf der nächsten Seite angegeben.

<sup>37)</sup> Ein  $n$ -stelliger **Junktor**  $J$  sei eine **Operation** und somit eine **Funktion**. Wegen  $M = \{\text{true}, \text{false}\}$  kann er auch als eine  $n$ -stellige **Relation**  $J'$  aufgefasst werden:  $J' \equiv \{\vec{a} \in M^n \mid J(\vec{a}) = \text{true}\}$ .

Umgekehrt kann eine  $n$ -stellige **aussagenlogische Relation**  $J'$  mittels:  $J''(\vec{a}) \equiv \text{true}$  für  $\vec{a} \in J'$ , **false** sonst, für  $\vec{a} \in M^n$ , auch als  $n$ -stellige Operation aufgefasst werden.

Falls  $J(\vec{a}) = \text{true}$  ist  $\vec{a} \in J'$  und somit  $J''(\vec{a}) = \text{true}$ . Für  $J(\vec{a}) = \text{false}$  ist  $\vec{a} \notin J'$  und somit  $J''(\vec{a}) = \text{false}$ . Also ist  $J = J''$  und so können die  $n$ -stelligen **aussagenlogischen Relationen** und **Operationen** einander eineindeutig zugeordnet werden.

Daher sind in der Aussagenlogik **Relationen** und **Operationen** nicht von vornherein unterscheidbar. Wegen der Verabredungen in Unterabschnitt 2.1.9 muss für die verwendeten **Junktoren** daher jeweils wohl definiert sein, ob sie als **Relation** und **Operation** zu verstehen sind.

<sup>38)</sup> Die Relationen brauchen keine Ordnungsrelationen sein, auch wenn die angegebenen Symbole dies nahe legen. Wenn eine der Relationen  $<$ ,  $\leq$ ,  $>$  oder  $\geq$  definiert ist, sind wegen (2.1), (2.3) und (2.4) auch die anderen drei Relationen definiert sowie wegen (2.2) auch  $\nless$ ,  $\nless$ ,  $\nless$  und  $\nless$ . Der senkrechte Strich bei den Negationen kann auch schräg sein, wie z. B. bei  $\neq$ .

<sup>39)</sup> entsprechend mit  $\langle > \rangle$ ,  $\langle \leq \rangle$ ,  $\langle \geq \rangle$  und anderen, nicht horizontal symmetrischen **Symbolen**.

<sup>40)</sup> entsprechend mit  $>$  oder  $\geq$  oder anderen nicht horizontal symmetrischen Paaren von **Symbolen**.



|          | $A, A$     | $A, B$     | $B, A$     | $B, B$ |                  |
|----------|------------|------------|------------|--------|------------------|
| $\equiv$ | $A = A$    |            | $B = B$    |        |                  |
| $<$      | $A < B$    |            |            |        | Es gilt (2.3)    |
| $\leq$   | $A \leq A$ | $A \leq B$ | $B \leq B$ |        | und (2.4)        |
| $<$      | $A < B$    |            | $B < B$    |        | Es gilt (2.3)    |
| $\leq$   | $A \leq A$ | $A \leq B$ | $B \leq B$ |        | aber nicht (2.4) |
| $<$      | $A < B$    |            |            |        | Es gilt (2.4)    |
| $\leq$   | $A \leq A$ | $A \leq B$ |            |        | aber nicht (2.3) |

Tabelle 2.2.: Beispiele für  $<$  und  $\leq$ 

Seien  $\circ_1$  und  $\circ_2$  **binäre Operationen** oder **Relationen** (auch gemischt) und mindestens eins von beiden eine **Relation**. Dann treffen wir folgende Vereinbarung:<sup>41)</sup>

$$A \circ_1 B \circ_2 C \text{ steht für } A \circ_1 B \quad \& \quad B \circ_2 C$$

Ist diese Interpretation nicht gewünscht, so müssen Klammern verwendet werden.

Für den Fall fehlender Klammern sind die Prioritäten in der Tabelle 2.3 auf der nächsten Seite angegeben. Damit wären dann alle Klammern in diesem Unterabschnitt 2.1.9 überflüssig.

### 2.1.10. Prioritäten

Die Tabelle 2.3 auf der nächsten Seite listet zur Vermeidung von Klammern die Prioritäten der in diesem Dokument verwendeten **Operationen**, **Relationen**, **Junktoren** und **Metadefinitionen** in absteigender Folge von höherer zu niedrigerer Priorität, d. h. von starker zu schwacher Bindung auf.<sup>42)</sup> Das Weglassen redundanter Klammern wird in diesem Kapitel 2 nicht weiter thematisiert.<sup>43)</sup> Zur besseren Verständlichkeit werden aber gelegentlich auch redundante Klammern verwendet, insbesondere wenn Prioritäten unklar oder in der Literatur auch anders definiert sind. Die Prioritäten der **Junktoren** wurden aus [2] Kapitel 1.1 Seite 5 entnommen und ergänzt und die der **Metaoperationen** daran angeglichen.

Für **Operationen** derselben Priorität wählen wir in diesem Dokument Rechtsklammerung<sup>44)</sup>.

<sup>41)</sup> wird auch in der Literatur verwendet, z. B. z. B. [2], Notationen Seite xxi

<sup>42)</sup> Priorität 1 ist höher und bindet damit stärker als Priorität 2, usw.

<sup>43)</sup> Gesetzt den Fall, dass ASBA die **Prämissen** und **Konklusionen** eines mathematischen **Satzes** richtig und die **Beweisschritte**, z. B. durch fehlerhafte Interpretation einer **Formel**, falsch einliest, ansonsten aber richtig arbeitet. Dann kann man folgende Fälle unterscheiden:

— Ein falscher **Satz** kann dadurch nicht als richtig bewertet werden.

— Ein richtiger **Satz** wird wahrscheinlich auch bei eigentlich richtigem **Beweis** als nicht bewiesen gelten, was natürlich unbefriedigend ist.

— In äußerst unwahrscheinlichen Fällen kann dabei auch ein eigentlich falscher **Beweis** in einen richtigen verwandelt werden, was zwar schön ist, aber leider steht in der Dokumentation dann ein falscher **Beweis**.

In keinem Fall wird durch diesen Fehler die **Menge** der richtigen **Sätze** durch einen falschen **Satz** „verunreinigt“.

<sup>44)</sup> Die Symbole **unärer Operationen** stehen in diesem Dokument stets links *vor* dem Operanden, so dass es für sie nur Rechtsklammerung geben kann. Zur Rechtsklammerung bei **binären Operationen** ein Zitat aus [2] Kapitel 1.1 Seite 5: „Diese hat gegenüber Linksklammerung Vorteile bei der Niederschrift von Tautologien in  $\rightarrow, [\dots]$ “. Die meisten Autoren bevorzugen Linksklammerung, was natürlicher erscheint. Dann sollte man aber für die Potenz doch noch Rechtsklammerung wählen, sonst ist  $\langle\langle a^{xy} = (a^x)^y = a^{(x*y)} \rangle\rangle$  und nicht wie wahrscheinlich erwünscht  $\langle\langle a^{(xy)} \rangle\rangle$ .

|   |  |
|---|--|
| Klammern  | ( ) < > « » “ ”  |
| Operationen haben unterschiedliche Priorität.   |  |
| Unäre Operationen <sup>1) 2)</sup>  | $\ominus \neg \sim$  |
| Binäre Bereichsoperationen  | $\times$<br>$\cup$<br>$\cap$   |
| Binäre Operationen <sup>1)</sup>  | $\otimes$  |
| Binäre Junktoren <sup>2)</sup>  | $\wedge \uparrow$<br>$\vee \dot{\vee} \downarrow$<br>$\leftarrow \rightarrow$<br>$\leftrightarrow$ |
| Binäre Relationen haben gleiche Priorität.  |  |
| Binäre Elementrelationen <sup>3)</sup>  | $\in \notin \ni \ni$   |
| Binäre Bereichsrelationen <sup>3)</sup>   | $\subset \not\subset \subseteq \not\subseteq \supset \not\supset \supseteq \not\supseteq$          |
| Binäre Relationen <sup>1)</sup>   | $< \not< \leq \not\leq > \not> \geq \not\geq$  |
| Gleichheitsrelation <sup>4)</sup>   | $\equiv \neq$  |
| Ableitungsrelation <sup>5)</sup>  | $\vdash$   |
| Ersetzung <sup>5)</sup>   | $\Leftrightarrow \Leftarrow$   |
| Sonstige binäre Verknüpfungen haben unterschiedliche Priorität.                       |  |
| Objektdefinition <sup>6)</sup>  | $\equiv$   |
| Binäre Metaoperationen <sup>7) 8)</sup>   | $\&$<br>$\parallel$<br>$\perp$<br>$\Leftarrow \Leftrightarrow \Rightarrow$                         |
| Aussagedefinition <sup>6)</sup>   | $:\Leftrightarrow$   |
| Natürliche Sprache  |  |
| Innerhalb natürlicher Sprache deren Strukturelemente, z. B. Satzzeichen <sup>9)</sup> | $\cdot , ;$ usw.   |

<sup>1</sup> siehe Unterabschnitt 2.1.9 auf Seite 24<sup>2</sup> siehe Tabelle 3.3 auf Seite 42<sup>3</sup> siehe Unterabschnitt 2.1.6 auf Seite 21<sup>4</sup> siehe Paragraph 2.1.5.2 auf Seite 20<sup>5</sup> siehe Unterabschnitt 3.1.1 auf Seite 33<sup>6</sup> siehe Paragraph ?? auf Seite ??<sup>7</sup> siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 19<sup>8</sup>  $\langle \rangle$  wird nur bei den Schlussregeln (siehe Unterabschnitt 2.2.3 auf Seite 29) verwendet. $\langle \& \rangle$  und  $\langle \parallel \rangle$  bezeichnen die gleiche Operation, haben aber unterschiedliche Priorität.<sup>9</sup> Innerhalb von Formeln können Satzzeichen eine andere Bedeutung und Priorität haben.**Tabelle 2.3.:** Prioritäten in abnehmender Reihenfolge

## 2.2. Beweise in ASBA

Die Regeln zur Formulierung und Prüfung der **Beweise** müssen in **ASBA** fest codiert werden. Sie sind quasi die **Axiome** von **ASBA** und sollten daher möglichst wenig voraussetzen. In **ASBA** wird dazu ein *Genzen-Kalkül*<sup>45)</sup> verwendet. Die Definition von **Schlussregel** und **Beweis** ist in diesem Dokument **ASBA**-spezifisch, um später eine leichtere Programmierung zu erreichen. Insbesondere müssen alle abzuspeichernden Mengen endlich sein. Dies berücksichtigen wir in den Beispielen, fordern zunächst aber nicht notwendig Beschränktheit. Zuerst brauchen wir aber noch ein paar Definitionen.

### 2.2.1. Definitionen und Verabredungen

Zu  $\langle \text{len} \rangle$  und  $\langle \text{set} \rangle$  Vergleiche die Definition von  $n$ -*Tupel* im Unterabschnitt 2.1.8 auf Seite 22.

|                    |          |  |  |
|--------------------|----------|--|--|
| $ M $              | $\equiv$ | Kardinalität von $M$                                   | , die <b>Anzahl der Elemente</b> aus $M$                                       |
| $M^n$              | $\equiv$ | $M \times \dots \times M$                              | , für $n \in \mathbb{N}_0$ , das <b>kartesische Produkt</b> aus $n$ Mengen $M$ |
| $M^0$              | $\equiv$ | $\{()\}$   | , wobei $()$ das <b>0-Tupel</b> ist  |
| $\mathcal{T}(M)$   | $\equiv$ | $\{\vec{a} \in M^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$          | , die <b>Menge der Tupel über <math>M</math></b> ( <b>Tupelmenge</b> )         |
| $(A, B)^<$         | $\equiv$ | $A$  | , die <b>linke Seite</b> eines geordneten Paares.<br>(2.5)                     |
| $(A, B)^>$         | $\equiv$ | $B$  | , die <b>rechte Seite</b> eines geordneten Paares.<br>(2.6)                    |
| $\mathcal{P}(M)$   | $\equiv$ | $\{A \mid A \subseteq M\}$                             | , die <b>Potenzmenge</b> der <b>Menge</b> $M$ (2.7)                            |
| $\mathcal{P}_e(M)$ | $\equiv$ | $\{A \subseteq M \mid  A  \in \mathbb{N}_0\}$          | , die <b>endlichen Teilmengen</b> von $M$                                      |
| $\mathcal{R}(M)$   | $\equiv$ | $\{R \mid R \subseteq M \times M\}$                    | , die <b>Menge der binären Relationen in <math>M</math></b><br>(2.8)           |
| $\mathcal{R}_e(M)$ | $\equiv$ | $\{R \subseteq M \times M \mid  R  \in \mathbb{N}_0\}$ | , die <b>endlichen binären Relationen in <math>M</math></b>                    |
| $\vdash_R$         | $\equiv$ | $R$  | , für Relationen $R \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$ (2.9)           |

Offensichtlich gilt für Mengen  $M$  und  $N$ :

|   |                   |   |                               |
|---|-------------------|---|-------------------------------|
| $\mathcal{P}_e(M) \subseteq \mathcal{P}(M)$                   | ,                 | $\mathcal{R}_e(M) \subseteq \mathcal{R}(M)$                         | (2.10)                        |
| $\mathcal{R}(M) = \mathcal{P}(M \times M) = \mathcal{P}(M^2)$ | ,                 | $\mathcal{R}_e(M) = \mathcal{P}_e(M \times M) = \mathcal{P}_e(M^2)$ | (2.11)                        |
| $\mathcal{P}(M) \subset \mathcal{P}(N)$                       | $\Leftrightarrow$ | $\mathcal{P}_e(M) \subset \mathcal{P}_e(N)$                         | $\Leftrightarrow M \subset N$ |
| $\mathcal{R}(M) \subset \mathcal{R}(N)$                       | $\Leftrightarrow$ | $\mathcal{R}_e(M) \subset \mathcal{R}_e(N)$                         | $\Leftrightarrow M \subset N$ |
| $\vec{a} \in \mathcal{T}(M^2)$                                | $\Leftrightarrow$ | $\text{set}(\vec{a}) \in \mathcal{R}_e(M)$                          | (2.12)                        |

<sup>45)</sup> siehe [2] Kapitel 1.4 und [68, 70]

### 2.2.2. Formeln und Ableitungen

Im Folgenden sei  $\mathcal{L}$  stets eine gegebene Menge von Formeln, z. B. alle korrekten Formeln der Aussagenlogik oder der Prädikatenlogik. Für die folgenden Betrachtungen ist aber nur nötig, dass die Elemente aus  $\mathcal{L}$  Symbolfolgen sind. Die Teilmengen von  $\mathcal{L}$  nennen wir **Formelmengen**. Es sind genau die Elemente aus  $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ .

Bei einem Beweis werden aus einer Formelmenge  $\Gamma$  von Axiomen und schon bewiesenen Formeln mittels zulässiger<sup>46)</sup> Ableitungen die Formeln einer Formelmenge  $\Delta$  abgeleitet; Schreibweise:  $\langle\Gamma \vdash \Delta\rangle$ .

Für Teilmengen  $\Gamma$  und  $\Delta$  von  $\mathcal{L}$  sei also:

- $\Gamma \vdash \Delta \Leftrightarrow \Gamma$  **ableitbar**  $\Delta$ ; oder auch  $\Gamma$  **beweisbar**  $\Delta$ .
- $\Gamma \vdash \Delta$  nennen wir auch eine **Ableitung in  $\mathcal{L}$** . Damit ist  $(\Gamma, \Delta)$  ein **Element** aus einer **binären** Relation  $\vdash$  in  $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ , einer sogenannten **Ableitungsrelation**.
- Wenn wir von einer Ableitung **a** sprechen, meinen wir immer ein **Element** aus einer **Ableitungsrelation**, d. h. ein geordnetes Paar, z. B.  $(\Gamma, \Delta) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$ , dargestellt als  $\Gamma \vdash \Delta$ .
- Um möglicherweise verschiedene **Ableitungsrelationen** unterscheiden zu können, indizieren wir  $\langle\vdash\rangle$  ggf. mit der zugrundeliegenden **Relation**  $R$ , d. h. wir schreiben  $\langle\vdash_R\rangle$  und sprechen dann von **R-ableitbar**, **R-beweisbar** und **R-Ableitung**.

Zur Vereinfachung der Darstellung und besseren Lesbarkeit treffen wir noch folgende Vereinbarungen für die beiden Seiten von  $\langle\Gamma \vdash \Delta\rangle$  (natürlich nur, wenn dies nicht zu Verwechslungen führt):

- Eine Aufzählung von **Formelmengen** und einzelnen **Formeln** steht für die Vereinigung der **Formelmengen** mit der **Menge** der einzeln angegebenen **Formeln**. Z. B. steht  $\langle\Gamma, \alpha \vdash \beta\rangle$  für  $\langle(\Gamma \cup \{\alpha\}) \vdash \{\beta\}\rangle$ .
- Diese Aufzählungen können auch leer sein und stehen dann für die **leere Menge**. Z. B. steht  $\langle\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)\rangle$  für  $\langle\emptyset \vdash \{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)\}\rangle$ .
- Ist die Aufzählung links vom Relationssymbol  $\langle\vdash\rangle$  leer, kann auch das Relationssymbol wegfallen. Im letzten Beispiel also einfach  $\langle\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)\}\rangle$ . Das entspricht dann einem **Axiom**.

Im Folgenden halten wir uns bei der Verwendung von Buchstaben so weit wie möglich an folgende Vereinbarungen:<sup>47)</sup>

|                          |   |                    |       |   |
|--------------------------|---|--------------------|-------|---|
| griechisch, klein:       | $\alpha, \beta, \gamma, \dots$              | Formel             | $\in$ | $\mathcal{L}$   |
| griechisch, groß:        | $\Gamma, \Delta, \Theta, \dots$             | Formelmenge        | $\in$ | $\mathcal{P}(\mathcal{L})$  |
| lateinisch, fett, klein: | $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ | Ableitung          | $\in$ | $\mathcal{P}(\mathcal{L})^2$  |
| lateinisch, fett, groß:  | $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$ | Ableitungsrelation | $\in$ | $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2) = \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$ |

<sup>46)</sup> Was *zulässig* heißt, muss im entsprechenden Kontext jeweils definiert sein. Üblicherweise sind das bestimmte Ableitungsregeln und Ersetzungen.

<sup>47)</sup> Die letzte Gleichung ergibt sich aus (2.11) auf Seite 27.

Damit definieren wir folgende Aussagen:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Ableitungen aus } \mathbf{A} \text{ lassen sich die aus } \mathbf{B} \text{ ableiten.} \quad (2.13)$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Komponenten aus } \vec{a} \text{ lassen sich die aus } \vec{b} \text{ ableiten.} \quad (2.14)$$

$$\frac{a_1 \mid \dots \mid a_n}{b_1 \mid \dots \mid b_m} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Ableitungen } a_i \text{ lassen sich die } b_j \text{ ableiten.} \quad (2.15)$$

wobei in der letzten Definition  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq m$  sei und die  $a_i$  und die  $b_j$  dabei jeweils beliebig permutiert werden können.  $\langle \mid \rangle$  und Bruchstrich stehen für die **Metaoperationen**  $\langle \& \rangle$  und  $\langle \Rightarrow \rangle$ .<sup>48)</sup> Wir nennen alle drei Formen **Schlussregeln**<sup>49)</sup>. Die **Elemente** aus  $A$  bzw. die Komponenten  $a_i$  nennen wir die **Prämissen** und die **Elemente** aus  $B$  bzw. die Komponenten  $b_j$  die **Konklusionen**<sup>50)</sup> der **Schlussregel**. Offensichtlich gilt:

$$\frac{a_1 \mid \dots \mid a_n}{b_1 \mid \dots \mid b_m} \Leftrightarrow \frac{\vec{a}}{\vec{b}} \Leftrightarrow \frac{\text{set}(\vec{a})}{\text{set}(\vec{b})} \quad (2.16)$$

Wir nennen eine **Schlussregel** auch einen **formalen Satz** und nennen sie **beschränkt**, wenn sie nur endlich viele **Prämissen** und **Konklusionen** hat. Die **Schlussregeln** nach (2.14) und (2.15) sind per se beschränkt. Die nach (2.13) genau dann, wenn  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  endliche Mengen sind, d. h. wenn sie **Elemente** aus ...

Die Mengen der **Prämissen** und **Konklusionen** dürfen auch leer sein. Dies führt zu den folgenden Spezialfällen:

Eine **Schlussregel**  $\frac{A}{\emptyset}$  ohne **Konklusionen** ist immer gültig.

Ein Menge  $B$  von Ableitungen, die als **Axiome** dienen sollen, kann als **Schlussregel**  $\frac{\emptyset}{B}$  ohne **Prämissen** repräsentiert werden.

### 2.2.3. Schlussregeln

Wir betrachten zuerst noch die **Menge** der **binären Relationen**<sup>51)</sup> in  $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ . Sei also  $R$  eine solche **binäre Relation** und  $A \in R$ . Dann gilt wegen (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) und (2.9) auf Seite 27:

$$A \in R \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$$

$$A = (A^<, A^>) \quad \text{und es gilt} \quad A^<, A^> \subseteq \mathcal{L}$$

$$A^< \vdash_R A^> \quad \text{oder einfach} \quad A^< \vdash A^> \quad \text{ist eine } R\text{-Ableitung}$$

$$A^< \text{ } R\text{-ableitbar } A^> \quad \text{oder einfach} \quad A^< \text{ ableitbar } A^>$$

Nach diesen Vorbereitungen fassen wir noch mal zusammen:

Ein geordnetes Paar  $(\mathcal{P}, \mathcal{K}) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)^2 = \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))^2$  heißt eine **Schlussregel** für  $\mathcal{L}$ ,

<sup>48)</sup> Der Bruchstrich hat die übliche Priorität,  $\mid$  die schwächste. Man beachte, dass Zähler und Nenner auch leer sein können, d. h.  $n$  und  $m$  gleich 0 sein dürfen. In der Praxis liegen sie bei kleinen Werten, typischerweise 0, 1 oder 2.

<sup>49)</sup> Genau genommen nur um die **Darstellung** einer Schlussregel. Die Exakte Definition erfolgt im Unterabschnitt 2.2.3.

<sup>50)</sup> synonym: **Folgerungen**

<sup>51)</sup> siehe Unterabschnitt 2.1.8 auf Seite 22

geschrieben  $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$ ; und es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})) \quad , \text{ die } \mathbf{Pr\ddot{a}missen} \quad , \text{ eine Menge von } \mathbf{\mathcal{P}\text{-Ableitungen}}. \\ \mathcal{K} &\in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})) \quad , \text{ die } \mathbf{Konklusionen} \quad , \text{ eine Menge von } \mathbf{\mathcal{K}\text{-Ableitungen}}. \\ \mathbf{a} \in \mathcal{P} &\Rightarrow \quad \mathbf{a} = (\Gamma, \Delta) \ \& \ \Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{L}) \quad , \text{ Schreibweise: } \Gamma \vdash_{\mathcal{P}} \Delta \\ \mathbf{a} \in \mathcal{K} &\Rightarrow \quad \mathbf{a} = (\Gamma, \Delta) \ \& \ \Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{L}) \quad , \text{ Schreibweise: } \Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \Delta \end{aligned}$$

mit  $\Gamma$  und  $\Delta$  jeweils passend.

\*\*\*\*\* Fehlende Verweise: **Ableitungsmenge**,  $\neq$ , **true**,  $\vdash$ ,  $\vdash_R$ . \*\*\*\*\*

Die **Schlussregel** entspricht der **Aussage**:

Mit den **Pr\ddot{a}missen** aus  $\mathcal{P}$  lassen sich alle **Konklusionen** aus  $\mathcal{K}$  ableiten<sup>52)</sup>.

Die **Schlussregel** hei\ss t **allgemeing\ddot{u}ltig**, wenn aus den **Pr\ddot{a}missen** alle **Konklusionen** abgeleitet werden k\ddot{o}nnen. In diesem Fall kann sie zur **zul\ddot{a}ssigen Transformation** von weiteren **Formeln** dienen.

Die Mengen der **Pr\ddot{a}missen** und **Konklusionen** sowie die beiden Seiten einer **Ableitung** d\ddot{u}rfen auch leer sein. Dies f\ddot{u}hrt zu den folgenden semantischen Spezialf\ddot{a}llen:

- Eine **Ableitung**  $(A, \emptyset)$  ist trivial allgemeing\ddot{u}ltig. Daher k\ddot{o}nnen solche Pr\ddot{a}missen und Konklusionen ohne Probleme weggelassen werden.
- Ein Menge  $B$  von **Formeln**, die **Axiome** sein sollen, kann durch eine **Pr\ddot{a}missen**  $(\emptyset, B)$  repr\ddot{a}sentiert werden.
- Ein Menge  $B$  von **Formeln**, die als allgemeing\ddot{u}ltig zu beweisen sind, kann durch eine **Konklusion**  $(\emptyset, B)$  repr\ddot{a}sentiert werden.

Wenn eine Schlussregel  $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$  beschr\ddot{a}nkt ist, sind  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{K}$  endliche Mengen und es gibt wegen (2.12) auf Seite 27 zwei **Tupel**  $\vec{p}, \vec{k} \in \mathcal{T}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)$ , so dass gilt: <sup>53)</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\equiv \text{set}(\vec{p}) \quad , \quad \mathcal{K} &\equiv \text{set}(\vec{k}) \\ N &\geq |\mathcal{P}| \quad , \quad M &\geq |\mathcal{K}| \quad , \text{ mit } N, M \in \mathbb{N}_0 \quad (2.17) \\ \vec{p} &\equiv \{p_1, \dots, p_N\} \quad , \quad \vec{k} &\equiv \{k_1, \dots, k_M\} \\ p_n &\equiv (p_n^<, p_n^>) \quad , \quad k_m &\equiv (k_m^<, k_m^>) \quad , \text{ f\ddot{u}r } 1 \leq n \leq N, 1 \leq m \leq M \\ p_n^< &\vdash_{\mathcal{P}} p_n^> \quad , \quad k_m^< &\vdash_{\mathcal{K}} k_m^> \quad , \text{ f\ddot{u}r } 1 \leq n \leq N, 1 \leq m \leq M \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \{(p_n^<, p_n^>) \mid 1 \leq n \leq N\} \\ \vec{k} &= \{(k_m^<, k_m^>) \mid 1 \leq m \leq M\} \end{aligned}$$

und wir nennen auch das Paar  $(\vec{p}, \vec{k})$  **Schlussregel**. Diese ist per se **beschr\ddot{a}nkt** und ein **Element** aus  $\mathcal{T}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)^2$ . Nun haben wir alternative Schreibweisen f\ddot{u}r **beschr\ddot{a}nkte Schlussregeln**:<sup>54)</sup>

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}} \Leftrightarrow \frac{\text{set}(\vec{p})}{\text{set}(\vec{k})} \Leftrightarrow \frac{\vec{p}}{\vec{k}} \Leftrightarrow \frac{p_1^< \vdash_{\mathcal{P}} p_1^> \mid \dots \mid p_N^< \vdash_{\mathcal{P}} p_N^>}{k_1^< \vdash_{\mathcal{K}} k_1^> \mid \dots \mid k_M^< \vdash_{\mathcal{K}} k_M^>} \quad , \text{ Schlussregel oder formaler Satz (FS)}$$

<sup>52)</sup> mittels noch zu definierender **zul\ddot{a}ssiger Transformationen**

<sup>53)</sup> Statt  $\geq$  k\ddot{o}nnte in (2.17) auch  $\equiv$  genommen werden. Dann m\ddot{u}ssten die  $p_n$  und die  $k_m$  jeweils paarweise verschieden sein, was wir nicht voraussetzen wollen.

<sup>54)</sup> Nach (2.13), (2.14) und (2.15) auf Seite 29 sind die „Br\ddot{u}che“ **Aussagen**, und keine Paare mehr. Die \ddot{A}quivalenz der Aussagen steht schon in (2.16) auf Seite 29

### 2.2.4. Beweise

Für einen **Beweis** in **ASBA** ist stets gegeben:<sup>55)</sup>

$\mathcal{L}$  , eine Menge von Formeln, die zugrundeliegende Sprache.

$\mathcal{E} \subseteq \{E \mid E : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}\}$  , eine Menge von Funktionen, die Ersetzungen.

$\mathcal{C} \in \mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})))$  , eine Menge von Schlussregeln.

$\mathcal{E} \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$  , eine Menge von Ableitungen, die Ergebnisse.

Die **Ersetzungen** sorgen z. B. dafür, dass aus einer allgemeingültigen Formel wie  $\langle\langle \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rangle\rangle$  z. B. die allgemeingültige Formel  $\langle\langle \gamma \rightarrow (\delta \rightarrow \gamma) \rangle\rangle$  abgeleitet werden kann. Die **Schlussregeln** geben erlaubte Schlussfolgerungen aus gegebenen Elementen an und umfassen auch die Prämissen eines Satzes. Die **Ergebnisse** schließlich sind das, was mittels eines **Beweises** aus den gegebenen Prämissen  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{C}$  gefolgert werden soll.

Im Fall von beschränkten Schlussregeln können statt  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{E}$  auch

$\vec{\mathcal{C}} \in \mathcal{T}(\mathcal{T}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)^2)$  , ein Tupel aus Schlussregeln.

$\vec{\mathcal{E}} \in \mathcal{T}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)$  , ein Tupel aus Ableitungen, die Ergebnisse.

gegeben sein. Mit

$\mathcal{C} \equiv \{(\text{set}(\vec{\mathbf{p}}), \text{set}(\vec{\mathbf{k}})) \mid (\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{k}}) \in \text{set}(\vec{\mathcal{C}})\}$

$\mathcal{E} \equiv \text{set}(\vec{\mathcal{E}})$

ergibt sich wegen (2.10) und (2.12) auf Seite 27 wieder die erste Form.

### 2.2.5. Beispiel für einen Beweis

>>> Nacharbeiten <<<

>>> Hier weitermachen <<<

Zur Veranschaulichung ein Beispiel:<sup>56)</sup>

$E_{\alpha,\beta}(\delta) \equiv$  das  $\delta$ , bei dem alle Vorkommen von  $\alpha$  durch  $\beta$  ersetzt wurden

$\mathcal{L} \equiv$  die Menge aller Formeln der aussagenlogischen Sprache

$\mathbf{p}_1 \equiv (A, \{\alpha\})$

$\mathbf{p}_2 \equiv (B, \{\alpha \rightarrow \beta\})$

$\mathbf{p}_3 \equiv (A \cup B, \{\beta\})$

$\mathcal{E} \equiv \{E_{\alpha,\delta}, E_{\beta,B}, E_{\beta,B \rightarrow \delta}, E_{\gamma,\delta}\}$

$\mathcal{C} \equiv \dots$

$\chi_1 \equiv \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

$\chi_2 \equiv (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

$\mathcal{X} \equiv \{\chi_1, \chi_2\}$

$\vdash_{\mathcal{X}} \equiv \dots$

<sup>55)</sup> ASBA selbst kann nur endliche Mengen abSpeichern. Für ASBA muss daher einschränkend  $\mathcal{C} \in \mathcal{R}_e(\mathcal{R}_e(\mathcal{P}_e(\mathcal{L})))$  und  $\mathcal{E} \in \mathcal{R}_e(\mathcal{P}_e(\mathcal{L}))$  sein.

<sup>56)</sup> siehe [47]

### 2.2.6. Beweisschritte

Ein Beweis<sup>57)</sup> in ASBA besteht aus

einer Schlussregel  $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$

einer Folge  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_K)$  von Beweisschritten  $b_k$ , die Beweisschrittfolge

einer Folge  $\mathcal{T} = (T_1, T_2, \dots, T_K)$  von Transformationen  $T_k$ , die Transformationsfolge

Dabei ist  $K$  ein Element aus  $\mathbb{N}_0$ ,  $0 \leq k \leq K$ , die Beweisschritte  $b_k$  sind Schlussregeln und die Transformationen  $T_k$  werden später definiert. Wir definieren noch:

$$\mathcal{B}_k \equiv \{b_1, \dots, b_k\} \quad , \text{ für } 0 \leq k \leq K$$

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_K$$

und nennen  $\mathcal{B}$  die Beweisschrittmenge der Beweisschrittfolge  $\vec{b}$ . Dann ist  $\mathcal{B}_0 = \emptyset$  und  $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{B}$  für  $0 \leq i \leq j \leq K$ . – Wir nennen die Beweisschrittfolge auch eine Ableitung aus  $\mathcal{K}$  aus  $\mathcal{P}$ .

Jeder Beweisschritt  $b_k$  für  $1 \leq k \leq K$  muss entweder eine Prämisse aus  $\mathcal{P}$  oder durch Anwendung einer allgemeingültigen Schlussregel auf eine Teilmenge von  $\mathcal{B}_{k-1}$  eine wahre Formel oder eine weitere allgemeingültige Schlussregel sein. Schließlich muss noch

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$$

sein, da jede Konklusion aus  $\mathcal{K}$  in der Folge  $\vec{b}$  vorkommen und somit Element aus der Menge  $\mathcal{B}$  sein muss.

<sup>57)</sup> siehe [2] Kapitel 1.6 und 3.6



## 3. Ideen

### 3.1. Schlussregeln

In diesem Abschnitt geht es um **zulässige Transformationen**, d. h. **allgemeingültige Schlussregeln**. Dazu gehören zunächst die **Basisregeln**. Dann aber auch alle aus den **Basisregeln** und den bis dahin **allgemeingültigen Schlussregeln** korrekt abgeleiteten neuen **Schlussregeln**. Die **Schlussregeln** haben die Form eines Formalen **Satzes**.

#### 3.1.1. Basisregeln

Gemäß [2] Kapitel 1.4 *Ein vollständiger aussagenlogischer Kalkül* werden sechs **Basisregeln** definiert. Zuvor werden aber noch einige Definitionen gebraucht. Dazu seien  $n, m, k$  und  $l$  natürliche Zahlen (auch 0),  $\alpha, \alpha_i, \beta$  und  $\beta_j$  **Formeln**  $X, X_i, Y$  und  $Y_j$  Mengen von **Formeln** und

$$\begin{aligned} X &\equiv X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \\ Y &\equiv Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_k \cup \{\beta_1, \dots, \beta_l\} \end{aligned}$$

$X$  und  $Y$  können auch die **leere Menge** sein. Damit wird definiert:

$\alpha \vdash \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \beta$  ist mittels schrittweiser Anwendung **zulässiger Transformationen** (siehe weiter unten) aus  $\alpha$  **ableitbar**. Sprechweise: Aus  $\alpha$  ist  $\beta$  **ableitbar** oder **beweisbar**; kurz: „ $\alpha$  **ableitbar**  $\beta$ “ bzw. „ $\alpha$  **beweisbar**  $\beta$ “ — Es kann auch  $\langle \alpha \rangle$  durch  $\langle X \rangle$  und/oder  $\langle \beta \rangle$  durch  $\langle Y \rangle$  ersetzt werden.

$$\begin{aligned} \vdash \beta &\quad :\Leftrightarrow \quad \emptyset \vdash \beta \quad (\langle \vdash \rangle \text{ kann dann auch ganz entfallen}) \\ X_1, X_2, \dots, X_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m &\vdash Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \quad :\Leftrightarrow \quad X \vdash Y \end{aligned}$$

Eine **zulässige Transformation** ist die Anwendung einer **Ersetzung**<sup>1)</sup> (siehe unten), einer **Basisregel** (siehe unten) oder einer davon abgeleiteten sonstigen **Schlussregel**, z. B. aus Unterabschnitt 2.2.3 auf Seite 29. Bei den **Schlussregeln** und der **Ersetzung**  $\langle \leftarrow \rangle$  soll das Komma stärker binden als  $\langle \vdash \rangle$ ,  $\langle \leftarrow \rangle$  und  $\langle | \rangle$ , wobei  $\langle | \rangle$  für „und“ bzw.  $\langle \& \rangle$ <sup>2)</sup> steht und schwächer bindet als  $\langle \vdash \rangle$  und  $\langle \leftarrow \rangle$ .<sup>3)</sup>

Zur der Auswahl der **Basisregeln**, der Formulierung und der **Bezeichnungen** wird auf [2, 70] zurückgegriffen. Wie in [70] steht  $\langle E \rangle$  für „Einführung“ und  $\langle B \rangle$  für „Beseitigung“ (oder „Elimination“) von **Junktoren**.<sup>4)</sup>

<sup>1)</sup> siehe Unterabschnitt 3.1.2 auf der nächsten Seite

<sup>2)</sup> siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 19

<sup>3)</sup> siehe Fußnote 3 von Tabelle 2.3 auf Seite 26

<sup>4)</sup> In der **Monotonieregel** wird in diesem Dokument, anders als in [2],  $\langle X, Y \rangle$  statt  $\langle Y, \text{für } Y \supseteq X \rangle$  genommen. Das ist gleichwertig, vermeidet aber den Zusatz  $\langle \text{für } Y \supseteq X \rangle$ . Außerdem werden bei den **Bezeichnungen**  $\langle (\wedge 1) \rangle$  und  $\langle (\wedge 2) \rangle$  gemäß [70] durch  $\langle (\wedge E) \rangle$  bzw.  $\langle (\wedge B) \rangle$  ersetzt.

Im Folgenden seien  $\alpha$  und  $\beta$  **Formeln** und  $X$  und  $Y$  Mengen von **Formeln**. Für die sechs **Basisregeln** werden dann nur noch die **Junktoren**  $\langle \neg \rangle$  und  $\langle \wedge \rangle$  benötigt. Bei den weiteren **Schlussregeln** wird noch  $\langle \rightarrow \rangle$  gemäß der Definition 3.6 auf Seite 44 verwendet.

$$\frac{}{\alpha \vdash \alpha} \quad (\text{Anfangsregel}) \quad (\text{AR})$$

$$\frac{X \vdash \alpha}{X, Y \vdash \alpha} \quad (\text{Monotonieregel}) \quad (\text{MR})$$

$$\frac{X \vdash \alpha, \neg \alpha}{X \vdash \beta} \quad (\text{Einführung/Beseitigung der Negation Teil 1}) \quad (\neg 1)$$

$$\frac{X, \alpha \vdash \beta \mid X, \neg \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta} \quad (\text{Einführung/Beseitigung der Negation Teil 2}) \quad (\neg 2)$$

$$\frac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta} \quad (\text{Einführung der Konjunktion}) \quad (\wedge E)$$

$$\frac{X \vdash \alpha \wedge \beta}{X \vdash \alpha, \beta} \quad (\text{Beseitigung der Konjunktion}) \quad (\wedge B)$$

In einer **Schlussregel** werden die **Formeln**<sup>5)</sup> über dem Querstrich als **Prämissen** und die unter dem Querstrich als **Konklusionen** der Regel bezeichnet. Eine **Schlussregel** steht für die **Aussage**, dass mit ihren **Prämissen** auch ihre **Konklusionen** gelten. – Im Gegensatz zu den weiteren **Schlussregeln** werden die oben aufgelisteten **Basisregeln** nicht weiter hinterfragt, d. h. sie gelten quasi als **Axiome**.

### 3.1.2. Identitätsregeln

Die **zulässigen Transformationen**, d. h. die Anwendung der **Schlussregeln**, erfordern **zulässige Ersetzungen**. Damit wird dem Gleichheits- oder Identitätszeichen  $\langle \equiv \rangle$  mittels Einführungs- und Beseitigungsregel eine Bedeutung verliehen.<sup>6)</sup> Dazu seien  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  **vergleichbare**<sup>7)</sup> **Formeln**.

Zunächst wird definiert:

$\gamma(\alpha \leftarrow \beta) \equiv$  Die **Formel**, die man erhält, wenn in  $\gamma$  alle oder nur einige Vorkommen von  $\alpha$  durch  $\beta$  ersetzt werden. — Gegebenenfalls muss noch die Auswahl der Ersetzungen angegeben werden, andernfalls werden alle Vorkommen ersetzt. Letzteres heißt dann **vollständige Ersetzung**.

$\gamma(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv$  Die **Formel**, die man erhält, wenn in  $\gamma$  alle  $\alpha$  und  $\beta$  miteinander vertauscht werden. Dazu ist es nötig, dass  $\alpha$  und  $\beta$  voneinander unabhängig sind, vorzugsweise zwei verschiedene Variable.

<sup>5)</sup> hier: **Aussagen** in einer formalen Form.

<sup>6)</sup> siehe [70]

<sup>7)</sup> siehe Ende von Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 19

$\langle\langle \alpha \leftarrow \beta \rangle\rangle$  heißt **Ersetzung** und  $\langle\langle \alpha \rightleftharpoons \beta \rangle\rangle$  **Vertauschung** oder kurz **Tausch**. – Sei noch  $S = (s_1, s_2, \dots)$  eine endliche Folge von **Ersetzungen**, die auch **Vertauschungen** enthalten und auch leer sein kann.

Dann wird definiert:

$$\begin{aligned} \gamma(S) &\equiv \gamma(s_1)(s_2)\dots & (3.1) \\ \gamma(\emptyset) &= \gamma & \text{(nur zur Verdeutlichung)} \\ \gamma(s_1, s_2, \dots) &\equiv \gamma(S) \end{aligned}$$

Die **Vertauschung** ist eine spezielle Form der **Ersetzung**. Wenn  $x$  und  $y$  zwei verschiedene Variable, die in  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  nicht vorkommen, gilt:

$$\gamma(\alpha \rightleftharpoons \beta) = \gamma(\alpha \leftarrow x, \beta \leftarrow y, y \leftarrow \alpha, x \leftarrow \beta)$$

Sei zusätzlich noch  $s$  eine **Ersetzung**. Folgende Sprechweisen werden verwendet:

$\gamma(\alpha \leftarrow \beta)$  : In  $\gamma$  wird  $\alpha$  (**vollständig**) durch  $\beta$  **substituiert**.

$\gamma(\alpha \rightleftharpoons \beta)$  : In  $\gamma$  werden  $\alpha$  und  $\beta$  **vertauscht**.

$\gamma(s)$  :  $s$  wird auf  $\gamma$  **angewendet**.

$\gamma(S)$  : Die **Ersetzungen** aus  $S$  werden in der angegebenen Reihenfolge auf  $\gamma$  angewendet.

$\gamma(S)$  :  $S$  wird auf  $\gamma$  angewendet.

Bei obiger Definition der **Ersetzung** bleibt noch offen, unter welchen **Prämissen** sie angewendet werden darf. Das soll hier nicht untersucht werden. In diesem Abschnitt genügt es, das nur **Vertauschung** und vollständige **Ersetzung** verwendet werden. In diesen Fällen sind beliebige **Ersetzungen** von Variablen durch **Formeln** erlaubt.

Ist  $\gamma$  wie oben und  $S$  eine **Menge** von **Ersetzungen**.

Nun können die beiden **Identitätsregeln** definiert werden:

$$\begin{aligned} \frac{}{\alpha \equiv \alpha} & \quad \text{(Einführung der Identität)} & (= E) \\ \frac{\alpha \equiv \beta \mid \gamma}{\gamma(\alpha \leftarrow \beta)} & \quad \text{(Beseitigung der Identität)} & (= B) \end{aligned}$$

Die **Identitätsregeln** werden hier eingeführt, um die **Ersetzung** zu rechtfertigen. Wie die **Basisregeln** gelten sie als **Axiome**, würden also eigentlich dazu gehören. Da sie aber nicht weiter verwendet werden, werden sie in diesem Dokument nicht zu den **Basisregeln** gezählt.

### 3.1.3. Weitere Schlussregeln

In [2] werden aus den **Basisregeln** mittels **zulässiger Transformationen** weitere **Schlussregeln** abgeleitet.<sup>8)</sup> Man vergleiche auch mit [70].

<sup>8)</sup> In [2] werden die **Identitätsregeln** zwar weder aufgeführt noch angewandt, ohne **Ersetzung** geht es aber nicht.

$$\frac{X, \neg\alpha \vdash \alpha}{X \vdash \alpha} \quad (\text{Beseitigung der Negation; Indirekter Beweis}) \quad (\neg 3)$$

$$\frac{X, \neg\alpha \vdash \beta, \neg\beta}{X \vdash \alpha} \quad (\text{Reductio ad absurdum}) \quad (\neg 4)$$

$$\frac{X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \rightarrow \beta} \quad (\text{Einführung der Implikation}) \quad (\rightarrow E)$$

$$\frac{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}{X, \alpha \vdash \beta} \quad (\text{Beseitigung der Implikation}) \quad (\rightarrow B)$$

$$\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta} \quad (\text{Schnittregel}) \quad (\text{SR})$$

$$\frac{X \vdash \alpha \mid \alpha \rightarrow \beta}{X \vdash \beta} \quad (\text{Abtrennungsregel} — \textit{Modus ponens}) \quad (\text{TR})$$

Dabei werden zum Beweis der Schlussregeln in [2] folgende Basisregeln verwendet:

Schlussregel : verwendete Basisregeln

$\neg 3$  : AR, MR,  $\neg 2$

$\neg 4$  : AR, MR,  $\neg 1$ ,  $\neg 2$

$\rightarrow E$  : AR, MR,  $\neg 1$ ,  $\neg 2$ ,  $\wedge E$

$\rightarrow B$  : AR, MR,  $\neg 1$ ,  $\neg 2$ ,  $\wedge B$

SR : AR, MR,  $\neg 1$ ,  $\neg 2$

TR : AR, MR,  $\neg 1$ ,  $\neg 2$ ,  $\wedge E$

### 3.1.4. Beispiel einer Ableitung

Als Beispiel wird hier die Schnittregel aus den Basisregeln abgeleitet.<sup>9)</sup> Dazu wird verabredet, dass in der Tabelle 3.1 auf Seite 38 der Inhalt der Zelle in der Zeile  $i$  und der Spalte ( $X_n$ ) mit  $X_i$  bezeichnet wird. Zur kürzeren Darstellung wird statt auf die vollständigen Spaltenüberschriften nur auf die dort notierten ( $X_n$ ) verwiesen. Dass in der Spalte ( $n$ ) stets die Zeilennummer steht, wird im folgenden nicht mehr extra erwähnt.

<sup>9)</sup> Die Form der Tabelle ist angelehnt an [70] Kapitel 2.2.4 Eine Beispielableitung.

Für die ausgefüllten Felder wird nun definiert:<sup>10)</sup>

$$R_i \equiv \begin{cases} \text{"Prämisse"} = \text{Die Aussage } A_i \text{ ist eine Prämisse.} \\ \text{"Konklusion"} = \text{Die Aussage } A_i \text{ ist eine Konklusion.} \\ \text{"Annahme"} = \text{Die Aussage } A_i \text{ wird vorübergehend als zutreffend angenommen.} \\ j = \text{Link auf die Schlussregel } \bar{R}_j \text{ für ein } j < i. \\ \text{Link (ohne Klammern) auf eine allgemeingültige Schlussregel.} \end{cases}$$

$S_i \equiv$  Die Folge von den anzuwendenden Ersetzungen.

$\bar{R}_i \equiv$  Das Ergebnis der in der angegebenen Reihenfolge angewendeten Ersetzungen aus  $S_i$  auf die Schlussregel  $R_i$

$Z_i \equiv$  Die Indizes  $j$  (mit  $j < i$ ) als Verweise auf eine oder mehrere Aussagen  $A_j$ , welche zusammen genau die Prämissen der Schnittregel  $\bar{R}_i$  erfüllen.

$A_i \equiv$  Konklusion(en) der Schlussregel  $\bar{R}_i$  —  
auch in Form der Indizes von einem oder mehreren von  $A_j$  (mit  $j < i$ ).  
In der Ergebniszeile kann hier auch die bewiesene Aussage als Schlussregel stehen.

$D_i \equiv$  die Indizes der  $A_j$ , von denen  $A_i$  abhängig ist.

Bis zur Zeile  $i$  hat man die folgende Schlussregel bewiesen:

$$\frac{A_{i_1} \mid A_{i_2} \dots}{A_i}, \text{ für alle } i_j \in D_i$$

Sei nun

$$\Gamma_i \equiv \begin{cases} \text{leer} & \text{für } R_i = \text{"Prämisse"} \\ \text{leer} & \text{für } R_i = \text{"Konklusion"} \\ \text{leer} & \text{für } R_i = \text{"Annahme"} \\ \bar{R}_j & \text{für } R_i = j \text{ (eine interne Schlussregel)} \\ \text{die Schlussregel} & \text{für } R_i = \text{Link auf eine externe Schlussregel} \end{cases}$$

Damit gilt für die Einträge in einer Zeile  $i$ :

- Wenn  $\Gamma_i$  nicht leer ist, ist  $R_i$  eine Schlussregel mit  $R_i = \Gamma_i(S_i)^{11)}$ .
- Wenn  $A_i$  nicht leer ist, ist  $R_i = \frac{A_{z_1} \mid A_{z_2} \mid \dots}{A_i}$  (alle  $z_j \in Z_i$ ).
- Wenn  $A_i$  nicht leer ist, ist bis jetzt die Schlussregel  $\frac{A_{d_1} \mid A_{d_2} \mid \dots}{A_i}$  (alle  $d_j \in D_i$ ) schon bewiesen.

$S_i$ ,  $Z_i$  und  $D_i$  dürfen dabei auch leer sein.

Die Erzeugung einer Tabelle analog zu 3.1 auf der nächsten Seite wird im folgenden beschrieben. Zellen, für die kein Inhalt angegeben wird, bleiben leer. Rückwärts-Referenzen auf schon ausgefüllte Zellinhalte sind jederzeit möglich. Das Eintragen der Zeilennummer  $i$  wird nicht extra erwähnt. – Die Tabelle und die Beschreibung sind so ausführlich, damit man daraus leicht ein Computerprogramm erstellen kann.

<sup>10)</sup> Eigentlich müsste man für jede Ersetzung aus  $S_i$  eine eigene Zeile vorsehen. Um die Tabellen für die Beweise kürzer zu halten, werden aufeinanderfolgende Ersetzungen zusammengefasst.

<sup>11)</sup> siehe Definition (3.1) von Unterabschnitt 3.1.2 auf Seite 34

| Zeile<br>( $n$ ) | Regel<br>( $R_n$ )          | Substitu-<br>tionen ( $S_n$ )  | erzeugte<br>Regel ( $\bar{R}_n$ )  | angewendet<br>auf ... ( $Z_n$ ) | Aussage<br>( $A_n$ )   | Abhängig-<br>keiten ( $D_n$ ) |
|------------------|-----------------------------|--|--|---------------------------------|--|-------------------------------|
| 1                | Voraus-<br>setzung          |  |  |                                 | $X \vdash \alpha$  | 1                             |
| 2                | Voraus-<br>setzung          |  |  |                                 | $X, \alpha \vdash \beta$   | 2                             |
| 3                | Folge-<br>rung              |  |  |                                 | $X \vdash \beta$   | 3                             |
| 4                | MR                          |  | $\frac{X \vdash \alpha}{X, Y \vdash \alpha}$                                     |                                 |  |                               |
| 5                | 4                           | $Y \leftrightarrow \neg \alpha$  | $\frac{X \vdash \alpha}{X, \neg \alpha \vdash \alpha}$                           | 1                               | $X, \neg \alpha \vdash \alpha$                                       | 1                             |
| 6                | AR                          |  | $\frac{}{\alpha \vdash \alpha}$  |                                 |  |                               |
| 7                | 6                           | $\alpha \leftrightarrow \neg \alpha$   | $\frac{}{\neg \alpha \vdash \neg \alpha}$  |                                 | $\neg \alpha \vdash \neg \alpha$                                     |                               |
| 8                | 4                           | $\alpha \leftrightarrow \neg \alpha$<br>$X \leftrightarrow \neg \alpha$<br>$Y \leftrightarrow X$ | $\frac{\neg \alpha \vdash \neg \alpha}{X, \neg \alpha \vdash \neg \alpha}$       | 7                               | $X, \neg \alpha \vdash \neg \alpha$                                  |                               |
| 9                | $\neg 1$                    |  | $\frac{X \vdash \alpha, \neg \alpha}{X \vdash \beta}$                            |                                 |  |                               |
| 10               | 9                           | $X \leftrightarrow X, \neg \alpha$   | $\frac{X, \neg \alpha \vdash \alpha, \neg \alpha}{X, \neg \alpha \vdash \beta}$  | 5, 8                            | $X, \neg \alpha \vdash \beta$  | 1                             |
| 11               | $\neg 2$                    |  | $\frac{X, \alpha \vdash \beta \mid X, \neg \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$ | 2, 10                           | 3  | 1, 2                          |
| 12               | AR, MR,<br>$\neg 1, \neg 2$ |  | $\frac{A_1 \mid A_2}{A_3}$   |                                 | $\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$ |                               |

Tabelle 3.1.: Ableitung der Schnittregel aus den Basisregeln

1. Am Anfang der Tabelle werden zuerst **Prämissen**, dann zu beweisende **Konklusionen** und schließlich Annahmen aufgeführt.<sup>12)</sup> Jede der drei Gruppen kann auch leer sein und es ist auch möglich, die Zeilen an anderen Stellen der Tabelle anzugeben, spätestens aber, wenn darauf verwiesen wird. Für jede **Prämisse**, **Konklusion** und Annahme gibt es eine Zeile:

- $R_i$  = "Prämisse", "Konklusion" oder "Annahme".
- $A_i$  = Die aktuelle **Prämisse**, **Konklusion** oder Annahme.
- $D_i = i$  (ein Link auf  $A_i$ ).

2. In den nächsten Zeilen werden die **Beweisschritte** aufgeführt, für jeden Schritt eine Zeile.

Zunächst kann  $R_i$  kann auf zwei Arten erzeugt werden:

- $R_i$  = Link auf eine **allgemeingültige Schlussregel**.
- $\bar{R}_i$  = Die **Schlussregel**, auf die verwiesen wird.

oder

<sup>12)</sup> Die Angabe ist dann erforderlich, wenn darauf verwiesen wird. Durch die Auflistung hat man aber einen vollständigen Überblick über die **Prämissen** und **Konklusionen** eines **Beweises** und die Zwischenannahmen. Auf jede nötige **Prämisse** und jede verwendete Zwischenannahme wird in der Spalte ( $Z_n$ ) mindestens einmal verwiesen, so dass sie auch aufgeführt werden müssen. Die Angabe der **Konklusionen** erleichtert die Erstellung einer *Ergebniszeile* (siehe Punkt 3).

- a) i.  $R_i = j$ , wenn die schon bewiesene **Schlussregel**  $\bar{R}_j$  (mit  $j < i$ ) angewendet werden soll.
- ii.  $S_i =$  Die auf die **Schlussregel**  $R_i$  anzuwendende **Ersetzung**.
- iii.  $\bar{R}_i =$  Das Ergebnis der **Ersetzung**  $S_i$  auf die **Schlussregel**  $R_i$ .

Man beachte, dass die **Schlussregel**  $\bar{R}_i$ , stets allgemeingültig ist, da sie ausschließlich aus **allgemeingültigen Schlussregeln** mittels **Ersetzungen** abgeleitet worden ist. Daher gibt es auch keine Beschränkung weiterer **Ersetzungen** durch irgendwelche Abhängigkeiten.

Nun kann die Zeile beendet werden, oder es geht weiter mit:

- b)  $Z_n =$  Die Indizes aller  $A_j$  (mit  $j < i$ ), die eine **Prämisse** der **Schlussregel**  $\bar{R}_i$  sind, möglichst in der verwendeten Reihenfolge. — Für jedes angegebene  $j$  werden noch die Abhängigkeiten  $D_j$  den Abhängigkeiten  $D_i$  hinzugefügt.
- c)  $A_i =$  **Konklusion(en)** der **Schlussregel**  $\bar{R}_i$ . — Wenn diese **Konklusionen** schon als **Aussagen**  $A_j$  (mit  $j < i$ ) vorhanden sind, können auch einfach deren Indizes eingetragen werden. Damit werden die Zusammenhänge und der Abschluss des **Beweises** besser ersichtlich.
- d)  $D_i =$  Die Verweise wurden schon in (2b) eingetragen.<sup>13)</sup>

Der **Beweis** muss so lange fortgeführt werden, bis alle **Konklusionen** als **Aussagen** in der Spalte ( $A_n$ ) erschienen und dort jeweils nur von den gegebenen **Prämissen** abhängig sind.

3. In einer **Ergebniszeile**, die dann die letzte ist, kann noch die bewiesene Behauptung in Form einer **Schlussregel** formuliert und in einer passenden Spalte notiert werden. Zusätzlich können dort auch noch alle verwendeten **Schlussregeln** gesammelt werden. Dies kann z. B. folgendermaßen geschehen:

- a)  $(R_n) =$  Verweise auf alle verwendeten externen **Schlussregeln**.
- b)  $(\bar{R}_n) =$  Die bewiesene Behauptung als **Schlussregeln**, wobei alle  $A_i$ , die **Prämissen** sind, als **Prämisse** und alle  $A_j$ , die **Konklusionen** sind, als **Konklusion** eingesetzt werden. Das ergibt dann:

$$\frac{A_{i_1} \mid A_{i_2} \mid \dots}{A_{j_1} \mid A_{j_2} \mid \dots}$$

- c)  $(A_n) = \bar{R}_i$ , wobei die **Prämissen** und **Konklusionen** aufgelöst werden.
- d)  $(D_n) =$  Die Vereinigung aller Abhängigkeiten der **Konklusionen**, vermindert um die **Prämissen**. — Wenn das Feld dabei nicht leer bleibt, ist der **Beweis** missglückt!

Ein weiteres Beispiel in der Tabelle 3.2 auf der nächsten Seite soll verdeutlichen, wie Abhängigkeiten von Zwischenannahmen wieder beseitigt werden können.<sup>14)</sup>

### > > > Beispielableitung der Kontraposition vervollständigen < < <

Bevor die **Schlussregeln** weiter behandelt werden, werden noch Elemente der **Aussagenlogik** und der **Prädikatenlogik** behandelt. Wir stützen uns dabei weitgehend auf [2], ohne das jedes Mal anzugeben.

<sup>13)</sup> Wenn  $D_n$  leer ist, dann ist  $A_n$  allgemeingültig.

<sup>14)</sup> siehe [70], Kapitel 2.2.4 Eine Beispielableitung

| Zeile<br>(n) | Regel<br>( $R_n$ )                      | Substitu-<br>tionen ( $S_n$ )   | erzeugte<br>Regel ( $\bar{R}_n$ )  | angewendet<br>auf ... ( $Z_n$ ) | Aussage<br>( $A_n$ )  | Abhän-<br>gigkeit |
|--------------|---|---|--|---------------------------------|---|-------------------|
| 1            | Folge-<br>rung                          |   |  |                                 | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ | 1                 |
| 2            | An-<br>nahme                            |   |  |                                 | $\alpha \rightarrow \beta$  | 2                 |
| 3            | An-<br>nahme                            |   |  |                                 | $\neg\beta$   | 3                 |
| 4            | An-<br>nahme                            |   |  |                                 | $\alpha$  | 4                 |
| 5            | $\rightarrow$ B                         |   | $\frac{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}{X, \alpha \vdash \beta}$   |                                 |   |                   |
| 6            | -1                                      | $X \leftrightarrow \emptyset$   | $\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha \vdash \beta}$   | 2                               | $\alpha \vdash \beta$   | 2                 |
| 7            | SR                                      |   | $\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$   |                                 |   |                   |
| 8            | -1                                      | $X \leftrightarrow \emptyset$   | $\frac{\alpha \mid \alpha \vdash \beta}{\beta}$  | 4, 6                            | $\beta$   | 4                 |
| 9'           | $\wedge$ E                              |   | $\frac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta}$  |                                 |   |                   |
| 10'          | -1                                      | $X \leftrightarrow \emptyset$   | $\frac{\alpha \mid \beta}{\alpha \wedge \beta}$  |                                 |   |                   |
| 11'          | -1                                      | $\alpha \leftrightarrow \beta$<br>$\alpha \leftrightarrow \neg\beta$  | $\frac{\beta \mid \neg\beta}{\beta \wedge \neg\beta}$  | 8, 3                            | $\beta \wedge \neg\beta$  |                   |
| 9            | $\neg$ 1                                |   | $\frac{X \vdash \alpha, \neg\alpha}{X \vdash \beta}$   |                                 |   |                   |
| 10           | -1                                      | $X \leftrightarrow \emptyset$   | $\frac{\alpha \mid \neg\alpha}{\beta}$   |                                 |   |                   |
| 11           | -1                                      | $\alpha \leftrightarrow \beta$<br>$\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$   | $\frac{\beta \mid \neg\beta}{\neg\alpha}$  | 8, 3                            | $\neg\alpha$  | 2, 3              |
| 12           | $\rightarrow$ E                         |   | $\frac{X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}$   |                                 |   |                   |
| 13           | -1                                      | $X \leftrightarrow \emptyset$   | $\frac{\alpha \vdash \beta}{\alpha \rightarrow \beta}$   |                                 |   |                   |
| 14           | -1                                      | $\alpha \leftrightarrow \beta$<br>$\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$<br>$\beta \leftrightarrow \neg\beta$  | $\frac{\neg\beta \vdash \neg\alpha}{\neg\beta \rightarrow \neg\alpha}$   | 3, 11, ???                      | $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$  | 2, 3,             |
| 15           | $\rightarrow$ E+1                       | $\alpha \leftrightarrow \gamma$<br>$\beta \leftrightarrow \delta$<br>$\gamma \leftrightarrow \alpha \rightarrow \beta$<br>$\delta \leftrightarrow \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ | $\frac{\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha}{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)}$ | 2, 14                           | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ | 2, 3,             |
| 16           | $\rightarrow$ E,<br>$\rightarrow$ B, SR |   | $\overline{A_1}$   |                                 | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ |                   |

Tabelle 3.2.: Ableitung der Kontraposition aus allgemeingültigen Schlussregeln



## 3.2. Aussagenlogik

### 3.2.1. Konstante und Operationen

Die Tabelle 3.3 auf der nächsten Seite<sup>15)</sup> definiert für die zweiwertige Logik Konstante und **Junktoren** über die **Wahrheitswerte** ihrer Anwendung. So ergeben sich, abhängig von den **Wahrheitswerten** der Operanden  $A$  und  $B$ ,<sup>16)</sup> die in der Tabelle angegebenen **Wahrheitswerte** für die **Operationen**. Die mit 0, 1 und 2 benannten Spalten werden jeweils nur für die 0-, 1- und 2-stelligen **Junktoren**, d. h. für die Konstanten, die **unären** und die **binären Junktoren** ausgefüllt. Dabei werden die Konstanten als 0-stellige **Junktoren** angesehen. Hat der Inhalt einer Zelle keine Relevanz, steht dort ein Minuszeichen, ist kein Wert bekannt, so bleibt sie leer.

Um vollständig zu sein, d. h. alle 22 möglichen Kombinationen von **Wahrheitswerten** für höchstens zwei Variable zu berücksichtigen, enthält die Tabelle auch viele ungebräuchliche **Symbole** und **Operationen**. **Junktoren** ohne Angabe einer Priorität sind in diesem Dokument nicht weiter von Interesse. — Im Folgenden werden von den in der Tabelle aufgeführten **Junktoren** nur noch  $\perp$ ,  $\top$ ,  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\uparrow$ ,  $\downarrow$  und  $\dot{\vee}$  verwendet.

Für einige **Junktorsymbole**<sup>17)</sup>, Namen und Sprechweisen sind auch Alternativen angegeben. Die durchgestrichenen (d. h. negierten) Symbole sind ungebräuchlich und nur aus formalen Gründen aufgeführt. Wenn für eine bestimmte Kombination von **Wahrheitswerten** mehr als eine Zeile angegeben ist, so können die zugehörigen **Junktoren** zwar formal verschieden sein, liefern in der zweiwertigen **Aussagenlogik** jedoch dieselben Ergebnisse.

Die zur Einsparung von Klammern definierten Prioritäten sind in der Tabelle 2.3 auf Seite 26 angegeben.<sup>18)</sup>

### 3.2.2. Formalisierung

Da sie die Grundlage — quasi das Fundament — des mathematischen Inhalts von **ASBA** sind, müssen die **Axiome**, **Sätze**, **Beweise**, usw. der **Aussagenlogik** (und später der **Prädikatenlogik**) in streng formaler Form vorliegen.<sup>19)</sup> Da Computerprogramme mit der **Polnischen Notation**<sup>20)</sup> besser umgehen können und Klammern dort überflüssig sind, werden viele **Formeln** auch parallel in der Polnischen Notation angegeben. Dies wird auf Wunsch auch bei Ausgaben von **ASBA** so gehandhabt.

<sup>15)</sup> Die Tabelle basiert auf den Wahrheitstafeln in [51] Kapitel 2.2 und [2] Kapitel 1.1 Seite 3.

<sup>16)</sup>  $A$  und  $B$  können hier beliebige **Aussagen** sein — auch **Formeln** —, die jeweils genau einen **Wahrheitswert** repräsentieren.

<sup>17)</sup> Symbole, die für **Junktoren** verwendet werden.

<sup>18)</sup> Zur Erinnerung: Es gilt Rechtsklammerung. siehe Unterabschnitt 2.1.10 auf Seite 25

<sup>19)</sup> Die Formalisierung stützt sich auf [35]; siehe auch [25, 28].

<sup>20)</sup> Bei der **Polnischen Notation** stehen die Operanden bzw. Argumente von **Relationen** und **Funktionen** stets rechts von den Relations- und Funktionssymbolen. Dadurch kann auf Gliederungszeichen wie Klammern und Kommata verzichtet werden. Noch einfacher für Computer ist die **umgekehrte Polnische Notation**, bei der die Operanden und Argumente links von den Symbolen stehen.

|   |                        |          |   |          |   |   |   |   |  |                           |
|---|------------------------|----------|---|----------|---|---|---|---|--|---------------------------|
| $A$                                     | -                      | W        | F | W        | W | F | F | -   | Aussage $A$  | -                         |
| $B$                                     | -                      | -        | - | W        | F | W | F | -   | Aussage $B$  | -                         |
| <b>Junktor</b> <sup>1)</sup>            | <b>0</b> <sup>2)</sup> | <b>1</b> |   | <b>2</b> |   |   |   | <b>Name</b> <sup>3)</sup>                     | <b>Sprechweise</b>   | <b>Prio</b> <sup>4)</sup> |
| $\top$                                  | W                      | -        | - | -        | - | - | - | Verum   | <b>wahr</b>  | -                         |
| $\perp$                                 | F                      | -        | - | -        | - | - | - | Falsum  | <b>falsch</b>  | -                         |
| $(\dots)$                               | -                      | W        | W | -        | - | - | - | Klammerung                                    | $A$ ist geklammert   | - <sup>5)</sup>           |
| $\neg$                                  | -                      | W        | F | -        | - | - | - | Negation                                      | <b>Nicht</b> $A$   | 1 <sup>6)</sup>           |
|   | -                      | F        | W | -        | - | - | - |   |  | -                         |
|   | -                      | F        | F | -        | - | - | - |   |  | -                         |
| $\vee$                                  | -                      | -        | - | W        | W | W | W | Tautologie                                    |  | -                         |
|   | -                      | -        | - | W        | W | W | F | Disjunktion; Adjunktion; Alternative          | $A$ <b>oder</b> $B$  | 3                         |
| $\leftarrow \Leftarrow \subset$         | -                      | -        | - | W        | W | F | W | Replikation; Konversion; konverse Implikation | $A$ <b>folgt aus</b> $B$   | 4                         |
| $\mid$                                  | -                      | -        | - | W        | W | F | F | Präpendenz                                    | Identität von $A$  | -                         |
| $\rightarrow \Rightarrow \supset$       | -                      | -        | - | W        | F | W | W | Implikation; Subjunktion; Konditional         | <b>Aus</b> $A$ <b>folgt</b> $B$ ; Wenn $A$ dann $B$ ;<br>$A$ nur dann wenn $B$ | 4                         |
| $\mid$                                  | -                      | -        | - | W        | F | W | F | Postpendenz                                   | Identität von $B$  | -                         |
| $\leftrightarrow \Leftrightarrow$       | -                      | -        | - | W        | F | F | W | Äquivalenz; Bijunktion; Bikonditional         | $A$ <b>genau dann wenn</b> $B$ ;<br>$A$ dann und nur dann wenn $B$             | 5                         |
| $\wedge \& \cdot$                       | -                      | -        | - | W        | F | F | F | Konjunktion                                   | $A$ <b>und</b> $B$ ; Sowohl $A$ als auch $B$                                   | 2                         |
| $\uparrow \curlywedge \mid$             | -                      | -        | - | F        | W | W | W | NAND; Unverträglichkeit; Sheffer-Funktion     | <b>Nicht zugleich</b> $A$ <b>und</b> $B$                                       | 2                         |
| $\vee \curlyvee + \oplus$               | -                      | -        | - | F        | W | W | F | XOR; Antivalenz; ausschließende Disjunktion   | <b>Entweder</b> $A$ <b>oder</b> $B$  | 3                         |
| $\Leftrightarrow \nLeftrightarrow \neq$ | -                      | -        | - | "        | " | " | " | Kontravalenz                                  |  | -                         |
| $\mid$                                  | -                      | -        | - | F        | W | F | W | Postnonpendenz                                | Negation von $B$   | -                         |
| $\rightarrow \Rightarrow \supset$       | -                      | -        | - | F        | W | F | F | Postsektion                                   |  | -                         |
| $\mid$                                  | -                      | -        | - | F        | F | W | W | Pränonpendenz                                 | Negation von $A$   | -                         |
| $\leftarrow \Leftarrow \subset$         | -                      | -        | - | F        | F | W | F | Präsektion                                    |  | -                         |
| $\downarrow \nabla$                     | -                      | -        | - | F        | F | F | W | NOR; Nihilation; Peirce-Funktion              | <b>Weder</b> $A$ <b>noch</b> $B$   | 3                         |
|   | -                      | -        | - | F        | F | F | F | Kontradiktion                                 |  | -                         |

<sup>1</sup> Die **Junktoren**  $\langle \subset \rangle$ ,  $\langle \supset \rangle$ ,  $\langle \oplus \rangle$  und  $\langle nsupset \rangle$  haben hier nicht die Bedeutung der entsprechenden **Operationen der Mengenlehre** und dürfen nicht damit verwechselt werden; entsprechendes gilt für  $\langle + \rangle$  und  $\langle \cdot \rangle$  mit Addition und Multiplikation.

<sup>2</sup> 0-stellige **Junktoren** sind Konstante, hier **Wahrheitswerte**.

<sup>3</sup> Ist eine Zelle in dieser Spalte leer, so ist die zugehörige Zeile nur vorhanden, um alle **binären Junktoren** aufzuführen.

<sup>4</sup> Je kleiner die Zahl, je höher die Priorität.

<sup>5</sup> Klammerung ist genau genommen keine **Operation** und wird nicht nur bei logischen, sondern auch bei anderen Ausdrücken verwendet. Ihre Priorität - sofern man überhaupt davon sprechen kann - kann nur höher als die aller **Junktoren** sein.

<sup>6</sup> Die Priorität der **unären Operationen** muss höher sein als die aller mehrwertigen, also auch der **binären Operationen**. Wenn die Symbole aller **unären Operationen** auf derselben Seite des Operanden stehen, brauchen sie eigentlich keine Priorität, da die Auswertung nur von innen (dem Operanden) nach außen erfolgen kann. Nur wenn es sowohl links-, als auch rechtsseitige **unäre Operationen** gibt, muss man für diese Prioritäten definieren.

**Tabelle 3.3.:** Definition von **aussagenlogischen Symbolen**.

### 3.2.2.1. Bausteine der aussagenlogischen Sprache

Zur Einteilung der **Junktoren** werden die folgenden Mengen definiert:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_c &\equiv \{\top, \perp\} && , \text{ Menge der } \textbf{aussagenlogischen Konstanten} \\ \mathcal{J}_u &\equiv \{\neg\} && , \text{ Menge der } \textbf{unären Junktoren} \\ \mathcal{J}_b &\equiv \{\wedge, \vee, \dot{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\} && , \text{ Menge der } \textbf{binären Junktoren}\end{aligned}$$

Um damit **Formeln** zu bilden, werden noch Variable gebraucht:

$$\mathcal{Q} \equiv \{\mathbf{q}_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \quad , \text{ Menge der } \textbf{aussagenlogischen Variablen}$$

Die Mengen  $\mathcal{J}_c$ ,  $\mathcal{J}_u$ ,  $\mathcal{J}_b$  und  $\mathcal{Q}$  müssen paarweise disjunkt sein. – Damit können die folgende Mengen definiert werden:

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &\equiv \mathcal{J}_c \cup \mathcal{J}_u \cup \mathcal{J}_b && , \text{ Menge der } \textbf{Junktorsymbole} \\ \mathcal{A} &\equiv \mathcal{Q} \cup \mathcal{J} && , \text{ Alphabet der } \textbf{aussagenlogischen Sprache} \text{ für } \mathcal{J} \\ \mathcal{J}_x &\subseteq \mathcal{J} && , \text{ eine } \textbf{Teilmenge} \text{ von } \mathcal{J} \text{ für eine Indexvariable } x \\ \mathcal{A}_x &\equiv \mathcal{Q} \cup \mathcal{J}_x && , \text{ Alphabet der } \textbf{aussagenlogischen Sprache} \text{ für } \mathcal{J}_x\end{aligned}$$

Für **Elemente** aus  $\mathcal{Q}$  verwenden wir normalerweise die kleinen, lateinischen Buchstaben  $a, b, c$ , usw.

### 3.2.2.2. Aussagenlogische Formeln

Neben dem Alphabet  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{A}_x$  werden noch Klammern als Gliederungszeichen verwendet. Damit können nun rekursiv für jede **Teilmenge**  $\mathcal{J}_x$  von  $\mathcal{J}$  zwei Mengen von **aussagenlogischen Formeln** definiert werden, wobei wir für diese **Formeln** die kleinen, griechischen Buchstaben  $\alpha, \beta, \gamma$ , usw. verwenden.

$\mathcal{L}_x^A$  sei die **Menge** der auf folgende Weise definierten **aussagenlogischen Formel** mit **Klammerung** zum Alphabet  $\mathcal{A}_x$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &\subset \mathcal{L}_x^A && , \text{ die Variablen} \\ \mathcal{J}_x \cap \mathcal{J}_c &\subset \mathcal{L}_x^A && , \text{ die Konstanten} \\ \alpha \in \mathcal{L}_x^A &\Rightarrow (\neg \alpha) \in \mathcal{L}_x^A && , \text{ für } \neg \in \mathcal{J}_u \cap \mathcal{J}_x\end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\alpha, \beta \in \mathcal{L}_x^A \Rightarrow (\alpha \circledast \beta) \in \mathcal{L}_x^A \quad , \text{ für } \circledast \in \mathcal{J}_b \cap \mathcal{J}_x \quad (3.3)$$

Nur die auf diese Weise konstruierten **Formeln** sind **Elemente** aus  $\mathcal{L}_x^A$ . – Für  $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}$  sei noch  $\mathcal{L}^A \equiv \mathcal{L}_x^A$ .

$\mathcal{L}_x^{Ap}$  sei die **Menge** der auf folgende Weise definierten **aussagenlogischen Formeln** in **Polnischer Notation**:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &\subset \mathcal{L}_x^{Ap} && , \text{ die Variablen} \\ \mathcal{J}_x \cap \mathcal{J}_c &\subset \mathcal{L}_x^{Ap} && , \text{ die Konstanten} \\ \alpha \in \mathcal{L}_x^{Ap} &\Rightarrow \neg \alpha \in \mathcal{L}_x^{Ap} && , \text{ für } \neg \in \mathcal{J}_u \cap \mathcal{J}_x\end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\alpha, \beta \in \mathcal{L}_x^{Ap} \Rightarrow \circledast \alpha \beta \in \mathcal{L}_x^{Ap} \quad , \text{ für } \circledast \in \mathcal{J}_b \cap \mathcal{J}_x \quad (3.5)$$

Nur die auf diese Weise konstruierten **Formeln** sind **Elemente** aus  $\mathcal{L}_x^{\text{Ap}}$ . – Für  $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}$  sei noch  $\mathcal{L}^{\text{Ap}} \equiv \mathcal{L}_x^{\text{Ap}}$ .

Wie man leicht sieht, gilt

$$\mathcal{J}_x \subset \mathcal{J}_y \subseteq \mathcal{J} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}_x \subset \mathcal{A}_y \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{L}_x^{\text{A}} \subset \mathcal{L}_y^{\text{A}} \subseteq \mathcal{L}^{\text{A}} \\ \mathcal{L}_x^{\text{Ap}} \subset \mathcal{L}_y^{\text{Ap}} \subseteq \mathcal{L}^{\text{Ap}} \end{cases}$$

und weiterhin gibt es eine bijektive Abbildung von  $\mathcal{L}^{\text{A}}$  nach  $\mathcal{L}^{\text{Ap}}$ . Auf einen **Beweis** verzichten wir. Durch Anwendung der Klammerregeln von Paragraph 3.2.2.1 auf der **vorherigen Seite** lassen sich in der Regel noch viele Klammern der **Formeln** aus  $\mathcal{L}_x^{\text{A}}$  einsparen. Die **Formeln** aus  $\mathcal{L}_x^{\text{Ap}}$  sind frei von Klammern. Die Namen der **Junktoren** finden sich in der Tabelle 3.3 auf Seite 42.

Die **Formeln**, die nach einer der Regeln (3.2), (3.3), (3.4) oder (3.5) gebildet wurden, sind offensichtlich **zerlegbar**, die anderen, d. h. Variablen und Konstanten (aus  $\mathcal{Q}$  bzw.  $\mathcal{J}_c$ ), sind nicht **zerlegbar**. Letztere bezeichnet man auch als **atomare Formeln**.

### 3.2.3. Definition von **Junktoren** durch andere

Im folgenden gelte für zwei **aussagenlogische Formeln**  $\alpha$  und  $\beta$ :

$\alpha \equiv \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha$  und  $\beta$  stimmen als **Zeichenkette** überein.

$\alpha \Leftrightarrow \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha$  und  $\beta$  können mit Hilfe erlaubter **Ersetzungen** und geltender **Axiome** – siehe Unterabschnitt 3.2.4 auf der nächsten Seite – ineinander überführt werden.

Es werden verschiedene **Teilmengen** von  $\mathcal{J}$  eingeführt, die jeweils ausreichen um alle anderen **Elemente** aus  $\mathcal{J}$  zu definieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\text{bool}} &\equiv \{\neg, \wedge, \vee\} && \text{(Boolesche Signatur)} \\ \mathcal{J}_{\text{and}} &\equiv \{\neg, \wedge\} \\ \mathcal{J}_{\text{or}} &\equiv \{\neg, \vee\} \\ \mathcal{J}_{\text{imp}} &\equiv \{\neg, \rightarrow\} \\ \mathcal{J}_{\text{rep}} &\equiv \{\neg, \leftarrow\} \\ \mathcal{J}_{\text{nand}} &\equiv \{\uparrow\} \\ \mathcal{J}_{\text{nor}} &\equiv \{\downarrow\} \end{aligned}$$

Solche **Teilmengen** heißen **logische Signatur**.

Im Folgenden stehen jeweils links die **Formeln** in üblicher Schreibweise vollständig geklammert und rechts in Polnischer Notation (ohne Klammern). Ferner seien  $\alpha$  und  $\beta$  beliebige, nicht notwendig verschiedene **Formeln** aus der passenden **Menge**  $\mathcal{L}_x^{\text{A}}$  bzgl. der um die mit Hilfe der Definitionen erweiterten **Formelmengen**.

Ausgehend von den **Junktoren** aus der **Booleschen Signatur**  $\mathcal{J}_{\text{bool}}$  werden die restlichen **Junktoren** aus  $\mathcal{J}$  definiert. Die Definitionen sind in zwei Gruppen eingeteilt, und zwar die mit den **Junktoren** aus  $\mathcal{J}_{\text{and}}$ :

$$(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg(\alpha \wedge (\neg\beta))) \qquad \rightarrow \alpha\beta \equiv \neg \wedge \alpha \neg\beta \qquad (3.6)$$

$$(\alpha \leftarrow \beta) \equiv (\neg(\beta \wedge (\neg\alpha))) \qquad \leftarrow \beta\alpha \equiv \neg \wedge \beta \neg\alpha \qquad (3.7)$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftarrow \beta)) \qquad \leftrightarrow \alpha\beta \equiv \wedge \rightarrow \alpha\beta \leftarrow \alpha\beta$$

$$\perp \equiv (\mathbf{q}_0 \wedge (\neg\mathbf{q}_0)) \qquad \perp \equiv \wedge \mathbf{q}_0 \neg\mathbf{q}_0$$

$$(\alpha \uparrow \beta) \equiv (\neg(\alpha \wedge \beta)) \qquad \uparrow \alpha\beta \equiv \neg \wedge \alpha\beta \qquad (3.8)$$

und die mit den **Junktoren** aus  $\mathcal{J}_{\text{or}}$ :

$$\begin{aligned} (\alpha \downarrow \beta) &\equiv (\neg(\alpha \vee \beta)) & \downarrow \alpha \beta &\equiv \neg \vee \alpha \beta \\ (\alpha \dot{\vee} \beta) &\equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\neg(\alpha \wedge \beta))) & \dot{\vee} \alpha \beta &\equiv \wedge \vee \alpha \beta \neg \wedge \alpha \beta \\ \top &\equiv (\mathbf{q}_0 \vee (\neg \mathbf{q}_0)) & \top &\equiv \vee \mathbf{q}_0 \neg \mathbf{q}_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ist  $\langle \vee \rangle$  oder  $\langle \wedge \rangle$  nicht vorgegeben, d. h. wird von den **Elementen** aus  $\mathcal{J}_{\text{and}}$  bzgl.  $\mathcal{J}_{\text{or}}$  statt von denen aus  $\mathcal{J}_{\text{bool}}$  ausgegangen, so muss man den fehlenden **Junktor** mittels der passenden der beiden folgenden Definitionen einführen:

$$\begin{aligned} (\alpha \vee \beta) &\equiv (\neg((\neg \alpha) \wedge (\neg \beta))) & \vee \alpha \beta &\equiv \neg \wedge \neg \alpha \neg \beta \\ (\alpha \wedge \beta) &\equiv (\neg((\neg \alpha) \vee (\neg \beta))) & \wedge \alpha \beta &\equiv \neg \vee \neg \alpha \neg \beta \end{aligned}$$

Nun sind wieder alle **Junktoren** definiert.

Entsprechend wird bei Vorgabe von  $\mathcal{J}_{\text{imp}}$  bzgl.  $\mathcal{J}_{\text{rep}}$  die passende der beiden folgenden Definitionen ausgewählt:

$$\begin{aligned} (\alpha \vee \beta) &\equiv ((\neg \alpha) \rightarrow \beta) & \vee \alpha \beta &\equiv \rightarrow \neg \alpha \beta \\ (\alpha \wedge \beta) &\equiv (\neg((\neg \beta) \leftarrow \alpha)) & \wedge \alpha \beta &\equiv \neg \leftarrow \neg \beta \alpha \end{aligned}$$

woraufhin dann (3.6) bzgl. (3.7) als Gleichung nachzuweisen ist. Da aus (3.7) durch **Vertauschung** der Variablen unmittelbar

$$(\alpha \leftarrow \beta) \Leftrightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \quad \leftarrow \alpha \beta \Leftrightarrow \rightarrow \beta \alpha$$

folgt, vermindert sich der Aufwand dazu erheblich.

Bei Vorgabe von  $\mathcal{J}_{\text{nand}}$  bzgl.  $\mathcal{J}_{\text{nor}}$  schließlich werden die passenden Definition aus

$$\begin{aligned} (\neg \alpha) &\equiv (\alpha \downarrow \alpha) & \neg \alpha &\equiv \downarrow \alpha \alpha \\ (\neg \alpha) &\equiv (\alpha \uparrow \alpha) & \neg \alpha &\equiv \uparrow \alpha \alpha \end{aligned}$$

und, da  $\langle \neg \rangle$  jetzt definiert ist, aus

$$\begin{aligned} (\alpha \vee \beta) &\equiv (\neg(\alpha \downarrow \beta)) & \vee \alpha \beta &\equiv \neg \downarrow \alpha \beta \\ (\alpha \wedge \beta) &\equiv (\neg(\alpha \uparrow \beta)) & \wedge \alpha \beta &\equiv \neg \uparrow \alpha \beta \end{aligned} \quad (3.10)$$

ausgewählt und es ist (3.8) bzgl. (3.9) als Gleichung nachzuweisen.

Abschließend ist noch nachzuweisen, dass mit Hilfe der jeweils passenden der Definitionen (3.6) bis (3.10), ausgehend vom jeweils passenden  $\mathcal{L}_x^A$ , genau die gesamte Formelmengen  $\mathcal{L}^A$  erzeugt werden kann.

### 3.2.4. Aussagenlogisches Axiomensysteme

Ausgehend von der **logischen Signatur**  $\mathcal{J}_{\text{and}} = \{\neg, \wedge\}$  und der Definition 3.6 auf der vorherigen Seite von  $\langle \rightarrow \rangle$  werden die folgenden vier logischen **Axiome** definiert:

$$\begin{aligned} (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) &\rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) & \rightarrow \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \gamma &\rightarrow \rightarrow \alpha \beta \rightarrow \alpha \gamma \\ \alpha \rightarrow \beta &\rightarrow \alpha \wedge \alpha \beta & \rightarrow \alpha &\rightarrow \beta \wedge \alpha \beta \\ \alpha \wedge \beta &\rightarrow \alpha ; \quad \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta & \rightarrow \wedge \alpha \beta \alpha ; &\rightarrow \wedge \alpha \beta \beta \\ (\alpha \rightarrow \neg \beta) &\rightarrow (\beta \rightarrow \neg \alpha) & \rightarrow \rightarrow \alpha \neg \beta &\rightarrow \beta \neg \alpha \end{aligned}$$

>>> Aussagenlogik weiter bearbeiten. <<<

Siehe **Aussagenlogik** im Glossar.

[?] [Wikipedia](#)[34] schreibt dazu:

Die **Aussagenlogik** ist ein Teilgebiet der **Logik**, das sich mit Aussagen und deren Verknüpfung durch **Junktoren** befasst, ausgehend von strukturlosen **Elementaraussagen** (Atomen), denen ein **Wahrheitswert** zugeordnet wird. In der *klassischen Aussagenlogik* wird jeder Aussage genau einer der zwei Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ zugeordnet. Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage lässt sich ohne zusätzliche Informationen aus den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen bestimmen.

### 3.3. Prädikatenlogik

> > > Prädikatenlogik bearbeiten. < < <

Siehe **Prädikatenlogik** im Glossar.

Wikipedia[62] schreibt dazu:

Die **Prädikatenlogiken** (auch **Quantorenlogiken**) bilden eine Familie **logischer** Systeme, die es erlauben, einen weiten und in der Praxis vieler Wissenschaften und deren Anwendungen wichtigen Bereich von Argumenten zu formalisieren und auf ihre Gültigkeit zu überprüfen. Auf Grund dieser Eigenschaft spielt die Prädikatenlogik eine große Rolle in der **Logik** sowie in **Mathematik**, **Informatik**, **Linguistik** und **Philosophie**.

### 3.4. Mengenlehre

> > > Mengenlehre bearbeiten. < < <

Siehe **Mengenlehre** im Glossar.

[?] Wikipedia[61] schreibt dazu:

Die **Mengenlehre** ist ein grundlegendes **Teilgebiet der Mathematik**, das sich mit der Untersuchung von **Mengen**, also von Zusammenfassungen von **Objekten**, beschäftigt. Die gesamte Mathematik, wie sie heute üblicherweise gelehrt wird, ist in der Sprache der Mengenlehre formuliert und baut auf den **Axiomen der Mengenlehre** auf. Die meisten mathematischen Objekte, die in Teilbereichen wie **Algebra**, **Analysis**, **Geometrie**, **Stochastik** oder **Topologie** behandelt werden, um nur einige wenige zu nennen, lassen sich als Mengen definieren. Gemessen daran ist die Mengenlehre eine recht junge Wissenschaft; erst nach der Überwindung der **Grundlagenkrise der Mathematik** im frühen 20. Jahrhundert konnte die Mengenlehre ihren heutigen, zentralen und grundlegenden Platz in der Mathematik einnehmen.

## 4. Design

Dieses Projekt soll Open Source sein. Daher gilt für die Dokumente die *GNU Free Documentation License (FDL)* und für die Software die *GNU Affero General Public License (APGL)*. Die *GNU General Public License (GPL)* reicht für die Software nicht aus, da (ein Teil von) **ASBA** auch mittels eines Servers betrieben werden kann und soll. Damit das Projekt gegebenenfalls durch verschiedene Entwickler gleichzeitig bearbeitet werden kann und wegen des Konfigurationsmanagements wurde es als ein GitHub Projekt erstellt (siehe [24]).

Wenn die Lizenzen nicht mitgeliefert wurden, können sie unter <http://www.gnu.org/licenses/> gefunden werden.

### 4.1. Anforderungen

Die Anforderungen ergeben sich zunächst aus den Zielen im Abschnitt 1.3 auf Seite 9. Die beiden Ziele 1 *Daten* und 15 *Lizenz* sind für die Entwicklung von **ASBA** von sekundärer Bedeutung und werden daher in diesem Abschnitt nicht übernommen. Die anderen Ziele werden noch verfeinert.

> > > Ziele aus Abschnitt "Ziele" in Anforderungen umwandeln. < < <

1. **Form:** Die Daten liegt in formaler, geprüfter Form vor. — siehe Ziel 2 auf Seite 9
2. **Eingaben:** Die Eingabe von Daten erfolgt in einer formalen *Syntax* unter Verwendung der üblichen mathematischen Schreibweise. Folgende Daten können eingegeben werden:
  - a) *Axiome*
  - b) *Sätze*
  - c) *Beweise*
  - d) *Fachbegriffe*
  - e) *Fachgebiete*
  - f) *Ausgabeschemata*Dabei sind alle *Begriffe* nur innerhalb eines *Fachgebiets* und seiner untergeordneten *Fachgebiete* gültig, solange sie nicht umdefiniert werden. Das oberste *Fachgebiet* ist die ganze Mathematik. — siehe Ziel 3 auf Seite 9
3. **Prüfung:** Vorhandene *Beweise* können automatisch geprüft werden. — siehe Ziel 4 auf Seite 9
4. **Ausgaben:** Die Ausgabe kann in einer eindeutigen, formalen *Syntax* gemäß vorhandener *Ausgabeschemata* erfolgen. — siehe Ziel 5 auf Seite 9

5. **Auswertungen:** Zusätzlich zur Ausgabe der Daten sind verschiedene **Auswertungen** möglich. Insbesondere kann zu jedem **Beweis** angegeben werden, wie lang er ist und welche **Axiome** und **Sätze**<sup>1)</sup> er benötigt. — siehe Ziel 6 auf Seite 9
6. **Anpassbarkeit:** **Fachbegriffe** und die **Darstellung** bei der Ausgabe können mit Hilfe von — gegebenenfalls unbenannten — untergeordneten **Fachgebieten** angepasst werden. — siehe Ziel 7 auf Seite 9
7. **Individualität:** **Axiome** und **Sätze** können für jeden **Beweis** individuell vorausgesetzt werden. Dabei sind fachgebietsspezifische **Fachbegriffe** erlaubt. — siehe Ziel 8 auf Seite 10)
8. **Internet:** Die Daten können auf mehrere Dateien verteilt sein. Ein Teil davon — oder sogar alle — können im Internet liegen. — siehe Ziel 9 auf Seite 10
9. **Kommunikation:** Die Kommunikation mit **ASBA** kann mit den **Fachbegriffen** der einzelnen **Fachgebiete** erfolgen. — siehe Ziel 10 auf Seite 10
10. **Zugriff:** Der Zugriff auf **ASBA** kann lokal und über das Internet erfolgen. — siehe Ziel 11 auf Seite 10
11. **Unabhängigkeit:** **ASBA** kann offline und online arbeiten. — siehe Ziel 12 auf Seite 10
12. **Rekursion:** Es kann rekursiv über alle verwendeten Dateien — auch solchen, die im Internet liegen — ausgewertet werden. — siehe Ziel 13 auf Seite 10
13. **Bedienbarkeit:** **ASBA** ist einfach zu bedienen. — siehe Ziel 14 auf Seite 10
14. **Zwischenspeicher:** Wichtige **Auswertungen** können an vorhandenen Dateien angehängt oder separat in eigenen Dateien gespeichert werden. — siehe Ziel 16 auf Seite 10
15. **Beweisunterstützung:** **ASBA** hilft bei der Erstellung von **Beweisen**. — siehe Ziel 17 auf Seite 10

## 4.2. Axiome

> > > **Axiome** auswählen und definieren. < < <

## 4.3. Beweise

> > > **Schlussregeln** auswählen und **Beweise** definieren. < < <

## 4.4. Datenstruktur

> > > Datenstruktur abstrakt und in XML definieren. < < <

## 4.5. Bausteine

> > > Bausteine? definieren. < < <

<sup>1)</sup> **Sätze**, die quasi als **Axiome** verwendet werden.



# A. Anhang

## A.1. Werkzeuge

Da dies ein Open Source Projekt sein soll, müssen alle Werkzeuge, die zum Ablauf der Software erforderlich sind, ebenfalls Open Source sein. Für die reine Entwicklung sollte das auch gelten, muss es aber nicht.

### Werkzeuge zur Übersetzung der Quelldateien

1. Ein Übersetzer für  $\text{\LaTeX}$  Quellcode (\*.tex). — Verwendet wird *MiKTeX*.
2. Ein Übersetzer für C++ Quellcode (\*.c, \*.cpp, \*.h, \*.hpp). — Verwendet wird *Visual Studio Community 2017*.

Nicht unbedingt nötig, aber sinnvoll:

3. Ein Dokumentationssystem für in C++ Quellcode und darin enthaltene Doxygen Kommentare (\*.c, \*.cpp, \*.h, \*.hpp). — Verwendet wird *Doxygen* mit Konfigurationsdatei „Doxyfile“.
4. Ein Konfigurationsmanagementsystem zur Verwaltung der Quelldateien. — Verwendet wird *GitHub*.

### Werkzeuge für die Entwicklung

5. *GitHub* als Online Konfigurationsmanagementsystem zur Zusammenarbeit verschiedener Entwickler.  
→ <https://github.com/> — Lizenz siehe [9]
6. *GitHub* benötigt *Git* als Konfigurationsmanagementsystem.  
→ <https://git-scm.com/> — Lizenz siehe [9]
7. *MiKTeX* für Dokumentation und Ausgaben in  $\text{\LaTeX}$ .  
→ <https://miktex.org/> — Lizenz siehe [15]
8. angedacht: *Visual Studio Community 2017*<sup>1)</sup> (VS) als Entwicklungsumgebung für C++.  
→ <https://www.visualstudio.com/downloads/> — Lizenz siehe [14]
9. angedacht: In *Visual Studio Community 2015* integrierte Datenbank für [Ausgabeschemata](#), [Sätze](#), [Beweise](#), [Fachbegriffe](#) und [Fachgebiete](#). — Lizenz siehe [14]
10. angedacht: *RapidXml* für Ein- und Ausgabe in XML.  
→ <http://rapidxml.sourceforge.net/index.htm> — Lizenz siehe [5] oder [wahlweise](#) [17]<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Visual Studio Community ist zwar nicht Open Source, darf aber zur Entwicklung von Open Source Software unentgeltlich verwendet werden.

<sup>2)</sup> RapidXml stellt eine C++ Header-Datei zur Verfügung. Wenn diese im Quellcode eines Programms enthalten ist, gilt das ganze Programm als Open Source. Wenn diese Header-Datei nur in einer Bibliothek innerhalb eines Projekts verwendet wird, so gilt nur diese Bibliothek als Open Source.

11. angedacht: *Doxygen* als Dokumentationssystem für C++.  
→ <http://www.stack.nl/~dimitri/doxygen/> — Lizenz siehe [9]
12. angedacht: Doxygen benötigt *Ghostscript* als Interpreter für Postscript und PDF.  
→ <http://ghostscript.com/> — Lizenz siehe [7]
13. angedacht: Doxygen benötigt *Graphviz* mit *Dot* zur Erzeugung und Visualisierung von Graphen.  
→ <http://www.graphviz.org/Home.php> — Lizenz siehe [6]
14. angedacht: Software Entwicklungsumgebung für C++.  
→ <https://www.qt.io/developers/> — Lizenz siehe [10] und siehe [12]

### Werkzeuge zur Bearbeitung der Quelldateien

15. *T<sub>E</sub>Xstudio* als Editor für L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.  
→ <http://www.texstudio.org/> — Lizenz siehe [9]  
T<sub>E</sub>Xstudio benötigt einen Interpreter für Perl:
16. *Strawberry Perl* als Interpreter für Perl.  
→ <http://strawberryperl.com/> — Lizenz: Various OSI-compatible Open Source licenses, or given to the public domain
17. *Notepad++* als Text-Editor.  
→ <https://notepad-plus-plus.org/> — Lizenz siehe [8]
18. *WinMerge* zum Vergleich von Dateien und Verzeichnissen.  
→ <http://winmerge.org/> — Lizenz siehe [8]

### Im Projekt *gedeq* verwendete Werkzeuge

- *Java* als Programmiersprache und Laufzeitumgebung.  
→ <https://www.java.com/de/download/win10.jsp> — Lizenz siehe [18]
- *Apache Ant* als Java Bibliothek und Kommandozeilen-Werkzeug um Java Programme zu erzeugen.  
→ <http://ant.apache.org/> — Lizenz siehe [4]
- *Checkstyle* zur statischen Code-Analyse für Java.  
→ <http://checkstyle.sourceforge.net/> — Lizenz siehe [11]
- *Clover*<sup>3)</sup> als Testwerkzeug zur Analyse der Code-Abdeckung.  
→ <https://www.atlassian.com/software/clover/> — Lizenz siehe [13]
- *Eclipse IDE for Java Developers* als Entwicklungsumgebung für Java.  
→ <http://www.eclipse.org/downloads/packages/eclipse-ide-java-developers/neon1a/> — Lizenz siehe [19]
- *JUnit* zur Erzeugung von wiederholbaren Tests.  
→ <http://junit.org/junit4/> — Lizenz siehe [6]
- *Xerces2* als XML-Parser in Java.  
→ <http://xerces.apache.org/xerces2-j/> — Lizenzen siehe [4, 16, 20, 21]

<sup>3)</sup> Clover ist proprietäre Software, aber auf Anfrage frei für 30 Tage. Danach ist eine einmalige Lizenzgebühr fällig.

|   |    |
|---|----|
| A.2. Die Struktur ausgewählter Begriffeund Bezeichnungen  |    |
| Objekt  | 1) |
| <div><div><sup>1</sup> Fußnote zur Tabelle</div><div>Tabelle A.1.: Ausgewählte Begriffe</div></div> |    |

| Metasprache   |   | Objektsprache  |                 |
|---|---|--|-----------------|
| natürliche Sprache  | formale Metasprache   | Aussagenlogik  | Prädikatenlogik |
|   | Symbole   |  |                 |
|   | Metasymbol  | Objektsymbol   |                 |
| unäre Operation<br>binäre Operation<br>binäre Relationen  | Beispielsymbole<br>$\ominus$<br>$\otimes$<br>$< \leq > \geq \nless \nless \nless \nless$  |  |                 |
| Wahrheitswerte  |   |  |                 |
| <i>wahr falsch</i>  | true false  | $\top \perp$   |                 |
|   | Operation Relation<br>Metaoperation Metarelation  | Umkehrrelation<br>Negation<br>Junktor  |                 |
| nicht<br>und oder dann<br>dann wenn wenn<br>und <sup>1)</sup> entweder oder<br>nicht und nicht oder   | $\sim$<br>$\& \parallel \Rightarrow$<br>$\Leftrightarrow \Leftarrow$<br>$ $   | $\neg$<br>$\wedge \vee \rightarrow$<br>$\leftrightarrow \leftarrow$<br>$\dot{\vee}$<br>$\uparrow \downarrow$ |                 |
| gleich ungleich<br>definitionsgemäß gleich<br>definitionsgemäß gleich   | $\equiv \neq$<br>$:\Leftrightarrow$<br>$\equiv$   | $= \neq$   |                 |
| Quantoren   | $\forall \exists \exists!$  | $\bigwedge \bigvee \bigvee$  |                 |
| Ersetzung Vertauschung<br>Ableitungsrelationen:   | $\leftarrow \rightleftarrows$<br>$\vdash \vdash_R \vdash_P \vdash_K \vdash_E$   |  |                 |
| Elementrelationen:<br>Bereichsrelationen:<br>Komponentenrelationen:<br>Folgenrelationen:<br>ausgewählte Bereiche                                      | $\in \ni \notin \nnotin$<br>$\subset \subseteq \supset \supseteq \not\subset \not\subseteq \not\supset \not\supseteq$<br>$\in \ni \notin \nnotin$<br>$\sqsubset \sqsubseteq \sqsupset \sqsupseteq \not\sqsubset \not\sqsubseteq \not\sqsupset \not\sqsupseteq$<br>$\mathbb{N} \mathbb{N}_0 \mathcal{U} \mathcal{A} \mathcal{O} \mathcal{L}$ |  |                 |
| Bereichsoperationen   | <b>unär</b><br>$\mathcal{P} \mathcal{P}_e \mathcal{R} \mathcal{R}_e$<br>$\mathcal{F} \mathcal{F}_e \mathcal{T}$   | <b>binär</b><br>$\cap \cup \setminus \times$   |                 |
| unäre Operationen auf:<br>Definitions- Zielbereich<br>Quell- Wertebereich<br>Trägermenge<br>Graph   | <b>Relationen</b><br>$\text{stel}_r$<br><br><br>$\text{car} \text{car}_i$<br>graph  | <b>Funktionen</b><br>$\text{stel}_f$<br>dom tar<br>src ran   |                 |
| unäre Operationen auf:  | Folgen Tupel<br>len set   |  |                 |
| Die erste Spalte beschreibt die anderen Spalten. Nur Teile <b>in dieser Schriftart</b> gelten als Überschriften.<br><sup>1</sup> nur in Schlussregeln |   |  |                 |
| Tabelle A.2.: Ausgewählte Bezeichnungen   |   |  |                 |

### A.3. Offene Aufgaben

1. TODOs bearbeiten.
2. Eingabeprogramm erstellen (liest XML).
3. Prüfprogramm erstellen.
4. Ausgabeprogramm erstellen (schreibt XML).
5. Formelausgabe erstellen (erzeugt  $\text{\LaTeX}$  aus XML).
6. [Axiome](#) sammeln und eingeben.
7. [Sätze](#) sammeln und eingeben.
8. [Beweise](#) sammeln und eingeben.
9. [Fachbegriffe](#) und Symbole sammeln und eingeben.
10. [Fachgebiete](#) sammeln und eingeben.
11. [Ausgabeschemata](#) sammeln und eingeben.

## B. Verzeichnisse

### Tabellenverzeichnis

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Fragen (1.1) → Eigenschaften (1.2) . . . . .                               | 9  |
| 1.2. Eigenschaften (1.2) → Ziele (1.3) . . . . .                                | 10 |
| 1.3. Fragen (1.1) → Ziele (1.3) . . . . .                                       | 11 |
| 2.1. Darstellung der Wahrheitswerte . . . . .                                   | 16 |
| 2.2. Beispiele für $<$ und $\leq$ . . . . .                                     | 25 |
| 2.3. Prioritäten in abnehmender Reihenfolge . . . . .                           | 26 |
| 3.1. Ableitung der Schnittregel aus den Basisregeln . . . . .                   | 38 |
| 3.2. Ableitung der Kontraposition aus allgemeingültigen Schlussregeln . . . . . | 40 |
| 3.3. Definition von aussagenlogischen Symbolen. . . . .                         | 42 |
| A.1. Ausgewählte Begriffe . . . . .   | 51 |
| A.2. Ausgewählte Bezeichnungen . . . . .  | 52 |

### Abbildungsverzeichnis

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| 1.1. Die Umgebung von ASBA . . . . . | 12 |
|--------------------------------------|----|

## Literaturverzeichnis

- [1] Jürgen Michael Glubrecht / Arnold Oberschelp / Günter Todt, *Klassenlogik* – Mannheim; Wien; Zürich: Bibliographisches Institut, 1983.
- [2] Wolfgang Rautenberg, *Einführung in die Mathematische Logik*: Ein Lehrbuch, 3. Auflage, Vieweg+Teubner 2008 [14](#), [15](#), [25](#), [27](#), [32](#), [33](#), [35](#), [36](#), [39](#), [41](#)
- [3] Norbert Schwarz, *Einführung in T<sub>E</sub>X*: „unveränderte“ PDF-Fassung der 3. Auflage von 1991 → <http://www.ruhr-uni-bochum.de/www-rz/schwanbs/TeX/> — 06.02.2002 <sup>1)</sup>
- [4] *Apache License*, Version 2.0 → <http://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0> — 01.2004 [50](#)
- [5] *Boost Software License* 1.0 → <http://www.boost.org/users/license.html> — 17.08.2003 [49](#)
- [6] *Eclipse Public License* Version 1.0  
→ <http://www.eclipse.org/org/documents/epl-v10.php> — 09.03.2017 [50](#)
- [7] *GNU Affero General Public License* → <http://www.gnu.org/licenses/agpl> — 19.11.2007 [50](#)
- [8] *GNU General Public License*, Version 1  
→ <http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-1.0> — 02.1989 [50](#)
- [9] *GNU General Public License*, Version 2  
→ <http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-2.0> — 06.1991 [49](#), [50](#)
- [10] *GNU General Public License*, Version 3 → <http://www.gnu.org/licenses/gpl> — 29.06.2007 [50](#)
- [11] *GNU Lesser General Public License*, Version 2.1  
→ <http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/lgpl-2.1> — 02.1999 [50](#)
- [12] *GNU Lesser General Public License*, Version 3.0  
→ <http://www.gnu.org/licenses/lgpl> — 29.06.2007 [50](#)
- [13] *Lizenz für Clover* → <https://www.atlassian.com/software/clover> — 2017 [50](#)
- [14] *Lizenz für Microsoft Visual Studio Express 2015*  
→ <https://www.visualstudio.com/de/license-terms/mt171551/> — 2017 [49](#)
- [15] *Lizenz für MikTeX* → <https://miktex.org/kb/copying> — 13.04.2017 [49](#)
- [16] *Lizenz für SAX* → <http://www.saxproject.org/copying.html> — 05.05.2000 [50](#)
- [17] *MIT License* → <https://opensource.org/licenses/MIT/> — 09.03.2017 [49](#)

<sup>1)</sup> Der Pfeil (→) verweist stets auf einen Link zu einer Seite im Internet. Das Datum hinter dem Link gibt an — je nachdem welches bekannt ist — das Datum der letzten Änderung, den Stand der Seite oder das Datum, an dem die Seite angeschaut oder ein Zitat entnommen wurde. Sind mehrere Daten vorhanden, wird das erste vorhandene in der angegebenen Reihenfolge genommen. — Dies gilt für alle in diesem Dokument im Literaturverzeichnis aufgelisteten Seiten im Internet.

- [18] *Oracle Binary Code License Agreement* → <http://java.com/license> — 02.04.2013 50
- [19] *OSI Certified Open Source Software*  
→ <https://opensource.org/pressreleases/certified-open-source.php> — 16.06.1999 50
- [20] *W3C Document License*  
→ <http://www.w3.org/Consortium/Legal/2015/doc-license> — 01.02.2015 50
- [21] *W3C Software Notice and License* → <http://www.w3.org/Consortium/Legal/2002/copyright-software-20021231.html> — 13.05.2015 50
- [22] *Hilbert II — Introduction* → <http://www.qedeq.org/> — 20.01.2014 4, 7
- [23] *Formal Correct Mathematical Knowledge: GitHub Repository vom Projekt Hilbert II*  
→ <https://github.com/m-31/qedeq/> — 18.03.2017 7
- [24] *ASBA — Axiome, Sätze, Beweise und Auswertungen. Projekt zur maschinellen Überprüfung von mathematischen Beweisen und deren Ausgabe in lesbarer Form: GitHub Repository vom Projekt ASBA — in Bearbeitung*  
→ <https://github.com/Dr-Winfried/ASBA> 47
- [25] Meyling, Michael: *Anfangsgründe der mathematischen Logik*  
→ [http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq\\_logic\\_v1\\_de.pdf](http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_logic_v1_de.pdf) — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung) 41
- [26] Meyling, Michael: *Formale Prädikatenlogik* → [http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq\\_formal\\_logic\\_v1\\_de.pdf](http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_formal_logic_v1_de.pdf) — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)
- [27] Meyling, Michael: *Axiomatische Mengenlehre*  
→ [http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq\\_set\\_theory\\_v1\\_de.pdf](http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_set_theory_v1_de.pdf) — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)
- [28] Meyling, Michael: *Elements of Mathematical Logic*  
→ [http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq\\_logic\\_v1\\_en.pdf](http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_logic_v1_en.pdf) — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung) 41
- [29] Meyling, Michael: *Formal Predicate Calculus* → [http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq\\_formal\\_logic\\_v1\\_en.pdf](http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_formal_logic_v1_en.pdf) — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)
- [30] Meyling, Michael: *Axiomatic Set Theory*  
→ [http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq\\_set\\_theory\\_v1\\_en.pdf](http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_set_theory_v1_en.pdf) — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)
- [31] *Wikipedia Hauptseite*  
→ <https://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Hauptseite> — 07.11.2017 90, 91, 95
- [32] *Wikipedia: Ableitung (Logik)*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Ableitung\\_\(Logik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Ableitung_(Logik)) — 20.02.2018 72
- [33] *Wikipedia: Aussage (Logik)*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Aussage\\_\(Logik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Aussage_(Logik)) — 11.03.2018 16, 73
- [34] *Wikipedia: Aussagenlogik* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Aussagenlogik> — 18.01.2018 45, 74



- [35] Wikipedia: *Aussagenlogik Kapitel 4 Formaler Zugang*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Aussagenlogik#Formaler\\_Zugang](https://de.wikipedia.org/wiki/Aussagenlogik#Formaler_Zugang) — 18.01.2018 41
- [36] Wikipedia: *Begriff* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Begriff> — 12.03.2018 74
- [37] Wikipedia: *Benennung* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Benennung> — 12.05.2015 75
- [38] Wikipedia: *Beweis (Mathematik)*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Beweis\\_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Beweis_(Mathematik)) — 08.11.2017 13, 75
- [39] Wikipedia: *Bezeichnung* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Bezeichnung> — 25.02.2018 76
- [40] Wikipedia: *Darstellung (Wiedergabe)*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Darstellung\\_\(Wiedergabe\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Darstellung_(Wiedergabe)) — 31.10.2016 76
- [41] Wikipedia: *Diskursuniversum*  
→ <https://de.wikipedia.org/wiki/Diskursuniversum> — 12.01.2017 19, 76
- [42] Wikipedia: *Element (Mathematik)*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Element\\_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Element_(Mathematik)) — 09.01.2016 78
- [43] Wikipedia: *Folge (Mathematik)*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Folge\\_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Folge_(Mathematik)) — 14.02.2018 79
- [44] Wikipedia: *Fachgebiet* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Fachgebiet> — 17.01.2018 13, 79
- [45] Wikipedia: *Funktion (Mathematik)*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Funktion\\_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Funktion_(Mathematik)) — 12.03.2018 80
- [46] Wikipedia: *Funktion (Mathematik) Kapitel 2.1 Mengentheoretische Definition*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Funktion\\_\(Mathematik\)#Mengentheoretische\\_Definition](https://de.wikipedia.org/wiki/Funktion_(Mathematik)#Mengentheoretische_Definition) — 27.01.2018 23
- [47] Wikipedia: *Hilbert-Kalkül Kapitel 1.4 Modus (ponendo) ponens* → [https://de.wikipedia.org/wiki/Hilbert-Kalk%C3%BCl#Modus\\_\(ponendo\)\\_ponens](https://de.wikipedia.org/wiki/Hilbert-Kalk%C3%BCl#Modus_(ponendo)_ponens) — 18.06.16 31
- [48] Wikipedia: *Identität (Logik) Kapitel 2.3 Identität in der Informatik*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Identit%C3%A4t\\_\(Logik\)#Identit.C3.A4t\\_in\\_der\\_Informatik](https://de.wikipedia.org/wiki/Identit%C3%A4t_(Logik)#Identit.C3.A4t_in_der_Informatik) — 18.05.2017 20
- [49] Wikipedia: *Intuitionismus (Logik und Mathematik)* → [https://de.wikipedia.org/wiki/Intuitionismus\\_\(Logik\\_und\\_Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Intuitionismus_(Logik_und_Mathematik)) — 22.06.2018 94
- [50] Wikipedia: *Junktor* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Junktor> — 18.03.2017 81
- [51] Wikipedia: *Junktor Kapitel 2.2 Mögliche Junktoren*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Junktor#M.C3.B6gliche\\_Junktoren](https://de.wikipedia.org/wiki/Junktor#M.C3.B6gliche_Junktoren) — 21.10.2017 41
- [52] Wikipedia: *Kalkül* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Kalk%C3%BCl> — 26.02.2017 14, 81

- [53] Wikipedia: *Kartesisches Produkt*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Kartesisches\\_Produkt](https://de.wikipedia.org/wiki/Kartesisches_Produkt) — 21.02.2018 88
- [54] Wikipedia: *Klasse (Mengenlehre)*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Klasse\\_\(Mengenlehre\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Klasse_(Mengenlehre)) — 25.03.2018 82
- [55] Wikipedia: *Klassenlogik* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Klassenlogik> — 05.01.2017 82
- [56] Wikipedia: *Konstante (Logik)*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Konstante\\_\(Logik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Konstante_(Logik)) — 20.01.2016 82
- [57] Wikipedia: *Logik* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Logik> — 28.01.2018 83
- [58] Wikipedia: *Mathematische Logik*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematische\\_Logik](https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematische_Logik) — 21.03.2018 83
- [59] Wikipedia: *Mathematisches Objekt*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches\\_Objekt](https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches_Objekt) — 29.06.2018 17, 86
- [60] Wikipedia: *Menge* → [https://de.wikipedia.org/wiki/Menge\\_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Menge_(Mathematik)) — 07.03.2018 83
- [61] Wikipedia: *Mengenlehre* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Mengenlehre> — 17.01.2018 46, 84
- [62] Wikipedia: *Prädikatenlogik*  
→ <https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik> — 01.03.2018 46, 87
- [63] Wikipedia: *Prädikatenlogik erster Stufe*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik\\_erster\\_Stufe](https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik_erster_Stufe) — 26.11.2017
- [64] Wikipedia: *Quantor* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Quantor> — 12.03.2018 88
- [65] Wikipedia: *Relation (Mathematik)*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Relation\\_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Relation_(Mathematik)) — 16.03.2018 89
- [66] Wikipedia: *Relation (Mathematik) Kapitel 1.1 Mehrstellige Relation* → [https://de.wikipedia.org/wiki/Relation\\_\(Mathematik\)#Mehrstellige\\_Relation](https://de.wikipedia.org/wiki/Relation_(Mathematik)#Mehrstellige_Relation) — 27.01.2018 22
- [67] Wikipedia: *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Satz\\_vom\\_ausgeschlossenen\\_Dritten](https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_vom_ausgeschlossenen_Dritten) — 13.01.2018 94
- [68] Wikipedia: *Schlussregel* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Schlussregel> — 29.03.2015 14, 27, 89
- [69] Wikipedia: *Signatur (Modelltheorie)*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Signatur\\_\(Modelltheorie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Signatur_(Modelltheorie)) — 04.03.2018 90
- [70] Wikipedia: *Systeme natürlichen Schließens* → [https://de.wikipedia.org/wiki/Systeme\\_nat%C3%BCrlichen\\_Schlie%C3%9Fens](https://de.wikipedia.org/wiki/Systeme_nat%C3%BCrlichen_Schlie%C3%9Fens) — 25.10.2017 14, 27, 33, 34, 35, 36, 39
- [71] Wikipedia: *Semantik* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Semantik> — 04.03.2018

- [72] Wikipedia: *Syntax* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Syntax> — 14.11.2017
- [73] Wikipedia: *Terminus* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Terminus> — 13.01.2018 13, 79
- [74] Wikipedia: *Tupel* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Tupel> — 17.12.2017 92
- [75] Wikipedia: *Variable (Mathematik)* → [https://de.wikipedia.org/wiki/Variable\\_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Variable_(Mathematik)) — 08.03.2018 93
- [76] Wikipedia: *Wahrheitswert* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Wahrheitswert> — 03.07.2017 16, 94

## Index

Die Einordnung von einem Substantiv mit Adjektiven erfolgt stets unter dem Substantiv. Ist das Substantiv und ggf. ein oder mehrere Adjektive schon vorher aufgelistet worden, werden diese Worte durch je ein „—“ ersetzt.

[A](#) | [B](#) | [C](#) | [D](#) | [E](#) | [F](#) | [G](#) | [I](#) | [J](#) | [K](#) | [L](#) | [M](#) | [N](#) | [O](#) | [P](#) | [Q](#) | [R](#) | [S](#) | [T](#) | [U](#) | [V](#) | [W](#) | [X](#) | [Z](#)

### A

$\mathcal{A}$  [69](#)

$\mathcal{A}$  [69](#)

$\mathcal{A}_x$  [69](#)

Abbildung [72](#)

ableitbar [72](#)

Ableitung [72](#)

Ableitungsmenge [72](#)

Ableitungsrelation [72](#)

Abtrennungsregel [72](#)

Äquivalenzrelation [73](#)

Allquantor [73](#)

Alphabet [73](#)

Anfangsregel [73](#)

ASBA [73](#)

atomar [73](#)

Ausgabeschema [73](#)

Aussage [73](#)

—, atomare [73](#)

—, formale [73](#)

—, logische [73](#)

—, metasprachliche [74](#)

—, parametrisierte [74](#)

—, zerlegbare [74](#)

Aussagedefinition [74](#)

Aussagenbereich [74](#)

Aussagenlogik [74](#)

Auswertung [74](#)

Axiom [74](#)

Axiomensystem [74](#)

### B

$\mathcal{B}$  [69](#)

$\vec{b}$  [69](#)

$b$  [69](#)

Basisregel [74](#)

Baustein [74](#)

Begriff [74](#)

Beispielsymbol [75](#)

Benennung [75](#)

Bereich [75](#)

Bereichsoperation [75](#)

Bereichsrelation [75](#)

beschränkt [75](#)

Beweis [75](#)

beweisbar [76](#)

Beweisschritt [76](#)

Beweisschrittfolge [76](#)

Beweisschrittmenge [76](#)

Bezeichnung [76](#)

binär [76](#)

### C

$\mathcal{C}$  [69](#)

$C$  [69](#)

car [69](#)

### D

Darstellung [76](#)

—, interne [76](#)

—, logische [76](#)

Darstellungsweise [76](#)

Definitions-bereich [76](#)

Differenz [76](#)

Diskursuniversum [76](#)

Dummy [77](#)

*dummy* [64](#)

—, dummy [77](#)

Durchschnitt [78](#)

### E

$\Box_e$  [69](#)

$\mathcal{E}$  [69](#)

$E$  [69](#)

echt [78](#)

Eigenschaft [78](#)

Eigenschaft, interessierende [78](#)

Element [78](#)

Elementoperation [78](#)

Elementrelation [78](#)

|                           |                                |
|---------------------------|--------------------------------|
| Ergebnis 78               | <b>K</b>                       |
| Ergebnismenge 78          | $\mathcal{K}$ 70               |
| Ersetzung 78              | $\vdash_{\mathcal{K}}$ 70      |
| Ersetzungsmenge 78        | <b>k</b> 70                    |
| Existenzquantor 79        | Kalkuel 81                     |
| <b>F</b>                  | Klammerung 82                  |
| $\mathcal{F}$ 69          | Klasse 82                      |
| $\mathcal{F}_e$ 69        | Klassenlogik 82                |
| Fachbegriff 79            | Komponente 82                  |
| Fachgebiet 79             | Komponentenmenge 82            |
| falsch 79                 | Komponentenrelation 82         |
| false 70                  | Konklusion 82                  |
| Folge 79                  | Konklusionsmenge 82            |
| —, leere 80               | Konstante 82                   |
| Folgenmenge 80            | —, aussagenlogische 83         |
| Folgenoperation 80        | Kontraposition 83              |
| Folgenrelation 80         | <b>L</b>                       |
| Folgerung 80              | $\mathcal{L}$ 70               |
| Folgerungsmenge 80        | $\mathcal{L}^A$ 70             |
| Formationsregel 80        | $\mathcal{L}_x^A$ 70           |
| Formel 80                 | $\mathcal{L}^{\text{Ap}}$ 70   |
| —, allgemeingültige 80    | $\mathcal{L}_x^{\text{Ap}}$ 70 |
| —, aussagenlogische 80    | len 70                         |
| —, praedikatenlogische 80 | Logik 83                       |
| Formelmenge 80            | —, mathematische 83            |
| Funktion 80               | <b>M</b>                       |
| Funktionssymbol 81        | $M^0$ 70                       |
| Funktionswert 81          | $M^n$ 70                       |
| <b>G</b>                  | Menge 83                       |
| $\Box_g$ 70               | —, leere 84                    |
| Gleichheit 81             | Mengenlehre 84                 |
| Gleichheitsrelation 81    | Mengenoperation 84             |
| Gliederungszeichen 81     | Mengenprodukt 84               |
| Graph 81                  | Mengenrelation 84              |
| graph 70                  | Metadefinition 84              |
| <b>I</b>                  | Metaformel 84                  |
| Identitätsregel 81        | Metajunktor 84                 |
| <b>J</b>                  | Metaoperation 84               |
| $\mathcal{J}$ 70          | Metarelation 85                |
| $\mathcal{J}_b$ 70        | Metasprache 85                 |
| $\mathcal{J}_c$ 70        | —, formale 85                  |
| $\mathcal{J}_u$ 70        | Metasymbol 85                  |
| $\mathcal{J}_x$ 70        | Metavariable 85                |
| Junktor 81                | Monotonieregel 85              |
| —, binärer 81             | <b>N</b>                       |
| —, unärer 81              | $\mathbb{N}$ 70                |
| Junktorsymbol 81          | $\mathbb{N}_0$ 70              |
|                           | Negation 85                    |

Notation, Polnische 85

## O

$\emptyset$  70

Oberaussage 85

—, echte 85

Oberbereich 85

—, echter 85

Oberfolge 85

—, echte 85

Oberformel 85

—, echte 85

Obermenge 86

—, echte 86

Oberobjekt 86

—, echtes 86

Obersprache 86

—, echte 86

Obersymbol 86

—, echtes 86

Objekt 86

—, formales 86

—, metasprachliches 86

Objektart 86

Objektbereich 86

Objektdefinition 87

Objektformel 87

Objektkonstante 87

Objektoperation 87

Objektrelation 87

Objektsprache 87

Objektsymbol 87

Operation 87

—, aussagenlogische 87

Operationssymbol 87

Ordnungsrelation 87

## P

$\Box P$  70

$\mathcal{P}$  71

$\mathcal{P}_e$  71

$\vdash_{\mathcal{P}}$  71

**p** 71

Paar, geordnetes 87

Potenzmenge 87

Prädikat 87

Prädikatenlogik 87

Praemisse 88

Praemissenmenge 88

Produkt, kartesisches 88

## Q

$\mathcal{Q}$  71

**q** 71

Quantor 88

—, logischer 88

—, metasprachlicher 88

Quellbereich 88

## R

$\mathcal{R}$  71

$\mathcal{R}_e$  71

$\vdash_{\mathcal{R}}$  71

**e** 71

ran 71

Relation 89

—, aussagenlogische 89

Relationssymbol 89

## S

Satz 89

—, formaler 89

Schlussregel 89

—, allgemeingültige 90

Schlussregelmenge 90

Schnittregel 90

Semantik 90

set 71

Signatur 90

—, Boolesche 90

—, logische 90

Sprache 90

—, aussagenlogische 90

Sprachebene 90

src 71

stel<sub>f</sub> 71

stel<sub>r</sub> 71

$n$ -stellig 90

Stelligkeit 90

Symbol 91

—, aussagenlogisches 91

—, metasprachliches 91

—, zusammengesetztes 91

Symbolfolge 91

Syntax 91

## T

$\mathcal{T}$  71

$\mathcal{T}$  71

$T$  71

tar 71

Teilaussage 91

—, echte 91

Teilbereich 91

|                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| —, echter 91            | Variable 93             |
| Teilfolge 91            | —, aussagenlogische 93  |
| —, echte 91             | —, freie 93             |
| Teilformel 91           | —, gebundene 93         |
| —, echte 91             | —, logische 93          |
| Teilmenge 91            | —, metasprachliche 93   |
| —, echte 91             | Vereinigung 93          |
| Teilobjekt 91           | vergleichbar 94         |
| —, echtes 92            | Verkettung 94           |
| Teilsprache 92          | Vertauschung 94         |
| —, echte 92             | Voraussetzung 94        |
| Teilsymbol 92           |                         |
| —, echtes 92            | <b>W</b>                |
| Trägermenge 92          | <i>wahr</i> 94          |
| Transformation 92       | Wahrheitswert 94        |
| —, zulässige 92         | —, aussagenlogischer 95 |
| Transformationsfolge 92 | —, metasprachlicher 95  |
| Transformationsregel 92 | Wert 95                 |
| true 71                 | —, logischer 95         |
| Tupel 92                | Wertebereich 95         |
| Tupelmenge 92           | WikiDummy 95            |
|                         | Wikipedia 95            |
| <b>U</b>                | Wort 95                 |
| $\mathcal{U}$ 71        |                         |
| Umkehrrelation 93       | <b>X</b>                |
| unär 93                 | $\mathcal{X}$ 71        |
| Ungleichheit 93         | X 71                    |
| Unteraussage 93         |                         |
| Unterformel 93          | <b>Z</b>                |
| Untermenge 93           | Zahl, natürliche 95     |
| Unterobjekt 93          | Zeichenkette 95         |
| Untersymbol 93          | zerlegbar 95            |
| unzerlegbar 93          | Ziel 96                 |
|                         | Zielbereich 96          |
| <b>V</b>                | zulässig 96             |
| val 69                  |                         |

## Symbolverzeichnis

Mit Seitenzahlen **in dieser** Schriftart wird auf die Definition oder sonstige wichtige Stellen verwiesen.

In eckigen Klammern wird, sofern vorhanden, die **Benennung** für das jeweilige **Symbol** angegeben, für **Funktionen** und **Relationen** auch mittels eines Aufrufs. Die Wörter **in dieser** Schrift sind notwendig für die Definition, solche *in dieser* Schrift können auch weggelassen werden.

# [Beschreibung fehlt noch ]

**Beispielsymbole für Operationen und Relationen** Im Folgenden seien  $A$  und  $B$  passende **Objekte**. , siehe **Beispielsymbol**, **Operation** & **Relation**

$\ominus$  **Beispielsymbol** für eine **unäre Operation**:  $\ominus A$ . **24, 26, 43, 52**,

$\otimes$  **Beispielsymbol** für eine **binäre Operation**:  $A \otimes B$ . **23, 24, 26, 43, 52, , 87**

$<$  **Beispielsymbol** für eine **binäre Relation**:  $A < B$ . **24, 25f, 52, 54, , 64**

$\leq$  **Beispielsymbol** für eine **binäre Relation**:  $A \leq B$ . **24, 25f, 52, 54, , 64**

$>$  **Beispielsymbol** für eine **binäre Relation**:  $(A > B) :\Leftrightarrow (B < A)$ .  
Die **Umkehrrelation** von  $<$ . **24, 26, 52, , siehe  $\Leftrightarrow$**

$\geq$  **Beispielsymbol** für eine **binäre Relation**:  $(A \geq B) :\Leftrightarrow (B \leq A)$ .  
Die **Umkehrrelation** von  $\leq$ . **24, 26, 52, , siehe  $\Leftrightarrow$**

$\nless$  **Beispielsymbol** für eine **binäre Relation**:  $(A \nless B) :\Leftrightarrow \sim(A < B)$ .  
Die **Negation** von  $<$ . **24, 26, 52, , siehe  $\sim$  &  $\Leftrightarrow$**

$\nless$  **Beispielsymbol** für eine **binäre Relation**:  $(A \nless B) :\Leftrightarrow \sim(A \leq B)$ .  
Die **Negation** von  $\leq$ . **24, 26, 52, , siehe  $\sim$  &  $\Leftrightarrow$**

$\nless$  **Beispielsymbol** für eine **binäre Relation**:  $(A \nless B) :\Leftrightarrow \sim(B < A)$ .  
Die **Negation** der **Umkehrrelation** und gleichzeitig die **Umkehrrelation** der **Negation** von  $<$ . **24, 26, 52, , siehe  $\sim$  &  $\Leftrightarrow$**

$\nless$  **Beispielsymbol** für eine **binäre Relation**:  $(A \nless B) :\Leftrightarrow \sim(B \leq A)$ .  
Die **Negation** der **Umkehrrelation** und gleichzeitig die **Umkehrrelation** der **Negation** von  $\leq$ . **24, 26, 52, , siehe  $\sim$  &  $\Leftrightarrow$**

**Metaoperationen und -relationen mit Aussagen** Im Folgenden seien  $A$  und  $B$  beliebige **metasprachliche Aussagen**. , siehe **Metaoperation** & **Metarelation**

$\sim$  Eine **unäre Metaoperation**:  $\sim A$  [es gilt **nicht**  $A$ ]. **19, 24, 26, 52, , siehe  $\neg$**

$\&$  Eine **binäre Metaoperation**:  $(A \& B)$  [es gilt  $A$  **und**  $B$ ]. **19, 20f, 24ff, 29f, 33, 52, , 73, 84, 87, siehe  $|$  &  $\wedge$**

$\parallel$  Eine **binäre Metaoperation**:  $(A \parallel B)$  [es gilt  $A$  **oder**  $B$ ]. **19, 20, 24, 26, 52, , 84, siehe  $\vee$**

$|$  Eine **binäre Metaoperation**:  $(A | B) :\Leftrightarrow (A \& B)$  [es gilt  $A$  **und**  $B$ ].  
Nur in **Schlussregeln**! **20, 26, 29, 30, 33–40, 52, , 84, siehe  $\&$ ,  $\Leftrightarrow$  &  $\wedge$**

$\Rightarrow$  Eine **binäre Metarelation**:  $(A \Rightarrow B)$  [wenn  $A$  gilt, **dann** gilt auch  $B$ ]. **19, 21, 26, 29f, 43f, 52, , 64, 73, 85, 87, 95, siehe  $\rightarrow$**

$\Leftarrow$  Eine **binäre Metarelation**:  $(A \Leftarrow B) :\Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$  [ $A$  gilt dann, **wenn**  $B$  gilt].  
Die **Umkehrrelation** von  $\Rightarrow$ . **19, 26, 52, , 85, siehe  $\Leftrightarrow$  &  $\leftarrow$**



$\Leftrightarrow$  Eine **binäre Metarelation**:  $(A \Leftrightarrow B) :\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A))$  [A gilt genau dann wenn B gilt]. 19, 20, 24, 26f, 29f, 44, 45, 52, , 85, 95, siehe  $\&$ ,  $\Rightarrow$ ,  $:\Leftrightarrow$  &  $\leftrightarrow$

$:\Leftrightarrow$  [ok] Die **Aussagedefinition** – eine **binäre Metarelation**:  $(A :\Leftrightarrow B)$  [A gilt definitionsgemäß genau dann wenn B gilt]. 18, 19, 23f, 26, 28f, 33, 44, 52, , 74, siehe  $\equiv$  & Objektdefinition

**Metaoperationen und -relationen mit Objekten** Im Folgenden seien A und B beliebige metasprachliche Objekte. , siehe **Metaoperation & Metarelation**

$\equiv$  **Metasprachliche Gleichheit** – eine **binäre Metarelation**:  $(A \equiv B)$  [A ist gleich B]<sup>2)</sup>. 18, 20, 21, 24–27, 30, 34f, 44, 52, , 65, 81, 93, siehe  $=$

$\neq$  **Metasprachliche Ungleichheit** – eine **binäre Metarelation**:  $(A \neq B) :\Leftrightarrow \sim(A \equiv B)$  [A ist ungleich B]<sup>3)</sup>.

Die **Negation** von  $\equiv$ . 20, 21, 24, 26, 52, , 81, 93, siehe  $\sim$ ,  $:\Leftrightarrow$ ,  $\equiv$  &  $\neq$

**Sonstige Metaoperationen und -relationen** Im Folgenden seien A und B metasprachliche Aussagen oder Bereichen davon und  $\alpha$  und  $\beta$  ???.

$\vdash$  Die **Ableitungsrelation** – eine **binäre Metarelation**:  $(A \vdash B)$  [A ist ableitbar aus B]<sup>4)</sup>. 26, 28, 29f, 33, 34, 36, 38, 40, 52, , 72, siehe ableitbar

$\vdash_R$  Die **R-Ableitungsrelation** – eine **binäre Metarelation**:  $(A \vdash_R B) :\Leftrightarrow ((A, B) \in R_g)$  [A ist R-ableitbar aus B]<sup>5)</sup>.

Die **Darstellung** einer **Relation**  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$  als **Ableitungsrelation**. 27f, 29f, 52, , 72, siehe  $\vdash$ ,  $:\Leftrightarrow$ ,  $\in$ ,  $g$  & ableitbar

$\leftarrow$  Die **Ersetzung**:  $(\alpha \leftarrow \beta)$  [ $\alpha$  wird ersetzt durch  $\beta$ ]<sup>6)</sup>. 26, 33, 34, 35, 38, 40, 52,

$\leftrightarrow$  Die **Vertauschung**:  $(\alpha \leftrightarrow \beta)$  [ $\alpha$  wird vertauscht mit  $\beta$ ]. 26, 34, 35, 40, 52, , 94

**Elementrelationen** [ok] Im Folgenden sei x ein beliebiges Element und M eine beliebige Menge.

$\in$  [ok] Eine **Elementrelation**:  $(x \in M)$  [x ist ein Element aus M]<sup>7)</sup>.  
Die grundlegende **Relation** der **Mengenlehre**. 18, 26, 52, , 65, 78, 87–90, 95, siehe **Element & Komponente**

$\ni$  [ok] Eine **Elementrelation**:  $(M \ni x) :\Leftrightarrow (x \in M)$  [M enthält x als Element].

Die **Umkehrrelation** von  $\in$ . 18, 26, 52, , 78, siehe  $:\Leftrightarrow$  & **Element**

$\notin$  [ok] Eine **Elementrelation**:  $(x \notin M) :\Leftrightarrow \sim(x \in M)$  [x ist nicht ein Element aus M]<sup>8)</sup>.

Die **Negation** von  $\in$ . 18, 26, 52, , 78, siehe  $\sim$  &  $:\Leftrightarrow$

$\nexists$  [ok] Eine **Elementrelation**:  $(M \nexists x) :\Leftrightarrow \sim(x \in M)$  [M enthält x nicht als Element].

Die **Negation** der **Umkehrrelation** und gleichzeitig die **Umkehrrelation** der **Negation** von  $\in$ . 18, 26, 52, , 78, siehe  $\sim$  &  $:\Leftrightarrow$

**Bereichsrelationen und -operationen** <sup>9)</sup> Im Folgenden seien M und N beliebige Mengen. , siehe **Menge, Metaoperation & Metarelation**

<sup>2)</sup> alternativ: dasselbe wie oder identisch zu

<sup>3)</sup> alternativ: nicht gleich, nicht dasselbe wie oder nicht identisch zu

<sup>4)</sup> synonym: beweisbar

<sup>5)</sup> synonym: R-beweisbar

<sup>6)</sup> alternativ: substituiert durch

<sup>7)</sup> alternativ: von; „a von M“ könnte z. B. auch „Komponente a von der Folge M“ meinen. Daher bevorzugen wir für Elemente „aus“ und für Komponenten „von“.

<sup>8)</sup> alternativ: kein Element aus

<sup>9)</sup> In diesem Dokument **Metarelationen** und **operationen**.

$$(A \Leftrightarrow B) :\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A))$$

$$(A :\Leftrightarrow B)$$

$$(A \equiv B)$$

$$(A \neq B) :\Leftrightarrow \sim(A \equiv B)$$

$$(A \vdash B)$$

$$(A \vdash_R B) :\Leftrightarrow ((A, B) \in R_g)$$

$$(\alpha \leftarrow \beta)$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta)$$

$$(x \in M)$$

$$(M \ni x) :\Leftrightarrow (x \in M)$$

$$(x \notin M) :\Leftrightarrow \sim(x \in M)$$

$$(M \nexists x) :\Leftrightarrow \sim(x \in M)$$

|  |   |
|--|---|
| $(M \subset N) :\Leftrightarrow ((M \subseteq N) \& (M \neq N))$<br>$(M \subseteq N) :\Leftrightarrow \forall x : ((x \in M) \Rightarrow (x \in N))$<br>$(M \supset N) :\Leftrightarrow (N \subset M)$<br>$(M \supseteq N) :\Leftrightarrow (N \subseteq M)$<br>$(M \not\subset N) :\Leftrightarrow \sim(M \subset N)$<br>$(M \not\subseteq N) :\Leftrightarrow \sim(M \subseteq N)$<br>$(M \not\supset N) :\Leftrightarrow \sim(N \subset M)$<br>$(M \not\supseteq N) :\Leftrightarrow \sim(N \subseteq M)$<br>$M \cap N \equiv \{x \mid (x \in M) \& (x \in N)\}$<br>$M \cup N \equiv \{x \mid (x \in M) \parallel (x \in N)\}$<br>$M \setminus N \equiv \{x \mid (x \in M) \& (x \notin N)\}$<br>$M \times N \equiv \{(x, y) \mid (x \in M) \& (y \in N)\}$ | <p><math>\subset</math> [ok] Eine <b>Bereichsrelation</b>: <math>(M \subset N) :\Leftrightarrow ((M \subseteq N) \&amp; (M \neq N))</math> [<i>M ist eine <b>echte Teilmenge</b> von N</i>].<br/>         Ursprünglich wurde <math>\subset</math> im Sinne von <math>\subseteq</math> verwendet. 4, 18, 19, 26f, 43f, 52, , 66, 75, 91, 95, siehe <math>\&amp;</math>, <math>:\Leftrightarrow</math>, <math>\neq</math> &amp; <b>echte Teilmenge</b></p> <p><math>\subseteq</math> [ok] Eine <b>Bereichsrelation</b>: <math>(M \subseteq N) :\Leftrightarrow \forall x : ((x \in M) \Rightarrow (x \in N))</math> [<i>M ist eine <b>Teilmenge</b> von N</i>]. 18, 19, 23, 26f, 29, 31f, 43f, 52, , 66, 72, 74f, 86, 89, 91, 95, siehe <math>\Rightarrow</math>, <math>:\Leftrightarrow</math>, <math>\in</math>, <math>\forall</math> &amp; <b>Teilmenge</b></p> <p><math>\supset</math> [ok] Eine <b>Bereichsrelation</b>: <math>(M \supset N) :\Leftrightarrow (N \subset M)</math> [<i>M ist eine <b>echte Obermenge</b> von N</i>].<br/>         Die <b>Umkehrrelation</b> von <math>\subset</math>. Ursprünglich wurde <math>\supset</math> im Sinne von <math>\supseteq</math> verwendet. 19, 26, 52, , 66, 75, 85f, siehe <math>:\Leftrightarrow</math> &amp; <b>echte Obermenge</b></p> <p><math>\supseteq</math> [ok] Eine <b>Bereichsrelation</b>: <math>(M \supseteq N) :\Leftrightarrow (N \subseteq M)</math> [<i>M ist eine <b>Obermenge</b> von N</i>].<br/>         Die <b>Umkehrrelation</b> von <math>\subseteq</math>. 19, 26, 33, 52, , 66, 75, 85f, siehe <math>:\Leftrightarrow</math> &amp; <b>Obermenge</b></p> <p><math>\not\subset</math> [ok] Eine <b>Bereichsrelation</b>: <math>(M \not\subset N) :\Leftrightarrow \sim(M \subset N)</math> [<i>M ist <b>keine echte Teilmenge</b> von N</i>].<br/>         Die <b>Negation</b> von <math>\subset</math>. 19, 26, 52, , 75, siehe <math>\sim</math>, <math>:\Leftrightarrow</math> &amp; <b>echte Teilmenge</b></p> <p><math>\not\subseteq</math> [ok] Eine <b>Bereichsrelation</b>: <math>(M \not\subseteq N) :\Leftrightarrow \sim(M \subseteq N)</math> [<i>M ist <b>keine Teilmenge</b> von N</i>].<br/>         Die <b>Negation</b> von <math>\subseteq</math>. 19, 26, 52, , 75, siehe <math>\sim</math>, <math>:\Leftrightarrow</math> &amp; <b>Teilmenge</b></p> <p><math>\not\supset</math> [ok] Eine <b>Bereichsrelation</b>: <math>(M \not\supset N) :\Leftrightarrow \sim(N \subset M)</math> [<i>M ist <b>keine echte Obermenge</b> von N</i>].<br/>         Die <b>Negation</b> der <b>Umkehrrelation</b> und gleichzeitig die <b>Umkehrrelation</b> der <b>Negation</b> von <math>\subset</math>. 19, 26, 52, , 75, siehe <math>\sim</math> &amp; <math>:\Leftrightarrow</math></p> <p><math>\not\supseteq</math> [ok] Eine <b>Bereichsrelation</b>: <math>(M \not\supseteq N) :\Leftrightarrow \sim(N \subseteq M)</math> [<i>M ist <b>keine Obermenge</b> von N</i>].<br/>         Die <b>Negation</b> der <b>Umkehrrelation</b> und gleichzeitig die <b>Umkehrrelation</b> der <b>Negation</b> von <math>\subseteq</math>. 19, 26, 52, , 75, siehe <math>\sim</math> &amp; <math>:\Leftrightarrow</math></p> <p><math>\cap</math> Eine <b>Bereichsoperation</b>: <math>M \cap N \equiv \{x \mid (x \in M) \&amp; (x \in N)\}</math> [<i>Der <b>Durchschnitt</b> von M und N</i>]. 26, 43, 52, , 75, siehe <math>\&amp;</math>, <math>\equiv</math>, <math>\in</math> &amp; <b>Durchschnitt</b></p> <p><math>\cup</math> Eine <b>Bereichsoperation</b>: <math>M \cup N \equiv \{x \mid (x \in M) \parallel (x \in N)\}</math> [<i>Die <b>Vereinigung</b> von M und N</i>]. 26, 28, 31, 33, 43, 52, , 75, 95, siehe <math>\parallel</math>, <math>\equiv</math>, <math>\in</math>, <b>Menge</b>, <b>Bereichsoperation</b> &amp; <b>Vereinigung</b></p> <p><math>\setminus</math> Eine <b>Bereichsoperation</b>: <math>M \setminus N \equiv \{x \mid (x \in M) \&amp; (x \notin N)\}</math> [<i>Die <b>Differenz</b> von M und N</i>]. 52, , 85, siehe <math>\&amp;</math>, <math>\equiv</math>, <math>\in</math>, <math>\notin</math>, <b>Differenz</b>, <b>Menge</b> &amp; <b>Bereichsoperation</b></p> <p><math>\times</math> Eine <b>Bereichsoperation</b>: <math>M \times N \equiv \{(x, y) \mid (x \in M) \&amp; (y \in N)\}</math> [<i>Das <b>kartesische Produkt</b> von M und N</i>]<sup>10)</sup>. 22f, 26ff, 52, , 75, 80f, 85, 87, 89, siehe <math>\&amp;</math>, <math>\equiv</math>, <math>\in</math>, <b>kartesisches Produkt</b>, <b>Menge</b>, <b>Bereichsoperation</b> &amp; <b>Mengenprodukt</b></p> <p><b>Komponentenrelationen</b> Im Folgenden sei <math>x</math> eine beliebige <b>Komponente</b> und <math>F</math> eine beliebige <b>Folge</b>. , siehe <b>Komponentenrelation</b></p> <p><math>\equiv</math> Eine <b>Komponentenrelation</b>: <math>(x \equiv F)</math> [<i>x ist eine <b>Komponente</b> von F</i>]<sup>11)</sup>. 52, , 67, 82, siehe <b>Element</b> &amp; <b>Komponente</b></p> <p><math>\ni</math> Eine <b>Komponentenrelation</b>: <math>(F \ni x) \equiv (x \equiv F)</math> [<i>F <b>enthält</b> x als Komponente</i>].</p> |
|--|---|

<sup>10)</sup> synonym: Mengenprodukt

<sup>11)</sup> alternativ: **aus**; „x aus F“ könnte z. B. auch „**Element** x aus der **Menge** F“ meinen. Daher bevorzugen wir für **Komponenten** „von“ und für **Elemente** „aus“.

|   |   |
|---|---|
| Die Umkehrrelation von $\equiv$ . 52, , 82, siehe $\equiv$ & Komponente   |   |
| $\nsubseteq$ Eine <b>Komponentenrelation</b> : $(x \nsubseteq F) \equiv \sim(x \equiv F)$ [ <i>x ist keine Komponente aus F</i> ].<br>Die <b>Negation</b> von $\equiv$ . 52, , 82, siehe $\sim$ , $\equiv$ & Komponente   | $(x \nsubseteq F) \equiv \sim(x \equiv F)$  |
| $\nsubseteq$ Eine <b>Komponentenrelation</b> : $(F \nsubseteq x) \equiv \sim(x \equiv F)$ [ <i>F enthält x nicht als Komponente</i> ].<br>Die <b>Negation</b> der <b>Umkehrrelation</b> und gleichzeitig die <b>Umkehrrelation</b> der <b>Negation</b> von $\equiv$ . 52, , 82, siehe $\sim$ , $\equiv$ & Komponente  | $(F \nsubseteq x) \equiv \sim(x \equiv F)$  |
| <b>Folgenoperationen und -relationen</b> Im Folgenden seien $\vec{a}$ eine endliche und $\vec{b}$ , $\vec{c}$ und $\vec{d}$ beliebige Folgen. , siehe <b>Folgenoperation</b> , <b>Folgenrelation</b> & <b>Tupel</b>   |   |
| $\sqcup$ Eine <b>Folgenoperation</b> : $\{a_1, \dots, a_n\} \sqcup \{c_1, c_2, \dots\} \equiv \{a_1, \dots, a_n, c_1, c_2, \dots\}$ [ $\vec{a}$ <b>verkettet mit</b> $\vec{c}$ ]. , siehe $\equiv$ , <b>Folge</b> & <b>Verkettung</b>   | $\{a_1, \dots, a_n\} \sqcup$<br>$\{c_1, c_2, \dots\} \equiv$<br>$\{a_1, \dots, a_n, c_1, c_2, \dots\}$  |
| $\sqsubset$ Eine <b>Folgenoperation</b> : $(\vec{c} \sqsubset \vec{d}) \Leftrightarrow ((\vec{c} \sqsubseteq \vec{d}) \& (\vec{c} \neq \vec{d}))$ [ $\vec{c}$ ist eine <b>echte Teilfolge</b> von $\vec{d}$ ]. 52, , 67, siehe $\&$ , $\Leftrightarrow$ , $\neq$ , $\sqsubseteq$ & <b>echte Teilfolge</b>   | $(\vec{c} \sqsubset \vec{d}) \Leftrightarrow ((\vec{c} \sqsubseteq$<br>$\vec{d}) \& (\vec{c} \neq \vec{d}))$  |
| $\sqsubseteq$ Eine <b>Folgenrelation</b> : $(\vec{c} \sqsubseteq \vec{d}) \Leftrightarrow ((\exists \vec{a} : (\vec{a} \sqcup \vec{c}) \equiv \vec{d}) \parallel (\exists \vec{a}, \vec{b} : (\vec{a} \sqcup \vec{c} \sqcup \vec{b}) \equiv \vec{d}))$ [ $\vec{c}$ ist eine <b>Teilfolge</b> von $\vec{d}$ ] <sup>12</sup> . 52, , 67, siehe $\Leftrightarrow$ , $\equiv$ , $\exists$ , <b>Folge</b> & <b>Teilfolge</b> | $(\vec{c} \sqsubseteq \vec{d}) \Leftrightarrow ((\exists \vec{a} :$<br>$(\vec{a} \sqcup \vec{c}) \equiv \vec{d}) \parallel (\exists \vec{a}, \vec{b} :$<br>$(\vec{a} \sqcup \vec{c} \sqcup \vec{b}) \equiv \vec{d}))$ |
| $\supset$ Eine <b>Folgenrelation</b> : $(\vec{c} \supset \vec{d}) \Leftrightarrow (\vec{d} \sqsubset \vec{c})$ [ $\vec{c}$ ist eine <b>echte Oberfolge</b> von $\vec{d}$ ].<br>Die <b>Umkehrrelation</b> von $\sqsubset$ . 52, , siehe $\Leftrightarrow$ & <b>echte Oberfolge</b>   | $(\vec{c} \supset \vec{d}) \Leftrightarrow (\vec{d} \sqsubset \vec{c})$<br>$(\vec{c} \supset \vec{d}) \Leftrightarrow (\vec{d} \sqsubseteq \vec{c})$  |
| $\supseteq$ Eine <b>Folgenrelation</b> : $(\vec{c} \supseteq \vec{d}) \Leftrightarrow (\vec{d} \sqsubseteq \vec{c})$ [ $\vec{c}$ ist eine <b>Oberfolge</b> von $\vec{d}$ ].<br>Die <b>Umkehrrelation</b> von $\sqsubseteq$ . 52, , siehe $\Leftrightarrow$ & <b>Oberfolge</b>   | $(\vec{c} \supseteq \vec{d}) \Leftrightarrow (\vec{d} \sqsubseteq \vec{c})$<br>$(\vec{c} \supseteq \vec{d}) \Leftrightarrow (\vec{d} \sqsubset \vec{c})$  |
| $\nsubseteq$ Eine <b>Folgenrelation</b> : $(\vec{c} \nsubseteq \vec{d}) \Leftrightarrow \sim(\vec{c} \sqsubset \vec{d})$ [ $\vec{c}$ ist <b>keine echte Teilfolge</b> von $\vec{d}$ ].<br>Die <b>Negation</b> von $\sqsubset$ . 52, , siehe $\sim$ , $\Leftrightarrow$ & <b>echte Teilfolge</b>   | $(\vec{c} \nsubseteq \vec{d}) \Leftrightarrow \sim(\vec{c} \sqsubset \vec{d})$  |
| $\nsubseteq$ Eine <b>Folgenrelation</b> : $(\vec{c} \nsubseteq \vec{d}) \Leftrightarrow \sim(\vec{c} \sqsubseteq \vec{d})$ [ $\vec{c}$ ist <b>keine Teilfolge</b> von $\vec{d}$ ].<br>Die <b>Negation</b> von $\sqsubseteq$ . 52, , siehe $\sim$ , $\Leftrightarrow$ & <b>Teilfolge</b>   | $(\vec{c} \nsubseteq \vec{d}) \Leftrightarrow \sim(\vec{c} \sqsubseteq \vec{d})$  |
| $\nsubseteq$ Eine <b>Folgenrelation</b> : $(\vec{c} \nsubseteq \vec{d}) \Leftrightarrow \sim(\vec{d} \sqsubset \vec{c})$ [ $\vec{c}$ ist <b>keine echte Oberfolge</b> von $\vec{d}$ ].<br>Die <b>Negation</b> der <b>Umkehrrelation</b> und gleichzeitig die <b>Umkehrrelation</b> der <b>Negation</b> von $\sqsubset$ . 52, , siehe $\sim$ , $\Leftrightarrow$ & <b>echte Oberfolge</b>                                | $(\vec{c} \nsubseteq \vec{d}) \Leftrightarrow \sim(\vec{d} \sqsubset \vec{c})$  |
| $\nsubseteq$ Eine <b>Folgenrelation</b> : $(\vec{c} \nsubseteq \vec{d}) \Leftrightarrow \sim(\vec{d} \sqsubseteq \vec{c})$ [ $\vec{c}$ ist <b>keine Oberfolge</b> von $\vec{d}$ ].<br>Die <b>Negation</b> der <b>Umkehrrelation</b> und gleichzeitig die <b>Umkehrrelation</b> der <b>Negation</b> von $\sqsubseteq$ . 52, , siehe $\sim$ , $\Leftrightarrow$ & <b>Oberfolge</b>  | $(\vec{c} \nsubseteq \vec{d}) \Leftrightarrow \sim(\vec{d} \sqsubseteq \vec{c})$  |
| <b>Junktoren</b> <sup>13</sup> Im Folgenden seien A und B beliebige <b>logische Aussagen</b> . , siehe <b>Junktor</b>   |   |
| $\perp$ [ok] Ein 0-stelliger <b>Junktor</b> , d. h. eine <b>aussagenlogische Konstante</b> : $\text{Wert}(\perp) \equiv \text{falsch}$ [ <b>falsch</b> ]. 16, 41f, 43, 44, 52, , 94f, siehe <b>false</b> , <b>falsch</b> & <b>Wahrheitswert</b>   | $\text{Wert}(\perp) \equiv \text{falsch}$   |
| $\top$ [ok] Ein 0-stelliger <b>Junktor</b> , d. h. eine <b>aussagenlogische Konstante</b> : $\text{Wert}(\top) \equiv \text{wahr}$ [ <b>wahr</b> ]. 16, 41f, 43, 45, 52, , 94f, siehe <b>true</b> , <b>wahr</b> & <b>Wahrheitswert</b>  | $\text{Wert}(\top) \equiv \text{wahr}$  |
| $\neg$ Ein <b>unärer Junktor</b> : $\neg A$ [ <b>nicht A</b> ]. 19, 26, 34, 36, 38, 40, 41f, 43ff, 52, , 68, 83, 90, siehe $\sim$   | $\neg A$  |
| $\wedge$ Ein <b>binärer Junktor</b> : $A \wedge B$ [ <b>A und B</b> ] <sup>14</sup> . 20, 26, 33f, 40, 41f, 43ff, 52, , 68, 81, 87, 90, siehe $\&$ & $\uparrow$   | $A \wedge B$  |
| $\vee$ Ein <b>binärer Junktor</b> : $A \vee B$ [ <b>A oder B</b> ]. 20, 26, 41f, 43ff, 52, , 68, 87, 90, siehe $\parallel$ , $\downarrow$ & $\dot{\vee}$  | $A \vee B$  |

|  |  |                     |
|--|--|---------------------|
|  | → Ein <b>binärer Junktor</b> : $(A \rightarrow B) :\Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ [wenn $A$ <b>dann</b> $B$ ]. 25f, 28, 31, 34, 36, 40, 41f, 43, 44, 45, 52, 68, 83, 87, siehe $\Rightarrow$   | $(A \rightarrow B)$ |
| $(A \leftarrow B) :\Leftrightarrow (B \rightarrow A)$  | ← Ein <b>binärer Junktor</b> : $(A \leftarrow B) :\Leftrightarrow (B \rightarrow A)$ [ $A$ <b>wenn</b> $B$ ]. 26, 41f, 43, 44, 45, 52, 87, siehe $\Leftarrow$  |                     |
| $(A \leftrightarrow B) :\Leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$                        | ↔ Ein <b>binärer Junktor</b> : $(A \leftrightarrow B) :\Leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ [ $A$ genau <b>dann wenn</b> $B$ ]. 26, 41f, 43, 44, 52, 87, siehe $\Leftrightarrow$  |                     |
| $(A \uparrow B) :\Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$   | ↑ Ein <b>binärer Junktor</b> : $(A \uparrow B) :\Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$ [ <b>nicht</b> ( $A$ <b>und</b> $B$ )]. 26, 41f, 43, 44, 45, 52, siehe $\wedge$  |                     |
| $(A \downarrow B) :\Leftrightarrow \neg(A \vee B)$   | ↓ Ein <b>binärer Junktor</b> : $(A \downarrow B) :\Leftrightarrow \neg(A \vee B)$ [ <b>nicht</b> ( $A$ <b>oder</b> $B$ )]. <sup>15)</sup> 26, 41f, 43f, 45, 52, siehe $\vee$ & $\downarrow$  |                     |
| $(A \dot{\vee} B) :\Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A))$                               | $\dot{\vee}$ Ein <b>binärer Junktor</b> : $(A \dot{\vee} B) :\Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A))$ [ <b>entweder</b> $A$ <b>oder</b> $B$ ]. 26, 41f, 43, 45, 52, , siehe $\vee$ & $\downarrow$   |                     |
| $A = B$  | $=$ <b>Logische Gleichheit</b> : $A = B$ [ $A$ ist <b>gleich</b> $B$ ]. 52, 69, siehe $\equiv$   |                     |
| $A \neq B$   | $\neq$ <b>Logische Ungleichheit</b> : $A \neq B$ [ $A$ ist <b>ungleich</b> $B$ ]. 30, 52, , siehe $\neq$   |                     |
|  | <b>Quantoren</b> Im Folgenden seien $a, b$ und $x$ <b>metasprachliche</b> bzw. <b>logische Variablen</b> und $A(x)$ eine <b>Aussage</b> bzw. <b>Formel</b> mit der <b>freien Variablen</b> $x$ . , siehe <b>Aussage, Formel, Quantor, Variable, logische Variable &amp; metasprachliche Variable</b> |                     |
| $\forall x A(x)$   | $\forall$ Ein <b>metasprachlicher Quantor</b> : $\forall x A(x)$ [ <b>für alle</b> $x$ <b>gilt</b> $A(x)$ ]. 52, 73, siehe $\wedge$  |                     |
| $\exists x A(x)$   | $\exists$ Ein <b>metasprachlicher Quantor</b> : $\exists x A(x)$ [ <b>es gibt ein</b> $x$ <b>so dass</b> $A(x)$ ]. 52, 79, siehe $\vee$  |                     |
| $(\exists! x A(x)) :\Leftrightarrow ((\exists x A(x)) \wedge ((A(a) \wedge A(b)) \Rightarrow (a = b)))$      | $\exists!$ Ein <b>metasprachlicher Quantor</b> : $(\exists! x A(x)) :\Leftrightarrow ((\exists x A(x)) \wedge ((A(a) \wedge A(b)) \Rightarrow (a = b)))$ [ <b>es gibt genau ein</b> $x$ <b>so dass</b> $A(x)$ ]. 52, , siehe $\dot{\vee}$  |                     |
| $\bigwedge x A(x)$   | $\bigwedge$ Ein <b>logischer Quantor</b> : $\bigwedge x A(x)$ [ <b>für alle</b> $x$ <b>gilt</b> $A(x)$ ]. 52, 73, siehe $\forall$  |                     |
| $\bigvee x A(x)$   | $\bigvee$ Ein <b>logischer Quantor</b> : $\bigvee x A(x)$ [ <b>es gibt ein</b> $x$ <b>so dass</b> $A(x)$ ]. 52, 79, siehe $\exists$  |                     |
| $(\dot{\bigvee} x A(x)) :\Leftrightarrow ((\bigvee x A(x)) \wedge ((A(a) \wedge A(b)) \Rightarrow (a = b)))$ | $\dot{\bigvee}$ Ein <b>logischer Quantor</b> : $(\dot{\bigvee} x A(x)) :\Leftrightarrow ((\bigvee x A(x)) \wedge ((A(a) \wedge A(b)) \Rightarrow (a = b)))$ [ <b>es gibt genau ein</b> $x$ <b>so dass</b> $A(x)$ ]. 52, , siehe $\exists!$   |                     |
|  | <b>Schlussregeln</b>   |                     |
|  | $(\wedge B)$ Eine <b>Schlussregel</b> : Beseitigung von $\wedge$ . 34, 36, , siehe $\wedge$  |                     |
|  | $(\wedge E)$ Eine <b>Schlussregel</b> : Einführung von $\wedge$ . 34, 36, 40,  |                     |
|  | $(\vee B)$ Eine <b>Schlussregel</b> : Beseitigung von $\vee$ .   |                     |
|  | $(\vee E)$ Eine <b>Schlussregel</b> : Einführung von $\vee$ .  |                     |
|  | $(\rightarrow B)$ Eine <b>Schlussregel</b> : Beseitigung von $\rightarrow$ . 36,   |                     |
|  | $(\rightarrow E)$ Eine <b>Schlussregel</b> : Einführung von $\rightarrow$ . 36,  |                     |
|  | $(\neg 1)$ Eine <b>Schlussregel</b> : Einführung/Beseitigung von $\neg$ , Teil 1. 34, 36, 38, 40,  |                     |
|  | $(\neg 2)$ Eine <b>Schlussregel</b> : Einführung/Beseitigung von $\neg$ , Teil 2. 34, 36, 38,  |                     |
|  | $(\neg 3)$ Eine <b>Schlussregel</b> : Beweistechnik „ <b>Indirekter Beweis</b> “. 36, , siehe <b>Beweis</b>  |                     |
|  | <sup>12)</sup> Im letzteren Fall muss $\vec{c}$ eine endliche <b>Folge</b> sein.   |                     |
|  | <sup>13)</sup> In diesem Dokument <b>aussagenlogische Konstante, Relationen</b> und <b>Operationen</b> , d. h. <b>Objektkonstante, relationen</b> und <b>operationen</b> .   |                     |
|  | <sup>14)</sup> alternativ: <b>sowohl ... als auch ...</b>  |                     |
|  | <sup>15)</sup> alternativ: <b>weder ... noch ...</b>   |                     |

- (-4) Eine **Schlussregel**: **Reductio ad absurdum** (Indirekter Beweis). 36, , siehe Beweis
- (= B) Eine **Schlussregel**: Beseitigung von  $=$ . 35,
- (= E) Eine **Schlussregel**: Einführung von  $=$ . 35,
- (AR) Eine **Schlussregel**: Die **Anfangsregel**. 34, 36, 38, , 73
- (FS) Eine **Schlussregel**: Ein **formaler Satz**. 30,
- (MR) Eine **Schlussregel**: Die **Monotonieregel**. 34, 36, 38,
- (SR) Eine **Schlussregel**: Die **Schnittregel**. 36,
- (TR) Eine **Schlussregel**: Die **Abtrennungsregel**. 36,

**Text-Symbole** Die folgenden **Symbole** sind alphabetisch geordnet und auch im Index aufgeführt.  $\square$  dient nur zur Verdeutlichung, an welche Stelle die Indizes gehören.

- $\mathcal{A}$  [ok] Der **Bereich** der **Aussagen** in **Objektsprache**. 19, 52, , 74, 86
- $\mathcal{A}$  Das **Alphabet** der **aussagenlogischen Sprache**. 43, 44, , 69
- $\mathcal{A}_x$  Eine **Teilmenge** des **Alphabets**  $\mathcal{A}$  der **aussagenlogischen Sprache**. 43, 44,
- $\mathcal{B}$  Eine **Menge** von **Beweisschritten**. 32,
- $\vec{b}$  Ein **Tupel** von **Beweisschritten**. 32,
- $b$  Ein **Beweisschritt**. 32,
- $\mathcal{C}$  Eine **Menge** von **Schlussregeln**. 31, , 90
- $C$  Eine **Schlussregel**. 31,
- car Für eine **Relation**<sup>16)</sup>  $R = (G, A_1, \dots, A_n)$  ist  $\text{car}(R) \equiv A_1 \times \dots \times A_n$  und  $\text{car}_i(R) \equiv A_i$  für  $1 \leq i \leq n$ . 22, 52, , siehe **Trägermenge**
- val Der **Wert** einer **Formel**, nachdem die **Variablen** mit **Werten** belegt wurden. 23, 52, , 76, 88, siehe **Formel**, **Variable** & **Wert**
- $\square_e$  Eine **Operation** mittels eines Index:
- $$X_e \equiv \begin{cases} \{M \in X \mid |M| \in \mathbb{N}_0\} & , \text{ für eine Menge } X \text{ von Mengen} \\ \{R \in X \mid |R_g| \in \mathbb{N}_0\} & , \text{ für eine Menge } X \text{ von Relationen} \\ \{F \in X \mid \text{len}(F) \in \mathbb{N}_0\} & , \text{ für eine Menge } X \text{ von Folgen} \end{cases}$$
- , siehe **Menge**
- $\mathcal{E}$  Eine **Menge** von **Ersetzungen**. 31, , 78, siehe  $E$
- $E$  Eine **Ersetzung**. 31, , siehe  $\mathcal{E}$
- $\mathcal{F}$   $\mathcal{F}(M) \equiv \{F \mid F \text{ ist Folge über } M\}$ . 52, , siehe  $\mathcal{F}_e$  & **Menge**
- $\mathcal{F}_e$   $\mathcal{F}(M) \equiv \{F \in \mathcal{F}(M) \mid \text{len}(F) \in \mathbb{N}_0\}$ . 52, , siehe  $\mathcal{F}$ , **Folgenmenge** & **Menge**

<sup>16)</sup> **Funktionen** sind spezielle **Relationen**. Für eine **Funktion**  $f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B$  gilt demnach:  $\text{car}(f) \equiv A_1 \times \dots \times A_n \times B$ ;  $\text{car}_i(f) \equiv A_i$  für  $1 \leq i \leq n$ ;  $\text{car}_{n+1}(f) \equiv B$

|                        |   |
|------------------------|---|
| false                  | [ok] Der metasprachliche Wahrheitswert <i>falsch</i> als Symbol. 16, 23f, 52, , 94f, siehe true & $\perp$   |
| $\square_g$            | Eine Operation mittels eines Index: $X_g \equiv \text{graph}(X)$ für Funktionen und Relationen $X$ . , 72   |
| graph                  | Für eine Relation $R = (G, A_1, \dots, A_n)$ ist $\text{graph}(R) \equiv G$ .<br>Für eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist $\text{graph}(f) \equiv \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ . 22, 52, , siehe Graph & Menge                          |
| $\mathcal{J}$          | Die Menge der Junktorsymbole. 43, 44f, , 70, 90, siehe Junktor  |
| $\mathcal{J}_b$        | Die Menge der binären Junktoren. 43,  |
| $\mathcal{J}_c$        | Die Menge der aussagenlogischen Konstanten. 43, 44, , 83  |
| $\mathcal{J}_u$        | Die Menge der unären Junktoren. 43,   |
| $\mathcal{J}_x$        | Eine Teilmenge der Menge $\mathcal{J}$ der Junktorsymbole. 43, 44,  |
| $\mathcal{K}$          | Eine Menge von Konklusionen. 29f, 32, , 82, 88f   |
| $\vdash_{\mathcal{K}}$ | Eine Relation (aufgefasst als Menge) von Konklusionen. 31, 52, , 82   |
| $\mathbf{k}$           | Eine Konklusion. 30f, , 82, 89  |
| $\mathcal{L}$          | Eine Sprache. 21, 27–31, 52, , 65, 72, 80, siehe Formelmenge  |
| $\mathcal{L}^A$        | Eine Formelmenge: Die Menge der aussagenlogischen Formeln mit Klammerung. 43, 44f, , 70, 80   |
| $\mathcal{L}_x^A$      | Eine Formelmenge: Eine Teilmenge der Menge $\mathcal{L}^A$ der aussagenlogischen Formeln mit Klammerung. 43, 44f,   |
| $\mathcal{L}^{Ap}$     | Eine Formelmenge: Die Menge der aussagenlogischen Formeln in Polnischer Notation. 44, , 70  |
| $\mathcal{L}_x^{Ap}$   | Eine Formelmenge: Eine Teilmenge der Menge $\mathcal{L}^{Ap}$ der aussagenlogischen Formel in Polnischer Notation. 43, 44,  |
| len                    | $\text{len}(\vec{a}) \equiv$ Anzahl der Komponenten einer endlichen Folge d.h. eines Tupels $\vec{a}$ 22, 27, 52,   |
| $M^0$                  | $\{()\}$ , wobei $()$ das 0-Tupel ist. 27,  |
| $M^n$                  | Das kartesische Produkt $M \times \dots \times M$ aus $n$ Mengen $M$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ . 23f, 27, , siehe Tupel  |
| $\mathbb{N}$           | Die Menge der natürlichen Zahlen ohne 0. 4, 19, 22, 52,   |
| $\mathbb{N}_0$         | Die Menge der natürlichen Zahlen (mit 0). 19, 22, 27, 30, 32, 43, 52, , 87, 90, 92, 95  |
| $\emptyset$            | Die leere Menge, d. h. die einzige Menge ohne Elemente; auch mit $\{\}$ bezeichnet. 28ff, 32f, 35, 40, , 84   |
| $\square^P$            | Eine Operation mittels eines Index: Für eine Menge $L$ von Formeln und eine Formel $\alpha$ ist<br>$L^P \equiv \{\alpha^P \mid \alpha \in L\}$ . mit $\alpha^P \equiv (\alpha \text{ umgewandelt in Polnische Notation})$ . , siehe Menge |



|                        |  |
|------------------------|--|
| $\mathcal{P}$          | $\mathcal{P}(M) \equiv \{N \mid N \subseteq M\}$ , die Potenzmenge einer Menge $M$ . 27, 28–32, 52, , 65, 72, 82, 87ff, siehe $\mathcal{P}_e$ & Menge                                |
| $\mathcal{P}_e$        | $\mathcal{P}(M) \equiv \{N \in \mathcal{P}(M) \mid  N  \in \mathbb{N}_0\}$ . 27, 31, 52, , siehe Menge   |
| $\vdash_{\mathcal{P}}$ | Eine Relation (aufgefasst als Menge) von Prämissen. 52, , 88   |
| $\mathbf{p}$           | Eine Prämisse. 30f, , 88f  |
| $\mathcal{Q}$          | $\mathcal{Q} \equiv \{\mathbf{q}_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ , die Menge der aussagenlogischen Variablen. 43, 44, , 71, 90, 93, siehe Aussagenlogik & Menge                         |
| $\mathbf{q}$           | Eine aussagenlogische Variable. 43ff, , 71, siehe Aussagenlogik  |
| $\mathcal{R}$          | Für eine Menge $M$ ist RAWMtsRel RAWMtsDefEq die Menge der binären Relationen in $M$ . 27, 28–31, 52, , 65, 78, siehe $\mathcal{R}_e$ & Relation                                     |
| $\mathcal{R}_e$        | Für eine Menge $M$ ist $\mathcal{R}_e(M) \equiv \{R \in \mathcal{R}(M) \mid  R_e  \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge der endlichen, binären Relationen in $M$ . 27, 31, 52, , siehe Menge |
| $\vdash_{\mathcal{E}}$ | Eine Relation (aufgefasst als Menge) von Ergebnissen. 52,  |
| $\mathbf{e}$           | Ein Ergebnis. 31,  |
| ran                    | Für eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist $\text{ran}(f) \equiv \{f(a) \mid a \in A\}$ der Wertebereich von $f$ . 52, , siehe Menge  |
| set                    | $\text{set}(\vec{a}) \equiv \{a \mid a \equiv \vec{a}\}$ . 22, 27, 29ff, 52, , 82, siehe Folge, Komponentenmenge, Menge & Tupel  |
| src                    | Für eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist $\text{src}(f) \equiv \{a \in A \mid f(a) \text{ existiert}\}$ der Quellbereich von $f$ . 52, , 88, siehe Menge                          |
| $\text{stel}_f$        | $\text{stel}_f(f) \equiv n$ für $f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ . 23, 52, , siehe Funktion & Stelligkeit   |
| $\text{stel}_r$        | $\text{stel}_r(R) \equiv n$ für $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ . 22f, 52, , siehe Relation & Stelligkeit  |
| $\mathcal{T}$          | Eine Bereichsoperation: $\mathcal{T}(M)$ ist die Menge aller Tupel von $M$ . 27, 30f, 52, , 92, siehe Tupelmenge   |
| $\mathcal{T}$          | Ein Tupel von Transformationen. 32,  |
| $T$                    | Eine Transformation. 32,   |
| tar                    | Für eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist $\text{tar}(f) \equiv B$ der Zielbereich von $f$ . 23, 52,   |
| true                   | [ok] Der metasprachliche Wahrheitswert <i>wahr</i> als Symbol. 16, 23f, 30, 52, , 94f, siehe false & $\top$  |
| $\mathcal{U}$          | Das Diskursuniversum. 17ff, 52, , 74f, 77, 86  |
| $\mathcal{X}$          | Eine Menge von Axiomen. 31,  |
| $X$                    | Ein Axiom.   |

## Glossar

Die Einordnung von einem Substantiv mit Adjektiven erfolgt stets unter dem Substantiv. Ist das Substantiv und ggf. ein oder mehrere Adjektive schon vorher aufgelistet worden, werden diese Worte durch je ein „—“ ersetzt.

Mit Seitenzahlen **in dieser** Schriftart wird auf die Definition oder sonstige wichtige Stellen verwiesen.

Vielfach ist hier der erste Abschnitt<sup>17)</sup> aus dem entsprechenden [Wikipedia](#)-Artikel zitiert, manchmal gekürzt und immer ohne die originalen Fußnoten und ohne Links auf andere [Wikipedia](#)-Artikel. Letztere werden allerdings noch, wie im Original, in [blau](#) angegeben.

[default](#) | [A](#) | [B](#) | [D](#) | [E](#) | [F](#) | [G](#) | [I](#) | [J](#) | [K](#) | [L](#) | [M](#) | [N](#) | [O](#) | [P](#) | [Q](#) | [R](#) | [S](#) | [T](#) | [U](#) | [V](#) | [W](#) | [Z](#) | [...](#)

### default

$\equiv$  [ok] Die **Objektdefinition** – eine **binäre Metarelation**:  $(A \equiv B)$  [*A ist definitions-*  
*gemäß gleich B*]<sup>18)</sup>. [18](#), [22ff](#), [26f](#), [31–35](#), [37](#), [43ff](#), [52](#), , [82](#), [87f](#), *siehe*  $\Leftrightarrow$  &

### A

**Abbildung**    Synonym zu [Funktion](#).

**ableitbar**    [?] Wenn sich eine [Formel](#)  $\beta$  aus einer anderen [Formel](#)  $\alpha$  mittels [zulässiger Transformationen](#) ableiten lässt, heißt  $\beta$  **ableitbar** aus  $\alpha$ . Sprechweise:  $\alpha$  **ableitbar**<sup>19)</sup>  $\beta$ . Eine oder beide [Formeln](#)  $\alpha$  bzw.  $\beta$  dürfen dabei durch [Formelmengen](#) ersetzt werden. [28](#), [29](#), [33](#), , [76](#), *siehe* [Ableitungsrelation](#)

**Ableitung**    [?] [Wikipedia](#)[\[32\]](#) schreibt dazu:

Eine **Ableitung**, **Herleitung**, oder [Deduktion](#) ist in der [Logik](#) die Gewinnung von [Aussagen](#) aus anderen Aussagen. Dabei werden [Schlussregeln](#) auf [Prämissen](#) angewandt, um zu [Konklusionen](#) zu gelangen. Welche Schlussregeln dabei erlaubt sind, wird durch das verwendete [Kalkül](#) bestimmt.

Die Ableitung ist zusammen mit der [semantischen Konklusion](#) einer der zwei logischen Methoden, um auf die Konklusion zu kommen.

Eine Ableitung ist für [ASBA](#) eine [Aussage](#)  $A \vdash B$  bzw. allgemeiner  $A \vdash_R B$  mit  $A, B \subseteq \mathcal{L}$ , wobei  $\mathcal{L}$  eine [Sprache](#) ist. Dies entspricht einem [Element](#)  $(A, B)$  aus einer [Ableitungsrelation](#)  $\vdash$  bzw.  $\vdash_R$  (d. h.  $(A, B) \in R_g$ ). Die semantische Aussage ist die, dass die [Formeln](#) aus  $B$  aus den [Formeln](#) aus  $A$  abgeleitet werden können. [28](#), [29f](#), [31f](#), [36](#), [38](#), [40](#), [54](#), , [72](#), [78](#), [82](#), [88](#), *siehe* [Ableitungsmenge](#), [Ableitungsrelation](#), [Konklusion](#), [Logik](#), [Prämisse](#) & [Schlussregel](#)

**Ableitungsmenge**    [?] Eine [Menge](#) von [Ableitungen](#), letztlich nichts anderes als eine [Ableitungsrelation](#). [30](#), , [78](#), [82](#), [88](#)

**Ableitungsrelation**    [?] Eine [binäre Relation](#)  $\vdash$  aus  $\mathcal{P}(\mathcal{L})^2$ . Für  $R \in \mathcal{P}(\mathcal{L})^2$  auch mit  $\vdash_R$  bezeichnet. [26](#), [28](#), [52](#), , [65](#), [72](#), *siehe* [Ableitung](#)

**Abtrennungsregel**    [?] Eine [Schlussregel](#). [36](#), , [69](#), *siehe* [\(TR\)](#)

<sup>17)</sup> Der Teil zwischen Überschrift und Inhaltsverzeichnis.

<sup>18)</sup> alternativ: **dasselbe wie** oder **identisch zu**

<sup>19)</sup> synonym: [beweisbar](#)



- Äquivalenzrelation** [?] Eine **Äquivalenzrelation** ist eine [binäre Relation](#) auf einer [Menge](#)  $M$  mit folgenden Eigenschaften (dabei sei  $\sim$  die Äquivalenzrelation):
- |                    |   |   |
|--------------------|---|---|
| <b>reflexiv</b>    | : | $a \sim a$  |
| <b>transitiv</b>   | : | $((a \sim b) \& (b \sim c)) \Rightarrow (a \sim c)$ |
| <b>symmetrisch</b> | : | $(a \sim b) \Rightarrow (b \sim a)$                 |
- jeweils für alle [Elemente](#)  $a, b$  und  $c$  aus  $M$ . [21](#),
- Allquantor** [?] Man nennt den [Quantor](#)  $\forall$  bzw.  $\bigwedge$  auch **Allquantor**.
- Alphabet** [Beschreibung fehlt noch] [43](#), [69](#)
- Anfangsregel** [?] Die [Schlussregel](#) (AR) um anfangen zu können. Eine [Schlussregel](#). Die [Anfangsregel](#). [34](#), [69](#), [73](#)
- ASBA** [?] ist ein Akronym für „**A**xiome, **S**ätze, **B**eweise und **A**uswertungen“. Es bezeichnet das in diesem Dokument beschriebene Programmsystem, das zu eingegebenen [Axiomen](#), [Sätzen](#) und [Beweisen](#) letztere prüft, Auswertungen generiert und unter Zuhilfenahme gegebener [Ausgabeschemata](#) eine Ausgabe im  $\text{\LaTeX}$ -Format in mathematisch üblicher Schreibweise mit [Formeln](#) erstellt. [7](#), [8ff](#), [12–16](#), [25](#), [27](#), [29](#), [31f](#), [41](#), [47f](#), [54](#), [72ff](#), [79](#), [85](#), [96](#)
- atomar** [?] Das Attribut **atomar** kann auf [Aussagen](#), [Formeln](#) und [Symbole](#) angewendet werden. [Atomar](#) sind solche, die keine echten [Teilobjekte](#) gleicher [Objektart](#) enthalten. [16](#), [17](#), [21f](#), [44](#), [73](#), [80](#), [85](#), [91](#), [93](#), *siehe zerlegbar*
- Ausgabeschema** [!] Ein **Ausgabeschema** ist für [ASBA](#) eine Beschreibung, wie ein bestimmtes mathematisches [Objekt](#) ausgegeben werden soll. Dies kann z. B. ein Stück  $\text{\LaTeX}$ -Code mit entsprechenden Parametern sein. [1](#), [9](#), [13](#), [47](#), [49](#), [53](#), [73](#)
- Aussage** [ok] [Wikipedia](#)[\[33\]](#) schreibt dazu:
- Eine **Aussage** im Sinn der [aristotelischen Logik](#) ist ein sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist zu *fragen*, ob es [wahr](#) oder falsch ist (so genanntes Aristotelisches [Zweiwertigkeitsprinzip](#)). Es ist nicht erforderlich, *sagen* zu können, ob das Gebilde wahr oder falsch ist. Es genügt, dass die Frage nach Wahrheit („Zutreffen“) oder Falschheit („Nicht-Zutreffen“) sinnvoll ist, – was zum Beispiel bei Fragesätzen, Ausrufen und Wünschen nicht der Fall ist. Aussagen sind somit Sätze, die [Sachverhalte](#) beschreiben und denen man einen [Wahrheitswert](#) zuordnen kann.
- Dies gilt natürlich auch, wenn [metasprachliche Symbole](#) verwendet werden, wovon wir im Folgenden reichlich Gebrauch machen. Da man [Relationen](#) und [logischen Ausdrücken](#) ebenfalls einen [Wahrheitswert](#) zuordnen kann<sup>20)</sup>, können wir sie auch als Aussagen behandeln. Es handelt sich dann um [logische](#), im Gegensatz zu [metasprachlichen Aussagen](#). [13ff](#), [16](#), [17–20](#), [22](#), [30](#), [34](#), [37–42](#), [68f](#), [72–78](#), [83–87](#), [89ff](#), [95](#)
- , **atomare** [ok] Eine [Aussage](#) heißt **atomar**<sup>21)</sup>, wenn sie nicht [zerlegbar](#) ist, d. h. wenn sie keine [echte Teilaussage](#) enthält. [17](#),
- , **formale** [ok] Eine **formale Aussage** ist eine [Aussage](#) in [Objektsprache](#). [19](#), [74](#)
- , **logische** [ok] **Logische Aussagen** sind [logische Ausdrücke](#), wozu auch Ergebnisse von [Relationen](#) sowie Ergebnisse von [Funktionen](#) mit [Wertebereich](#) aus den [Wahrheitswerten](#) gehören können. [17](#), [67](#), [73](#)

<sup>20)</sup> Zumindest prinzipiell nach Ersetzung von [Variablen](#) durch konkrete Werte.

<sup>21)</sup> synonym: [unzerlegbar](#)

—, **metasprachliche** [ok] Eine **metasprachliche Aussage** ist eine **Aussage** in **Metasprache**. 17, , 64f, 73

—, **parametrisierte** [!] Eine **Aussage** heißt **parametrisiert**, wenn sie mindestens einen **Parameter** enthält. 17,

—, **zerlegbare** [ok] Eine **Aussage** heißt **zerlegbar**<sup>22)</sup> wenn sie mindestens eine **echte Teilaussage** enthält. 17,

**Aussagedefinition** [ok] Eine **Metadefinition**: Die formale Definition einer **Aussage**.  $\langle\langle A \Leftrightarrow B \rangle\rangle$  steht für „ $A$  ist **definitionsgemäß äquivalent zu**  $B$ “ für **Aussagen**  $A$  und  $B$ . Gewissermaßen ist  $A$  nur eine andere Schreibweise für  $B$ . 18, 26, , 65, 84, siehe **Objektdefinition**

**Aussagenbereich** [ok] Der **Aussagenbereich**  $\mathcal{A}$  ist der **Bereich** aller **formalen Aussagen**, d. h. der **Aussagen** in **Objektsprache**. Es kann  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$  gelten, muss es aber nicht. 19,

**Aussagenlogik** [?] **Wikipedia**[34] schreibt dazu:

Die **Aussagenlogik** ist ein Teilgebiet der **Logik**, das sich mit Aussagen und deren Verknüpfung durch **Junktoren** befasst, ausgehend von strukturlosen **Elementaraussagen** (Atomen), denen ein **Wahrheitswert** zugeordnet wird. In der *klassischen Aussagenlogik* wird jeder Aussage genau einer der zwei Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ zugeordnet. Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage lässt sich ohne zusätzliche Informationen aus den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen bestimmen.

16, 28, 39, 41, 43, 45, 52, , 87, siehe **Aussage**, **Junktor**, **Logik**, **Prädikatenlogik** & **Wahrheitswert**

**Auswertung** [ok] Eine **Auswertung** ist für **ASBA** eine statistische oder andere Auswertung, die bestimmten Elementen der Datei bzw. Datenbank zugeordnet sind. Z. B. können zu einem **Satz** alle für einen **Beweis** notwendigen **Axiome** angegeben werden. 1, 13, 48,

**Axiom** [ok] Ein **Axiom** ist eine **Aussage**, die nicht aus anderen Aussagen abgeleitet werden kann. Es können wie bei **Sätzen** **Prämissen** und **Konklusionen** vorhanden sein, aber keine **Beweise**. 1, 7, 8–12, 13, 14f, 20, 27, 28, 29f, 34f, 41, 44f, 47f, 53, , 71, 73f, 79f, siehe  $X$  &  $\mathcal{X}$

**Axiomensystem** [!] Eine **Menge** von **Axiomen**. 45,

## B

**Basisregel** [?] Eine **Schlussregel**, die nicht mehr auf andere zurückgeführt wird. Obwohl das auch auf die **Identitätsregeln** zutrifft, werden diese in diesem Dokument aber nicht dazu gezählt. 33–36, 38, 54, , 81, 90

**Baustein** [Beschreibung fehlt noch ] 14, 43,

**Begriff** [ok] **Wikipedia**[36] schreibt dazu:

<sup>22)</sup> alternativ: **zusammengesetzt**— wir unterscheiden allerdings die beiden **Begriffe**. Aus **zerlegbar** folgt **zusammengesetzt**, aber nicht immer umgekehrt.

Mit dem Ausdruck **Begriff** ([mittelhochdeutsch](#) und [frühneuhochdeutsch](#) *be-grif* oder *begrifunge*) ist allgemein der [Bedeutungsinhalt](#) einer [Bezeichnung](#) angesprochen. Die Abgrenzung zwischen Begriffen und rein gedanklichen (mentalen) Einheiten erfolgt jedoch oft unscharf: Teilweise wird ein *Begriff* als „mentale Informationseinheit“ beschrieben, (also genauso wie in der Kognitionswissenschaft das Konzept). Präziser ist die Abgrenzung des *Begriffes* als *Konzept*, *das sprachlich benannt ist*, oder geradezu als die *Kombination aus einer sprachlichen Bezeichnung und dem entsprechenden Konzept*.

[13](#), [15](#), [16ff](#), [20](#), [47](#), [51](#), [54](#), , [74](#), [79](#), [85](#), *siehe* [Bezeichnung](#)

**Beispielsymbol** [Beschreibung fehlt noch] , [64](#), *siehe* [Symbol](#)

**Benennung** [ok] [Wikipedia](#)[\[37\]](#) schreibt dazu:

Eine **Benennung** ist die [Bezeichnung](#) eines Gegenstandes durch ein [Wort](#) oder mehrere Wörter.[1] Die Benennung gilt in der Sprachwissenschaft und in der [Terminologielehre](#) als die sprachliche Form, mit der [Begriffe](#) ins Bewusstsein gerufen werden.[2] Eine Benennung ist insofern die Versprachlichung einer Vorstellung.[2] Der weiter gefasste Oberbegriff *Bezeichnung* beinhaltet demgegenüber, neben der *Benennung*, auch nichtsprachliches, wie Nummern, Notationen und Symbole.[3] Bei einer [fachsprachlichen](#) Benennung spricht man auch von einem [Fachausdruck](#) oder Terminus.[2] Benennungen kommen als Einwort- und als [Mehrwortbenennungen](#), auch Mehrworttermini genannt, vor.

[13](#), [15](#), , [64](#), [79](#), *siehe* [Bezeichnung](#) & [Symbol](#)

**Bereich** [ok] Ein **Bereich** ist eine Zusammenfassung von [Aussagen](#) und [Objekten](#). Für solche Zusammenfassungen brauchen wir nur wenige Eigenschaften, die explizit angegeben werden. Die in einem Bereich zusammengefassten [Aussagen](#) und [Objekte](#) bezeichnen wir wie üblich als seine [Elemente](#). [Klassen](#) und [Mengen](#) sind spezielle Bereiche.<sup>23)</sup> [18](#), [19](#), , [65](#), [69](#), [74f](#), [77f](#), [82](#), [85f](#), [91](#), *siehe* [Element](#), [Klasse](#), & [Menge](#)

**Bereichsoperation** [ok] Eine **Bereichsoperation** ist eine [Operation](#) auf [Bereichen](#). Hoier sind <es die [Operationen](#)  $\cup$ ,  $\cap$  und  $\times$ . [26](#), [52](#), , [66](#), [71](#), [76](#), [78](#), [93](#)

**Bereichsrelation** [ok] Eine **Bereichsrelationen** ist eine [Relation](#) zwischen [Bereichen](#). In diesem Dokument sind es die acht [Relationen](#)  $\subset$ ,  $\subseteq$ ,  $\supset$ ,  $\supseteq$ ,  $\not\subset$ ,  $\not\subseteq$ ,  $\not\supset$  und  $\not\supseteq$ . [19](#), [26](#), [52](#), , [66](#)

**beschränkt** [?] Eine [Schlussregel](#) heißt **beschränkt**, wenn sie nur endlich viele Prämissen und Konklusionen hat. [29](#), [30f](#), , [75](#)

**Beweis** [ok] [Wikipedia](#)[\[38\]](#) schreibt dazu:

Ein **Beweis** ist in der Mathematik die als fehlerfrei anerkannte Herleitung der Richtigkeit bzw. der Unrichtigkeit einer **Aussage** aus einer Menge von [Axiomen](#), die als wahr vorausgesetzt werden, und anderen Aussagen, die bereits bewiesen sind. Um den Beweis klar vom gültigen Schluss zu unterscheiden, spricht man auch vom **axiomatischen Beweis**.

Umfangreichere Beweise von mathematischen Sätzen werden in der Regel in mehrere kleine Teilbeweise aufgeteilt, siehe dazu [Satz](#) und [Hilfssatz](#).

<sup>23)</sup> In der Tat ist [U](#) nur eine [Klasse](#) und keine [Menge](#).

In der **Beweistheorie**, einem Teilgebiet der **mathematischen Logik**, werden Beweise formal als **Ableitungen** aufgefasst und selbst als mathematische Objekte betrachtet, um etwa die Beweisbarkeit oder Unbeweisbarkeit von Sätzen aus gegebenen Axiomen selbst zu beweisen.

Ein **Beweis** besteht aus einer **Folge** von **Beweisschritten**, die aus gegebenen **Prämissen** **Konklusionen** ableitet. **1, 7, 8–12, 13, 14ff, 25, 27ff, 31, 32, 36–39, 41, 44, 47ff, 53, , 73f, 78, 82, 87ff, siehe Ableitung, Aussage & Axiom**

**beweisbar**    Synonym zu **ableitbar**. **28, 33, , 65, 72**

**Beweisschritt**    Eine Vorschrift, wie aus vorgegebenen **Aussagen** (den **Prämissen**) weitere (die **Konklusionen**) folgen. **13, 15, 25, 32, 38, , 69, 76, siehe b, B &  $\vec{b}$**

**Beweisschrittfolge**    Eine Folge von **Beweisschritten**. **32, , 76**

**Beweisschrittmenge**    Eine **Menge** von **Beweisschritten**, insbesondere die **Menge** der Glieder einer **Beweisschrittfolge**. **32,**

**Bezeichnung**    [ok] **Wikipedia**[39] schreibt dazu:

Eine **Bezeichnung** ist die Repräsentation eines **Begriffs** mit sprachlichen oder anderen Mitteln. Erfolgt diese Repräsentation mittels Wörtern, handelt es sich um eine **Benennung**. Eine nichtsprachliche Bezeichnung kann durch ein **Symbol** erfolgen.

**9, 13, 15, 16, 20–23, 33, 51f, 54, , 79, 85, siehe Begriff, Benennung & Symbol**

**binär**    [?] Eine **Operation**, **Funktion** oder **Relation** heißt **binär**, wenn ihre **Stelligkeit** gleich 2 ist. **23, 24–29, 41f, 52, , 64f, 71ff, 85, 87, 93, siehe unär**

## D

**Darstellung**    [Beschreibung ergänzen ]**Wikipedia**[40] schreibt dazu:

Unter **Darstellung** (zur semantischen Wurzel *dar-* „öffentlich übergeben“, vergleiche Darbietung, **Darlehen**, darreichen) versteht man die Umsetzung von **Sachverhalten**, **Ereignissen** oder abstrakten Konzepten mittels **Zeichen**, performativer **Handlungen** oder **Modellen**. Historisch reicht die Darstellung von der **mündlichen Überlieferung** über das **Schauspiel** bis zur **Computergrafik** und schließt zahlreiche Vermittlungsmethoden zwischen **Text**, **Bild** und künstlerischer **Aufführung** ein.

Die **Darstellung** mathematischer **Objekte** geschieht auf mehreren Ebenen **7, 9, 11, 16, 29, 48, 54, , 65, 76, 89**

—, **interne**    [Beschreibung fehlt noch ] **14,**

—, **logische**    [Beschreibung fehlt noch ] **14,**

**Darstellungsweise**    [?] Die Art der **Darstellung** mathematischer **Objekte**. **13, , 79**

**Definitionsbereich**    [?] Für eine **Funktion**  $f : A \rightarrow B$  ist **dom**( $f$ )  $A$  ihr **Definitionsbereich** (domain). **23, 52, , 76, 80, 88, siehe dom, Quellbereich & Funktion**

**Differenz**    [Beschreibung ergänzen ]Eine **Bereichsoperation**:

**Diskursuniversum**    [?] **Wikipedia**[41] schreibt dazu:

Unter einem **Diskursuniversum** versteht man in der [Logik](#) und [Sprachphilosophie](#) die Gesamtheit der Gegenstände, auf die sich Aussagen wie „alle Gegenstände sind ...“ ([Allaussage](#)) oder „es gibt keine Gegenstände, die ... sind“ (negative [Existenzaussage](#)) beziehen. Solche Aussagen sind nur sinnvoll, wenn die Bedeutung von „Gegenstand“ auf einen bestimmten Bereich, das Diskursuniversum, eingeschränkt wird. Ausmaß und Art der Einschränkung hängen vom Inhalt und vom Zusammenhang der Aussagen ab. Es gibt daher nicht nur ein Diskursuniversum, sondern verschiedene Diskursuniversen.

Der englische Ausdruck **Universe of Discourse** wird auch in der deutschsprachigen Logik- und Informatikliteratur verwendet. Er geht auf [Augustus De Morgan](#) (1847) zurück und bezeichnet den Bereich der Gegenstände (im weitesten Sinn), über die überhaupt geredet werden soll.

Missverständnisse und Streit entstehen in der Logik wie im Alltag oft dadurch, dass Personen „aneinander vorbei“ von verschiedenen Dingen reden. Jemand behauptet z. B., dass es keine geflügelten Pferde gibt. Sein Widerpart weist dies mit dem Hinweis auf den [Pegasus](#) zurück. Beide bewegen sich gedanklich in verschiedenen Welten. Ihr Streit lässt sich schlichten, wenn sie sich auf ein gemeinsames Diskursuniversum einigen, d. h. aushandeln, wovon die Rede (der [Diskurs](#)) sein soll, ob nur von physisch existierenden Pferden oder auch von [Fabelwesen](#).

Auch beim Gebrauch negativer (komplementärer) [Begriffe](#) spielt das Diskursuniversum eine Rolle. Ausdrücke wie „Nichtschwimmer“, „Nichtfachmann“, „Nichtwähler“ können sinnvoll nur auf Personen angewandt werden. Die Nichtwähler bilden mit den Wählern zusammen das auf wahlberechtigte Personen eingeschränkte Diskursuniversum. Die Einschränkung geschieht beim Gebrauch solcher Begriffe automatisch. Wird die Automatik außer Betrieb gesetzt, indem man z. B. einen stillgelegten Schornstein als Nichtraucher bezeichnet, entsteht ein Wortspiel. Allgemein gilt für jeden Begriff: wird er mit dem zugehörigen negativen Begriff vereinigt (genauer: werden deren [Extensionen](#) vereinigt), so bilden beide zusammen das Diskursuniversum oder den Bereich der Anwendungsfälle des positiv bestimmten Komplementärbegriffs:

[eine Tabelle]

In der [Mengenlehre](#) entspricht dem Diskursuniversum die [Grundmenge](#), die Mengen entsprechen den Begriffen, die [Komplemente](#) von Mengen der Negation von Begriffen. In der [Prädikatenlogik](#) entspricht dem Diskursuniversum der Bereich der [Definitionsmenge](#), den die [Gegenstandsvariable](#) einer [quantifizierten](#) Aussage durchlaufen kann.

Das *Universe of Discourse* wird in der Logik zumeist abgekürzt mit *U*, in der Informatik auch mit *UoD*.

Das *U* ist in der Regel eine Teilmenge aller existierenden Objekte und insbesondere in der Prädikatenlogik der bei der Verwendung von [Quantoren](#) festgelegte oder vorausgesetzte Objektbereich.

Das **Diskursuniversum**  $\mathcal{U}$  ist der vorgegebene [Bereich](#) aller [Objekte](#), die in [Aussagen](#) einen [Parameter](#) ersetzen dürfen. **19**, **71**, siehe [Aussage](#), [Begriff](#) & [Logik](#)

**Dummy** [Beschreibung fehlt noch]

—, **dummy** [Beschreibung fehlt noch]

$\mathcal{U}$

**Durchschnitt** [Beschreibung ergänzen ]Eine **Bereichsoperation**:

## E

**echt** [!] Attribut für **Oberaussage**, **Oberfolge**, **Oberformel**, **Oberobjekt**, **Obermenge**, **Obersprache**, **Obersymbol**, **Teilaussage**, **Teilfolge**, **Teilformel**, **Teilobjekt**, **Teilmenge**, **Teilsprache** und **Teilsymbol**.

**Eigenschaft** [?] Ist  $x$  ein **Parameter** einer **Aussage**  $A$ , so ist die **Aussage** „ $x$  hat die **Eigenschaft**  $A$ “ gleichbedeutend damit, dass  $A$  gilt. Wir schreiben etwas unpräzise auch  $A(x)$ , besonders dann, wenn auch  $A(y)$  für  $y \neq x$  von Interesse ist. **18**, **78**, **82**

**Eigenschaft, interessierende** [?] Solche Eigenschaften von **Objekten**, die im aktuellen Zusammenhang von Interesse sind, z. B. einen bestimmten Wert zu haben, **Element** aus einer bestimmten **Menge** zu sein, ein bestimmtes **Objekt** zu bezeichnen, usw. **20**, **81**, **93**

**Element** [ok] **Wikipedia**[**42**] schreibt dazu:

Ein **Element** in der **Mathematik** ist immer im Rahmen der **Mengenlehre** oder **Klassenlogik** zu verstehen. Die grundlegende **Relation**, wenn  $x$  ein Element ist und  $M$  eine **Menge** oder **Klasse** ist, lautet:

„ $x$  ist Element von  $M$ “ oder mit Hilfe des **Elementzeichens** „ $x \in M$ “.

Die Mengendefinition von **Georg Cantor** beschreibt anschaulich, was unter einem Element im Zusammenhang mit einer Menge zu verstehen ist:

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen.“

Diese anschauliche Mengenauffassung der **naiven Mengenlehre** erwies sich als nicht widerspruchsfrei. Heute wird daher eine **axiomatische Mengenlehre** benutzt, meist die **Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre**, teilweise auch eine allgemeinere **Klassenlogik**.

In diesem Dokument sind **Elemente** stets **Aussagen** oder **Objekte** und wir schreiben immer „Element **aus**“ und lassen neben **Mengen** und **Klassen** auch **Bereiche** zu. **13**, **17**, **18**, **19**, **21f**, **27–32**, **43ff**, **65f**, **70**, **72f**, **75**, **78ff**, **82ff**, **86ff**, **90**, **92f**, **95**, siehe **Mengenlehre & Relation**

**Elementoperation** [Beschreibung fehlt noch ]

**Elementrelation** [ok] Eine **Elementrelation** ist eine **Relation** zwischen einem **Element** und einem **Bereich**. Hier sind es die vier **Relationen**  $\in$ ,  $\ni$ ,  $\notin$  und  $\nexists$ . **18**, **26**, **52**, **65**, siehe **Komponentenrelation**

**Ergebnis** [?] Eine **Ableitung**: Ein **Ergebnis** eines **Beweises**. **31**, **71**, **78**, siehe **e**,  $\mathcal{E}$  &  $\vdash_{\mathcal{E}}$

**Ergebnismenge** [?] Eine **Ableitungsmenge**: Die **Menge**  $\mathcal{E}$  der **Ergebnisse** eines **Beweises**.

**Ersetzung** [?] Eine **Funktion** zur **Transformation** einer **Formel** mittels **Ersetzung** in eine gleichwertige. Die **Ersetzung** heißt **zulässig**, wenn sie vorgegebene Regeln erfüllt. **18**, **26**, **31**, **33f**, **35**, **37**, **39**, **44**, **52**, **65**, **69**, **78**, **81**, **94**, **96**

**Ersetzungsmenge** [?] Eine **Menge** von **Ersetzungen**, meistens mit  $\mathcal{E}$  bezeichnet.



**Existenzquantor** [?] Man nennt den [Quantor](#)  $\exists$  bzw.  $\vee$  auch **Existenzquantor**.

## F

**Fachbegriff** [ok] [Wikipedia](#)[73] schreibt dazu:

Ein **Terminus** oder **Fachbegriff** ist eine [definierte Benennung](#) für einen [Begriff](#) innerhalb der [Fachsprache](#) eines [Fachgebietes](#). Synonyme dazu sind auch **Term** oder **Terminus technicus** (lateinisch *terminus technicus*; [Genus m.](#); [Pl. Termini technici](#), kurz *Termini*). *Terminus* kann allerdings neben der rein sprachlichen *Benennung* auch den Bedeutungsinhalt, den *Begriff* selbst, ansprechen.

Eine vergleichbare Bezeichnung ist **Fachwort**. Ein **Fachausdruck** ist ein [sprachlicher Ausdruck](#), der in einer Fachsprache verwendet wird und dort eine spezielle Bedeutung besitzt. *Fachausdruck* gilt gegenüber *Fachwort* als ein geeigneteres Ersatzwort für Terminus. Denn ein Terminus kann nicht nur in der Form einer Einwortbenennung, sondern auch als [Mehrwortbenennung](#) (auch *Mehrwortterminus*) vorliegen.

Die Menge aller Termini eines Fachgebietes (die Benennungen aller Begriffe) bildet die jeweilige fachspezifische [Terminologie](#) (den [Fachwortschatz](#)). Mit der Untersuchung und Aufstellung von Terminologien beschäftigt sich die [Terminologielehre](#). Wenn ein Fachwortschatz standardisiert oder normiert ist, spricht man auch von einem [Thesaurus](#) oder [kontrollierten Vokabular](#) und nennt die darin enthaltenen Termini [Deskriptoren](#).

Ein **Fachbegriff** ist für [ASBA](#) eine [Benennung](#) für einen [Begriff](#) aus einem [Fachgebiet](#). Insbesondere kann es auch ein spezielles [Symbol](#) sein. 7–10, [13](#), 47ff, [53](#), , [79](#), siehe [Begriff & Fachgebiet](#)

**Fachgebiet** [ok] [Wikipedia](#)[44] schreibt dazu:

**Fachgebiet** (auch **Fachbereich** oder **Fachrichtung** oder **Domäne**) ist das auf ein bestimmtes [Wissensgebiet](#) begrenzte [Wissen](#).

Ein **Fachgebiet** ist für [ASBA](#) ein Teilgebiet der Mathematik mit einer zugehörigen Basis aus [Axiomen](#), [Sätzen](#), [Fachbegriffen](#) und [Darstellungsweisen](#), z. B. [Logik](#) und [Mengenlehre](#).

Ein **Fachgebiet** kann bei [ASBA](#) sehr klein sein und im Extremfall kein einziges [Element](#) enthalten. *Umgebung* wäre vielleicht eine bessere [Bezeichnung](#), ist aber schon ein verbreiteter [Fachbegriff](#), so dass in diesem Dokument die [Bezeichnung](#) "Fachgebiet" verwendet wird. 7–10, [13](#), 47ff, [53](#), , [79](#)

**falsch** [ok] Ein [metasprachlicher Wahrheitswert](#) in Textform. [16](#), [23](#), [42](#), [52](#), , [70](#), 94f, siehe [wahr](#), [false](#) &  $\perp$

**Folge** [!] [Wikipedia](#)[43] schreibt dazu:

Als **Folge** oder **Sequenz** wird in der [Mathematik](#) eine Auflistung ([Familie](#)) von endlich oder unendlich vielen fortlaufend nummerierten Objekten (beispielsweise Zahlen) bezeichnet. Dasselbe Objekt kann in einer Folge auch mehrfach auftreten. Das Objekt mit der Nummer  $i$ , man sagt auch: mit dem Index  $i$ , wird  $i$ -tes Glied oder  $i$ -te Komponente der Folge genannt. Endliche wie unendliche Folgen finden sich in allen Bereichen der Mathematik. Mit unendlichen Folgen, deren Glieder Zahlen sind, beschäftigt sich vor allem die [Analysis](#).

Ist  $n$  die Anzahl der Glieder einer endlichen Folge, so spricht man von einer Folge der Länge  $n$ , einer  $n$ -gliedrigen Folge oder von einem  $n$ -Tupel. Die Folge ohne Glieder, deren Index-Bereich also leer ist, wird leere Folge, 0-gliedrige Folge oder 0-Tupel genannt.

13f, 22, 52, , 65–70, 76, 80, 82, 85, 91f, 95

—, **leere** [?] Eine **Folge** heißt **leer**, wenn ihre Länge 0 ist, d. h. wenn sie keine **Komponenten** besitzt. , siehe **len**, **Folge** & **Tupel**

**Folgenmenge** [Beschreibung fehlt noch ]

**Folgenoperation** [Beschreibung fehlt noch ] , 67

**Folgenrelation** [Beschreibung fehlt noch ] 52, , 67

**Folgerung** Synonym zu **Konklusion**. 29,

**Folgerungsmenge** Synonym zu **Konklusionsmenge**.

**Formationsregel** [Beschreibung fehlt noch ] 14,

**Formel** [?] Unter einer **Formel** verstehen wir stets eine mathematische Formel. Diese kann aus einem einzigen **Symbol** bestehen (**atomare** Formel), andererseits aber auch mehrdimensional sein, lässt sich dann aber mittels geeigneter Definitionen immer eindeutig als eine **Symbolfolge** schreiben. 1, 13ff, 17, 20ff, 25f, 28, 30–35, 41, 43, 44, , 68ff, 72f, 78, 80, 84f, 87, 90ff, 94ff

—, **allgemeingültige** [?] Eine **Formel** heißt **allgemeingültig**, wenn sie aus den **Axiomen** und **allgemeingültigen Schlussregeln** abgeleitet werden kann. 31,

—, **aussagenlogische** [?] Eine **Formel** heißt **aussagenlogisch**, wenn sie ein **Element** aus  $\mathcal{L}^A$  ist. 21, 43, 44, , 70

—, **praedikatenlogische** [?] Eine **Formel** heißt **prädikatenlogisch**, wenn sie ein **Element** aus  $\mathcal{L}^A$  ist.

**Formelmenge** [?] Eine **Menge** von **Formeln**, oft mit  $\mathcal{L}$  bezeichnet. Man nennt  $\mathcal{L}$  auch eine **Sprache** und ihre **Elemente Wörter**, insbesondere dann, wenn es eindeutige Regeln zur Konstruktion von  $\mathcal{L}$  gibt. Wir bevorzugen „**Formel**“ und „**Formelmengen**“. 14, 28, 44f, , 70, 72, 80, 90

**Funktion** [?] [Wikipedia\[45\]](#) schreibt dazu:

In der **Mathematik** ist eine **Funktion** (lateinisch *functio*) oder **Abbildung** eine Beziehung (**Relation**) zwischen zwei **Mengen**, die jedem Element der einen Menge (Funktionsargument, unabhängige Variable,  $x$ -Wert) genau ein Element der anderen Menge (Funktionswert, abhängige Variable,  $y$ -Wert) zuordnet. Der Funktionsbegriff wird in der Literatur unterschiedlich definiert, jedoch geht man generell von der Vorstellung aus, dass Funktionen **mathematischen Objekten** mathematische Objekte zuordnen, zum Beispiel jeder reellen Zahl deren Quadrat. Das Konzept der Funktion oder Abbildung nimmt in der modernen Mathematik eine zentrale Stellung ein; es enthält als Spezialfälle unter anderem **parametrische Kurven**, Skalar- und **Vektorfelder**, **Transformationen**, **Operationen**, **Operatoren** und vieles mehr.

Eine  $n$ -**stellige Funktion**  $f$  von einer **Menge**  $A = A_1 \times \dots \times A_n$ , dem **Definitionsbereich**, in eine **Menge**  $B$ , den **Zielbereich**, ist eine  $(n+1)$ -**stellige Relation**  $(G, A_1, \dots, A_n, B)$  derart, dass es für jedes  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  mit  $a_i \in A_i$  genau ein  $b \in B$  gibt mit  $(a_1, \dots, a_n, b) \in f$ . Dieses  $b$  wird auch mit  $\langle\langle f(a_1, \dots, a_n) \rangle\rangle$ ,  $\langle\langle fa_1 \dots a_n \rangle\rangle$ ,  $\langle\langle f(\vec{a}) \rangle\rangle$  oder  $\langle\langle f\vec{a} \rangle\rangle$  bezeichnet.



Schreibweise:  $\langle f : A \rightarrow B \rangle$  bzw.  $\langle f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B \rangle$  [23](#), [24](#), [31](#), [41](#), [52](#), , [64](#), [69–73](#), [76](#), [78](#), [81](#), [85](#), [87f](#), [90](#), [93](#), [95f](#), siehe [Abbildung](#), [Element](#), [Menge](#), [Objekt](#) & [Relation](#)

**Funktionssymbol** [?] Ein [Symbol](#) für eine [Funktion](#). , [85](#)

**Funktionswert** [?] einer [Funktion](#). [23](#),

## G

**Gleichheit** [?] Eine [Gleichheitsrelation](#): Zwei Objekte  $A$  und  $B$  sind **gleich** (dasselbe; identisch),  $A \equiv B$ , wenn sie in den [interessierenden Eigenschaften](#) für  $\equiv$  übereinstimmen. [20](#), [21](#), , [65](#), [68](#), [81](#)

**Gleichheitsrelation** [?] Eine mit [Gleichheit](#) verwandte [Relation](#):  $\equiv$  und  $\neq$ . [21](#), [26](#), , [81](#), [93](#)

**Gliederungszeichen** [Beschreibung fehlt noch ] , [85](#)

**Graph** [?] einer [Funktion](#) oder [Relation](#). [22](#), [52](#), , siehe [graph](#)

## I

**Identitätsregel** [?] Eigentlich eine [Basisregel](#) zur Identität. Da die [Identitätsregeln](#) nur zur Rechtfertigung der [Ersetzung](#) verwendet werden, werden sie in diesem Dokument nicht zu den [Basisregeln](#) gezählt. [34f](#), , [74](#), [81](#)

## J

**Junktor** [?] [Wikipedia](#)[\[50\]](#) schreibt dazu:

Ein **Junktor** (von lat. *iungere* „verknüpfen, verbinden“) ist eine [logische Verknüpfung](#) zwischen Aussagen innerhalb der [Aussagenlogik](#), also ein logischer [Operator](#). Junktoren werden auch Konnektive, Konnektoren, Satzoperatoren, Satzverknüpfen, Satzverknüpfungen, Aussagenverknüpfen, logische Bindewörter, Verknüpfungszeichen oder Funktoren genannt und als [logische Partikel](#) klassifiziert.

Sprachlich wird zwischen der jeweiligen Verknüpfung selbst (zum Beispiel der [Konjunktion](#)) und dem sie bezeichnenden Wort beziehungsweise Sprachzeichen (zum Beispiel dem Wort „und“ beziehungsweise dem Zeichen „ $\wedge$ “) oft nicht unterschieden.

Ein **Junktor** ist eine [aussagenlogische Operation](#) oder [-Relation](#). Da die Werte einer aussagenlogischen [Operation](#) [Wahrheitswerte](#) sind, kann man einen **Junktor** auch stets als [Relation](#) verstehen. [19f](#), [24ff](#), [33f](#), [41–45](#), [52](#), , [67](#), [81](#), siehe [Metajunktor](#)

—, **binärer** [Beschreibung fehlt noch ] [43](#), , [67f](#), [70](#)

—, **unärer** [Beschreibung fehlt noch ] [43](#), , [67](#), [70](#)

**Junktorsymbol** [?] Ein [Symbol](#) für einen **Junktor**. [41](#), [43](#), , [70](#)

## K

**Kalkuel** [Beschreibung ergänzen ] [Wikipedia](#)[\[52\]](#) schreibt dazu:

Als der oder das **Kalkül** (französisch *calcul* „Rechnung“; von **lateinisch** *calculus* „**Rechenstein**“, „**Spielstein**“) versteht man in den formalen Wissenschaften wie **Logik** und **Mathematik** ein System von Regeln, mit denen sich aus gegebenen Aussagen (**Axiomen**) weitere Aussagen ableiten lassen. Kalküle, auf eine Logik selbst angewandt, werden auch Logikkalküle genannt.

> > > **Beschreibung fehlt noch** < < < , siehe **Axiom** & **Logik**

**Klammerung** [Beschreibung fehlt noch] **43**, , **70**

**Klasse** [ok] **Wikipedia**[54] schreibt dazu:

Als **Klasse** gilt in der **Mathematik**, **Klassenlogik** und **Mengenlehre** eine Zusammenfassung beliebiger Objekte, definiert durch eine logische Eigenschaft, die alle Objekte der Klasse erfüllen. Vom Klassenbegriff ist der Mengenbegriff zu unterscheiden. Nicht alle Klassen sind automatisch auch Mengen, weil Mengen zusätzliche Bedingungen erfüllen müssen. Mengen sind aber stets Klassen und werden daher auch in der Praxis in Klassenschreibweise notiert.

Eine **Klasse** ist eine **Bereich**, deren **Elemente** genau die **Objekte** mit einer bestimmten **Eigenschaft** sind. Schreibweise:  $\{x \mid \text{Eigenschaft}(x)\}$  – Jede **Menge** ist auch eine Klasse und jede Klasse ein **Bereich**. **18**, , **75**, **78**, **84**, siehe **Menge** & **Mengenlehre**

**Klassenlogik** [Beschreibung ergänzen] **Wikipedia**[55] schreibt dazu:

Die **Klassenlogik** ist im weiteren Sinn eine **Logik**, deren Objekte als Klassen bezeichnet werden. Im engeren Sinn spricht man von einer Klassenlogik nur dann, wenn **Klassen** durch eine Eigenschaft ihrer Elemente beschrieben werden. Diese Klassenlogik ist daher eine Verallgemeinerung der **Mengenlehre**, die nur eine eingeschränkte Klassenbildung erlaubt.

, siehe **Klasse** & **Logik**

**Komponente** [?] Die **Komponenten** einer Folge  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)$  sind die  $a_i$ .  $a_i$  heißt die  $i$ -te **Komponente** von  $\vec{a}$ . , **65f**, **70**, **80**, **82**, siehe **Folge** & **Tupel**

**Komponentenmenge** [?]  $\text{set}(\vec{a}) \equiv \{a \mid a \in \vec{a}\}$  ist die **Komponentenmenge** einer Folge bzw. eines **Tupels**  $\vec{a}$ . , siehe **Menge**

**Komponentenrelation** [?] Eine **Komponentenrelation** ist eine Relation zwischen einer (möglichen) **Komponente** und einer Folge:  $\equiv$ ,  $\ni$ ,  $\in$  und  $\ni$  **52**, , **66f**, siehe **Elementrelation**

**Konklusion** [?] Eine **Ableitung**: Die **Konklusionen** einer **Schlussregel**  $\mathcal{P}$  bzw.  $\mathcal{P}$  sind die **Elemente** aus  $\mathcal{K}$  bzw.  $\vdash_{\mathcal{K}}$ . Die **Konklusionen** werden normalerweise mit  $k_i$  bezeichnet. **13f**, **25**, **29f**, **32**, **34**, **37ff**, , **70**, **74**, **76**, **80**, **82**, **89**, siehe **Schlussregel**

**Konklusionsmenge** [?] Eine **Ableitungsmenge**: Die **Menge**  $\mathcal{K}$  der **Konklusionen** einer **Schlussregel** bzw. eines **Beweises**. , **80**

**Konstante** [?] **Wikipedia**[56] schreibt dazu:

Allgemein ist eine **Konstante** (von **lateinisch** *constans* „feststehend“) ein Zeichen beziehungsweise ein Sprachausdruck mit einer „genau bestimmten[n]Bedeutung, die im Laufe der Überlegungen unverändert bleibt“[1]. Die Konstante ist damit ein Gegenbegriff zur **Variablen**.

, **83**, **87**, siehe **Symbol** & **Variable**

—, **aussagenlogische** [?] Eine **Konstante** heißt **aussagenlogisch**, wenn sie ein **Element** aus  $\mathcal{J}_c$  ist. 43, , 67f, 70

**Kontraposition** [?] Die allgemeingültige **Aussage**:  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ . 40, 54,

## L

**Logik** [!] [Wikipedia](#)[57] schreibt dazu:

Mit **Logik** (von **altgriechisch** [ . . . ], ‚denkende Kunst‘, ‚Vorgehensweise‘) oder auch **Folgerichtigkeit** wird im Allgemeinen das **vernünftige Schlussfolgern** und im Besonderen dessen Lehre – die **Schlussfolgerungslehre** oder auch **Denklehre** – bezeichnet. In der Logik wird die Struktur von **Argumenten** im Hinblick auf ihre **Gültigkeit** untersucht, unabhängig vom Inhalt der **Aussagen**. Bereits in diesem Sinne spricht man auch von „formaler“ Logik. Traditionell ist die Logik ein Teil der **Philosophie**. Ursprünglich hat sich die traditionelle Logik in Nachbarschaft zur **Rhetorik** entwickelt. Seit dem 20. Jahrhundert versteht man unter Logik überwiegend symbolische Logik, die auch als grundlegende **Strukturwissenschaft**, z. B. innerhalb der **Mathematik** und der **theoretischen Informatik**, behandelt wird.

Die moderne symbolische Logik verwendet statt der **natürlichen Sprache** eine **künstliche Sprache** (Ein Satz wie *Der Apfel ist rot* wird z. B. in der **Prädikatenlogik** als  $f(a)$  formalisiert, wobei  $a$  für *Der Apfel* und  $f$  für *ist rot* steht) und verwendet streng **definierte Schlussregeln**. Ein einfaches Beispiel für ein solches **formales System** ist die **Aussagenlogik** (dabei werden sogenannte **atomare Aussagen** durch Buchstaben ersetzt). Die symbolische Logik nennt man auch **mathematische Logik** oder formale Logik im engeren Sinn.

7, 13, 16, , 79, 87, 94, *siehe* **atomar**, **Aussage**, **Aussagenlogik**, **Prädikatenlogik** & **Schlussregel**

—, **mathematische** [!] [Wikipedia](#)[58] schreibt dazu:

Die **mathematische Logik**, auch **symbolische Logik**, (alternativer Sprachgebrauch auch *Logistik*), ist ein Teilgebiet der **Mathematik**, insbesondere als Methode der **Metamathematik** und eine Anwendung der modernen **formalen Logik**. Oft wird sie wiederum in die Teilgebiete **Modelltheorie**, **Beweistheorie**, **Mengenlehre** und **Rekursionstheorie** aufgeteilt. Forschung im Bereich der mathematischen Logik hat zum Studium der **Grundlagen der Mathematik** beigetragen und wurde auch durch dieses motiviert. Infolgedessen wurde sie auch unter dem Begriff *Metamathematik* bekannt.

Ein Aspekt der Untersuchungen der mathematischen Logik ist das Studium der Ausdrucksstärke von formalen Logiken und formalen **Beweissystemen**. Eine Möglichkeit, die **Komplexität** solcher Systeme zu messen, besteht darin, festzustellen, was damit bewiesen oder definiert werden kann.

Früher wurde die mathematische Logik auch *symbolische Logik* (als Gegensatz zur **philosophischen Logik**) genannt, wobei jener Name mittlerweile nur noch für gewisse Aspekte der **Beweistheorie** verwendet wird.

, *siehe* **Mengenlehre** & **Fachgebiet**

## M

**Menge** [!] [Wikipedia](#)[60] schreibt dazu:

Eine **Menge** ist ein Verbund, eine Zusammenfassung von einzelnen **Elementen**. Die *Menge* ist eines der wichtigsten und grundlegenden Konzepte der Mathematik, mit ihrer Betrachtung beschäftigt sich die **Mengenlehre**.

Bei der Beschreibung einer Menge geht es ausschließlich um die Frage, welche Elemente in ihr enthalten sind. Es wird nicht danach gefragt, ob ein Element mehrmals enthalten ist oder ob es eine Reihenfolge unter den Elementen gibt. Eine Menge muss kein Element enthalten – es gibt genau eine Menge ohne Elemente, die „**leere Menge**“. In der Mathematik sind die Elemente einer Menge häufig Zahlen, Punkte eines **Raumes** oder ihrerseits Mengen. Das Konzept ist jedoch auf beliebige Objekte anwendbar: z. B. in der **Statistik** auf Stichproben, in der Medizin auf Patientenakten, am Marktstand auf eine Tüte mit Früchten.

Ist die Reihenfolge der Elemente von Bedeutung, dann spricht man von einer endlichen oder unendlichen **Folge**, wenn sich die Folgenglieder mit den natürlichen Zahlen aufzählen lassen (das erste, das zweite, usw.). Endliche Folgen heißen auch **Tupel**. In einem **Tupel** oder einer Folge können Elemente auch mehrfach vorkommen. Ein Gebilde, das wie eine Menge Elemente enthält, wobei es zusätzlich auf die Anzahl der Exemplare jedes Elements ankommt, jedoch nicht auf die Reihenfolge, heißt **Multimenge**.

Eine **Menge** ist eine **Klasse** mit zusätzlichen Eigenschaften. 14, 18, 21–25, 27–32, 35, 43f, , 65f, 69–76, 78, 80, 82, 84, 86ff, 90ff, 95, siehe , **Element**, **Folge**, **leere Menge**, **Mengenlehre** & **Tupel**

—, **leere** [?]  $\emptyset$ , die **leere Menge**, ist die einzige **Menge** ohne **Elemente**. Sie wird auch mit  $\{\{\}\}$  bezeichnet. 28, 33, , 70

**Mengenlehre** [?] **Wikipedia**[61] schreibt dazu:

Die **Mengenlehre** ist ein grundlegendes **Teilgebiet der Mathematik**, das sich mit der Untersuchung von **Mengen**, also von Zusammenfassungen von **Objekten**, beschäftigt. Die gesamte Mathematik, wie sie heute üblicherweise gelehrt wird, ist in der Sprache der Mengenlehre formuliert und baut auf den **Axiomen der Mengenlehre** auf. Die meisten mathematischen Objekte, die in Teilbereichen wie **Algebra**, **Analysis**, **Geometrie**, **Stochastik** oder **Topologie** behandelt werden, um nur einige wenige zu nennen, lassen sich als Mengen definieren. Gemessen daran ist die Mengenlehre eine recht junge Wissenschaft; erst nach der Überwindung der **Grundlagenkrise der Mathematik** im frühen 20. Jahrhundert konnte die Mengenlehre ihren heutigen, zentralen und grundlegenden Platz in der Mathematik einnehmen.

7, 13, 42, 46, , 65, 79, siehe **Axiom**, **Fachgebiet**, **Menge** & **Objekt**

**Mengenoperation** [Beschreibung fehlt noch ]

**Mengenprodukt** Synonym zu **kartesisches Produkt**.

**Mengenrelation** [Beschreibung fehlt noch ]

**Metadefinition** [?] Eine **Metaoperation**: Die formale Definition einer **Aussage** (**Aussagedefinition**) bzw. eines **Objekts** (**Objektdefinition**). 18, 25, , 74, 87

**Metaformel** [?] Eine **Formel** der **formalen Metasprache**.

**Metajunktor** [Beschreibung fehlt noch ] , siehe **Junktor**

**Metaoperation** [?] Eine **Operation** der **Metasprache**: **&**, **||** oder **|**. 19, 25f, 29, 52, , 64f, 84, siehe **Objektoperation**

|                            |  |
|----------------------------|--|
| <b>Metarelation</b>        | [?] Eine <b>Relation</b> der <b>Metasprache</b> : $\Rightarrow$ , $\Leftarrow$ oder $\Leftrightarrow$ . 19, 52, , 64f, 72, siehe <b>Objektrelation</b>   |
| <b>Metasprache</b>         | [ok] Die <b>Sprache</b> , in der <b>Aussagen</b> über eine andere <b>Sprache</b> getroffen werden können. In diesem Dokument ist dies immer die normale Umgangssprache. Ihre <b>Syntax</b> ist gegeben, bzgl. der <b>Semantik</b> bemühen wir uns um exakte Definitionen der <b>Begriffe</b> und <b>Bezeichnungen</b> . 15, 16, 17, 52, , 74, 84–87, 90, 94, siehe <b>Objektsprache</b>                      |
| —, <b>formale</b>          | [ok] Die <b>Metasprache</b> , deren Ausdrucksmittel nur <b>atomare Aussagen</b> und definierte <b>Metasymbole</b> sind. In diesem Dokument ist ihre Syntax und Semantik passend für <b>ASBA</b> definiert, in der Regel parallel zur <b>Prädikatenlogik</b> . 16, 52, , 84f, 87, 90f, 94f  |
| <b>Metasymbol</b>          | [?] Ein <b>Symbol</b> der <b>formalen Metasprache</b> . 16, 52, , 85, siehe <b>Objektsymbol</b>  |
| <b>Metavariablen</b>       | [?] Eine <b>Variable</b> der <b>formalen Metasprache</b> .   |
| <b>Monotonieregel</b>      | [?] Eine <b>Schlussregel</b> . 33, 34, , 69, siehe (MR)  |
| <b>N</b>                   |  |
| <b>Negation</b>            | [?] Die <b>Negation</b> von einer <b>binären Relation</b> $(G, A, B)$ ist die <b>Relation</b> $(H, A, B)$ mit $H = (A \times B) \setminus G$ . Üblicherweise wird das zugehörige <b>Relationsymbol</b> mit einem schrägen oder vertikalen Strich durchgestrichen. Die Negation der <b>Umkehrrelation</b> einer <b>Relation</b> ist gleich der <b>Umkehrrelation</b> ihrer Negation. 18f, 24, 52, , 64–67, 93 |
| <b>Notation, Polnische</b> | [?] Bei der <b>Polnischen Notation</b> stehen die Argumente von <b>Relationen</b> und <b>Funktionen</b> stets rechts von den <b>Relations-</b> und <b>Funktionssymbolen</b> . Dadurch kann auf <b>Gliederungszeichen</b> wie Klammern und Kommata verzichtet werden. Noch einfacher für Computer ist die <b>umgekehrte Polnische Notation</b> , bei der die Argumente immer links stehen. 41, 43, , 70       |
| <b>O</b>                   |  |
| <b>Oberaussage</b>         | [ok] Eine <b>Aussage</b> $A$ ist genau dann eine <b>Oberaussage</b> einer <b>Aussage</b> $B$ , wenn $B$ eine <b>Teilaussage</b> von $A$ ist. , 78  |
| —, <b>echte</b>            | [ok] Eine <b>Aussage</b> $A$ ist genau dann eine <b>echte Oberaussage</b> einer <b>Aussage</b> $B$ , wenn $B$ eine <b>echte Teilaussage</b> von $A$ ist.   |
| <b>Oberbereich</b>         | [ok] Ein <b>Bereich</b> $A$ ist genau dann ein <b>Oberbereich</b> von einem <b>Bereich</b> $B$ , wenn $A \supseteq B$ ist. , siehe <b>Teilbereich</b>  |
| —, <b>echter</b>           | [ok] Ein <b>Bereich</b> $A$ ist genau dann ein <b>echter Oberbereich</b> von einem <b>Bereich</b> $B$ , wenn $A \supset B$ ist. , siehe <b>echter Teilbereich</b>  |
| <b>Oberfolge</b>           | [?] Eine <b>Folge</b> $A$ ist genau dann eine <b>Oberfolge</b> einer <b>Folge</b> $B$ , wenn $B$ eine <b>Teilfolge</b> von $A$ ist. , 78   |
| —, <b>echte</b>            | [?] Eine <b>Folge</b> $A$ ist genau dann eine <b>echte Oberfolge</b> einer <b>Folge</b> $B$ , wenn $B$ eine <b>echte Teilfolge</b> von $A$ ist.  |
| <b>Oberformel</b>          | [?] Eine <b>Formel</b> $A$ ist genau dann eine <b>Oberformel</b> einer <b>Formel</b> $B$ , wenn $B$ eine <b>Teilformel</b> von $A$ ist. , 78   |
| —, <b>echte</b>            | [?] Eine <b>Formel</b> $A$ ist genau dann eine <b>echte Oberformel</b> einer <b>Formel</b> $B$ , wenn $B$ eine <b>echte Teilformel</b> von $A$ ist.  |

- Obermenge** [ok] Eine **Menge**  $A$  ist genau dann eine **Obermenge** von einer **Menge**  $B$ , wenn  $A \supseteq B$  ist. **19**, **78**, *siehe* **Oberbereich** & **Teilmenge**
- , **echte** [ok] Eine **Menge**  $A$  ist genau dann eine **echte Obermenge** von einer **Menge**  $B$ , wenn  $A \supset B$  ist. **19**, *siehe* **echter Oberbereich** & **echte Teilmenge**
- Oberobjekt** [?] Eine **Objekt**  $A$  ist genau dann ein **Oberobjekt** eines **Objekts**  $B$ , wenn  $B$  ein **Teilobjekt** von  $A$  ist. **78**
- , **echtes** [?] Ein **Objekt**  $A$  ist genau dann ein **echtes Oberobjekt** eines **Objekts**  $B$ , wenn  $B$  ein **echtes Teilobjekt** von  $A$  ist.
- Obersprache** [?] Eine **Sprache**  $A$  ist genau dann eine **Obersprache** einer **Sprache**  $B$ , wenn  $B$  eine **Teilsprache** von  $A$  ist. **78**
- , **echte** [?] Eine **Sprache**  $A$  ist genau dann eine **echte Obersprache** einer **Sprache**  $B$ , wenn  $B$  eine **echte Teilsprache** von  $A$  ist.
- Obersymbol** [?] Eine **Symbol**  $A$  ist genau dann ein **Obersymbol** eines **Symbols**  $B$ , wenn  $B$  ein **Teilsymbol** von  $A$  ist. **78**
- , **echtes** [?] Eine **Symbol**  $A$  ist genau dann ein **echtes Obersymbol** eines **Symbols**  $B$ , wenn  $B$  ein **echtes Teilsymbol** von  $A$  ist.
- Objekt** [ok] **Wikipedia**[**59**] schreibt dazu:
- Als **mathematische Objekte** werden die **abstrakten Objekte** bezeichnet, die in den verschiedenen **Teilgebieten der Mathematik** beschrieben und untersucht werden. **Grundlegende** Beispiele sind **Zahlen**, **Mengen** und **geometrische Körper**, weiterführend sind beispielsweise **Graphen**, **Integrale** und **Kohomologien**. Die Fragen zur Existenz und zu der Natur von mathematischen Objekten sind zentral in der **Philosophie der Mathematik**. Die zeitgenössische Mathematik hingegen klammert diese Fragestellungen aus und beschäftigt sich **innerstrukturell** mit ihnen. Dies schließt Bereiche wie **Mengenlehre**, **Prädikatenlogik**, **Modelltheorie** und **Kategorientheorie** mit ein, in denen die (sonst übergeordneten) mathematischen Strukturen wie **Axiome**, **Schlussregeln** und **Beweise** erforscht werden, die damit selbst zu mathematischen Objekten werden. Die Ansichten darüber, was mathematische Objekte sind, haben sich im Lauf der **Geschichte der Mathematik** stark gewandelt.
- Ein **Objekt** ist in diesem Dokument immer ein **Element** aus  $\mathcal{U}$ . **13**, **16–22**, **51**, **64**, **73**, **75–78**, **82**, **84**, **86f**, **94**
- , **formales** [ok] Ein **formales Objekt** ist ein **Objekt**, das in **Aussagen** in **Objektsprache** einen **Parameter** ersetzen darf. Es ist notwendigerweise in **Objektsprache** geschrieben. **19**, **86**
- , **metasprachliches** [?] Ein **metasprachliches Objekt** ist ein **Objekt** in **Metasprache**. **65**
- Objektart** [Beschreibung fehlt noch ] **20**, **73**, **94**
- Objektbereich** [ok] Der **Objektbereich**  $\mathcal{O}$  ist der **Bereich** aller **formalen Objekte**, d. h. der **Objekte**, die in **Aussagen** in **Objektsprache** einen **Parameter** ersetzen dürfen. Diese Objekte sind notwendigerweise auch in **Objektsprache** geschrieben und offensichtlich ist  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ . **19**,



|                            |   |
|----------------------------|---|
| <b>Objektdefinition</b>    | [ok] Eine <b>Metadefinition</b> : Die formale Definition eines <b>Objekts</b> .<br>$\langle\langle A \equiv B \rangle\rangle$ steht für „ $A$ ist <b>definitionsgemäß gleich</b> $B$ “ für <b>Objekte</b> $A$ und $B$ . Gewissermaßen ist $A$ nur eine andere Schreibweise für $B$ . <a href="#">18</a> , <a href="#">26</a> , <a href="#">72</a> , <a href="#">84</a> , siehe <a href="#">Aussagedefinition</a>  |
| <b>Objektformel</b>        | [?] Eine <b>Formel</b> der <b>Objektsprache</b> .   |
| <b>Objektkonstante</b>     | [?] Eine <b>Konstante</b> der <b>Objektsprache</b> . <a href="#">68</a>   |
| <b>Objektoperation</b>     | [?] Eine <b>Operation</b> der <b>Objektsprache</b> : $\wedge$ , $\vee$ . <a href="#">68</a> , siehe <a href="#">Metaoperation</a>   |
| <b>Objektrelation</b>      | [?] Eine <b>Relation</b> der <b>Objektsprache</b> : $\rightarrow$ , $\leftarrow$ oder $\leftrightarrow$ . <a href="#">68</a> , siehe <a href="#">Metarelation</a>   |
| <b>Objektsprache</b>       | [ok] Die <b>Sprache</b> , über die mittels einer ( <b>formalen</b> ) <b>Metasprache</b> "geredet" wird. Unser <b>Objekt</b> , mit dem mathematische <b>Beweise</b> formuliert werden sollen, ist die <b>Logik</b> . Demnach sind die Ausdrucksmittel der <b>Objektsprache</b> die der <b>Logik</b> . Wir verwenden in diesem Dokument die <b>Prädikatenlogik</b> oder, als <b>echte Teilsprache</b> , die <b>Aussagenlogik</b> . <a href="#">15</a> , <a href="#">16</a> , <a href="#">19</a> , <a href="#">52</a> , <a href="#">69</a> , <a href="#">73f</a> , <a href="#">86f</a> , <a href="#">90f</a> , <a href="#">94</a>  |
| <b>Objektsymbol</b>        | [?] Ein <b>Symbol</b> der <b>Objektsprache</b> . <a href="#">16</a> , <a href="#">21</a> , <a href="#">52</a> , , siehe <a href="#">Metasymbol</a>  |
| <b>Operation</b>           | [?] Eine <b>Operation</b> ist eine — meistens <b>binäre</b> , d. h. zweiwertige — <b>Funktion</b> $M^n \rightarrow M$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ . Für eine <b>binäre</b> , d. h. $n = 2$ , Operation $\otimes : M \times M \rightarrow M$ schreibt man meistens $x \otimes y$ statt $\otimes(x, y)$ . Für $n = 0$ kann man die Operation mit einer <b>Konstanten</b> identifizieren. <a href="#">19f</a> , <a href="#">23–26</a> , <a href="#">41f</a> , <a href="#">52</a> , <a href="#">64</a> , <a href="#">69f</a> , <a href="#">75f</a> , <a href="#">81</a> , <a href="#">84</a> , <a href="#">87</a> , <a href="#">93</a> |
| —, <b>aussagenlogische</b> | [Beschreibung ergänzen ]Die <b>aussagenlogischen Operationen</b> sind ... <a href="#">24</a> , <a href="#">68</a> , <a href="#">81</a>  |
| <b>Operationssymbol</b>    | [?] Ein <b>Symbol</b> für eine <b>Operation</b> .   |
| <b>Ordnungsrelation</b>    | [?] Eine <b>Ordnungsrelation</b> ist ein <b>binäre Relation</b> auf einer <b>Menge</b> $M$ mit der folgenden Eigenschaft (dabei sei $\leq$ die Ordnungsrelation):<br>$\text{transitiv : } ((a \leq b) \ \& \ (b \leq c)) \Rightarrow (a \leq c)$ jeweils für alle <b>Elemente</b> $a, b$ und $c$ aus $M$ .  |
| <b>P</b>                   |   |
| <b>Paar, geordnetes</b>    | [Beschreibung fehlt noch ]  |
| <b>Parameter</b>           | [!] Die <b>Parameter</b> einer <b>Aussage</b> sind deren <b>freie Variablen</b> . <a href="#">17ff</a> , <a href="#">74</a> , <a href="#">77f</a> , <a href="#">86</a> , siehe <a href="#">Aussage</a> & <a href="#">Variable</a>   |
| <b>Potenzmenge</b>         | [?] Die <b>Potenzmenge</b> $\mathcal{P}(M)$ einer <b>Menge</b> $M$ ist die <b>Menge</b> ihrer <b>Teilmengen</b> . <a href="#">27</a> , <a href="#">71</a> , <a href="#">87</a>  |
| <b>Prädikat</b>            | [?] Ein Element der <b>Prädikatenlogik</b> . — Z. B. kann man eine Gruppe als ein <b>zweistelliges Prädikat</b> $\text{Gruppe}(G, +)$ definieren, in dem $G$ eine <b>Menge</b> und $+$ eine <b>Operation</b> , d. h. eine <b>binäre</b> ( <b>zweistellige</b> ) <b>Funktion</b> $+: G \times G \rightarrow G$ ist, so dass die Gruppenaxiome erfüllt sind. <a href="#">87</a> , <a href="#">90</a>  |
| <b>Prädikatenlogik</b>     | <a href="#">Wikipedia</a> <a href="#">[62]</a> schreibt dazu:   |

Die **Prädikatenlogiken** (auch **Quantorenlogiken**) bilden eine Familie **logischer** Systeme, die es erlauben, einen weiten und in der Praxis vieler Wissenschaften und deren Anwendungen wichtigen Bereich von Argumenten zu formalisieren und auf ihre Gültigkeit zu überprüfen. Auf Grund dieser Eigenschaft spielt die Prädikatenlogik eine große Rolle in der **Logik** sowie in **Mathematik**, **Informatik**, **Linguistik** und **Philosophie**.

16, 28, 39, 41, 46, 52, , 85, 87, siehe **Aussagenlogik** & **Logik**

**Prämisse** [?] Eine **Ableitung**: Die **Prämissen** einer **Schlussregel**  $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$  bzw.  $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$  sind die **Elemente** aus  $\mathcal{P}$  bzw.  $\vdash \mathcal{P}$ . Die **Prämissen** werden normalerweise mit  $\mathbf{p}_i$  bezeichnet. 13f, 25, 29f, 32, 34, 35, 37ff, , 71, 74, 76, 88f, 94, siehe **Schlussregel**

**Prämissenmenge** [?] Eine **Ableitungsmenge**: Die **Menge**  $\mathcal{P}$  der **Prämissen** einer **Schlussregel** bzw. eines **Beweises**.

**Produkt, kartesisches** [?] **Wikipedia**[53] schreibt dazu:

Das **kartesische Produkt** oder **Mengenprodukt** ist in der Mengenlehre eine grundlegende Konstruktion, aus gegebenen Mengen eine neue Menge zu erzeugen. [...] Das kartesische Produkt zweier Mengen ist die Menge aller geordneten Paare von Elementen der beiden Mengen, wobei die erste Komponente ein Element der ersten Menge und die zweite Komponente ein Element der zweiten Menge ist. Allgemeiner besteht das kartesische Produkt mehrerer Mengen aus der Menge aller Tupel von Elementen der Mengen, wobei die Reihenfolge der Mengen und damit der entsprechenden Elemente fest vorgegeben ist. Die Ergebnismenge des kartesischen Produkts wird auch **Produktmenge**, **Kreuzmenge** oder **Verbindungs Menge** genannt. [...]

, 70, 84

## Q

**Quantor** [Beschreibung ergänzen] **Wikipedia**[64] schreibt dazu:

Ein **Quantor** oder **Quantifikator**, die Re-Latinisierung des von **C. S. Peirce** eingeführten Ausdrucks „quantifier“, ist ein **Operator** der **Prädikatenlogik**. Neben den **Junktoren** sind die Quantoren Grundzeichen der Prädikatenlogik. Allen Quantoren gemeinsam ist, dass sie **Variablen binden**.

Die beiden gebräuchlichsten Quantoren sind der *Existenzquantor* (in natürlicher Sprache zum Beispiel als „mindestens ein“ ausgedrückt) und der *Allquantor* (in natürlicher Sprache zum Beispiel als „alle“ oder „jede/r/s“ ausgedrückt). Andere Arten von Quantoren sind *Anzahlquantoren* wie „ein“ oder „zwei“, die sich auf Existenz- beziehungsweise Allquantor zurückführen lassen, und Quantoren wie „manche“, „einige“ oder „viele“, die auf Grund ihrer Unbestimmtheit in der **klassischen Logik** nicht verwendet werden.

52, , 73, 79, 93, siehe **Allquantor**, **Existenzquantor**, **Junktor** & **Prädikatenlogik**

—, **logischer** [Beschreibung fehlt noch] , 68

—, **metasprachlicher** [Beschreibung fehlt noch] , 68

**Quellbereich** [?] Für die **Funktion**  $f : A \rightarrow B$  ist die **Menge**  $\text{src}(f) \equiv \{a \in A \mid f(a) \text{ existiert}\}$  ihr **Quellbereich**<sup>24)</sup> (source). 52, , 71, 88, siehe **Definitionsbereich** & **Menge**

<sup>24)</sup> Der **Quellbereich**  $\text{src}(f)$  unterscheidet sich nur bei **partiellen Funktionen** vom **Definitionsbereich**  $\text{dom}(f)$ , d.h. solchen **Funktionen**, für die  $f(a)$  nicht für alle  $a \in A$  definiert ist.



## R

**Relation** [?] [Wikipedia\[65\]](#) schreibt dazu:

Eine **Relation** ([lateinisch](#) *relatio* „Beziehung“, „Verhältnis“) ist allgemein eine Beziehung, die zwischen Dingen bestehen kann. Relationen im Sinne der [Mathematik](#) sind ausschließlich diejenigen Beziehungen, bei denen stets klar ist, ob sie bestehen oder nicht; Objekte können also nicht „bis zu einem gewissen Grade“ in einer Relation zueinander stehen. Damit ist eine einfache [mengentheoretische](#) Definition des Begriffs möglich: Eine Relation  $R$  ist eine Menge von  $n$ -[Tupeln](#). In der Relation  $R$  zueinander stehende Dinge bilden  $n$ -Tupel, die Element von  $R$  sind.

Wird nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben, versteht man unter einer Relation gemeinhin eine zweistellige oder binäre Relation. Bei einer solchen Beziehung bilden dann jeweils zwei Elemente  $a$  und  $b$  ein [geordnetes Paar](#)  $(a, b)$ . Stammen dabei  $a$  und  $b$  aus verschiedenen Grundmengen  $A$  und  $B$ , so heißt die Relation *heterogen* oder „Relation *zwischen* den Mengen  $A$  und  $B$ .“ Stimmen die Grundmengen überein ( $A = B$ ), dann heißt die Relation *homogen* oder „Relation *in* bzw. *auf* der Menge  $A$ .“

Wichtige Spezialfälle, zum Beispiel [Äquivalenzrelationen](#) und [Ordnungsrelationen](#), sind Relationen *auf* einer Menge.

Heute sehen manche Autoren den Begriff Relation nicht unbedingt als auf Mengen beschränkt an, sondern lassen jede aus geordneten Paaren bestehende [Klasse](#) als Relation gelten.

Eine  $n$ -[stellige Relation](#)  $R$  ist ein  $(1+n)$ -[Tupel](#)  $(G, A_1, \dots, A_n)$  mit  $G \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ . [17–20, 22, 24–28, 41, 52, , 64f, 69–73, 75f, 78, 80f, 85, 87, 89f, 92f, siehe Äquivalenzrelation, Begriff, Menge, Objekt & Ordnungsrelation](#)

—, **aussagenlogische** [Beschreibung ergänzen ]Die **aussagenlogischen Relationen** sind ... [24, , 68, 81](#)

**Relationssymbol** [?] Ein [Symbol](#) für eine [Relation](#). , [85, 93](#)

## S

**Satz** [ok] Ein **Satz** ist eine [Aussage](#), bestehend aus einer Anzahl von [Prämissen](#) und [Konklusionen](#) und einem [Beweis](#), der die [Konklusionen](#) aus den [Prämissen](#) ableitet. [1, 7–10, 12, 13, 14f, 25, 31, 33, 41, 47ff, 53, 73f, 79, 89](#)

—, **formaler** [?] Formale [Darstellung](#) eines mathematischen [Satzes](#). [29f, , 69, siehe \(FS\)](#)

**Schlussregel** [?] [Wikipedia\[68\]](#) schreibt dazu:

Eine **Schlussregel** (oder *Inferenzregel*) bezeichnet eine Transformationsregel (Umformungsregel) in einem [Kalkül](#) der [formalen Logik](#), d. h. eine [syntaktische](#) Regel, nach der es erlaubt ist, von bestehenden Ausdrücken einer formalen Sprache zu neuen Ausdrücken überzugehen. Dieser regelgeleitete Übergang stellt eine [Schlussfolgerung](#) dar.

Eine [Schlussregel](#)  $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$  entspricht der [Aussage](#):

Wenn alle [Prämissen](#)  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  zutreffen, dann auch alle [Konklusionen](#)  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$ .

Wenn diese **Aussage** zutrifft, kann die Schlussregel zur **zulässigen Transformation** von **Formeln** dienen. 26f, 29ff, 32–39, 48, , 64, 68f, 72–75, 82, 85, 88ff, 92, *siehe C, C & Kalkül*

—, **allgemeingültige** [?] Eine **Schlussregel** heißt **allgemeingültig**, wenn sie aus den **Basisregeln** und schon bekannten **allgemeingültigen Schlussregeln** abgeleitet werden kann. 32f, 37–40, 54, , 80, 90

**Schlussregelmenge** [?] Eine **Menge** von **Schlussregeln**, meistens mit **C** bezeichnet. , *siehe C*

**Schnittregel** [?] Eine **allgemeingültige Schlussregel**. 36, 37f, 54, , 69, *siehe (SR)*

**Semantik** [!] **Wikipedia**[31] schreibt dazu:

**Semantik** [...], auch **Bedeutungslehre**, nennt man die Theorie oder Wissenschaft von der Bedeutung der Zeichen. **Zeichen** können hierbei beliebige **Symbole** sein, insbesondere aber auch **Sätze**, Satzteile, **Wörter** oder **Wortteile**.

In der **formalen Metasprache** und der **Objektsprache** sind die Zeichen die **Symbole** und **Formeln**. 16, , 85

**Signatur** [?] **Wikipedia**[69] schreibt dazu:

In der **mathematischen Logik** besteht eine **Signatur** aus der **Menge** der **Symbole**, die in der betrachteten **Sprache** zu den üblichen, rein logischen Symbolen hinzukommt, und einer **Abbildung**, die jedem Symbol der Signatur eine **Stelligkeit** eindeutig zuordnet. Während die logischen Symbole wie  $\forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$  stets als „für alle“, „es gibt ein“, „und“, „oder“, „folgt“, „äquivalent zu“ bzw. „nicht“ interpretiert werden, können durch die semantische **Interpretation** der Symbole der Signatur verschiedene **Strukturen** (insbesondere Modelle von Aussagen der Logik) unterschieden werden. Die Signatur ist der spezifische Teil einer **elementaren Sprache**.

Beispielsweise lässt sich die gesamte **Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre** in der Sprache der **Prädikatenlogik erster Stufe** und dem einzigen Symbol  $\in$  (neben den rein logischen Symbolen) formulieren; in diesem Fall ist die Symbolmenge der Signatur gleich  $\{\in\}$ .

, 90, *siehe Abbildung, Logik, Prädikatenlogik, Sprache, Stelligkeit & Symbol*

—, **Boolesche** [?] Die **logische Signatur**  $\{\neg, \wedge, \vee\}$ . 44,

—, **logische** [?] Abweichend von der Definition von **Signatur** in **Wikipedia** ist eine **logische Signatur** eine **Teilmenge** von  $\mathcal{J}$ , ausreichend um damit und mit  $\mathcal{Q}$  und Klammerung alle anderen **Elemente** aus  $\mathcal{J}$  zu definieren. 44f, , 90

**Sprache** [?] — *Siehe Formelmenge*. 16, 21, 31, , 70, 72, 80, 85ff, 90, 95

—, **aussagenlogische** [Beschreibung fehlt noch ] 31, 43, , 69

**Sprachebene** [ok] Wir unterscheiden in diesem Dokument drei **Sprachebenen**: Die obere Ebene mit der **Metasprache**, die mittlere mit der **formalen Metasprache** und die untere mit der **Objektsprache**. Mit einer **Sprache** einer höheren Ebene kann man u. a. **Aussagen** über **Sprachen** mit niedrigerer Ebene treffen. 15, 16,

**n-stellig** [?] Eine **Funktion**, **Relation** oder ein **Prädikat** mit der **Stelligkeit**  $n \in \mathbb{N}_0$  nennt man **n-stellig**. , 67, 80, 87, 89, *siehe  $\text{stel}_f$  &  $\text{stel}_r$*

**Stelligkeit** [?] einer **Funktion**, **Relation** oder eines **Prädikats**. 22, 23, , 76, 90, 93, *siehe  $\text{stel}_f$  &  $\text{stel}_r$*

**Symbol** [?] Ein **einfaches Symbol** ist ein druckbares typographisches Zeichen, das als Einheit angesehen wird. Ein **zusammengesetztes Symbol** besteht aus mehreren einfachen Symbolen. Wird ein Symbol, das kann auch ein zusammengesetztes Symbol sein, stets als Einheit angesehen, nennen wir es **atomar**<sup>25)</sup>, andernfalls **zerlegbar**. Im Einzelfall muss für ein Symbol definiert werden, ob es zerlegt werden kann oder nicht. Ein *einfaches* Symbol ist offensichtlich immer **atomar**. 13, 15, 17f, 21f, 24, 41, 52, , 64, 69ff, 73, 79ff, 85ff, 89ff, 95, *siehe* **Beispielsymbol**, **Metasymbol** & **Objektsymbol**

—, **aussagenlogisches** [Beschreibung ergänzen ]Die **aussagenlogischen Symbole** sind ... 42, 54,

—, **metasprachliches** [Beschreibung fehlt noch ] 17, , 73

—, **zusammengesetztes** [Beschreibung fehlt noch ] 21,

**Symbolfolge** [?] Eine **Symbolfolge** ist eine **Folge** von **atomaren Symbolen**. 14, 18, 20ff, 28, , 80, 94, *siehe* **Zeichenkette**

**Syntax** [!] **Wikipedia**[31] schreibt dazu:

Unter **Syntax** [...] versteht man allgemein ein Regelsystem zur Kombination elementarer Zeichen zu zusammengesetzten Zeichen in natürlichen oder künstlichen Zeichensystemen. Die Zusammenfügungsregeln der Syntax stehen hierbei den Interpretationsregeln der **Semantik** gegenüber.

Wir nennen in der **formalen Metasprache** und der **Objektsprache** die elementaren Zeichen **Symbole** und die zusammengesetzten Zeichen **Formeln**. 9, 16, 47, , 85, *siehe* **Semantik** & **Sprache**

## T

**Teilaussage** [ok] Eine **Aussage** *A* heißt eine **Teilaussage**<sup>26)</sup> von einer **Aussage** *B*, wenn sie Teil von *B* ist und man sie ohne Bedeutungsänderung von *B* dort klammern könnte. 17, , 78, 85, 91, 93

—, **echte** [ok] Eine **Teilaussage** *A* einer **Aussage** *B* heißt **echte Teilaussage** von *B*, wenn *A* verschieden von *B* ist. 17, , 73f, 85, 95

**Teilbereich** [ok] Ein **Bereich** *A* ist genau dann ein **Teilbereich** von einem **Bereich** *B*, wenn  $A \subseteq B$  ist. 18, , *siehe* **Oberbereich**

—, **echter** [ok] Ein **Bereich** *A* ist genau dann ein **echter Teilbereich** von einem **Bereich** *B*, wenn  $A \subset B$  ist. 18, , *siehe* **echter Oberbereich**

**Teilfolge** [Beschreibung fehlt noch ] , 78, 85

—, **echte** [Beschreibung fehlt noch ] , 85, 95

**Teilformel** [Beschreibung fehlt noch ] , 78, 85, 93

—, **echte** [Beschreibung fehlt noch ] , 85, 95

**Teilmenge** [ok] Eine **Menge** *A* ist ist genau dann eine **Teilmenge** von einer **Menge** *B*, wenn  $A \subseteq B$  ist. 22f, 27f, 32, 43f, , 69f, 78, 87, 90, 93, *siehe* **Obermenge** & **Teilbereich**

—, **echte** [ok] Eine **Menge** *A* ist ist genau dann eine **echte Teilmenge** von einer **Menge** *B*, wenn  $A \subset B$  ist. , *siehe* **echte Obermenge** & **echter Teilbereich**

**Teilobjekt** [Beschreibung fehlt noch ] , 73, 78, 86, 93

<sup>25)</sup> alternativ: **unzerlegbar**

<sup>26)</sup> synonym: **Unteraussage**

- , **echtes** [Beschreibung fehlt noch ] , 86
- Teilsprache** [Beschreibung fehlt noch ] , 78, 86
- , **echte** [Beschreibung fehlt noch ] 16, , 86f
- Teilsymbol** [Beschreibung fehlt noch ] , 78, 86, 93
- , **echtes** [Beschreibung fehlt noch ] , 86, 95
- Trägermenge** [?] einer **Relation**. 22, 52, , *siehe* **car**
- Transformation** [?] Eine Umformung oder Erzeugung einer **Formel** aus einer vorgegebenen **Menge** von **Formeln**, d. h. die Anwendung einer **Schlussregel**. 14, 32, 35, , 71f, 78, 90, 92, 96, *siehe* **T**, **T** & **zulässige Transformation**
- , **zulässige** [?] Eine **Transformation** heißt **zulässig**, wenn sie **Element** aus einer vorgegebenen **Menge** von **Transformationen** oder eine daraus zulässigerweise abgeleitete **Transformation** ist. 30, 33, 34,
- Transformationsfolge** [?] Eine Folge von **Transformationen**. 32, , *siehe* **T**, **T** & **Transformation**
- Transformationsregel** [Beschreibung fehlt noch ] 14,
- Tupel** [?] **Wikipedia**[74] schreibt dazu:
- Tupel** (abgetrennt von **mittellat.** *quintuplus* ‚fünffach‘, *septuplus* ‚siebenfach‘, *centuplus* ‚hundertfach‘ etc.) sind in der **Mathematik** neben **Mengen** eine wichtige Art und Weise, **mathematische Objekte** zusammenzufassen. Ein **Tupel** besteht aus einer **Liste** endlich vieler, nicht notwendigerweise voneinander verschiedener Objekte. Dabei spielt, im Gegensatz zu **Mengen**, die Reihenfolge der Objekte eine Rolle. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, **Tupel** formal als **Mengen** darzustellen. **Tupel** finden in vielen Bereichen der **Mathematik** Verwendung, zum Beispiel als **Koordinaten** von Punkten oder als **Vektoren** in mehrdimensionalen **Vektorräumen**.
- Von **Tupeln** unabhängig von ihrer Länge ist selten die Rede. Vielmehr verwendet man das Wort **n-Tupel** und die im nächsten Abschnitt genannten Spezialfälle davon dann, wenn sich aus dem Zusammenhang die Länge als feste Zahl oder als benannte Konstante wie **n** ergibt. Betrachtet man dagegen viele endliche Folgen unterschiedlicher Längen von Elementen einer Grundmenge, spricht man von endlichen Folgen oder definiert einen neuen Begriff, der oft mit „Kette“ zusammengesetzt ist, z. B. **Zeichenkette**, **Additionskette**.
- Ein **n-Tupel**<sup>27)</sup>  $\vec{a}$  ist eine endliche **Folge**<sup>28)</sup>  $(a_1, \dots, a_n)$  von seinen **Komponenten**  $a_i$ . Sind alle Komponenten **Elemente** aus derselben **Menge** **M**, so heißt  $\vec{a}$  ein **n-Tupel auf M**. 22f, 27, 30f, 52, , 69ff, 82, 89, 92, *siehe* **Folge**, **Komponente**, **Menge**, **Objekt**, **Symbolfolge** & **Zeichenkette**
- Tupelmenge** [?] Die **Tupelmenge**  $\mathcal{T}(M)$  einer **Menge** **M** ist die **Menge** aller **n-Tupel** aus  $M^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . 27, , 92

## U

<sup>27)</sup> alternativ: **Vektor**

<sup>28)</sup> alternativ: **Sequenz**

**Umkehrrelation** [?] Die **Umkehrrelation**<sup>29)</sup> von einer **binären Relation**  $(G, A, B)$  ist die **Relation**  $(H, B, A)$  mit  $H = \{(b, a) \mid (a, b) \in G\}$ . Üblicherweise wird das zugehörige **Relationssymbol** gespiegelt. Die Umkehrrelation der **Negation** einer **Relation** ist gleich der **Negation** ihrer Umkehrrelation. 18f, 23f, 52, , 64–67, 85, siehe **Menge**

**unär** [?] Eine **Operation**, **Funktion** oder **Relation** heißt **unär**, wenn ihre **Stelligkeit** gleich 1 ist. 24f, 41f, 52, , 64, siehe **binär**

**Ungleichheit** [?] Eine **Gleichheitsrelation**: Zwei Objekte  $A$  und  $B$  sind **nicht gleich**<sup>30)</sup>  $A \neq B$ , wenn sie in mindestens einer **interessierenden Eigenschaft** für  $\equiv$  nicht übereinstimmen. 18, 20, , 65, 68

**Unteraussage** Synonym zu **Teilaussage**. 17, , 91

**Unterformel** Synonym zu **Teilformel**.

**Untermenge** Synonym zu **Teilmenge**.

**Unterobjekt** Synonym zu **Teilobjekt**.

**Untersymbol** Synonym zu **Teilsymbol**.

**unzerlegbar** Synonym zu **atomar**. 17, 21, , 73

## V

**Variable** [!] **Wikipedia**[75] schreibt dazu:

Eine **Variable** ist ein Name für eine Leerstelle in einem logischen oder mathematischen Ausdruck.[1]Der Begriff leitet sich vom lateinischen **Adjektiv** *variabilis* (veränderlich) ab. Gleichwertig werden auch die Begriffe *Platzhalter* oder *Veränderliche* benutzt. Als „Variable“ dienten früher Wörter oder Symbole, heute verwendet man zur **mathematischen Notation** in der Regel Buchstaben als Zeichen. Wird anstelle der Variablen ein konkretes Objekt eingesetzt, so ist darauf zu achten, dass überall dort, wo die Variable auftritt, auch dasselbe Objekt benutzt wird.

17, , 69, 73, 85, 93, siehe **Konstante**

—, **aussagenlogische** [?] Die **aussagenlogischen Variablen** sind die **Elemente** aus **Q**. 43, , 71, 93

—, **freie** [!] Eine **Variable** heißt **frei**, wenn sie nicht **gebunden** ist. 17, , 68, 87, 93

—, **gebundene** [!] Eine **Variable** heißt durch einen bestimmten **Quantor** **gebunden**, wenn sie die zum **Quantor** gehörige **Variable** ist und im zugehörigen **Ausdruck** auch **frei** vorkommt. 17, , 93

—, **logische** [?] Die **logischen Variablen** entsprechen den **aussagenlogischen**. , 68

—, **metasprachliche** [Beschreibung ergänzen ]Die **metasprachlichen Variablen** sind die **Elemente** aus ... , 68

**Vereinigung** [Beschreibung ergänzen ]Eine **Bereichsoperation**:  $> > >$  **Beschreibung fehlt noch**  $< < <$

<sup>29)</sup> alternativ: **konverse Relation**, **Konverse** oder **inverse Relation**

<sup>30)</sup> alternativ: **nicht dasselbe** oder **nicht identisch**

**vergleichbar** [?] Zwei **Objekte**  $A$  und  $B$  sind **vergleichbar**, wenn beide von derselben **Objektart** sind, d. h. wenn beide z. B. jeweils Mengen, **Symbolfolgen**, Zahlen, usw. sind. Dabei muss bei **Formeln** zwischen der **Formel** an sich und ihrem *Wert* oder *Ergebnis* unterschieden werden. 20, 34, , 94

**Verkettung** [Beschreibung fehlt noch ]

**Vertauschung** [?] Die **Vertauschung** von zwei unabhängigen Teil-**Formeln** ( $\alpha$  und  $\beta$ ) in einer anderen **Formel** ( $\gamma$ )  
— Formal:  $\gamma(\alpha \leftrightarrow \beta)$ . Die Vertauschung ist eine spezielle Form der **Ersetzung**. 35, 45, 52, , 65

**Voraussetzung** Synonym zu **Prämisse**.

## W

**wahr** [ok] Ein **metasprachlicher Wahrheitswert** in Textform. 16, 23, 42, 52, , 71, 94f, siehe *falsch*, *true* &  $\top$

**Wahrheitswert** [ok] **Wikipedia**[76] schreibt dazu:

Ein **Wahrheitswert** ist in **Logik** und **Mathematik** ein *logischer Wert*, den eine Aussage in Bezug auf Wahrheit annehmen kann.

In der zweiwertigen **klassischen Logik** kann eine Aussage nur entweder *wahr* oder *falsch* sein, die Menge der Wahrheitswerte  $\{W, F\}$  hat so zwei Elemente. In **mehrwertigen Logiken** enthält die **Wahrheitswertemenge** mehr als zwei Elemente, z. B. in einer **dreiwertigen Logik** oder einer **Fuzzy-Logik**, die damit zu den **nichtklassischen** zählen. Hier wird dann auch neben Wahrheitswerten von *Quasiwahrheitswerten*, *Pseudowahrheitswerten* oder *Geltungswerten* gesprochen.

Die Abbildung der Menge von Aussagen einer (meist formalen) Sprache auf die Wahrheitswertemenge wird **Wahrheitswertzuordnung** genannt und ist eine aussagenlogisch spezifische **Bewertungsfunktion**. In der klassischen Logik kann auch explizit die Klasse aller wahren Aussagen beziehungsweise die Klasse aller falschen Aussagen definiert werden. Die Abbildung von Wahrheitswerten der (**atomaren**) Teilaussagen einer zusammengesetzten Aussage auf die Wahrheitswertemenge heißt **Wahrheitswertefunktion** oder **Wahrheitsfunktion**. Die Wertetabelle dieser **Funktion** im mathematischen Sinn wird auch als **Wahrheitstafel** bezeichnet und häufig dazu verwendet, die Bedeutung wahrheitsfunktionaler **Junktoren** anzugeben.

Wir verwenden nur die beiden **Wahrheitswerte** der zweiwertigen klassischen **Logik**, die wir (in der **Metasprache**) mit  $\langle \textit{wahr} \rangle$  und  $\langle \textit{falsch} \rangle$  bezeichnen. In der **formalen Metasprache** hingegen verwenden wir  $\langle \textit{true} \rangle$  und  $\langle \textit{false} \rangle$  und in der **Objektsprache**  $\langle \top \rangle$  und  $\langle \perp \rangle$ . In der Literatur findet man auch einfach  $\langle 1 \rangle$  und  $\langle 0 \rangle$ .

Ist statt Wahrheit nur Beweisbarkeit von Interesse, so gelangt man zum Intuitionismus, in dem der Satz vom ausgeschlossenen Dritten<sup>31)</sup> nicht gilt.

**Wikipedia**[49] Kapitel 1 schreibt dazu:

Die Wahrheit eines mathematischen Satzes wird im Intuitionismus bezogen auf die Möglichkeit, einen entsprechenden Beweis zu formulieren. Wahrheit entsteht also erst durch die Verifizierung. Wahre Sätze oder von ihnen beschriebene Objekte haben keine Existenz unabhängig von tatsächlichen

<sup>31)</sup> siehe [67]



Denkprozessen. Dies steht im Kontrast unter anderem zum sog. **Platonismus** in der Philosophie der Mathematik.

**16, 17, 20, 41f, 52, 54, , 73, 81, 95, siehe atomar, Aussage, Element, Junktor, Logik, Satz & Teilaussage**

—, **aussagenlogischer** [!] Es gib nur die beiden aussagenlogischen **Wahrheitswerte**  $\top$  und  $\perp$ .

—, **metasprachlicher** [?] Es gib die beiden metasprachlichen **Wahrheitswerte** in Textform (*wahr, falsch*) und in der **formalen Metasprache** (*true, false*). , 70f, 79, 94

**Wert** [!] Der **Wert** einer **Formel** ergibt sich rekursiv aus der **Belegung** der **Symbole**, aus denen die **Formel** besteht. Beispielsweise hat die **Formel**  $\langle\langle a+b=c \rangle\rangle$  mit der **Belegung** von  $\langle a \rangle$ ,  $\langle b \rangle$ ,  $\langle c \rangle$ ,  $\langle + \rangle$  und  $\langle = \rangle$  durch die Zahlen Eins, Zwei und Drei, den Additionsoperator und die Gleichheit den Wert "*wahr*".<sup>32)</sup> Belegt man bei sonst gleicher Belegung  $\langle c \rangle$  mit Vier, so ist der Wert hingegen "*falsch*". 16f, , 69

—, **logischer** [!] Synonym zu **Wahrheitswert**.

**Wertebereich** [?] einer **Funktion**. 52, , 71, 73, *siehe* **ran, Zielbereich & Funktion**

**WikiDummy** [Beschreibung fehlt noch ]**Wikipedia**[31] schreibt dazu:

**Wikipedia** [?] **Wikipedia**[31] schreibt dazu:

Wikipedia ist ein Projekt zum Aufbau einer [Internet-]Enzyklopädie aus freien Inhalten.

**5, 13, 16f, 19, 45f, , 72–76, 78–84, 86–95**

**Wort** [?] Synonym: **Formel** — Ein **Element** aus einer **Sprache**. **21, , 80, siehe Formelmengen**

## Z

**Zahl, natürliche** [Beschreibung fehlt noch ]Eine verbreitete Version für die Definition der **Menge**  $\mathbb{N}_0$  der **natürlichen Zahlen** ist folgende:

$$\emptyset \in \mathbb{N}_0$$

$$n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n \cup \{n\} \in \mathbb{N}_0$$

Nur die so definierten **Elemente** sind **Elemente** aus  $\mathbb{N}_0$ .

Man nennt  $n \cup \{n\}$  auch den **Nachfolger** von  $n$  und es gilt:

$$n \subset \mathbb{N}_0, \text{ für } n \in \mathbb{N}_0$$

$$n < m \Leftrightarrow n \subset m, \text{ für } n, m \in \mathbb{N}_0$$

$$n \leq m \Leftrightarrow n \subseteq m, \text{ für } n, m \in \mathbb{N}_0$$

**19, , 70**

**Zeichenkette** [?] Eine Folge von (typographischen) Zeichen, auch Leerstellen und sonstigem Zwischenraum. 20ff, 44, , *siehe* **Symbolfolge**

**zerlegbar** [?] Eine **Aussage, Formel, Folge** oder **Symbol**, die eine **echte Teilaussage, -folge, -formel** bzw.. **-symbol** enthalten, heißt **zerlegbar**. **17, 19, 21f, 44, , 73, 74, 91, siehe atomar**

<sup>32)</sup> Genau genommen **true**, was wiederum standardmäßig die **Belegung wahr** hat.

**Ziel** [?] Ein **Ziel** ist in diesem Dokument eine Anforderungen an [ASBA](#). 9f,  
**Zielbereich** [?] einer [Funktion](#). 23, 52, , 71, 80, *siehe* [tar](#), [Wertebereich](#) & [Funktion](#)  
**zulässig** [?] Eine Eigenschaft von [Formel](#), [Transformation](#) und [Ersetzung](#). 34f, , 72,  
78, 90, *siehe* [Formel](#), [Transformation](#) & [Ersetzung](#)