

Dr. Winfried Teschers  
Anton-Günther-Straße 26c  
91083 Baiersdorf  
winfried.teschers@t-online.de

## Projektdokument

# ASBA

## Axiome, Sätze, Beweise und Auswertungen

**Projekt zur maschinellen Überprüfung von mathematischen Beweisen und deren  
Ausgabe in lesbarer Form**

Winfried Teschers

19. November 2017

Es wird ein Programmsystem beschrieben, das zu eingegebenen Axiomen, Sätzen, und Beweisen letztere prüft, Auswertungen generiert und zu gegebenen Ausgabeschemata eine Ausgabe der Elemente in üblicher Formelschreibweise im  $\text{\LaTeX}$ -Format erstellt.

Copyright © 2017 Winfried Teschers

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. You should have received a copy of the GNU Free Documentation License along with this document. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Analyse</b>	<b>4</b>
1.1. Fragen	4
1.2. Eigenschaften	5
1.3. Ziele	5
1.4. Zusammenfassung	7
1.5. Die Umgebung von ASBA	9
1.6. Basis von Beweisen	10
<b>2. Mathematische Grundlagen</b>	<b>12</b>
2.1. Notationen	12
2.1.1. Quotierung	13
2.1.2. Bezeichnungen	13
2.1.3. Binäre Relationen und Operatoren	14
2.1.4. Prioritäten	14
2.2. Metasprache	15
2.2.1. Aussagen und Metaoperatoren	15
2.2.2. Mit Gleichheit verwandte Relationen	17
2.2.2.1. Vergleichbar	17
2.2.2.2. Vergleiche	18
2.2.2.3. Definitionen	18
2.3. Beweise in ASBA	19
2.3.1. Schlussregeln	19
2.3.2. Beweisschritte	20
2.4. Aussagenlogik	20
2.4.1. Konstante und Operatoren	20
2.4.2. Formalisierung	22
2.4.2.1. Bausteine der aussagenlogischen Sprache	22
2.4.2.2. Aussagenlogische Formeln	22
2.4.3. Definition von Junktoren durch andere	23
2.4.4. Aussagenlogisches Axiomensystem	25
2.5. Prädikatenlogik	25
2.6. Mengenlehre	25
<b>3. Ideen</b>	<b>26</b>
3.1. Schlussregeln	26
3.1.1. Basisregeln	26
3.1.2. Identitätsregeln	27
3.1.3. Weitere Schlussregeln	29
3.1.4. Beispiel einer Ableitung	29
<b>4. Design</b>	<b>34</b>
4.1. Anforderungen	34
4.2. Axiome	35
4.3. Beweise	35
4.4. Datenstruktur	35
4.5. Bausteine	35

<b>A. Anhang</b>	<b>36</b>
A.1. Werkzeuge . . . . .	36
A.2. Offene Aufgaben . . . . .	37
<b>B. Verzeichnisse</b>	<b>38</b>
Tabellenverzeichnis . . . . .	38
Abbildungsverzeichnis . . . . .	38
Literaturverzeichnis . . . . .	39

# 1. Analyse

In der Mathematik gibt es eine unüberschaubare Menge an Axiomen, Sätzen, Beweisen, *Fachbegriffen*<sup>1)</sup> und *Fachgebieten*<sup>2)</sup>. Zu den meisten Fachgebieten gibt es noch ungelöste Probleme.

Es fehlt ein System, das einen Überblick bietet und die Möglichkeit, Beweise automatisch zu überprüfen. Außerdem sollte all dies in üblicher mathematischer Schreibweise ein- und ausgegeben werden können. In diesem Dokument werden die Grundlagen für das zu entwickelnde Programmsystem, das **Axiome, Sätze, Beweise** und **Auswertungen** behandeln kann. (ASBA) behandelt.

Ein Programmsystem mit ähnlicher Aufgabenstellung findet sich im GitHub Projekt *Hilbert II* (siehe [18, 19]). Einige Ideen sind von dort übernommen worden.

## 1.1. Fragen

Einige der Fragen, die in diesem Zusammenhang auftauchen, werden nun formuliert:

1. *Grundlagen*: Was sind die Grundlagen? Z. B. welche Logik und Mengenlehre.
2. *Basis*: Welche wichtigen Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Fachgebiete gibt es? Welche davon sind Standard?
3. *Axiome*: Welche Axiome werden bei einem Satz oder Beweis vorausgesetzt? Allgemein anerkannte oder auch strittige, wie z. B. den *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* (*tertium non datur*) oder das *Auswahlaxiom*.
4. *Beweis*: Ist ein Beweis fehlerfrei?
5. *Konstruktion*: Gibt es einen konstruktiven Beweis?
6. *Vergleiche*: Welcher Beweis ist besser? Nach welchem Kriterium? Z. B. elegant, kurz, einsichtig oder wenige Axiome. Was heißt eigentlich *elegant*?
7. *Definitionen*: Was ist mit einem Fachbegriff jeweils genau gemeint? Z. B. *Stetigkeit*, *Integral* und *Analysis*.
8. *Abhängigkeiten*: Wie heißt ein Fachbegriff in einer anderen Sprache? Ist wirklich dasselbe gemeint? Was ist mit Fachbegriffen in verschiedenen Fachgebieten?
9. *Überblick*: Ist ein Axiom, Satz, Beweis oder Fachbegriff schon einmal – ggf. abweichend – definiert, formuliert oder bewiesen worden?
10. *Darstellung*: Wie kann man einen Satz und den zugehörigen Beweis – ggf. auch spezifisch für ein Fachgebiet – darstellen?

<sup>1)</sup> **Fachbegriffe** sind Namen für mathematische Elemente und Konstruktionen, z. B. Axiomen, Sätzen, Beweisen und Fachgebieten. *Symbole* können als spezielle Fachbegriffe aufgefasst werden.

<sup>2)</sup> Ein **Fachgebiet** ist ein Teil der Mathematik mit einer zugehörigen Basis an Axiomen, Sätzen, Fachbegriffen und Darstellungen, z. B. *Logik*, *Mengenlehre* und *Gruppentheorie*. Ein Fachgebiet kann sehr klein sein und im Extremfall kein einziges Element enthalten. *Umgebung* wäre eine bessere Bezeichnung, ist aber schon ein verbreiteter Fachbegriff, so dass hier die Bezeichnung Fachgebiet verwendet wird.

Statt „Fachgebiet“ könnte man auch „Theorie“ nehmen. An *Theorien* (siehe [1] Kapitel 2.5, Seite 64) werden aber bestimmte Anforderungen gestellt, die vom hier behandelten Programmsystem aber nicht notwendigerweise überprüft werden sollen. Theorien sind allerdings i. Alg. auch Fachgebiete.

11. *Forschung*: Welche Probleme gibt es noch zu erforschen.

## 1.2. Eigenschaften

ASBA soll ausgehend von den Fragen in Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite entwickelt werden, und die folgenden Eigenschaften haben:

1. *Daten*: Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Fachgebiete können in formaler Form gespeichert werden – auch (noch) nicht oder unvollständig bewiesene Sätze. Dabei soll die übliche mathematische Schreibweise verwendet werden können.
2. *Definitionen*: Es können Fachbegriffe für Axiome, Sätze, Beweise und Fachgebiete – letztere mit eigenen Axiomen, Sätzen, Beweisen, Fachbegriffen und über- oder untergeordneten Fachgebieten – definiert werden. Die Definitionen dürfen wiederum an dieser Stelle schon bekannte Fachbegriffe und Fachgebiete verwenden.
3. *Prüfung*: Vorhandene Beweise können automatisch geprüft werden.
4. *Ausgaben*: Die Axiome, Sätze und Beweise können in üblicher Schreibweise – abhängig von Sprache und Fachgebiet – ausgegeben werden.
5. *Auswertungen*: Zusätzlich zur Ausgabe der gespeicherten Daten sind verschiedene Auswertungen möglich, unter anderem für die meisten der unter Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite behandelten Fragen.

Damit ASBA nicht umsonst erstellt wird und möglichst breite Verwendung findet, werden noch zwei Punkte angefügt:

6. *Lizenz*: Die Software ist *Open Source*.
7. *Akzeptanz*: ASBA wird von Mathematikern akzeptiert und verwendet.

Tabelle 1.1 auf der nächsten Seite zeigt, wie sich die Eigenschaften zu den Fragen im Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite verhalten. Mit einem X werden die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Eigenschaften zur Beantwortung der entsprechenden Frage beitragen sollen. Idealerweise sollte die Erfüllung aller angegebenen Eigenschaften alle gestellten Fragen beantworten, was allerdings illusorisch ist.

## 1.3. Ziele

Um die Eigenschaften von Abschnitt 1.2 zu erreichen, werden für ASBA die folgenden Ziele<sup>3)</sup> gesetzt:

1. *Daten*: Es enthält möglichst viele wichtige Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe, Fachgebiete und Ausgabeschemata<sup>4)</sup>.
2. *Form*: Die Daten liegen in formaler, geprüfter Form vor.
3. *Eingaben*: Die Eingabe von Daten erfolgt in einer formalen Syntax unter Verwendung der üblichen mathematischen Schreibweise.
4. *Prüfung*: Vorhandene Beweise können automatisch geprüft werden.

<sup>3)</sup> Es sind eigentlich Anforderungen. Da dieser Begriff auch im Kapitel 4 auf Seite 34 verwendet wird, werden die Anforderungen hier *Ziele* genannt.

<sup>4)</sup> Um den Punkt 4 von Abschnitt 1.2 erfüllen zu können, werden noch fachgebietsspezifische Ausgabeschemata benötigt, welche die Art der Ausgaben beschreiben.

Frage \ Eigenschaft							
	1 Daten	2 Definitionen	3 Prüfung	4 Ausgaben	5 Auswertungen	6 Lizenz	7 Akzeptanz
1 Grundlagen	X	X	-	X	X	-	-
2 Basis	X	X	-	X	X	-	-
3 Axiome	X	X	-	X	X	-	-
4 Beweis	X	-	X	X	-	-	-
5 Konstruktion	X	-	-	X	-	-	-
6 Vergleiche	X	-	-	-	X	-	-
7 Definitionen	X	X	-	X	-	-	-
8 Abhängigkeiten	X	-	-	X	-	-	-
9 Überblick	X	-	-	-	X	-	-
10 Darstellung	-	X	-	X	-	-	-
11 Forschung	X	-	-	-	X	-	-

Tabelle 1.1.: 1.1 Fragen → 1.2 Eigenschaften

5. *Ausgaben*: Die Ausgabe kann in einer eindeutigen, formalen Syntax gemäß vorhandener Ausgabeschemata erfolgen.
6. *Auswertungen*: Zusätzlich zur Ausgabe der Daten sind verschiedene Auswertungen möglich. Insbesondere kann zu jedem Beweis angegeben werden, wie lang er ist und welche Axiome und Sätze<sup>5)</sup> er benötigt.
7. *Anpassbarkeit*: Fachbegriffe und die Darstellung bei der Ausgabe können mit Hilfe von – gegebenenfalls unbenannten – untergeordneten Fachgebieten angepasst werden.
8. *Individualität*: Axiome und Sätze können für jeden Beweis individuell vorausgesetzt werden. Dabei sind fachgebietsspezifische Fachbegriffe erlaubt.
9. *Internet*: Die Daten können auf mehrere Dateien verteilt sein. Ein Teil davon – oder sogar alle – können im Internet liegen.
10. *Kommunikation*: Die Kommunikation mit ASBA kann mit den Fachbegriffen der einzelnen Fachgebiete erfolgen.
11. *Zugriff*: Der Zugriff auf ASBA kann lokal und über das Internet erfolgen.
12. *Unabhängigkeit*: ASBA kann online und offline arbeiten.
13. *Rekursion*: Es kann rekursiv über alle verwendeten Dateien – auch solchen, die im Internet liegen – ausgewertet werden.
14. *Bedienbarkeit*: ASBA ist einfach zu bedienen.
15. *Lizenz*: Die Software ist *Open Source*.
16. *Zwischenspeicher*: Wichtige Auswertungen können an vorhandenen Dateien angehängt oder separat in eigenen Dateien gespeichert werden.

<sup>5)</sup> Sätze, die quasi als Axiome verwendet werden.

Punkt 16 wurde noch eingefügt, damit ASBA effizient arbeiten kann und um die Akzeptanz zu erhöhen.

Die Tabelle 1.2 zeigt wieder, wie sich die Ziele zu den Eigenschaften im Abschnitt 1.2 auf Seite 5 verhalten. Mit einem X werden wieder die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Ziele zur Sicherstellung der entsprechenden Eigenschaft beitragen sollen. Idealerweise sollte durch Erreichen aller aufgestellten Ziele ASBA alle angegebenen Eigenschaften aufweisen, was wahrscheinlich ebenfalls illusorisch ist.

Eigenschaft \ Ziel																
	Daten	Form	Eingaben	Prüfung	Ausgaben	Auswertungen	Anpassbarkeit	Individualität	Internet	Kommunikation	Zugriff	Unabhängigkeit	Rekursion	Bedienbarkeit	Lizenz	Zwischenspeicher
1 Daten	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2 Definitionen	X	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3 Prüfung	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4 Ausgaben	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 Auswertungen	-	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6 Lizenz	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	-
7 Akzeptanz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabelle 1.2.: 1.2 Eigenschaften → 1.3 Ziele

## 1.4. Zusammenfassung

Die Tabelle 1.3 auf der nächsten Seite ist eine Kombination der Tabellen 1.1 und 1.2 und zeigt, wie sich die Ziele im Abschnitt 1.3 auf Seite 5 zu den Fragen im Abschnitt 1.1 auf Seite 4 verhalten. Auch hier werden mit einem X die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Ziele für die Beantwortung der entsprechenden Frage nötig sind. Mit einem kleinen x werden sie markiert, wenn sie zur Beantwortung der Fragen nicht nötig, aber von Interesse sind. Idealerweise sollte das Erreichen aller aufgestellten Ziele alle gestellten Fragen beantworten, was natürlich auch illusorisch ist.

Frage \ Ziel															
	1 Daten	2 Form	3 Eingaben	4 Prüfung	5 Ausgaben	6 Auswertungen	7 Anpassbarkeit	8 Individualität	9 Internet	10 Kommunikation	11 Zugriff	12 Unabhängigkeit	13 Rekursion	14 Bedienbarkeit	15 Lizenz
1 Grundlagen	X	X	X	-	X	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
2 Basis	X	X	X	-	X	X	x	x	-	-	-	-	-	-	-
3 Axiome	X	X	X	-	X	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
4 Beweis	X	X	X	X	X	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-
5 Konstruktion	X	X	X	-	X	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-
6 Vergleiche	X	X	X	-	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-
7 Definitionen	X	X	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-
8 Abhängigkeiten	X	X	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-
9 Überblick	X	X	X	-	-	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
10 Darstellung	X	-	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-
11 Forschung	X	X	X	-	-	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-
Die nächsten beiden Punkte sind Eigenschaften aus Abschnitt 1.2 auf Seite 5:															
6 Lizenz	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X
7 Akzeptanz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabelle 1.3.: 1.1 Fragen → 1.3 Ziele



## 1.5. Die Umgebung von ASBA

In der Abbildung 1.1 wird beschrieben, welche Interaktionen ASBA mit der Umgebung hat, d. h. welche Ein- und Ausgaben existieren und woher sie kommen bzw. wohin sie gehen. In den in der

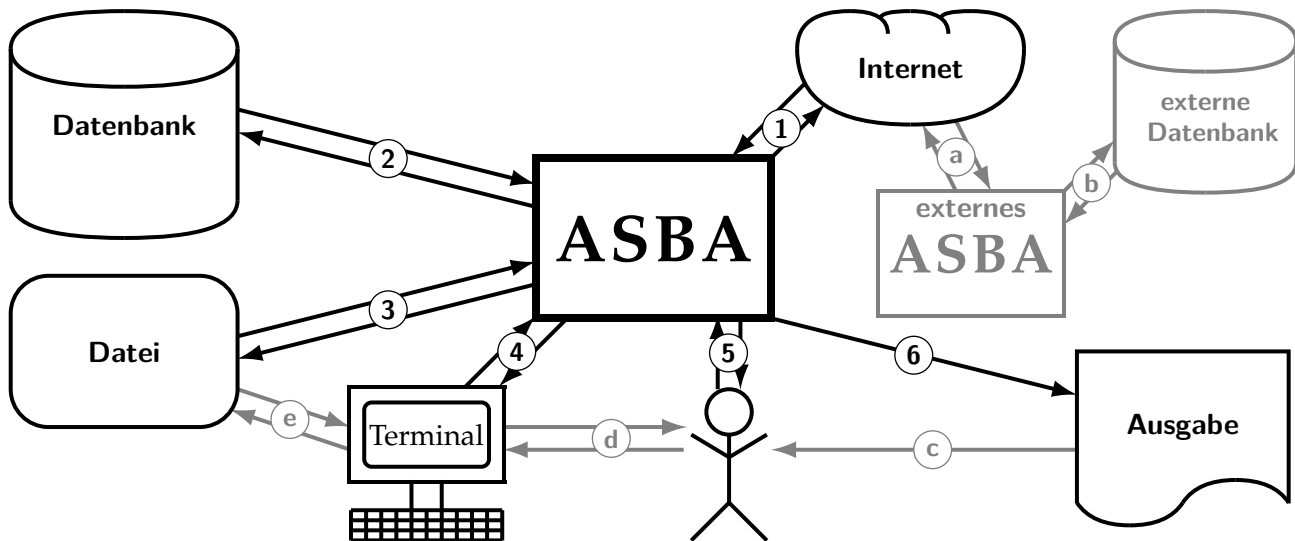


Abbildung 1.1.: Die Umgebung von ASBA

Abbildung 1.1 abgebildeten Datenflüssen (1) bis (6) und (a) bis (e) werden die folgenden Daten übertragen:

- (1) **ASBA** → **Internet** Inhalte der Datenbank.  
**Internet** → **ASBA** Inhalte der externen Datenbank.
- (2) **Datenbank** → **ASBA** Inhalte der Datenbank und Antworten auf Datenbankanweisungen.  
**ASBA** → **Datenbank** Inhalte der Datei, der externen Datenbank und Datenbankanweisungen.
- (3) **Datei** → **ASBA** Inhalte der Datei.  
**ASBA** → **Datei** Die Datei wird um zusätzliche Auswertungen ergänzt, z. B. ob die Beweise korrekt sind, welche Axiome und Sätze – auch externe aus dem Internet – verwendet wurden, Länge des Beweises usw.
- (4) **Terminal** → **ASBA** Anweisungen, Daten und Batchprogramme.  
**ASBA** → **Terminal** Antworten auf Anweisungen, Auswertungen usw.  
 Außerdem interaktive Ein- und Ausgabe durch einen Anwender, wie in (5) beschrieben.
- (5) **Anwender** ↔ **ASBA** Interaktive Ein- und Ausgaben durch einen Anwender mit Komponenten von (3), (4) und (6). – Die Kommunikation läuft i. Alg. über ein Terminal.
- (6) **ASBA** → **Ausgabe** Inhalte von Datei und Datenbank in lesbarer Form, u. a. mit Hilfe von Ausgabeschemata auch in Formelschreibweise. Die Ausgabe kann auch in eine Datei erfolgen, z. B. im  $\text{\LaTeX}$ -Format.
- (a) Nur die für ASBA relevanten Daten:  
**Internet** → **externes ASBA** Inhalte der Datenbank.  
**externes ASBA** → **Internet** Inhalte der externen Datenbank.
- (b) Nur die für ASBA relevanten Daten:  
**externe Datenbank** → **externes ASBA** Inhalte der externen Datenbank.

**externes ASBA** → **externe Datenbank** Inhalte der Datenbank.

(c) **Ausgabe** → **Anwender** Alle Daten der Ausgabe.

(d) **Anwender** ↔ **Terminal** Interaktive Ein- und Ausgabe durch einen Anwender, wie in (5) beschrieben.

(e) **Terminal** ↔ **Datei** Erstellen und Bearbeiten der Datei durch einen Anwender. – siehe (d)

Die Datenflüsse (a) bis (e) erfolgen außerhalb von ASBA und werden nicht weiter behandelt.

Die Datenbank und die Datei enthalten im Prinzip die gleichen Daten, wobei sie in der Datei im Textformat in lesbarer Form und in der Datenbank in einem internen Format vorliegen. Zudem enthält die Datenbank i. Alg. sehr viel mehr Daten. Es handelt sich dabei jeweils um die folgenden Daten:

**Axiome** Ein Axiom ist eine *Aussage* oder Behauptung, die nicht aus anderen Aussagen abgeleitet werden kann. Es können wie bei Sätzen Voraussetzungen vorhanden sein, aber keine Beweise.

**Sätze** Ein Satz besteht aus einer Anzahl von Voraussetzungen, einer Behauptung und einem Beweis, der die Behauptung aus den Voraussetzungen ableitet. Letztere können Axiome und andere Sätze sein, auf die dann verwiesen wird.

**Beweise** Ein Beweis besteht aus einer Folge von Beweisschritten die aus gegebenen Voraussetzungen eine Behauptung ableiten.

**Fachbegriffe** Ein Fachbegriff ist ein Name für ein Objekt bzw. eine Eigenschaft in einem bestimmten Fachgebiet.

**Fachgebiete** Ein Fachgebiet ist ein Teil der Mathematik mit einer zugehörigen Basis von Axiomen, Sätzen, Fachbegriffen und Ausgabeschemata, quasi eine untergeordnete Datenbank.

**Ausgabeschemata** Eine Beschreibung, wie ein bestimmtes mathematisches Objekt ausgegeben werden soll. Dies kann z. B. ein Stück  $\text{\LaTeX}$ -Code mit entsprechenden Parametern sein.

**Auswertungen** Statistische und andere Auswertungen, die bestimmten Elementen der Datei bzw. Datenbank zugeordnet sind. Z. B. können zu einem Satz alle für einen Beweis notwendigen Axiome angegeben werden – als Verweise.

Die Daten können interne und externe Verweise enthalten.

## 1.6. Basis von Beweisen

Da ein Computerprogramm erstellt werden soll, muss die Grundstruktur des Vorgehens bei Beweisen definiert werden.<sup>6)</sup>

**Die logische Darstellung** von mathematischen Aussagen, wozu auch Axiome und Sätze gehören, erfolgt, da es sich immer um Formeln handelt, an besten mit *Zeichenfolgen*<sup>7)</sup>, d. h. Folgen von Zeichen und Symbolen, in denen Zwischenraum – insbesondere Leerstellen – nicht zählen. Mehrdimensionale Formeln, wie z. B. Matrizen, Baumstrukturen, Funktionsschemata und anderes, können auch als (eindimensionale) Zeichenfolgen dargestellt werden.<sup>8)</sup> Beweise sind letztendlich nichts anderes, als erlaubte Transformationen dieser Zeichenfolgen.

**Bausteine** sind Grundelemente, auch **Zeichen** oder **(Satz-)Buchstaben** genannt, aus denen die Zeichenfolgen bestehen dürfen, und müssen definiert werden.

<sup>6)</sup> siehe [30]

<sup>7)</sup> Die interne Darstellung der Zeichenfolgen kann zur Optimierung des Programms von der logischen abweichen.

<sup>8)</sup> Z. B. könnte man eine  $2 \times 2$ -Matrix  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  auch darstellen als Folge von Zeilen: « $[(a, b), (c, d)]$ », oder noch einfacher: « $[a, b; c, d]$ ».

**Formationsregeln** dienen zur Festlegung, wie man aus den Bausteinen Ausdrücke erzeugen kann, und müssen ebenfalls definiert werden.

**Sätze** lassen sich als eine Menge von Formeln, den Voraussetzungen, wozu auch Axiome und andere Sätze gehören können, einer weiteren Menge von Formeln (Zeichenfolgen), den Folgerungen, und der Angabe eines Beweises darstellen.

**Beweise** zu gegebenen Voraussetzungen und Folgerungen lassen sich als Folge von zulässigen Transformationen, beginnend mit den Voraussetzungen und endend mit den Folgerungen, darstellen.

**Transformationsregeln** definieren, welche Transformationen mit gegebenen Formelmengen zulässig sind.<sup>9)</sup>

---

<sup>9)</sup> siehe [1, 33, 34]

## 2. Mathematische Grundlagen

Die mathematischen Grundlagen werden einerseits gebraucht, um die erlaubten Beweisschritte<sup>1)</sup> zu definieren, andererseits dienen sie auch zum Testen von ASBA. Daher werden sie in diesem Kapitel ausführlicher behandelt, als für die Erstellung von ASBA erforderlich ist. Alle hier aufgeführten Axiome, Sätze und Beweise sollen dazu kodiert und die Beweise dann von ASBA verifiziert werden.

### 2.1. Notationen

- Die in diesem Abschnitt 2.1 aufgeführten Notationen werden in diesem Kapitel 2 verwendet, ohne nochmals erläutert zu werden. Abweichungen davon werden jeweils gesondert angegeben.
- Sätze mit „wir“ bestimmen Notationen, die evtl. nur für dieses Dokument gelten. Bei allgemein bekannten Notationen wird „wir“ nicht verwendet. Die Verwendung von „wir“ ist allerdings möglicherweise nicht konsistent und soll nur als Hinweis dienen.
- Allgemein bekannte Notationen werden hier nicht angeführt. Nur solche, für die in der Literatur unterschiedlich verwendet werden.
- Werden Begriffe definiert, so werden sie **in dieser** Schriftart hervorgehoben.

**Symbole** umfassen neben speziellen Symbolen auch Buchstaben, Ziffern und Sonderzeichen. Symbole, für die es kein eigenes typographisches Zeichen gibt, können auch durch Aufeinanderfolge mehrerer typographischer Zeichen, i. Alg. lateinische Buchstaben, dargestellt werden. Wir nennen sie dann **zusammengesetzte Symbole**, im Gegensatz zu den **einfachen Symbolen**. Charakteristisch für ein Symbol ist, dass es ohne Bedeutungsverlust nicht zerlegt werden kann. Einzelne Symbole werden  $\langle \text{so} \rangle$  quotiert, z. B.  $\langle \mathbb{N}_0 \rangle$ <sup>2)</sup> für die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0 und  $\langle \sin \rangle$  für die Sinusfunktion. – Die Quotierung ist kein Bestandteil des Symbols!

**Zeichenketten** sind Folgen von einfachen Symbolen, in denen im Prinzip auch Leerstellen und andere nicht druckbare Zeichen zulässig sind.<sup>3)</sup> Damit Leerstellen in Zeichenketten leicht bestimmt und sogar gezählt werden können, werden Zeichenketten stets „in dieser“ Schriftart und Quotierung dargestellt. – Die Quotierung ist kein Bestandteil der Zeichenkette!

**Zeichenfolgen** sind ähnlich wie Zeichenketten, außer dass sie neben einfachen auch zusammengesetzte Symbolen enthalten können und Leerzeichen und andere Zwischenraumzeichen nicht zählen. Letztere dienen nur der optischen Trennung der Symbole und der besseren Lesbarkeit. Zeichenfolgen werden stets  $\langle \text{in dieser} \rangle$  Quotierung dargestellt. – Die Quotierung ist kein Bestandteil der Zeichenfolge!

---

<sup>1)</sup> siehe Abschnitt 2.3.2 auf Seite 20

<sup>2)</sup> Man kann  $\langle \mathbb{N}_0 \rangle$  auch als Aufeinanderfolge der beiden Symbole  $\langle \mathbb{N} \rangle$  und  $\langle 0 \rangle$  betrachten. Welche Interpretation richtig ist, ist nicht immer wichtig und ergibt sich bei Bedarf aus dem Zusammenhang.

<sup>3)</sup> Da beim Ausdruck optisch nicht entschieden werden kann, ob ein Zwischenraum (white space) aus einem Tabulator oder evtl. mehreren Leerzeichen besteht, verwenden wir nur einzelne Leerzeichen als Zwischenraumzeichen und vermeiden Zeilenumbrüche.

**Formeln** sind in diesem Dokument immer nach vorgegebenen Regeln aufgebaute Zeichenfolgen<sup>4)</sup>. Daher werden sie wie Zeichenfolgen quotiert. – Die Quotierung ist kein Bestandteil der Zeichenfolge!

Man kann eine Formel auch dadurch charakterisieren, dass sie ein Element einer vorgegebenen Menge  $\mathcal{L}$  von Zeichenfolgen ist.<sup>5)</sup> Das ist dann so ziemlich die einfachste Regel.

**Objekte** sind z. B. Symbole, Zeichenketten, Zeichenfolgen und Formeln, oder auch Aussagen, Mengen, Zahlen, usw. – ganz allgemein reale oder gedachte Dinge an sich. Eine Formel, die nicht quotiert ist, steht für den Wert dieser Formel, der dann wieder ein Objekt ist. Entsprechend steht ein Symbol, das nicht quotiert ist, für das dadurch bezeichnete Objekt. Z. B. bezeichnet das Symbol  $\langle \mathbb{N} \rangle$  die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen ohne 0.

**Operator** ...

**Relation** ...

**Junktor** ...

Fußnoten dienen nur zu weiteren Erläuterungen sowie Verweisen in dieses Dokument und in die Literatur. Für das Verständnis des Textes sollten sie nicht nötig sein, es reichen Grundkenntnisse der Mathematik.

### 2.1.1. Quotierung

Zur Verdeutlichung der soeben definierten Quotierungen ein Beispiel:

$\sin$	Ein Objekt	die Sinusfunktion
$\langle \sin \rangle$	Ein Symbol (Bezeichnung)	für das Objekt
$\langle\langle \sin \rangle\rangle$	Eine Zeichenfolge (Formel)	bestehend aus dem zusammengesetzten Symbol $\langle \sin \rangle$
$\langle\langle \sin \rangle\rangle$	Eine Zeichenfolge (Formel)	bestehend aus den einfachen Symbolen $\langle s \rangle$ , $\langle i \rangle$ und $\langle n \rangle$
$\text{“}\sin\text{”}$	Eine Zeichenkette	bestehend aus den einfachen Symbolen $\langle s \rangle$ , $\langle i \rangle$ und $\langle n \rangle$

Die Bezeichnung eines Objekts kann auch aus mehreren Symbolen bestehen, d. h. einer Zeichenfolge oder sogar einer ganzen Formel; z. B. ist die Bezeichnung für das indizierte Objekt  $a_i$  gleich  $\langle\langle a_i \rangle\rangle$ .

### 2.1.2. Bezeichnungen

Im Vorgriff auf Paragraph 2.2.2.3 auf Seite 18 steht  $\langle A :\Leftrightarrow B \rangle$  für „ $A$  ist definitionsgemäß gleich  $B$ “,  $\langle A \& B \rangle$  für „ $A$  und  $B$ “ und  $\langle A \parallel B \rangle$  für „ $A$  oder  $B$ “.

$\mathbb{N}$	$:\Leftrightarrow$	Menge der natürlichen Zahlen ohne 0
$\mathbb{N}_0$	$:\Leftrightarrow$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0
$A \subset B$	$:\Leftrightarrow$	$A$ ist echte Teilmenge von $B$
$A \subseteq B$	$:\Leftrightarrow$	$A$ ist Teilmenge von $B$

<sup>6)</sup> Wenn wir von einer **natürlichen Zahl** sprechen, meinen wir immer ein Element von  $\mathbb{N}_0$ .

<sup>4)</sup> Es kann verschiedene Arten von Formeln geben, z. B. aussagenlogische, prädikatenlogische und solche, die ein Taschenrechner auswerten kann.

<sup>5)</sup> Die Formel wird dann auch **Wort** der **Sprache**  $\mathcal{L}$  genannt - besonders, wenn die Elemente von  $\mathcal{L}$  Zeichenketten statt Zeichenfolgen sind. Wir bleiben der Klarheit willen bei „Formel“.

<sup>6)</sup> In der Literatur wird  $\langle \subset \rangle$  oft wie hier  $\langle \subseteq \rangle$  verwendet. Wir verwenden  $\langle \subset \rangle$  nur, wenn wir explizit Ungleichheit voraussetzen.

### 2.1.3. Binäre Relationen und Operatoren

Als Beispielsymbol für unäre Operatoren wird  $\langle \ominus \rangle$  und für binäre Operatoren  $\langle \otimes \rangle$  verwendet. Seien weiterhin  $\langle \triangleleft \rangle$ ,  $\langle \triangleright \rangle$ ,  $\langle \sim \rangle$ ,  $\langle \simeq \rangle$  und  $\langle \not\sim \rangle$  Beispielsymbole für Relationen.<sup>7)</sup> Wenn nichts anderes gesagt wird, gelte stets:

$$(A \triangleleft B) \quad :\Leftrightarrow \quad (B \triangleright A) \quad (2.1)$$

$$(A \not\sim B) \quad :\Leftrightarrow \quad [(A \sim B) \text{ gilt nicht}]$$

und je nachdem ob  $\sim$  oder  $\simeq$  definiert ist:

$$(A \simeq B) \quad :\Leftrightarrow \quad ((A \sim B) \parallel (A = B)) \quad (2.2)$$

$$(A \sim B) \quad :\Leftrightarrow \quad ((A \simeq B) \& (A \neq B)) \quad (2.3)$$

In (2.1) lassen sich  $\langle \triangleleft \rangle$  und  $\langle \triangleright \rangle$  auch vertauschen. Man beachte, dass - wenn man  $\langle :\Leftrightarrow \rangle$  durch  $\langle \Leftrightarrow \rangle$  ersetzt - weder (2.2) aus (2.3) folgt noch umgekehrt. Beispiele dazu sind in der Tabelle 2.1 angegeben.

	$A, A$	$A, B$	$B, A$	$B, B$	
$=$	$A = A$			$B = B$	
$\simeq$	$A \simeq A$	$A \simeq B$		$B \simeq B$	Es gilt (2.2)
$\sim$		$A \sim B$			und (2.3)
$\simeq$	$A \simeq A$	$A \simeq B$		$B \simeq B$	Es gilt (2.2)
$\sim$		$A \sim B$		$B \sim B$	aber nicht (2.3)
$\simeq$	$A \simeq A$	$A \simeq B$			Es gilt (2.3)
$\sim$		$A \sim B$			aber nicht (2.2)

**Tabelle 2.1.:** Beispiele für  $\simeq$  und  $\sim$

Wird eine binäre Relation  $\sim$ <sup>8)</sup> zusammen mit einer binären Operation  $\otimes$  oder einer weiteren binären Relation  $\approx$  verwendet wird, treffen wir folgende Vereinbarung:<sup>9)</sup>

$$A \otimes B \sim C \quad \text{steht für} \quad A \otimes B \quad \& \quad B \sim C$$

$$A \sim B \otimes C \quad \text{steht für} \quad A \sim B \quad \& \quad B \otimes C$$

$$A \sim B \approx C \quad \text{steht für} \quad A \sim B \quad \& \quad B \approx C$$

Weitere Vereinbarungen für  $\langle \ominus \rangle$  treffen wir nicht.

Es sei noch angemerkt, dass wegen (2.1) die Definition von  $\langle \Leftrightarrow \rangle$  im Unterabschnitt 2.2.1 auf der nächsten Seite überflüssig ist. Wegen der angegebenen Sprechweise ist sie dennoch angegeben. Für den Fall fehlender Klammern sind die Prioritäten in der Tabelle 2.2 auf Seite 16 angegeben. Damit wären dann alle Klammern in diesem Unterabschnitt 2.1.3 überflüssig.

### 2.1.4. Prioritäten

Die Tabelle 2.2 auf Seite 16 listet zur Vermeidung von Klammern die Prioritäten der in diesem Dokument verwendeten Operatoren, Relationen, Junktore und Definitionen in absteigender Folge von

<sup>7)</sup> Die Relationen brauchen weder Ordnungen noch Äquivalenzrelationen sein, auch wenn die angegebenen Symbole dies nahe legen.

<sup>8)</sup>  $\sim$  und  $\approx$  brauchen keine Äquivalenzrelationen zu sein.

<sup>9)</sup> auch in der Literatur verwendet, z. B. z. B. [1], Notationen Seite xxi

höherer zu niedrigerer Priorität, d. h. von starker zu schwacher Bindung auf.<sup>10)</sup> Das Weglassen redundanter Klammern wird in diesem Kapitel 2 nicht weiter thematisiert.<sup>11)</sup> Zur besseren Verständlichkeit werden aber gelegentlich auch redundante Klammern verwendet, insbesondere wenn Prioritäten unklar oder in der Literatur auch anders definiert sind. Die Prioritäten der Junktoren wurden aus [1] Kapitel 1.1 Seite 5 entnommen und ergänzt und die der Metaoperatoren daran angeglichen.

Für Operatoren derselben Priorität wählen wir in diesem Dokument Rechtsklammerung<sup>12)</sup>.

## 2.2. Metasprache

Wenn man über eine Sprache spricht, braucht man eine zweite Sprache, die **Metasprache**, in der Aussagen über erstere getroffen werden können.<sup>13)</sup> Wenn die zuerst genannte Sprache die der Mathematik ist, wählt man üblicherweise die natürliche Sprache als Metasprache. Leider ist diese oft ungenau, nicht immer eindeutig und abhängig vom Zusammenhang, in dem sie gesprochen wird.<sup>14)</sup> Um diese Probleme in den Griff zu bekommen, kann die Metasprache teilweise formalisiert werden. Durch diese Formalisierung erinnert sie dann schon an mathematische Formeln. Die Sprachebenen sollten aber sorgfältig unterschieden werden.

### 2.2.1. Aussagen und Metaoperatoren

Beispiele für Aussagen in Metasprache sind (a) „Morgen scheint die Sonne.“, (b) „Ich bin 1,83 m groß.“, (c) „Ich habe ein rotes Auto und das kann 200 km/h schnell fahren.“, usw. Wie Beispiel (c) zeigt, kann eine Aussage auch aus anderen Aussagen zusammengesetzt sein. In diesem Fall bezeichnen wir sie als **zerlegbar**, ansonsten als **unzerlegbar** oder auch **atomar**. – Wir betrachten auch Relationen einschließlich ihrer Operanden als Aussagen.<sup>15)</sup>

Während die Beispiele (a) und (b) unzerlegbare Aussagen sind, ist Beispiel (c) zerlegbar. Für alle drei Aussagen lässt sich feststellen, ob sie richtig sind oder nicht; für (a) allerdings nur im Nachhinein und für den zweiten Teil von (c) nur weil klar ist, worauf sich „das“ bezieht. Natürlich muss auch der Zusammenhang, in dem eine Aussage formuliert wird, bekannt sein. Z. B. ist die Bedeutung von „Ich“ nur dann bekannt, wenn man weiss, von wem die Aussage ist. Auf eine exakte Definition von Aussage wird verzichtet, weil das intuitive Verständnis hier ausreicht.

<sup>10)</sup> Priorität 1 ist höher und bindet damit stärker als Priorität 2, usw.

<sup>11)</sup> Gesetzt den Fall, dass ASBA die Voraussetzungen und Folgerungen eines mathematischen Satzes richtig und die Beweisschritte, z. B. durch fehlerhafte Interpretation einer Formel, falsch einliest, ansonsten aber richtig arbeitet. Dann kann man folgende Fälle unterscheiden:

- Ein falscher Satz kann dadurch nicht als richtig bewertet werden.
  - Ein richtiger Satz wird wahrscheinlich auch bei eigentlich richtigem Beweis als nicht bewiesen gelten, was natürlich unbefriedigend ist.
  - In äußerst unwahrscheinlichen Fällen kann dabei auch ein eigentlich falscher Beweis in einen richtigen verwandelt werden, was zwar schön ist, aber leider steht in der Dokumentation dann ein falscher Beweis.
- In keinem Fall wird durch diesen Fehler die Menge der richtigen Sätze durch einen falschen Satz „verunreinigt“.

<sup>12)</sup> Unäre Operatoren stehen in diesem Dokument stets links *vor* dem Operanden, so dass es für sie nur Rechtsklammerung geben kann. Zur Rechtsklammerung bei binären Operationen ein Zitat aus [1] Kapitel 1.1 Seite 5: „Diese hat gegenüber Linksklammerung Vorteile bei der Niederschrift von Tautologien in  $\rightarrow$ , [...]“. Die meisten Autoren bevorzugen Linksklammerung, was natürlicher erscheint. Dann sollte man aber für die Potenz doch noch Rechtsklammerung wählen, sonst ist  $a^{x^y} = (a^x)^y = a^{(x*y)}$  und nicht wie wahrscheinlich erwünscht  $a^{(x^y)}$ .

<sup>13)</sup> Die beiden Sprachen können auch übereinstimmen, z. B. wenn man über die natürliche Sprache spricht.

<sup>14)</sup> Man betrachte die beiden Aussagen „Studenten und Rentner zahlen die Hälfte.“ und „Studenten oder Rentner zahlen die Hälfte.“, die beide das gleiche meinen. – Entnommen aus [1] Abschnitt 1.2 Bemerkung 1. Ein weiteres Problem ist, dass man unauflösbare Widersprüche formulieren kann, z. B. „Der Barbier ist der Mann im Ort, der genau die Männer im Ort rasiert, die sich nicht selbst rasieren.“. Und der Barbier? Wenn er sich selbst rasiert, dann rasiert er sich nicht selbst, und wenn er sich nicht selbst rasiert, dann rasiert er sich selbst. Was denn nun? – Quelle unbekannt – Das Problem ist verwandt mit dem Problem der „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“.

<sup>15)</sup> Wird statt des Symbols der Name der zugehörigen Relation verwendet, ist dies unmittelbar einleuchtend. So wird z. B. aus der Formel  $A < B$  die Aussage „A ist kleiner als B“.



Klammern	( ) < > « »
Operatoren haben unterschiedliche Priorität.	
Unäre Operatoren <sup>1) 2)</sup>	$\ominus \neg$
Operatoren für Mengen	$\cup$ $\cap$
Binäre Operatoren <sup>1)</sup>	$\otimes$
Junktoren <sup>2)</sup>	$\wedge \uparrow$ $\vee + \downarrow$ $\leftarrow \rightarrow$ $\leftrightarrow$
Relationen haben gleiche Priorität.	
Relationen für Mengen <sup>3)</sup>	$\subset \subseteq \in \notin$ $\supset \supseteq \exists$
Relationen <sup>1)</sup>	$\triangleleft \triangleright \trianglelefteq \trianglerighteq$ $\sim \not\sim \simeq$
Gleichheitsrelation <sup>4)</sup>	$= \neq \equiv \neq$
Ableitungsrelation <sup>5)</sup>	$\vdash$
Substitution <sup>5)</sup>	$\leftarrow$
Definition	
Definition <sup>6)</sup>	$:=$
Meta...	
Metaoperatoren <sup>7) 8)</sup>	$\&$ $\parallel$ $ $
Metarelationen <sup>7)</sup>	$\Leftarrow \Leftrightarrow \Rightarrow$
Metadefinition <sup>6)</sup>	$:\Leftrightarrow$
Natürliche Sprache	
Innerhalb natürlicher Sprache deren Strukturelemente, z. B. Satzzeichen <sup>9)</sup>	$\cdot , ;$ usw.

<sup>1</sup> siehe Unterabschnitt 2.1.3 auf Seite 14<sup>2</sup> siehe Tabelle 2.3 auf Seite 21<sup>3</sup> siehe Unterabschnitt 2.1.2 auf Seite 13<sup>4</sup> siehe Paragraph 2.2.2.2 auf Seite 18<sup>5</sup> siehe Unterabschnitt 3.1.1 auf Seite 26<sup>6</sup> siehe Paragraph 2.2.2.3 auf Seite 18<sup>7</sup> siehe Unterabschnitt ?? auf Seite ??<sup>8</sup>  $\langle \rangle$  wird nur bei den *Schlussregeln* (siehe Unterabschnitt 2.3.1 auf Seite 19) verwendet. Zwar bezeichnen  $\langle \& \rangle$  und  $\langle \rangle$  denselben Operator, aber je nach verwendetem Symbol hat er eine unterschiedliche Priorität.<sup>9</sup> Innerhalb von Formeln können Satzzeichen eine andere Bedeutung und Priorität haben.**Tabelle 2.2.:** Prioritäten in abnehmender Reihenfolge



Zerlegbare Aussagen wie (c) können zum Teil formalisiert werden. Dies wird mit den folgenden Definitionen erreicht:

$A \Rightarrow B$	$:\Leftrightarrow$	Wenn $A$ [gilt] dann [gilt] [auch] $B$ .
$A \Leftarrow B$	$:\Leftrightarrow$	$A$ [gilt] sofern $B$ [gilt].
$A \Leftrightarrow B$	$:\Leftrightarrow$	$A$ [gilt] genau dann wenn $B$ [gilt].
$A \& B$	$:\Leftrightarrow$	$A$ und $B$ .
$A \parallel B$	$:\Leftrightarrow$	$A$ oder $B$ .

Offensichtlich sind das alles ebenfalls Aussagen, jetzt aber teilweise formalisiert. (c) lässt sich dann ausdrücken als „Ich habe ein rotes Auto' & ,das kann 200 km/h schnell fahren.'“. „ $A \Leftarrow B$ “ ist nur eine andere Schreibweise für „ $B \Rightarrow A$ “. – Ein Symbol für „nicht“ wird hier nicht gebraucht.

& und  $\parallel$  heißen **Metaoperatoren** und  $\Rightarrow$ ,  $\Leftarrow$  und  $\Leftrightarrow$  **Metarelationen**. Die damit gebildeten Aussagen können natürlich auch geklammert werden, um die Reihenfolge der Auswertung eindeutig zu machen. Für den Fall fehlender Klammern sind ihre Prioritäten in der Tabelle 2.2 auf der vorherigen Seite angegeben.

Um Verwechslungen mit den Junktorezu vermeiden, verwenden wir für die metasprachlichen Operatoren „und“ und „oder“ die Symbole  $\langle \& \rangle$  und  $\langle \parallel \rangle$ .  $A$  und  $B$  können als Operanden von  $\Leftrightarrow$ ,  $\&$  und  $\parallel$  vertauscht werden, ohne das Ergebnis zu ändern.<sup>16)</sup> Wird in einer (Teil-)Aussage nur einer der Operatoren  $\&$  oder  $\parallel$  verwendet, können die Klammern dort weggelassen und die Operationen in beliebiger Reihenfolge ausgewertet werden, wiederum ohne das Ergebnis zu ändern.<sup>17)</sup> Zusammengefasst ist die Reihenfolge der Operatoren und der Auswertung dort beliebig.

## 2.2.2. Mit Gleichheit verwandte Relationen

### 2.2.2.1. Vergleichbar

Zwei Objekte  $A$  und  $B$  sind **vergleichbar**, wenn beide von derselben Art sind, d. h. wenn z. B. jeweils beide Mengen, Zeichenfolgen, Zahlen, usw. sind. Dabei muss bei Formeln zwischen der Formel an sich und dem Ergebnis der Formel unterschieden werden. Siehe Beispiel (a).

Intuitiv scheint klar zu sein, was damit gemeint ist. Wenn aber entschieden werden muss, ob z. B. (a) „1+1“ gleich „2“ oder (b) „1+1“ gleich „1 + 1“ ist, muss man erst entscheiden, von welcher Art die beiden zu vergleichenden Ausdrücke sind, d. h. *wie* verglichen wird. Wenn sie als jeweiliges Ergebnis der beiden Formeln, d. h. als Objekt, verglichen werden, dann ist (a) richtig. Wenn sie als Formeln, d. h. als Zeichenfolgen, verglichen werden, ist (a) falsch. Wenn die Ausdrücke in (b) als Zeichenfolgen verglichen werden, dann ist (b) richtig. Wenn sie als Zeichenketten verglichen werden, ist (b) falsch.

Die folgende Tabelle fasst das zusammen:

$A$	$B$	Art	$A$ gleich $B$
$1 + 1$	2	Objekt	richtig
$\langle 1 + 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	Formel	falsch
$\langle 1 + 1 \rangle$	$\langle 1 + 1 \rangle$	Zeichenfolge	richtig
$\langle \text{“}1+1\text{“} \rangle$	$\langle \text{“}1 + 1\text{“} \rangle$	Zeichenkette	falsch

<sup>16)</sup> D. h. die Operatoren  $\Leftrightarrow$ ,  $\&$  und  $\parallel$  sind *kommutativ*.

<sup>17)</sup> D. h. die Operatoren  $\&$  und  $\parallel$  sind auch *assoziativ*. Bei den den logischen Operatoren  $\wedge$  und  $\vee$  müssen Kommutativität und Assoziativität durch Axiome gefordert werden. Die Kommutativität von  $\Leftrightarrow$  kann abgeleitet werden.

### 2.2.2.2. Vergleiche

$A$  und  $B$  seien Objekte. Dann definieren wir:

= **Gleichheit** « $A = B$ » heißt, dass  $A$  und  $B$  sich in den interessierenden Eigenschaften für  $=$  nicht unterscheiden.<sup>18)</sup> – „ $A$  ist dasselbe wie  $B$ “ oder „ $A$  ist *identisch* zu  $B$ “ – Inwieweit die Begriffe *Gleichheit* und *Identität* korrelieren, wird hier nicht erörtert.<sup>19)</sup>

Gleichheit ist eine Äquivalenzrelation.<sup>20)</sup>

≠ **Ungleichheit** « $A \neq B$ » heißt, dass  $A$  und  $B$  sich in mindestens einer interessierenden Eigenschaft für  $=$  unterscheiden. „ $A$  ist *nicht dasselbe* wie  $B$ “ (aber vielleicht das gleiche; siehe  $\equiv$ ) oder „ $A$  ist *nicht identisch* zu  $B$ “.

$\equiv$  **Äquivalenz(relation)** « $A \equiv B$ » heißt, dass  $A$  und  $B$  sich in den interessierenden Eigenschaften für  $\equiv$  nicht unterscheiden. – „ $A$  ist *das gleiche* wie  $B$ “ (aber nicht unbedingt dasselbe; siehe  $=$ ) oder „ $A$  ist *so wie*  $B$ “.

Es kann auch weitere Äquivalenzrelationen geben, für die dann verschiedene Bezeichnungen verwendet werden.

$\nabla$  **Kontravalenz** « $A \nabla B$ » heißt, dass  $A$  und  $B$  sich in mindestens einer interessierenden Eigenschaft für  $\nabla$  unterscheiden. – „ $A$  ist *nicht das gleiche* wie  $B$ “ oder „ $A$  ist *nicht so wie*  $B$ “.

$=$ ,  $\neq$ ,  $\equiv$  und  $\nabla$  bezeichnen wir als **Gleichheitsrelation**.

Jede interessierende Eigenschaft für  $\equiv$  oder eine andere Äquivalenzrelation muss auch eine für  $=$  sein. Daraus folgt insbesondere, dass mit « $(A = B)$ » auch « $(A \equiv B)$ » und mit « $(A \nabla B)$ » auch « $(A \neq B)$ » gilt.

### 2.2.2.3. Definitionen

Seien  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  Aussagen und  $A$  und  $B$  Objekte<sup>21)</sup>.

$:\Leftrightarrow$  **Metadefinition** « $\bar{A} :\Leftrightarrow \bar{B}$ » heißt, dass die Aussage  $\bar{A}$  *definitionsgemäß gleich* der Aussage  $\bar{B}$  ist. Gewissermaßen ist  $\bar{A}$  nur eine andere Schreibweise für  $\bar{B}$ . „ $\bar{A}$  steht für  $\bar{B}$ “.  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  können sich gegenseitig ersetzen.

$:=$  **Definition** « $A := B$ » heißt, dass das Objekt  $A$  *definitionsgemäß gleich* dem Objekt  $B$  ist. Gewissermaßen ist  $A$  nur eine andere Schreibweise für  $B$ . „ $A$  steht für  $B$ “.  $A$  und  $B$  können sich gegenseitig ersetzen.<sup>22)</sup>

Man beachte, dass  $:\Leftrightarrow$  und  $:=$  verschiedene Sprachebenen sind.

<sup>18)</sup> Z. B. sind zwei Junktore üblicherweise dann gleich, wenn sie stets denselben *Wahrheitswert* liefern. Ihre Bezeichnungen oder Symbole können dabei durchaus verschieden sein, interessieren bei der Feststellung der Gleichheit aber nicht. Z. B. bezeichnen  $\langle \& \rangle$  und  $\langle | \rangle$  (siehe Abschnitt 4.3 auf Seite 35) denselben Operator, haben aber verschiedene Priorität. – siehe Tabelle 2.2 auf Seite 16

<sup>19)</sup> siehe [29]

<sup>20)</sup> Eine Relation  $\sim$  ist eine **Äquivalenzrelation**, wenn sie *reflexiv* ( $A \sim A$ ), *transitiv* ( $((A \sim B) \& (B \sim C)) \Rightarrow (A \sim C)$ ) und *symmetrisch* ( $(A \sim B) \Rightarrow (B \sim A)$ ) ist – jeweils für alle  $A, B$  und  $C$ .

<sup>21)</sup> Die Anforderungen an die Aussage  $\bar{A}$  und das Objekt  $A$  sind intuitiv klar. Insbesondere darf  $\bar{B}$  bzw.  $B$  nicht von dem bisher undefinierten Teil von  $\bar{A}$  bzw.  $A$  abhängig sein.

<sup>22)</sup> Nach den Definitionen von  $:\Leftrightarrow$  und  $:=$  sind zwei Ausdrücke  $P$  und  $Q$  schon dann gleich, wenn nach der Ersetzung aller Vorkommen von  $A$  durch  $B$  sowohl in  $P$  als auch in  $Q$  die resultierenden Ausdrücke  $\bar{P}$  und  $\bar{Q}$  gleich sind.

## 2.3. Beweise in ASBA

Die Regeln zur Formulierung und Prüfung der Beweise müssen in ASBA fest codiert werden. Sie sind quasi die Axiome von ASBA und sollten daher möglichst wenig voraussetzen. In ASBA wird dazu ein *Genzen-Kalkül*<sup>23)</sup> verwendet. Die Definition von *Schlussregeln* und *Beweise* ist in diesem Dokument ASBA-spezifisch, um später eine leichtere Umsetzung in ein Programm zu erreichen.

### 2.3.1. Schlussregeln

Es sei  $\mathcal{L}$  eine Menge von Formeln.<sup>24)</sup> Dann definieren wir:

Eine **Schlussregel**  $\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{F}}$  für  $\mathcal{L}$  besteht aus einer Menge  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{L}$ , den **Voraussetzungen**, und einer Menge  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ , den **Folgerungen**.

Eine Schlussregel  $\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{F}}$  entspricht der Aussage:

Mit den Voraussetzungen aus  $\mathcal{V}$  lassen sich alle Folgerungen aus  $\mathcal{F}$  ableiten<sup>25)</sup>.

$\mathcal{V}$  und  $\mathcal{F}$  dürfen auch leer sein. Eine Schlussregel darf kein Element von  $\mathcal{L}$ , also auch kein Element von  $\mathcal{V}$  oder  $\mathcal{F}$  sein. Wir nennen eine Schlussregel auch einen *formalen Satz*. Eine Schlussregel bzw. ein formaler Satz heißt **allgemeingültig**, wenn die zugehörige Aussage immer zutrifft. In diesem Fall kann sie zur zulässigen Umwandlung von Formeln dienen. Ferner gilt:

- Eine Schlussregel  $\frac{\mathcal{V}}{\emptyset}$  ist allgemeingültig, d. h. sie ist immer wahr.
- Eine Schlussregel  $\frac{\emptyset}{\mathcal{F}}$  (oder kürzer  $\mathcal{F}$ ), die keine Voraussetzungen hat, nennen wir ein **Axiomensystem**. Ist  $\mathcal{F} = \{\alpha\}$ , so nennen wir die Schlussregel (oder kürzer  $\alpha$ ) auch **Axiom**.

Wenn  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{F}$  endlich sind, d. h. wenn es Elemente  $N$  und  $M$  von  $\mathbb{N}_0$  und Aussagen  $V_n$  und  $F_m$  gibt mit

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \{V_n | 0 < n \leq N\} \\ \mathcal{F} &= \{F_m | 0 < m \leq M\}\end{aligned}$$

dann können wir « $\mathcal{V}$ » durch « $V_1 \mid V_2 \mid \dots \mid V_N$ » und « $\mathcal{F}$ » durch « $F_1 \mid F_2 \mid \dots \mid F_M$ » ersetzen, also z. B.

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{F}} = \frac{V_1 \mid V_2 \mid \dots \mid V_N}{F_1 \mid F_2 \mid \dots \mid F_M} \quad (\text{Schlussregel oder formaler Satz}) \quad (\text{FS})$$

wobei  $\langle \mid \rangle$  und Bruchstrich für den Metaoperator & bzw.  $\Rightarrow$  steht.<sup>26)</sup> Die  $V_n$  bzw.  $F_m$  können dabei beliebig permutiert werden.<sup>27)</sup>

<sup>23)</sup> siehe [1] Kapitel 1.4 und vergleiche [33, 34]

<sup>24)</sup> Die Menge der Formeln wird auch als **Sprache** (language) bezeichnet und die Formeln sind dann die Worte dieser Sprache. Wir bleiben der Klarheit willen bei Formel. Dabei gibt es verschiedene Arten von Formeln, z. B. aussagenlogische, prädikatenlogische, solche, die ein Taschenrechner auswerten kann, oder auch nach bestimmten Regeln gebildete Zeichenketten.

<sup>25)</sup> durch noch zu definierende *zulässige Transformationen*

<sup>26)</sup> der Bruchstrich hat die übliche Priorität,  $\mid$  die schwächste.

<sup>27)</sup> Man beachte, dass Zähler ( $M = 0$ ) und Nenner  $N = 0$  auch leer sein können.

### 2.3.2. Beweisschritte

Ein Beweis<sup>28)</sup> in ASBA besteht aus

einer Schlussregel	$\mathcal{V}$ $\overline{\mathcal{F}}$	
einer Folge	$\mathcal{S} = (B_1, B_2, \dots, B_K)$	von <i>Beweisschritten</i> $B_k$ , die <b>Beweisschrittfolge</b>
einer Menge	$\mathcal{T}$	von <i>Transformationen</i> $T$ , die <b>Transformationsmenge</b>

wobei  $K$  ein Element von  $\mathbb{N}_0$  ist, die **Beweisschritte**  $B_k$  Schlussregeln und die Transformationen später definiert werden. Wir definieren noch:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_k &:= \{B_1, B_2, \dots, B_k\} \quad , \text{ für } 0 \leq k \leq K \\ \mathcal{B} &:= \mathcal{B}_K\end{aligned}$$

und nennen  $\mathcal{B}$  die **Beweisschrittmenge** der Beweisschrittfolge  $\mathcal{S}$ . Dann ist  $\mathcal{B}_0 = \emptyset$  und  $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{B}$  für  $0 \leq i \leq j \leq K$ .

=====

Jeder Beweisschritt  $B_k$  für  $1 \leq k \leq K$  muss entweder eine Voraussetzung aus  $\mathcal{V}$  oder durch Anwendung einer allgemeingültigen Schlussregel auf eine Teilmenge von  $\mathcal{B}_{k-1}$  eine wahre Formel oder eine weitere *allgemeingültige Schlussregel* sein. Schließlich muss noch

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$$

sein, da jede Folgerung aus  $\mathcal{F}$  in der Folge  $\mathcal{S}$  vorkommen und somit Element der Menge  $\mathcal{B}$  sein muss. Bevor die Schlussregeln weiter behandelt werden, werden noch Elemente der *Aussagenlogik* und der *Prädikatenlogik* behandelt. Wir stützen uns dabei weitgehend auf [1], ohne das jedes Mal anzugeben.

## 2.4. Aussagenlogik

### 2.4.1. Konstante und Operatoren

Die Tabelle 2.3 auf der nächsten Seite<sup>29)</sup> definiert für die zweiwertige Logik Konstante und Junktore über die Wahrheitswerte ihrer Anwendung. So ergeben sich, abhängig von den Wahrheitswerten der Operanden  $A$  und  $B$ ,<sup>30)</sup> die in der Tabelle angegebenen Wahrheitswerte für die Operationen. Die mit 0, 1 und 2 benannten Spalten werden jeweils nur für die 0-, 1- und 2-stelligen Junktore, d. h. für die Konstanten, die unären und die binären Junktore ausgefüllt. Dabei werden die Konstanten als 0-stellige Junktore angesehen. Hat der Inhalt einer Zelle keine Relevanz, steht dort ein Minuszeichen, ist kein Wert bekannt, so bleibt sie leer.

Für einige Junktorsymbole<sup>31)</sup>, Namen und Sprechweisen sind auch Alternativen angegeben. Die durchgestrichenen (d. h. negierten) Symbole sind ungebräuchlich und nur aus formalen Gründen aufgeführt. Wenn für eine bestimmte Kombination von Wahrheitswerten mehr als eine Zeile angegeben ist, so können die zugehörigen Junktore zwar formal verschieden sein, liefern in der zweiwertigen Aussagenlogik jedoch dieselben Ergebnisse.

Die zur Einsparung von Klammern definierten Prioritäten sind in der Tabelle 2.2 auf Seite 16 angegeben.<sup>32)</sup>

<sup>28)</sup> siehe [1] Kapitel 1.6 und 3.6

<sup>29)</sup> Die Tabelle basiert auf den Wahrheitstafeln in [27] Kapitel 2.2 und [1] Kapitel 1.1 Seite 3.

<sup>30)</sup>  $A$  und  $B$  können hier beliebige Aussagen sein – auch Formeln –, die jeweils genau einen Wahrheitswert repräsentieren.

<sup>31)</sup> Symbole, die für Junktore verwendet werden.

<sup>32)</sup> Zur Erinnerung: Es gilt Rechtsklammerung. siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 14

A	-	W	F	W	W	F	F	-	Aussage A	-
B	-	-	-	W	F	W	F	-	Aussage B	-
<b>Junktor<sup>1)</sup></b>	<b>0<sup>2)</sup></b>	<b>1</b>		<b>2</b>				<b>Name<sup>3)</sup></b>	<b>Sprechweise</b>	<b>Prio<sup>4)</sup></b>
$\top$	W	-	-	-	-	-	-	Verum	Wahr	-
$\perp$	F	-	-	-	-	-	-	Falsum	Falsch	-
	-	W	W	-	-	-	-			-
(...)	-	W	F	-	-	-	-	Klammerung	A ist geklammert	5)
$\neg$	-	F	W	-	-	-	-	Negation	Nicht A	1 <sup>6)</sup>
	-	F	F	-	-	-	-			-
	-	-	-	W	W	W	W	Tautologie		-
$\vee$	-	-	-	W	W	W	F	Disjunktion; Adjunktion; Alternative	A oder B	3
$\leftarrow \Leftarrow \subset$	-	-	-	W	W	F	W	Replikation; Konversion; konverse Implikation	A folgt aus B	4
$\mid$	-	-	-	W	W	F	F	Präpendenz	Identität von A	-
$\rightarrow \Rightarrow \supset$	-	-	-	W	F	W	W	Implikation; Subjunktion; Konditional	Wenn A so B; Aus A folgt B; A nur dann wenn B	4
$\mid$	-	-	-	W	F	W	F	Postpendenz	Identität von B	-
$\leftrightarrow \Leftrightarrow$	-	-	-	W	F	F	W	Äquivalenz; Bijunktion; Bikonditional	A genau dann wenn B A dann und nur dann wenn B	5
$\wedge \& \cdot$	-	-	-	W	F	F	F	Konjunktion	A und B; Sowohl A als auch B	2
$\uparrow \nearrow \mid$	-	-	-	F	W	W	W	NAND; Unverträglichkeit; Sheffer-Funktion	Nicht zugleich A und B	2
$+\dot{\vee} \vee \oplus$	-	-	-	F	W	W	F	XOR; Antivalenz; ausschließende Disjunktion	Entweder A oder B	3
$\leftrightarrow \Leftrightarrow \neq$	-	-	-	"	"	"	"	Kontravalenz		-
$\mid$	-	-	-	F	W	F	W	Postnonpendenz	Negation von B	-
$\rightarrow \Rightarrow \nabla$	-	-	-	F	W	F	F	Postsektion		-
$\mid$	-	-	-	F	F	W	W	Pränonpendenz	Negation von A	-
$\leftarrow \Leftarrow \nabla$	-	-	-	F	F	W	F	Präsektion		-
$\downarrow \nabla$	-	-	-	F	F	F	W	NOR; Nihilation; Peirce-Funktion	Weder A noch B	3
	-	-	-	F	F	F	F	Kontradiktion		-

Um vollständig zu sein, d. h. alle 22 möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten für höchstens zwei Variable zu berücksichtigen, enthält die Tabelle auch viele ungebräuchliche Symbole und Operationen. Die Zeilen mit den Klammern und den gebräuchlichsten Junktore sind in der Tabelle grau hinterlegt. Hellgrau hinterlegt sind Zeilen mit weniger gebräuchlichen Junktore. Die restlichen Junktore sind uninteressant und brauchen daher keine Priorität. – Im Folgenden werden von den in der Tabelle aufgeführten Junktore nur noch  $\top$ ,  $\perp$ ,  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $+$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\leftarrow$ ,  $\uparrow$  und  $\downarrow$  verwendet.

<sup>1</sup> Die Junktore  $\langle \subset \rangle$ ,  $\langle \supset \rangle$ ,  $\langle \nabla \rangle$  und  $\langle \nabla \rangle$  haben hier nicht die Bedeutung der entsprechenden Operatoren der Mengenlehre und dürfen nicht damit verwechselt werden; entsprechendes gilt für  $\langle + \rangle$  und  $\langle \cdot \rangle$  mit Addition und Multiplikation.

<sup>2</sup> 0-stellige Junktore sind Konstante, hier *Wahrheitswerte*.

<sup>3</sup> Ist eine Zelle in dieser Spalte leer, so ist die zugehörige Zeile nur vorhanden, um alle binären Junktore aufzuführen.

<sup>4</sup> Je kleiner die Zahl, je höher die Priorität.

<sup>5</sup> Klammerung ist genau genommen keine Operation und wird nicht nur bei logischen, sondern auch bei anderen Ausdrücken verwendet. Ihre Priorität - sofern man überhaupt davon sprechen kann - kann nur höher als die aller Junktore sein.

<sup>6</sup> Die Priorität der unären Operatoren muss höher sein als die aller mehrwertigen, also auch der binären Operatoren. Wenn alle unären Operatoren auf derselben Seite des Operanden stehen, brauchen sie eigentlich keine Priorität, da die Auswertung nur von innen (dem Operanden) nach außen erfolgen kann. Nur wenn es sowohl links-, als auch rechtsseitige unäre Operatoren gibt, muss man für diese Prioritäten definieren.

**Tabelle 2.3.:** Definition von aussagenlogischen Symbolen.

### 2.4.2. Formalisierung

Da sie die Grundlage – quasi das Fundament – des mathematischen Inhalts von ASBA sind, müssen die Axiome, Sätze, Beweise, usw. der Aussagenlogik (und später der Prädikatenlogik) in streng formaler Form vorliegen.<sup>33)</sup> Da Computerprogramme mit der *Polnischen Notation*<sup>34)</sup> besser umgehen können und Klammern dort überflüssig sind, werden viele Formeln auch parallel in der Polnischen Notation angegeben. Dies wird auch auf Wunsch bei Ausgaben von ASBA so gehandhabt.

#### 2.4.2.1. Bausteine der aussagenlogischen Sprache

Zur Einteilung der Junktore werden die folgenden Mengen definiert:

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &:= \{\top, \perp\} && , \text{ Menge der } \mathbf{aussagenlogischen Konstanten} \\ \mathcal{U} &:= \{\neg\} && , \text{ Menge der } \mathbf{unären Junktore} \\ \mathcal{O} &:= \{\wedge, \vee, +, \rightarrow, \leftrightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\} && , \text{ Menge der } \mathbf{binären Junktore}\end{aligned}$$

Um damit Formeln zu bilden, werden noch Variable gebraucht:

$$\mathcal{Q} := \{q_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \quad , \text{ Menge der } \mathbf{aussagenlogischen Variablen}$$

Die Mengen  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{Q}$  müssen paarweise disjunkt sein. – Damit können die folgende Mengen definiert werden:

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &:= \mathcal{K} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{O} && , \text{ Menge der } \mathbf{Junktorsymbole} \\ \mathcal{A} &:= \mathcal{Q} \cup \mathcal{J} && , \mathbf{Alphabet der aussagenlogischen Sprache (für } \mathcal{J}) \\ \mathcal{J}_x &\subseteq \mathcal{J} && , \text{ eine Teilmenge der Junktorsymbole für eine Indexvariable } x \\ \mathcal{A}_x &:= \mathcal{Q} \cup \mathcal{J}_x && , \mathbf{Alphabet der aussagenlogischen Sprache für } \mathcal{J}_x\end{aligned}$$

Für Elemente von  $\mathcal{Q}$  werden hier normalerweise die großen lateinischen Buchstaben  $A, B, C$ , usw. verwendet. Sie werden auch **Satzbuchstaben** oder kurz **Atome** genannt.

#### 2.4.2.2. Aussagenlogische Formeln

Neben dem Alphabet  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{A}_x$  werden noch Klammern als Gliederungszeichen verwendet. Damit können nun rekursiv für jede Teilmenge  $\mathcal{J}_x$  von  $\mathcal{J}$  zwei Mengen von Formeln definiert werden:

$\mathcal{L}_x$  sei die Menge der auf folgende Weise definierten **aussagenlogischen Formeln mit Klammerung**:

$$\begin{aligned}A \in \mathcal{Q} &\Rightarrow A \in \mathcal{L}_x \\ A \in \mathcal{J}_x \cap \mathcal{K} &\Rightarrow A \in \mathcal{L}_x \\ A \in \mathcal{L}_x &\Rightarrow (\circledast A) \in \mathcal{L}_x && , \text{ für } \circledast \in \mathcal{U} \cap \mathcal{J}_x \\ A, B \in \mathcal{L}_x &\Rightarrow (A \circledast B) \in \mathcal{L}_x && , \text{ für } \circledast \in \mathcal{O} \cap \mathcal{J}_x\end{aligned}$$

Nur die auf diese Weise konstruierten Formeln sind Elemente von  $\mathcal{L}_x$ .

Für  $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}$  sei noch  $\mathcal{L} := \mathcal{L}_x$ .

<sup>33)</sup> Die Formalisierung stützt sich auf [28]; siehe auch [21, 24].

<sup>34)</sup> Bei der **Polnischen Notation** wird eine zweistellige Operation  $\langle (A \circledast B) \rangle$  dargestellt als  $\langle \circledast AB \rangle$ . Eine Zwischenstufe ist  $\langle \circledast (A, B) \rangle$ , bei der noch die redundanten Gliederungszeichen Komma und Klammern – auch andere als die runden – hinzukommen, so dass die Operationen optisch besser getrennt und dadurch für Menschen besser lesbar werden. Durch einfaches Weglassen der Gliederungszeichen ergibt sich dann die Polnische Notation. Noch einfacher für Computer ist die **umgekehrte Polnische Notation**, bei der aus  $\langle (A \circledast B) \rangle$   $\langle AB \circledast \rangle$  wird.

$\mathcal{L}_x^p$  sei die Menge der auf folgende Weise definierten aussagenlogischen Formeln in *Polnischer Notation*:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &\subset \mathcal{L}_x^p \\ \mathcal{J}_x \cap \mathcal{K} &\subset \mathcal{L}_x^p \\ A \in \mathcal{L}_x^p &\Rightarrow (\ast A) \in \mathcal{L}_x^p, \text{ für } \ast \in \mathcal{U} \cap \mathcal{J}_x \\ A, B \in \mathcal{L}_x^p &\Rightarrow (A \ast B) \in \mathcal{L}_x^p, \text{ für } \ast \in \mathcal{O} \cap \mathcal{J}_x \end{aligned}$$

Nur die auf diese Weise konstruierten Formeln sind Elemente von  $\mathcal{L}_x^p$ . Schließlich sei noch  $\mathcal{L}^p := \mathcal{L}_x^p$  falls  $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}$ .

Wie man leicht sieht, gilt

$$\mathcal{J}_x \subset \mathcal{J}_y \subseteq \mathcal{J} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}_x \subset \mathcal{A}_y \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{L}_x \subset \mathcal{L}_y \subseteq \mathcal{L} \\ \mathcal{L}_x^p \subset \mathcal{L}_y^p \subseteq \mathcal{L}^p \end{cases}$$

und weiterhin gibt es eine bijektive Abbildung von  $\mathcal{L}$  nach  $\mathcal{L}^p$ . Auf einen Beweis verzichten wir. Durch Anwendung der Klammerregeln von Paragraph 2.4.2.1 auf der vorherigen Seite lassen sich in der Regel noch viele Klammern der Formeln aus  $\mathcal{L}_x$  einsparen. Die Formeln aus  $\mathcal{L}_x^p$  sind frei von Klammern. Die Namen der Junktoren finden sich in der Tabelle 2.3 auf Seite 21. Für aussagenlogische Formeln, d. h. von Elementen aus  $\mathcal{L}$  bzgl.  $\mathcal{L}^p$ , werden hier normalerweise die kleinen griechischen Buchstaben  $\alpha, \beta, \gamma$ , usw. verwendet. Sie können dabei auch als **atomare Formel** bezeichnet werden, d. h. Formeln, die sich nicht weiter zerlegen lassen.<sup>35)</sup>

### 2.4.3. Definition von Junktoren durch andere

Im folgenden gelte für zwei aussagenlogische Formeln  $\alpha$  und  $\beta$ :

$\alpha = \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha \text{ und } \beta \text{ stimmen als Zeichenkette überein.}$

$\alpha \equiv \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha \text{ und } \beta \text{ können mit Hilfe erlaubter Substitutionen und geltender Axiome} \\ \text{– siehe Unterabschnitt 2.4.4 auf Seite 25 – ineinander überführt werden.}$

Es werden verschiedene Teilmengen von  $\mathcal{J}$  eingeführt, die jeweils ausreichen alle anderen Elemente von  $\mathcal{J}$  zu definieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\text{bool}} &:= \{\neg, \wedge, \vee\} && (\text{Boolsche Signatur}) \\ \mathcal{J}_{\text{and}} &:= \{\neg, \wedge\} \\ \mathcal{J}_{\text{or}} &:= \{\neg, \vee\} \\ \mathcal{J}_{\text{imp}} &:= \{\neg, \rightarrow\} \\ \mathcal{J}_{\text{rep}} &:= \{\neg, \leftarrow\} \\ \mathcal{J}_{\text{nand}} &:= \{\uparrow\} \\ \mathcal{J}_{\text{nor}} &:= \{\downarrow\} \end{aligned}$$

Solche Teilmengen heißen logische Signatur. Im Folgenden stehen jeweils links die Formeln in üblicher Schreibweise vollständig geklammert und rechts in Polnischer Notation (ohne Klammern). Ferner seien  $\alpha$  und  $\beta$  beliebige, nicht notwendig verschiedene Formeln aus der passenden Menge  $\mathcal{L}_x$  bzgl. der um die mit Hilfe der Definitionen erweiterten Formelmenge.

<sup>35)</sup> Nur die Elemente von  $\mathcal{Q}$  und  $\mathcal{K}$  sind unzerlegbare Elemente von  $\mathcal{L}$ .



Ausgehend von den Junktoren aus der Booleschen Signatur  $\mathcal{J}_{\text{bool}}$  werden die restlichen Junktoren aus  $\mathcal{J}$  definiert. Die Definitionen sind in zwei Gruppen eingeteilt, und zwar die mit den Junktoren aus  $\mathcal{J}_{\text{and}}$ :

$$(\alpha \rightarrow \beta) := (\neg(\alpha \wedge (\neg\beta))) \quad \rightarrow \alpha\beta := \neg \wedge \alpha \neg\beta \quad (2.4)$$

$$(\alpha \leftarrow \beta) := (\neg(\beta \wedge (\neg\alpha))) \quad \leftarrow \beta\alpha := \neg \wedge \beta \neg\alpha \quad (2.5)$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) := ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftarrow \beta)) \quad \leftrightarrow \alpha\beta := \wedge \rightarrow \alpha\beta \leftarrow \alpha\beta$$

$$\perp := (q_0 \wedge (\neg q_0)) \quad \perp := \wedge q_0 \neg q_0$$

$$(\alpha \uparrow \beta) := (\neg(\alpha \wedge \beta)) \quad \uparrow \alpha\beta := \neg \wedge \alpha\beta \quad (2.6)$$

und die mit den Junktoren aus  $\mathcal{J}_{\text{or}}$ :

$$(\alpha \downarrow \beta) := (\neg(\alpha \vee \beta)) \quad \downarrow \alpha\beta := \neg \vee \alpha\beta \quad (2.7)$$

$$(\alpha + \beta) := ((\alpha \vee \beta) \wedge (\neg(\alpha \wedge \beta))) \quad + \alpha\beta := \wedge \vee \alpha\beta \neg \wedge \alpha\beta$$

$$\top := (q_0 \vee (\neg q_0)) \quad \top := \vee q_0 \neg q_0$$

Ist  $\langle \vee \rangle$  oder  $\langle \wedge \rangle$  nicht vorgegeben, d. h. wird von den Elementen aus  $\mathcal{J}_{\text{and}}$  bzgl.  $\mathcal{J}_{\text{or}}$  statt von denen aus  $\mathcal{J}_{\text{bool}}$  ausgegangen, so muss man den fehlenden Junktor mittels der passenden der beiden folgenden Definitionen einführen:

$$(\alpha \vee \beta) := (\neg((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))) \quad \vee \alpha\beta := \neg \wedge \neg\alpha \neg\beta$$

$$(\alpha \wedge \beta) := (\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))) \quad \wedge \alpha\beta := \neg \vee \neg\alpha \neg\beta$$

Nun sind wieder alle Junktoren definiert.

Entsprechend wird bei Vorgabe von  $\mathcal{J}_{\text{imp}}$  bzgl.  $\mathcal{J}_{\text{rep}}$  die passende der beiden folgenden Definitionen ausgewählt:

$$(\alpha \vee \beta) := ((\neg\alpha) \rightarrow \beta) \quad \vee \alpha\beta := \rightarrow \neg\alpha\beta$$

$$(\alpha \wedge \beta) := (\neg((\neg\beta) \leftarrow \alpha)) \quad \wedge \alpha\beta := \neg \leftarrow \neg\beta\alpha$$

woraufhin dann (2.4) bzgl. (2.5) als Gleichung nachzuweisen ist. Da aus (2.5) durch Vertauschung der Variablen unmittelbar

$$(\alpha \leftarrow \beta) \equiv (\beta \rightarrow \alpha) \quad \leftarrow \alpha\beta \equiv \rightarrow \beta\alpha$$

folgt, vermindert sich der Aufwand dazu erheblich.

Bei Vorgabe von  $\mathcal{J}_{\text{nand}}$  bzgl.  $\mathcal{J}_{\text{nor}}$  schließlich werden die passenden Definitionen aus

$$(\neg\alpha) := (\alpha \downarrow \alpha) \quad \neg\alpha := \downarrow \alpha\alpha$$

$$(\neg\alpha) := (\alpha \uparrow \alpha) \quad \neg\alpha := \uparrow \alpha\alpha$$

und, da  $\langle \rightarrow \rangle$  jetzt definiert ist, aus

$$(\alpha \vee \beta) := (\neg(\alpha \downarrow \beta)) \quad \vee \alpha\beta := \neg \downarrow \alpha\beta$$

$$(\alpha \wedge \beta) := (\neg(\alpha \uparrow \beta)) \quad \wedge \alpha\beta := \neg \uparrow \alpha\beta \quad (2.8)$$

ausgewählt und es ist (2.6) bzgl. (2.7) als Gleichung nachzuweisen.

Abschließend ist noch nachzuweisen, dass mit Hilfe der jeweils passenden der Definitionen (2.4) bis (2.8), ausgehend vom jeweils passenden  $\mathcal{L}_x$ , genau die gesamte Formelmeng  $\mathcal{L}$  erzeugt werden kann.



#### 2.4.4. Aussagenlogisches Axiomensystem

Ausgehend von der logischen Signatur  $\mathcal{J}_{\text{and}} = \{\neg, \wedge\}$  und der Definition 2.4 auf der vorherigen Seite von  $\leftrightarrow$  werden die folgenden vier logischen Axiome definiert:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) & \rightarrow \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \gamma \rightarrow \rightarrow \alpha \beta \rightarrow \alpha \gamma \\
 \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta & \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \wedge \alpha \beta \\
 \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha ; \quad \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta & \rightarrow \wedge \alpha \beta \alpha ; \quad \rightarrow \wedge \alpha \beta \beta \\
 (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg \alpha) & \rightarrow \rightarrow \alpha \neg \beta \rightarrow \beta \neg \alpha
 \end{array}$$

> > > Aussagenlogik weiter bearbeiten. < < <

### 2.5. Prädikatenlogik

> > > Prädikatenlogik bearbeiten. < < <

### 2.6. Mengenlehre

> > > Mengenlehre bearbeiten. < < <

## 3. Ideen

### 3.1. Schlussregeln

In diesem Abschnitt geht es um zulässige Transformationen, d. h. allgemeingültige Schlussregel. Dazu gehören zunächst die Basisregeln. Dann aber auch alle aus den Basisregeln und den bis dahin allgemeingültigen Schlussregeln korrekt abgeleiteten neuen Schlussregeln. Die Schlussregeln haben die Form eines Formalen Satzes.

#### 3.1.1. Basisregeln

Gemäß [1] Kapitel 1.4 *Ein vollständiger aussagenlogischer Kalkül* werden sechs Basisregeln definiert. Zuvor werden aber noch einige Definitionen gebraucht. Dazu seien  $n, m, k$  und  $l$  natürliche Zahlen (auch 0),  $\alpha, \alpha_i, \beta$  und  $\beta_j$  Formeln  $X, X_i, Y$  und  $Y_j$  Mengen von Formeln und

$$\begin{aligned} X &:= X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \\ Y &:= Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_k \cup \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l\} \end{aligned}$$

$X$  und  $Y$  können auch die leere Menge sein. Damit wird definiert:

$\alpha \vdash \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \beta$  ist mittels schrittweiser Anwendung *zulässiger Transformationen* (siehe weiter unten) aus  $\alpha$  ableitbar. Sprechweise: Aus  $\alpha$  ist  $\beta$  **ableitbar** oder **beweisbar**; kurz: „ $\alpha$  ableitbar  $\beta$ “ bzw. „ $\alpha$  beweisbar  $\beta$ “ – Es kann auch  $\langle \alpha \rangle$  durch  $\langle X \rangle$  und/oder  $\langle \beta \rangle$  durch  $\langle Y \rangle$  ersetzt werden.

$\vdash \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \emptyset \vdash \beta \quad (\vdash \text{ kann dann auch ganz entfallen})$

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \vdash Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l \quad :\Leftrightarrow \quad X \vdash Y$$

Eine **zulässige Transformation** ist die Anwendung einer *Substitution*<sup>1)</sup> (siehe unten), einer *Basisregel* (siehe unten) oder einer davon abgeleiteten sonstigen *Schlussregel*, z. B. aus Unterabschnitt 2.3.1 auf Seite 19. Bei den Schlussregeln und der Substitution ( $\leftarrow$ ) soll das Komma stärker binden als  $\langle \vdash \rangle$ ,  $\langle \leftarrow \rangle$  und  $\langle | \rangle$ , wobei  $\langle | \rangle$  für „und“ bzgl.  $\langle \& \rangle$ <sup>2)</sup> steht und schwächer bindet als  $\langle \vdash \rangle$  und  $\langle \leftarrow \rangle$ .<sup>3)</sup>

Zur der Auswahl der Basisregeln, der Formulierung und der Bezeichnungen wird auf [1, 34] zurückgegriffen. Wie in [34] steht  $\langle E \rangle$  für „Einführung“ und  $\langle B \rangle$  für „Beseitigung“ (oder „Elimination“) von Junktoren.<sup>4)</sup>

Im Folgenden seien  $\alpha$  und  $\beta$  wieder stets Formeln und  $X$  und  $Y$  Mengen von Formeln. Für die sechs Basisregeln werden dann nur noch die Junktoren  $\langle \rightarrow \rangle$  und  $\langle \wedge \rangle$  benötigt. Bei den weiteren Schlussregeln

<sup>1)</sup> siehe Unterabschnitt 3.1.2 auf der nächsten Seite

<sup>2)</sup> siehe Unterabschnitt ?? auf Seite ??

<sup>3)</sup> siehe Fußnote 3 von Tabelle 2.2 auf Seite 16

<sup>4)</sup> In der Monotonieregel wird hier, anders als in [1],  $\langle X, Y \rangle$  statt  $\langle Y, \text{für } Y \supseteq X \rangle$  genommen. Das ist gleichwertig, vermeidet aber den Zusatz  $\langle , \text{für } Y \supseteq X \rangle$ . Außerdem werden bei den Bezeichnungen  $\langle (\wedge 1) \rangle$  und  $\langle (\wedge 2) \rangle$  gemäß [34] durch  $\langle (\wedge E) \rangle$  bzw.  $\langle (\wedge B) \rangle$  ersetzt.

wird noch  $\leftrightarrow$  gemäß der Definition 2.4 auf Seite 24 verwendet.

$$\frac{}{\alpha \vdash \alpha} \quad (\text{Anfangsregel}) \quad (\text{AR})$$

$$\frac{X \vdash \alpha}{X, Y \vdash \alpha} \quad (\text{Monotonieregel}) \quad (\text{MR})$$

$$\frac{X \vdash \alpha, \neg \alpha}{X \vdash \beta} \quad (\text{Einführung/Beseitigung der Negation Teil 1}) \quad (\neg 1)$$

$$\frac{X, \alpha \vdash \beta \mid X, \neg \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta} \quad (\text{Einführung/Beseitigung der Negation Teil 2}) \quad (\neg 2)$$

$$\frac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta} \quad (\text{Einführung der Konjunktion}) \quad (\wedge E)$$

$$\frac{X \vdash \alpha \wedge \beta}{X \vdash \alpha, \beta} \quad (\text{Beseitigung der Konjunktion}) \quad (\wedge B)$$

In einer Schlussregel werden die Formeln<sup>5)</sup> über dem Querstrich als **Voraussetzungen** und die unter dem Querstrich als **Folgerungen** der Regel bezeichnet. Eine Schlussregel steht für die Aussage, dass mit ihren Voraussetzungen auch ihre Folgerungen gelten. – Im Gegensatz zu den weiteren Schlussregeln werden die oben aufgelisteten Basisregeln nicht weiter hinterfragt, d. h. sie gelten quasi als Axiome.

### 3.1.2. Identitätsregeln

Die **zulässigen Transformationen**, d. h. die Anwendung der Schlussregeln, erfordern zulässige Substitutionen. Damit wird dem Gleichheits- oder Identitätszeichen  $\leftrightarrow$  dann mittels Einführungs- und Beseitigungsregel eine Bedeutung verliehen.<sup>6)</sup> Dazu seien  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  vergleichbare<sup>7)</sup> Formeln. Zunächst wird definiert:

$\gamma(\alpha \leftarrow \beta) \quad :=$  Die Formel, die man erhält, wenn in  $\gamma$  alle oder nur einige Vorkommen von  $\alpha$  durch  $\beta$  ersetzt werden. – Gegebenenfalls muss noch die Auswahl der Ersetzungen angegeben werden, andernfalls werden alle Vorkommen ersetzt. Letzteres heißt dann **vollständige Substitution**.

$\gamma(\alpha \rightleftharpoons \beta) \quad :=$  Die Formel, die man erhält, wenn in  $\gamma$  alle  $\alpha$  und  $\beta$  miteinander vertauscht werden. Dazu ist es nötig, dass  $\alpha$  und  $\beta$  voneinander unabhängig sind, vorzugsweise zwei verschiedene Variable.

« $\alpha \leftarrow \beta$ » heißt **Substitution** und « $\alpha \rightleftharpoons \beta$ » **Vertauschung** oder kurz **Tausch**. – Sei noch  $S = (s_1, s_2, \dots)$  eine endliche Folge von Substitutionen, die auch Vertauschungen enthalten und auch leer sein kann. Dann wird definiert:

$$\begin{aligned} \gamma(S) &:= \gamma(s_1)(s_2)\dots & (3.1) \\ \gamma(\emptyset) &= \gamma & (\text{nur zur Verdeutlichung}) \\ \gamma(s_1, s_2, \dots) &:= \gamma(S) \end{aligned}$$

<sup>5)</sup> hier: Aussagen in einer formalen Form.

<sup>6)</sup> siehe [34]

<sup>7)</sup> siehe Ende von Unterabschnitt ?? auf Seite ??

Die Vertauschung ist eine spezielle Form der Substitution. Wenn  $x$  und  $y$  zwei verschiedene Variable, die in  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  nicht vorkommen, gilt:

$$\gamma(\alpha \rightleftharpoons \beta) = \gamma(\alpha \leftarrow x, \beta \leftarrow y, y \leftarrow \alpha, x \leftarrow \beta)$$

Sei zusätzlich noch  $s$  eine Substitution. Folgende Sprechweisen werden verwendet:

$\gamma(\alpha \leftarrow \beta)$  : In  $\gamma$  wird  $\alpha$  (**vollständig**) **durch  $\beta$  substituiert**.

$\gamma(\alpha \rightleftharpoons \beta)$  : In  $\gamma$  werden  $\alpha$  und  $\beta$  **vertauscht**.

$\gamma(s)$  :  $s$  wird auf  $\gamma$  **angewendet**.

$\gamma(S)$  : Die Substitutionen aus  $S$  werden in der angegebenen Reihenfolge auf  $\gamma$  angewendet.

$\gamma(S)$  :  $S$  wird auf  $\gamma$  angewendet.

Bei obiger Definition der Substitution bleibt noch offen, unter welchen Voraussetzungen sie angewendet werden darf. Das soll hier nicht untersucht werden. In diesem Abschnitt genügt es, dass nur Vertauschung und vollständige Substitution verwendet werden. In diesen Fällen sind beliebige Substitutionen von Variablen durch Formeln erlaubt.

Ist  $\gamma$  wie oben und  $S$  eine Menge von Substitutionen.

Nun können die beiden Identitätsregeln definiert werden:

$$\frac{}{\alpha = \alpha} \quad (\text{Einführung der Identität}) \quad (=E)$$

$$\frac{\alpha = \beta \mid \gamma}{\gamma(\alpha \leftarrow \beta)} \quad (\text{Beseitigung der Identität}) \quad (=B)$$

Die Identitätsregeln werden hier eingeführt, um die Substitution zu rechtfertigen. Wie die Basisregeln gelten sie als Axiome, würden also eigentlich dazu gehören. Da sie aber nicht weiter verwendet werden, werden sie hier nicht zu den Basisregeln gezählt.

### 3.1.3. Weitere Schlussregeln

In [1] werden aus den Basisregeln mittels zulässiger Transformationen weitere Schlussregeln abgeleitet.<sup>8)</sup> Man vergleiche auch mit [34].

$$\frac{X, \neg\alpha \vdash \alpha}{X \vdash \alpha} \quad (\text{Beseitigung der Negation; Indirekter Beweis}) \quad (\neg 3)$$

$$\frac{X, \neg\alpha \vdash \beta, \neg\beta}{X \vdash \alpha} \quad (\text{Reductio ad absurdum}) \quad (\neg 4)$$

$$\frac{X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \rightarrow \beta} \quad (\text{Einführung der Implikation}) \quad (\rightarrow E)$$

$$\frac{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}{X, \alpha \vdash \beta} \quad (\text{Beseitigung der Implikation}) \quad (\rightarrow B)$$

$$\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta} \quad (\text{Schnittregel}) \quad (\text{SR})$$

$$\frac{X \vdash \alpha \mid \alpha \rightarrow \beta}{X \vdash \beta} \quad (\text{Abtrennungsregel – Modus ponens}) \quad (\text{TR})$$

Dabei werden zum Beweis der Schlussregeln in [1] folgende Basisregeln verwendet:

$\neg 3$  : AR, MR,  $\neg 2$

$\neg 4$  : AR, MR,  $\neg 1$ ,  $\neg 2$

$\rightarrow E$  : AR, MR,  $\neg 1$ ,  $\neg 2$ ,  $\wedge E$

$\rightarrow B$  : AR, MR,  $\neg 1$ ,  $\neg 2$ ,  $\wedge B$

SR : AR, MR,  $\neg 1$ ,  $\neg 2$

TR : AR, MR,  $\neg 1$ ,  $\neg 2$ ,  $\wedge E$

### 3.1.4. Beispiel einer Ableitung

Als Beispiel wird hier die Schnittregel aus den Basisregeln abgeleitet.<sup>9)</sup> Dazu wird verabredet, dass in der Tabelle 3.1 auf Seite 31 der Inhalt der Zelle in der Zeile  $i$  und der Spalte  $(X_n)$  mit  $X_i$  bezeichnet wird. Zur kürzeren Darstellung wird statt auf die vollständigen Spaltenüberschriften nur auf die dort notierten  $(X_n)$  verwiesen. Dass in der Spalte  $(n)$  stets die Zeilennummer steht, wird im folgenden

<sup>8)</sup> In [1] werden die Identitätsregeln zwar weder aufgeführt noch angewandt, ohne Substitution geht es aber nicht.

<sup>9)</sup> Die Form der Tabelle ist angelehnt an [34] Kapitel 2.2.4 Eine Beispielableitung.

nicht mehr extra erwähnt. – Für die ausgefüllten Felder wird nun definiert:<sup>10)</sup>

$$R_i := \begin{cases} - \text{„Voraussetzung“} = \text{Die Aussage } A_i \text{ ist eine Voraussetzung.} \\ - \text{„Folgerung“} = \text{Die Aussage } A_i \text{ ist eine Folgerung.} \\ - \text{„Annahme“} = \text{Die Aussage } A_i \text{ wird vorübergehend als zutreffend angenommen.} \\ - j = \text{Verweis auf die Schlussregel } \bar{R}_j \text{ für ein } j < i. \\ - \text{Verweis (ohne Klammern) auf eine allgemeingültige Schlussregel.} \end{cases}$$

$S_i :=$  Die Reihe der anzuwendenden Substitutionen.

$\bar{R}_i :=$  Das Ergebnis der in der angegebenen Reihenfolge angewendeten Substitutionen aus  $S_i$  auf die Schlussregel  $R_i$

$Z_i :=$  Die Indizes  $j$  (mit  $j < i$ ) als Verweise auf eine oder mehrere Aussagen  $A_j$ , welche zusammen genau die Voraussetzungen der Schnittregel  $\bar{R}_i$  erfüllen.

$A_i :=$  Folgerung(en) der Schlussregel  $\bar{R}_i$  –  
auch in Form der Indizes von einem oder mehreren von  $A_j$  (mit  $j < i$ ).  
In der Ergebniszeile kann hier auch die bewiesene Aussage als Schlussregel stehen.

$D_i :=$  die Indizes der  $A_j$ , von denen  $A_i$  abhängig ist.

Bis zur Zeile  $i$  hat man die folgende Schlussregel bewiesen:

$$\frac{A_{i_1} \mid A_{i_2} \dots}{A_i}, \text{ für alle } i_j \in D_i$$

Sei nun

$$\Gamma_i := \begin{cases} \text{leer} & \text{für } R_i = \text{„Voraussetzung“} \\ \text{leer} & \text{für } R_i = \text{„Folgerung“} \\ \text{leer} & \text{für } R_i = \text{„Annahme“} \\ \bar{R}_j & \text{für } R_i = j \text{ (eine interne Schlussregel)} \\ \text{die Schlussregel} & \text{für } R_i = \text{Verweis auf eine externe Schlussregel} \end{cases}$$

Damit gilt für die Einträge in einer Zeile  $i$ :

- Wenn  $\Gamma_i$  nicht leer ist, ist  $R_i$  eine Schlussregel mit  $R_i = \Gamma_i(S_i)$ <sup>11)</sup>.
- Wenn  $A_i$  nicht leer ist, ist  $R_i = \frac{A_{z_1} \mid A_{z_2} \mid \dots}{A_i}$  (alle  $z_j \in Z_i$ ).
- Wenn  $A_i$  nicht leer ist, ist bis jetzt die Schlussregel  $\frac{A_{d_1} \mid A_{d_2} \mid \dots}{A_i}$  (alle  $d_j \in D_i$ ) schon bewiesen.

$S_i$ ,  $Z_i$  und  $D_i$  dürfen dabei auch leer sein.

Die Erzeugung einer Tabelle analog zu 3.1 auf der nächsten Seite wird im folgenden beschrieben. Zellen, für die kein Inhalt angegeben wird, bleiben leer. Rückwärts-Referenzen auf schon ausgefüllte Zellinhalte sind jederzeit möglich. Das Eintragen der Zeilennummer  $i$  wird nicht extra erwähnt. – Die Tabelle und die Beschreibung sind so ausführlich, damit man daraus leicht ein Computerprogramm erstellen kann.

1. Am Anfang der Tabelle werden zuerst Voraussetzungen, dann zu beweisende Folgerungen und schließlich Annahmen aufgeführt.<sup>12)</sup> Jede der drei Gruppen kann auch leer sein und es ist auch

<sup>10)</sup> Eigentlich müsste man für jede Substitution aus  $S_i$  eine eigene Zeile vorsehen. Um die Tabellen für die Beweise kürzer zu halten, werden aufeinanderfolgende Substitutionen zusammengefasst.

<sup>11)</sup> siehe Definition (3.1) von Unterabschnitt 3.1.2 auf Seite 27

<sup>12)</sup> Die Angabe ist dann erforderlich, wenn darauf verwiesen wird. Durch die Auflistung hat man aber einen vollständigen Überblick über die Voraussetzungen und Folgerungen eines Beweises und die Zwischenannahmen. Auf jede nötige Voraussetzung und jede verwendete Zwischenannahme wird in der Spalte ( $Z_n$ ) mindestens einmal verwiesen, so dass sie auch aufgeführt werden müssen. Die Angabe der Folgerungen erleichtert die Erstellung einer Ergebniszeile (siehe Punkt 3).

Zeile ( $n$ )	Regel ( $R_n$ )	Substitu- tionen ( $S_n$ )	erzeugte Regel ( $\bar{R}_n$ )	angewendet auf ... ( $Z_n$ )	Aussage ( $A_n$ )	Abhängig- keiten ( $D_n$ )
1	Voraus- setzung				$X \vdash \alpha$	1
2	Voraus- setzung				$X, \alpha \vdash \beta$	2
3	Folge- rung				$X \vdash \beta$	3
4	MR		$\frac{X \vdash \alpha}{X, Y \vdash \alpha}$			
5	4	$Y \leftarrow \neg \alpha$	$\frac{X \vdash \alpha}{X, \neg \alpha \vdash \alpha}$	1	$X, \neg \alpha \vdash \alpha$	1
6	AR		$\frac{}{\alpha \vdash \alpha}$			
7	6	$\alpha \leftarrow \neg \alpha$	$\frac{}{\neg \alpha \vdash \neg \alpha}$		$\neg \alpha \vdash \neg \alpha$	
8	4	$\alpha \leftarrow \neg \alpha$ $X \leftarrow \neg \alpha$ $Y \leftarrow X$	$\frac{\neg \alpha \vdash \neg \alpha}{X, \neg \alpha \vdash \neg \alpha}$	7	$X, \neg \alpha \vdash \neg \alpha$	
9	$\neg 1$		$\frac{X \vdash \alpha, \neg \alpha}{X \vdash \beta}$			
10	9	$X \leftarrow X, \neg \alpha$	$\frac{X, \neg \alpha \vdash \alpha, \neg \alpha}{X, \neg \alpha \vdash \beta}$	5, 8	$X, \neg \alpha \vdash \beta$	1
11	$\neg 2$		$\frac{X, \alpha \vdash \beta \mid X, \neg \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$	2, 10	3	1, 2
12	AR, MR, $\neg 1, \neg 2$		$\frac{A_1 \mid A_2}{A_3}$		$\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$	

Tabelle 3.1.: Ableitung der Schnittregel aus den Basisregeln

möglich, die Zeilen an anderen Stellen der Tabelle anzugeben, spätestens aber, wenn darauf verwiesen wird. Für jede Voraussetzung, Folgerung und Annahme gibt es eine Zeile:

- a)  $R_i$  = „Voraussetzung“, „Folgerung“ oder „Annahme“.
- b)  $A_i$  = Die aktuelle Voraussetzung, Folgerung oder Annahme.
- c)  $D_i = i$  (ein Verweis auf  $A_i$ ).

2. In den nächsten Zeilen werden die Beweisschritte aufgeführt, für jeden Schritt eine Zeile.

Zunächst kann  $R_i$  kann auf zwei Arten erzeugt werden:

- a) i.  $R_i$  = Verweis auf eine allgemeingültige Schlussregel.
- ii.  $\bar{R}_i$  = Die Schlussregel, auf die verwiesen wird.

oder

- a) i.  $R_i = j$ , wenn die schon bewiesene Schlussregel  $\bar{R}_j$  (mit  $j < i$ ) angewendet werden soll.
- ii.  $S_i$  = Die auf die Schlussregel  $R_i$  anzuwendende Substitution.
- iii.  $\bar{R}_i$  = Das Ergebnis der Substitution  $S_i$  auf die Schlussregel  $R_i$ .

Man beachte, dass die Schlussregel  $\bar{R}_i$ , stets allgemeingültig ist, da sie ausschließlich aus allgemeingültigen Schlussregeln mittels Substitutionen abgeleitet worden ist. Daher gibt es auch keine Beschränkung weiterer Substitutionen durch irgendwelche Abhängigkeiten.

Nun kann die Zeile beendet werden, oder es geht weiter mit:

- b)  $Z_n$  = Die Indizes aller  $A_j$  (mit  $j < i$ ), die eine Voraussetzung der Schlussregel  $\bar{R}_i$  sind, möglichst in der verwendeten Reihenfolge. – Für jedes angegebene  $j$  werden noch die Abhängigkeiten  $D_j$  den Abhängigkeiten  $D_i$  hinzugefügt.
- c)  $A_i$  = Folgerung(en) der Schlussregel  $\bar{R}_i$ . – Wenn diese Folgerungen schon als Aussagen  $A_j$  (mit  $j < i$ ) vorhanden sind, können auch einfach deren Indizes eingetragen werden. Damit werden die Zusammenhänge und der Abschluss des Beweises besser ersichtlich.
- d)  $D_i$  = Die Verweise wurden schon in (2b) eingetragen.<sup>13)</sup>

Der Beweis muss so lange fortgeführt werden, bis alle Folgerungen als Aussagen in der Spalte ( $A_n$ ) erschienen und dort jeweils nur von den gegebenen Voraussetzungen abhängig sind.

3. In einer **Ergebniszeile**, die dann die letzte ist, kann noch die bewiesene Behauptung in Form einer Schlussregel formuliert und in einer passenden Spalte notiert werden. Zusätzlich können dort auch noch alle verwendeten Schlussregeln gesammelt werden. Dies kann z. B. folgendermaßen geschehen:

- a)  $(R_n)$  = Verweise auf alle verwendeten externen Schlussregeln.
- b)  $(\bar{R}_n)$  = Die bewiesene Behauptung als Schlussregeln, wobei alle  $A_i$ , die Voraussetzungen sind, als Voraussetzung und alle  $A_j$ , die Folgerungen sind, als Folgerung eingesetzt werden, jeweils in der Form „ $A_i$ “ bzgl. „ $A_j$ “. Das ergibt dann:

$$\frac{A_{i_1} \mid A_{i_2} \mid \dots}{A_{j_1} \mid A_{j_2} \mid \dots}$$

- c)  $(A_n) = \bar{R}_i$ , wobei die Voraussetzungen und Folgerungen aufgelöst werden.
- d)  $(D_n)$  = Die Vereinigung aller Abhängigkeiten der Folgerungen vermindert um die Voraussetzungen. – Wenn das Feld dabei nicht leer bleibt, ist der Beweis missglückt!

Ein weiteres Beispiel in der Tabelle 3.2 auf der nächsten Seite soll verdeutlichen, wie Abhängigkeiten von Zwischenannahmen wieder beseitigt werden können.<sup>14)</sup>

> > > **Beispielableitung der Kontraposition vervollständigen** < < <

<sup>13)</sup> Wenn  $D_n$  leer ist, dann ist  $A_n$  allgemeingültig.

<sup>14)</sup> siehe [34], Kapitel 2.2.4 Eine Beispielableitung



Zeile ( $n$ )	Regel ( $R_n$ )	Substitu- tionen ( $S_n$ )	erzeugte Regel ( $\bar{R}_n$ )	angewendet auf ... ( $Z_n$ )	Aussage ( $A_n$ )	Abhängig- keiten ( $D_n$ )
1	Folge- rung				$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	1
2	An- nahme				$\alpha \rightarrow \beta$	2
3	An- nahme				$\neg\beta$	3
4	An- nahme				$\alpha$	4
5	$\rightarrow B$		$\frac{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}{X, \alpha \vdash \beta}$			
6	-1	$X \leftrightarrow \emptyset$	$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha \vdash \beta}$	2	$\alpha \vdash \beta$	2
7	SR		$\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$			
8	-1	$X \leftrightarrow \emptyset$	$\frac{\alpha \mid \alpha \vdash \beta}{\beta}$	4, 6	$\beta$	4, 6
9'	$\wedge E$		$\frac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta}$			
10'	-1	$X \leftrightarrow \emptyset$	$\frac{\alpha \mid \beta}{\alpha \wedge \beta}$			
11'	-1	$\alpha \leftrightarrow \beta$ $\alpha \leftrightarrow \neg\beta$	$\frac{\beta \mid \neg\beta}{\beta \wedge \neg\beta}$	8, 3	$\beta \wedge \neg\beta$	
9	$\neg 1$		$\frac{X \vdash \alpha, \neg\alpha}{X \vdash \beta}$			
10	-1	$X \leftrightarrow \emptyset$	$\frac{\alpha \mid \neg\alpha}{\beta}$			
11	-1	$\alpha \leftrightarrow \beta$ $\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$	$\frac{\beta \mid \neg\beta}{\neg\alpha}$	8, 3	$\neg\alpha$	2, 3, 4
12	$\rightarrow E$		$\frac{X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}$			
13	-1	$X \leftrightarrow \emptyset$	$\frac{\alpha \vdash \beta}{\alpha \rightarrow \beta}$			
14	-1	$\alpha \leftrightarrow \beta$ $\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$ $\beta \leftrightarrow \neg\beta$ $\alpha \leftrightarrow \gamma$	$\frac{\neg\beta \vdash \neg\alpha}{\neg\beta \rightarrow \neg\alpha}$	3, 11, ???	$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	2, 3, 4, ???
15	$\rightarrow E+1$	$\beta \leftrightarrow \delta$ $\gamma \leftrightarrow \alpha \rightarrow \beta$ $\delta \leftrightarrow \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	$\frac{\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha}{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)}$	2, 14	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	2, 3, 4, ???
16	$\rightarrow E, \rightarrow B,$ SR		$\bar{A}_1$		$\overline{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)}$	

Tabelle 3.2.: Ableitung der Kontraposition aus allgemeingültigen Schlussregeln

## 4. Design

Dieses Projekt soll Open Source sein. Daher gilt für die Dokumente die *GNU Free Documentation License (FDL)* und für die Software die *GNU Affero General Public License (APGL)*. Die *GNU General Public License (GPL)* reicht für die Software nicht aus, da das Programm auch mittels eines Servers betrieben werden kann und soll. Damit das Projekt gegebenenfalls durch verschiedene Entwickler gleichzeitig bearbeitet werden kann und wegen des Konfigurationsmanagements wurde es als ein GitHub Projekt erstellt (siehe [20]).

Wenn die Lizenzen nicht mitgeliefert wurden, können sie unter <http://www.gnu.org/licenses/> gefunden werden.

### 4.1. Anforderungen

Die Anforderungen ergeben sich zunächst aus den Zielen im Abschnitt 1.3 auf Seite 5. Die beiden Ziele 1 Daten und 15 Lizenz sind für die Entwicklung von ASBA von sekundärer Bedeutung und werden daher in diesem Abschnitt nicht übernommen. Die anderen Ziele werden noch verfeinert.

> > > **Ziele aus Abschnitt “Ziele” in Anforderungen umwandeln.** < < <

1. *Form*: Die Daten liegt in formaler, geprüfter Form vor. (siehe Ziel 2 auf Seite 5)
2. *Eingaben*: Die Eingabe von Daten erfolgt in einer formalen Syntax unter Verwendung der üblichen mathematischen Schreibweise. Folgende Daten können eingegeben werden:
  - a) Axiome
  - b) Sätze
  - c) Beweise
  - d) Fachbegriffe
  - e) Fachgebiete
  - f) Ausgabeschemata

Dabei sind alle Begriffe nur innerhalb eines Fachgebiets und seiner untergeordneten Fachgebiete gültig, solange sie nicht undefiniert werden. Das oberste Fachgebiet ist die ganze Mathematik. – siehe Ziel 3 auf Seite 5

3. *Prüfung*: Vorhandene Beweise können automatisch geprüft werden. – siehe Ziel 4 auf Seite 5
4. *Ausgaben*: Die Ausgabe kann in einer eindeutigen, formalen Syntax gemäß vorhandener Ausgabeschemata erfolgen. – siehe Ziel 5 auf Seite 6
5. *Auswertungen*: Zusätzlich zur Ausgabe der Daten sind verschiedene Auswertungen möglich. Insbesondere kann zu jedem Beweis angegeben werden, wie lang er ist und welche Axiome und Sätze<sup>1)</sup> er benötigt. – siehe Ziel 6 auf Seite 6

---

<sup>1)</sup> Sätze, die quasi als Axiome verwendet werden.

6. *Anpassbarkeit*: Fachbegriffe und die Darstellung bei der Ausgabe können mit Hilfe von – gegebenenfalls unbenannten – untergeordneten Fachgebieten angepasst werden. – siehe Ziel 7 auf Seite 6
7. *Individualität*: Axiome und Sätze können für jeden Beweis individuell vorausgesetzt werden. Dabei sind fachgebietsspezifische Fachbegriffe erlaubt. – siehe Ziel 8 auf Seite 6)
8. *Internet*: Die Daten können auf mehrere Dateien verteilt sein. Ein Teil davon – oder sogar alle – können im Internet liegen. – siehe Ziel 9 auf Seite 6
9. *Kommunikation*: Die Kommunikation mit ASBA kann mit den Fachbegriffen der einzelnen Fachgebiete erfolgen. – siehe Ziel 10 auf Seite 6
10. *Zugriff*: Der Zugriff auf ASBA kann lokal und über das Internet erfolgen. – siehe Ziel 11 auf Seite 6
11. *Unabhängigkeit*: ASBA kann offline und online arbeiten. – siehe Ziel 12 auf Seite 6
12. *Rekursion*: Es kann rekursiv über alle verwendeten Dateien – auch solchen, die im Internet liegen – ausgewertet werden. – siehe Ziel 13 auf Seite 6
13. *Bedienbarkeit*: ASBA ist einfach zu bedienen. – siehe Ziel 14 auf Seite 6

## 4.2. Axiome

> > > Axiome auswählen und definieren. < < <

## 4.3. Beweise

> > > Schlussregeln auswählen und Beweise definieren. < < <

## 4.4. Datenstruktur

> > > Datenstruktur abstrakt und in XML definieren. < < <

## 4.5. Bausteine

> > > Bausteine? definieren. < < <

# A. Anhang

## A.1. Werkzeuge

Da dies ein Open Source Projekt sein soll, müssen alle Werkzeuge, die zum Ablauf der Software erforderlich sind, ebenfalls Open Source sein. Für die reine Entwicklung sollte das auch gelten, muss es aber nicht.

### Werkzeuge zur Übersetzung der Quelldateien

1. Ein Übersetzer für  $\text{\LaTeX}$  Quellcode (\*.tex). – Verwendet wird *MiKTeX*.
2. Ein Übersetzer für C++ Quellcode (\*.c, \*.cpp, \*.h, \*.hpp). – Verwendet wird *Visual Studio Community 2017*.

Nicht unbedingt nötig, aber sinnvoll:

3. Ein Dokumentationssystem für in C++ Quellcode und darin enthaltene Doxygen Kommentare (\*.c, \*.cpp, \*.h, \*.hpp). – Verwendet wird *Doxygen* mit Konfigurationsdatei „Doxyfile“.
4. Ein Konfigurationsmanagementsystem zur Verwaltung der Quelldateien. – Verwendet wird *GitHub*.

### Werkzeuge für die Entwicklung

5. *GitHub* als Online Konfigurationsmanagementsystem zur Zusammenarbeit verschiedener Entwickler. → <https://github.com/> – Lizenz siehe [7]
6. *GitHub* benötigt *Git* als Konfigurationsmanagementsystem. → <https://git-scm.com/> – Lizenz siehe [7]
7. *MiKTeX* für Dokumentation und Ausgaben in  $\text{\LaTeX}$ . → <https://miktex.org/> – Lizenz siehe [11]
8. angedacht: *Visual Studio Community 2017*<sup>1)</sup> (VS) als Entwicklungsumgebung für C++. → <https://www.visualstudio.com/downloads/> – Lizenz siehe [10]
9. angedacht: In *Visual Studio Community 2015* integrierte Datenbank für Ausgabeschemata, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Fachgebiete. – Lizenz siehe [10]
10. angedacht: *RapidXml* für Ein- und Ausgabe in XML. → <http://rapidxml.sourceforge.net/index.htm> – Lizenz siehe wahlweise [3] oder [13]<sup>2)</sup>
11. angedacht: *Doxygen* als Dokumentationssystem für C++. → <http://www.stack.nl/~dimitri/doxygen/> – Lizenz siehe [7]
12. angedacht: *Doxygen* benötigt *Ghostscript* als Interpreter für Postscript und PDF. → <http://ghostscript.com/> – Lizenz siehe [5]

<sup>1)</sup> Visual Studio Community ist zwar nicht Open Source, darf aber zur Entwicklung von Open Source Software unentgeltlich verwendet werden.

<sup>2)</sup> RapidXml stellt eine C++ Header-Datei zur Verfügung. Wenn diese im Quellcode eines Programms enthalten ist, gilt das ganze Programm als Open Source. Wenn diese Header-Datei nur in einer Bibliothek innerhalb eines Projekts verwendet wird, so gilt nur diese Bibliothek als Open Source.

13. angedacht: Doxygen benötigt *Graphviz* mit *Dot* zur Erzeugung und Visualisierung von Graphen.  
→ <http://www.graphviz.org/Home.php> – Lizenz siehe [4]

### Werkzeuge zur Bearbeitung der Quelldateien

14. *T<sub>E</sub>Xstudio* als Editor für L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. → <http://www.texstudio.org/> – Lizenz siehe [7]  
T<sub>E</sub>Xstudio benötigt einen Interpreter für Perl:
15. *Strawberry Perl* als Interpreter für Perl. → <http://strawberryperl.com/> – Lizenz: Various OSI-compatible Open Source licenses, or given to the public domain
16. *Notepad++* als Text-Editor. → <https://notepad-plus-plus.org/> – Lizenz siehe [6]
17. *WinMerge* zum Vergleich von Dateien und Verzeichnissen. → <http://winmerge.org/> – Lizenz siehe [6]

## A.2. Offene Aufgaben

1. TODOs bearbeiten.
2. Eingabeprogramm erstellen (liest XML).
3. Prüfprogramm erstellen.
4. Ausgabeprogramm erstellen (schreibt XML).
5. FormelAusgabe erstellen (erzeugt L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X aus XML).
6. Axiome sammeln und eingeben.
7. Sätze sammeln und eingeben.
8. Beweise sammeln und eingeben.
9. Fachbegriffe und Symbole sammeln und eingeben.
10. Fachgebiete sammeln und eingeben.
11. Ausgabeschemata sammeln und eingeben.

## B. Verzeichnisse

### Tabellenverzeichnis

1.1. 1.1 Fragen $\rightarrow$ 1.2 Eigenschaften . . . . .	6
1.2. 1.2 Eigenschaften $\rightarrow$ 1.3 Ziele . . . . .	7
1.3. 1.1 Fragen $\rightarrow$ 1.3 Ziele . . . . .	8
2.1. Beispiele für $\simeq$ und $\sim$ . . . . .	14
2.2. Prioritäten in abnehmender Reihenfolge . . . . .	16
2.3. Definition von aussagenlogischen Symbolen. . . . .	21
3.1. Ableitung der Schnittregelaus den Basisregeln . . . . .	31
3.2. Ableitung der Kontrapositionaus allgemeingültigen Schlussregeln . . . . .	33

### Abbildungsverzeichnis

1.1. Die Umgebung von ASBA . . . . .	9
--------------------------------------	---

# Literaturverzeichnis

- [1] Wolfgang Rautenberg, *Einführung in die Mathematische Logik*: Ein Lehrbuch, 3. Auflage, Vieweg+Teubner 2008
- [2] *Apache License*, Version 2.0 →<sup>1)</sup> <http://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0> 02.01.2004<sup>2)</sup>
- [3] *Boost Software License* 1.0 → <http://www.boost.org/users/license.html> 17.08.2003
- [4] *Eclipse Public License* Version 1.0 → <http://www.eclipse.org/org/documents/epl-v10.php> 09.03.2017
- [5] *GNU Affero General Public License* → <http://www.gnu.org/licenses/agpl> 19.11.2007
- [6] *GNU General Public License* → <http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-1.0> 02.1989
- [7] *GNU General Public License*, Version 2  
→ <http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-2.0> 06.1991
- [8] *GNU Lesser General Public License*, Version 2.1  
→ <http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/lgpl-2.1> 02.1999
- [9] Lizenz für *Clover* → <https://www.atlassian.com/software/clover> 2017
- [10] Lizenz für *Microsoft Visual Studio Express* 2015  
→ <https://www.visualstudio.com/de/license-terms/mt171551/> 2017
- [11] Lizenz für *MikTeX* → <https://miktex.org/kb/copying> 14.01.2014
- [12] Lizenz für *SAX* → <http://www.saxproject.org/copying.html> 05.05.2000
- [13] *MIT License* → <https://opensource.org/licenses/MIT/> 09.03.2017
- [14] *Oracle Binary Code License Agreement* → <http://java.com/license> 02.04.2013
- [15] *OSI Certified Open Source Software*  
→ <https://opensource.org/pressreleases/certified-open-source.php> 16.06.1999
- [16] *W3C Document License* → <http://www.w3.org/Consortium/Legal/2015/doc-license> 01.02.2015
- [17] *W3C Software Notice and License*  
→ <http://www.w3.org/Consortium/Legal/2002/copyright-software-20021231.html> 13.05.2015
- [18] *Hilbert II – Introduction* → <http://www.qedeq.org/> 20.01.2014
- [19] *Formal Correct Mathematical Knowledge*: GitHub Repository vom Projekt Hilbert II  
→ <https://github.com/m-31/qedeq/> 04.08.2016
- [20] *ASBA – Axiome, Sätze, Beweise und Auswertungen*. Projekt zur maschinellen Überprüfung von mathematischen Beweisen und deren Ausgabe in lesbarer Form: GitHub Repository vom Projekt ASBA – in Bearbeitung → <https://github.com/Dr-Winfried/ASBA>

<sup>1)</sup> Der Pfeil (→) verweist stets auf einen Link zu einer Seite im Internet.

<sup>2)</sup> Das Datum hinter dem Link gibt – je nachdem welches bekannt ist – das Datum der letzten Änderung, den Stand der Seite oder das Datum, an dem die Seite angeschaut wurde an. Sind mehrere Daten vorhanden, wird das erste vorhandene in der angegebenen Reihenfolge genommen. – Dies gilt für alle hier aufgelisteten Seiten im Internet.

- [21] Meyling, Michael: *Anfangsgründe der mathematischen Logik*  
→ [http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq\\_logic\\_v1\\_de.pdf](http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_logic_v1_de.pdf) 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)
- [22] Meyling, Michael: *Formale Prädikatenlogik*  
→ [http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq\\_formal\\_logic\\_v1\\_de.pdf](http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_formal_logic_v1_de.pdf) 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)
- [23] Meyling, Michael: *Axiomatische Mengenlehre*  
→ [http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq\\_set\\_theory\\_v1\\_de.pdf](http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_set_theory_v1_de.pdf) 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)
- [24] Meyling, Michael: *Elements of Mathematical Logic*  
→ [http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq\\_logic\\_v1\\_en.pdf](http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_logic_v1_en.pdf) 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)
- [25] Meyling, Michael: *Formal Predicate Calculus*  
→ [http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq\\_formal\\_logic\\_v1\\_en.pdf](http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_formal_logic_v1_en.pdf) 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)
- [26] Meyling, Michael: *Axiomatic Set Theory*  
→ [http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq\\_set\\_theory\\_v1\\_en.pdf](http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_set_theory_v1_en.pdf) 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)
- [27] Wikipedia: *Aussagenlogik Kapitel 2.2 Mögliche Junktoren*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Junktor#M.C3.B6gliche\\_Junktoren](https://de.wikipedia.org/wiki/Junktor#M.C3.B6gliche_Junktoren) 20.01.2016
- [28] Wikipedia: *Aussagenlogik Kapitel 4 Formaler Zugang*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Aussagenlogik#Formaler\\_Zugang](https://de.wikipedia.org/wiki/Aussagenlogik#Formaler_Zugang) 13.02.2017
- [29] Wikipedia: *Identität (Logik) Kapitel 2.3 Identität in der Informatik* → [https://de.wikipedia.org/wiki/Identit%C3%A4t\\_\(Logik\)#Identit.C3.A4t\\_in\\_der\\_Informatik](https://de.wikipedia.org/wiki/Identit%C3%A4t_(Logik)#Identit.C3.A4t_in_der_Informatik) 18.05.2017
- [30] Wikipedia: *Kalkül* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Kalk%C3%BCl> 26.02.2017
- [31] Wikipedia: *Mengenlehre* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Mengenlehre> 03.03.2017
- [32] Wikipedia: *Prädikatenlogik erster Stufe*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik\\_erster\\_Stufe](https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik_erster_Stufe) 24.02.2017
- [33] Wikipedia: *Schlussregel* → <https://de.wikipedia.org/wiki/Schlussregel> 01.05.2017
- [34] Wikipedia: *Natürliches Schließen*  
→ [https://de.wikipedia.org/wiki/Systeme\\_nat%C3%BCrlichen\\_Schlie%C3%9Fens](https://de.wikipedia.org/wiki/Systeme_nat%C3%BCrlichen_Schlie%C3%9Fens) 01.05.2017



# Index

- Junktorsymbole, Menge der, 22
- ASBA, 4–7, 9, 10, 12, 15, 19, 20, 22, 34, 35, 38
- Ableitungsrelation, 16
- Abtrennungsregel, 29
- Anfangsregel, 27
- Ausgabeschema, 1, 5, 6, 9, 10, 34, 36, 37
- Aussagenlogik, 20, 22
- Aussage, 10, 13, 15, 17–21, 27, 30–33
- Axiomensystem, 19
- Axiom, 1, 4–6, 8–12, 17, 19, 22, 23, 25, 27, 28, 34, 35, 37
- Basisregel, 26–29, 31, 38
- Beweisschrittfolge, 20
- Beweisschrittmenge, 20
- Beweisschritt, 10, 12, 15, 20, 31
- Beweis, 1, 4–6, 8–12, 15, 19, 20, 22, 23, 29, 30, 32, 34–37
- Boolsche Signatur, 23, 24
- Fachbegriff, 4–6, 10, 34–37
- Fachgebiet, 4–6, 10, 34–37
- Folgerung, 15, 19, 20, 27, 30–32
- Formelmenge, 23, 24
- Formel, 13, 15–17, 19, 20, 22, 23, 26–28
- Gleichheitsrelation, 16, 18
- Identitätsregel, 28, 29
- Junktorsymbol, 20, 22
- Junktor, 13–15, 17, 18, 20–24, 26
- Kontraposition, 33, 38
- Metaoperator, 15–17, 19
- Metarelation, 16, 17
- Metasprache, 15
- Monotonieregel, 26, 27
- Objekt, 13, 17, 18
- Operator, 13–18, 21
- Prädikatenlogik, 20, 22
- Relation, 13, 14
- Satz, 4–6, 9–12, 22, 26, 34, 36
- Schlussregel, 19, 20, 26, 27, 29–32
- Schnittregel, 29–31, 38
- Substitution, 16, 23, 26–31
- Symbol, 12, 13
- Transformationsmenge, 20
- Transformation, 20
- Vertauschung, 27, 28
- Voraussetzung, 19, 20, 27, 28, 30–32
- Wahrheitswert, 18, 20, 21
- Zeichenfolge, 12, 13, 17
- Zeichenkette, 12, 13
- ableitbar, 26
- $\mathcal{L}_x^P$ , 23
- allgemeingültige Schlussregel, 19, 20, 26, 30, 31, 33, 38
- atomare Formel, 23
- beweisbar, 26
- formaler Satz, 19
- interessierende Eigenschaft, 18
- logische Signatur, 23, 25
- $\triangleleft$ , 14
- $\&$ , 16, 26
- $\Leftrightarrow$ , 17
- $\Rightarrow$ , 17
- $\parallel$ , 16
- $\Leftarrow$ , 17
- $\sim$ , 14
- $\simeq$ , 14
- $\nearrow$ , 14
- $\triangleright$ , 14
- $|$ , 16
- vergleichbar, 17, 27
- zulässige Transformation, 19, 26, 27, 29
- Alphabet der logischen Sprache, 22
- atomar, 15
- aussagenlogische Formel in Polnischer Notation, 23
- aussagenlogische Formel mit Klammerung, 22
- binäre Junktoren, Menge der, 22
- Definition, 18
- Gleichheit, 18
- Konstanten, Menge der, 22
- Kontravalenz, 18
- Metadefinition, 18
- Polnische Notation, 22
- Teil-Alphabet der aussagenlogischen Sprache, 22

Ungleichheit, 18

unzerlegbar, 15

unäre Junktoren, Menge der, 22

zerlegbar, 15

Ziel, 5

Äquivalenz, 18

# Symbolverzeichnis

$(\dots)$ , 21

$\wedge$ , 21

$\leftrightarrow$ , 21

$\rightarrow$ , 21

$\uparrow$ , 21

$\downarrow$ , 21

$\neg$ , 21

$\vee$ , 21

$\leftarrow$ , 21

$+$ , 21

$(AR)$ , 27

$(FS)$ , 19

$(MR)$ , 27

$(SR)$ , 29

$(TR)$ , 29

$\mathcal{A}_x$ , 22

$\mathcal{A}$ , 22

$\mathcal{O}$ , 22

$\mathcal{K}$ , 22

$\mathcal{L}_x^p$ , 23

$\mathcal{L}_x$ , 22

$\mathcal{J}_x$ , 22

$\mathcal{J}$ , 22

$\mathcal{U}$ , 22

$\mathcal{Q}$ , 22

$(\wedge B)$ , 27

$(\wedge E)$ , 27

$:=$ , 18

$(= B)$ , 28

$(= E)$ , 28

$\equiv$ , 18

$=$ , 18

$(\rightarrow B)$ , 29

$(\rightarrow E)$ , 29

$\perp$ , 21

$\top$ , 21

$:\Leftrightarrow$ , 18

$\neq$ , 18

$\neq$ , 18

$(\neg 1)$ , 27

$(\neg 2)$ , 27

$(\neg 3)$ , 29

$(\neg 4)$ , 29

# Glossar

- $:=$  Definition: ... definitionsgemäß gleich ... 18
- $\mathcal{A}$  Das Alphabet der aussagenlogischen Sprache. 22
- $\mathcal{A}_x$  Eine Teilmenge des Alphabets  $\mathcal{A}$  der aussagenlogischen Sprache. 22
- $\mathcal{O}$  Die Menge der aussagenlogischen, binären Operatoren. 22
- $\mathcal{K}$  Die Menge der aussagenlogischen Konstanten. 22
- $\mathcal{L}_x$  Eine Teilmenge der Menge  $\mathcal{L}$  der aussagenlogischen Formeln mit Klammerung. 22
- $\mathcal{L}_x^p$  Eine Teilmenge der Menge  $\mathcal{L}$  der aussagenlogischen Formeln in polnischer Notation. 23
- $\mathcal{J}$  Die Menge der aussagenlogischen Operatorsymbole. 22
- $\mathcal{J}_x$  Eine Teilmenge der Menge  $\mathcal{J}$  der aussagenlogischen Operatoren. 22
- $\mathcal{U}$  Die Menge der aussagenlogischen unären Operatoren. 22
- $\mathcal{Q}$  Die Menge der aussagenlogischen Variablen. 22
- $=$  Eine Metarelation: ... gleich (ist dasselbe wie, ist identisch zu) ... 18
- $\equiv$  Eine Metarelation: ... äquivalent zu (ist das gleiche wie, ist so wie) ... 18
- $\perp$  Eine aussagenlogische Konstante (Wahrheitswert): Falsch. 21
- $\triangleleft$  Beispielsymbol für eine Relation mit Umkehrrelation  $\triangleright$ . 14
- $\top$  Eine aussagenlogische Konstante (Wahrheitswert): Wahr. 21
- $\&$  Ein Metaoperator: ... und ... 16, 26
- $:\Leftrightarrow$  Metadefinition: ... definitionsgemäß gleich (definitionsgemäß genau dann, wenn) ... 18
- $\Leftrightarrow$  Eine Metarelation: ... genau dann wenn ... 17
- $\Rightarrow$  Eine Metarelation: ... dann auch ... 17
- $\parallel$  Ein Metaoperator: ... oder ... 16
- $\Leftarrow$  Eine Metarelation: ... sofern ... 17
- $\neq$  Eine (Meta-)Operator: ... ungleich (nicht dasselbe wie, nicht identisch zu) ... 18
- $\neq$  Eine Metarelation: ... nicht äquivalent (ist nicht das gleiche wie, ist nicht so wie) ... 18
- $\sim$  Beispielsymbol für eine Relation. 14
- $\simeq$  Beispielsymbol für eine Relation mit Gleichheit. 14
- $\neg$  Verneinung von  $\sim$ . 14
- $\triangleright$  Beispielsymbol für eine Relation mit Umkehrrelation  $\triangleleft$ . 14
- $|$  Ein Metaoperator: ... und ... – wird nur bei den Schlussregeln verwendet. 16

**ableitbar** Wenn sich eine Formel  $\beta$  aus einer anderen Formel  $\alpha$  mittels zulässiger Transaktionen ableiten lässt, heißt  $\beta$  ableitbar aus  $\alpha$ . Sprechweise: « $\alpha$  ableitbar  $\beta$ ». Eine oder beide Formeln  $\alpha$  bzw.  $\beta$  dürfen dabei durch Formelmengen ersetzt werden. – siehe Ableitungsrelation und  $\vdash$ .  
Synonym: beweisbar. 26

**Ableitungsrelation** Die Relation  $\vdash$ . 16

**Abtrennungsregel** Eine Schlussregel – siehe TR 29

**allgemeingültige Schlussregel** Eine Schlussregel die aus den Basisregeln und den schon bekannten allgemeingültigen Schlussregeln abgeleitet werden kann. 26, 30, 31

**Anfangsregel** Eine Schlussregel um beginnen zu können – siehe AR. 27

**ASBA** Programmsystem, das Axiome, Sätze, Beweise und Auswertungen behandeln kann. 4–7, 9, 10, 12, 15, 19, 20, 22, 34, 35, 38

**atomare Formel** Eine Formel, die sich nicht weiter zerlegen lässt. 23

**Ausgabeschema** Ein Schema, mit dem bestimmte mathematische Objekte ausgegeben werden sollen. 1, 5, 6, 9, 10, 34, 36, 37

**Aussage** Eine Aussage in natürlicher Sprache oder als Formel, die einen Wahrheitswert liefert. 10, 13, 15, 17–21, 27, 30–33

**Aussagenlogik** – siehe Abschnitt 2.4 auf Seite 20. 20, 22

**Axiom** Eine Formel, die unbewiesen als wahr angesehen wird. 1, 4–6, 8–12, 17, 19, 22, 23, 25, 27, 28, 34, 35, 37

**Axiomensystem** Eine Menge von Axiomen. 19

**Basisregel** Eine Schlussregel, die nicht mehr auf andere zurückgeführt wird. Obwohl das auch auf die Identitätsregeln zutrifft, werden diese hier aber nicht dazu gezählt. 26–29, 31, 38

**Beweis** Eine zulässige Ableitung von Folgerungen aus gegebenen Voraussetzungen. – siehe Abschnitt 2.3 auf Seite 19. 1, 4–6, 8–12, 15, 19, 20, 22, 23, 29, 30, 32, 34–37

**beweisbar** Synonym zu ableitbar. 26

**Beweisschritt** Eine Vorschrift, wie aus vorgegebenen Aussagen (den Voraussetzungen) weitere (die Folgerungen) folgen. 12, 15, 20, 31

**Beweisschrittfolge** Eine Folge von Beweisschritten. 20

**Beweisschrittmenge** Eine Menge von Beweisschritten, insbesondere die Menge der Glieder einer Beweisschrittfolge. 20

**Boolsche Signatur** Die logische Signatur  $\{\neg, \wedge, \vee\}$ . 23, 24

**Fachbegriff** Ein Name für einen mathematischen Begriff. 4–6, 10, 34–37

**Fachgebiet** Ein Teil der Mathematik mit einer zugehörigen Basis aus Axiomen, Sätzen, Fachbegriffen und Darstellungsweisen. 4–6, 10, 34–37

**Folgerung** Die Folgerungen einer Schlussregel  $\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{F}}$  sind die Elemente von  $\mathcal{F}$ . 15, 19, 20, 27, 30–32

**formaler Satz** Formale Darstellung eines mathematischen Satzes. – siehe FS. 19

**Formel** Unter einer Formel verstehen wir stets eine mathematische Formel. Diese kann auch mehrdimensional sein, lässt sich aber mittels geeigneter Definitionen immer eindeutig als eine Zeichenfolge schreiben. Sätze, Beweise und Schlussregeln betrachten wir *nicht* als Formeln. 13, 15–17, 19, 20, 22, 23, 26–28

- Formelmenge** Eine Menge von Formeln bzw. Worten, oft mit  $\mathcal{L}$  bezeichnet. Man nennt  $\mathcal{L}$  auch eine Sprache, insbesondere dann, wenn es eindeutige Regeln zur Konstruktion von  $\mathcal{L}$  gibt. 23, 24
- Gleichheitsrelation** Eine mit Gleichheit verwandte Relation:  $=$ ,  $\neq$ ,  $\equiv$  und  $\not\equiv$ . 16, 18
- Identitätsregel** Eigentlich eine Basisregel zur Identität. Da die Identitätsregeln nur zur Rechtfertigung der Substitution verwendet werden, werden sie hier nicht zu den Basisregeln gezählt. 28, 29
- interessierende Eigenschaft** Solche Eigenschaften von Objekten, die im aktuellen Zusammenhang von Interesse sind, z. B. einen bestimmten Wert zu haben, Element einer bestimmten Menge zu sein, ein bestimmtes Objekt zu bezeichnen, usw. 18
- Junktor** Ein aussagenlogischer Operator. Da die Werte einer aussagenlogischen Operation Wahrheitswerte sind, kann man einen Junktor auch als Relation verstehen. 13–15, 17, 18, 20–24, 26
- Junktorsymbol** Ein Symbol für einen Junktor. 20, 22
- Kontraposition** Die allgemeingültige Aussage:  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ . 33, 38
- logische Signatur** Eine Teilmenge von  $\mathcal{J}$ , die ausreicht um alle anderen Elemente von  $\mathcal{J}$  zu definieren. 23
- Metaoperator** Ein Operator der Metasprache:  $\&$ ,  $\parallel$  und  $|$ . 15–17, 19
- Metarelation** Eine Relation der Metasprache:  $\Rightarrow$ ,  $\Leftarrow$  und  $\Leftrightarrow$ . 16, 17
- Metasprache** Eine Sprache, in der Aussagen über Elemente einer anderen Sprache getroffen werden können. In diesem Dokument ist dies immer die normale Sprache. – siehe Abschnitt 2.2 auf Seite 15. 15
- Monotonieregel** Eine Schlussregel. – siehe MR. 26, 27
- Objekt** Symbole, Formeln und Aussagen sowie Mengen, Zeichenfolgen, Zahlen; ganz allgemein reale oder gedachte Dinge an sich. 13, 17, 18
- Operator** Eine – meistens binäre, d. h. zweiwertige – Funktion  $M \times M \times \dots \times M \rightarrow M$ . Für einen binären Operator  $\circledast : M \times M \rightarrow M$  schreibt man meistens  $x \circledast y$  statt  $\circledast(x, y)$  oder  $\circledast xy$ . 13–18, 21
- Prädikatenlogik** – siehe Abschnitt 2.5 auf Seite 25. 20, 22
- Relation** Eine – meistens binäre, d. h. zweiwertige – Funktion  $M \times M \times \dots \times M \rightarrow \{wahr, falsch\}$ . Für eine binäre Relation  $\sim : M \times M \rightarrow \{wahr, falsch\}$  schreibt man meistens  $x \sim y$  statt  $\sim(x, y)$  oder  $\sim xy$ . 13, 14
- Satz** Eine mathematische Aussage, dass bestimmte Folgerungen aus gegebenen Voraussetzungen abgeleitet werden können. 4–6, 9–12, 22, 34, 36
- Schlussregel** Eine Schlussregel  $\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{F}}$  entspricht der Aussage: Wenn alle Voraussetzungen  $V$  aus  $\mathcal{V}$  zutreffen, dann auch alle Folgerungen  $F$  aus  $\mathcal{F}$ . Wenn diese Aussage zutrifft, kann die Schlussregel zur zulässigen Umwandlung von Formeln dienen. 19, 20, 26, 27, 29–32
- Schnittregel** Eine allgemeingültige Schlussregel. – siehe SR. 29–31, 38
- Substitution** Die Ersetzung von einem, mehreren oder allen Teil-Formeln ( $\alpha$ ) in einer anderen Formel ( $\gamma$ ) durch eine dritte Formel ( $\beta$ ) – formal:  $\gamma(\alpha \leftarrow \beta)$ . Wenn alle  $\alpha$  in  $\gamma$  durch  $\beta$  ersetzt werden, ist die Substitution *vollständig*. – siehe Unterabschnitt 3.1.2 auf Seite 27. 16, 23, 26–31

**Symbol** Ein *einfaches* Symbol ist ein druckbares typographisches Zeichen. Ein *zusammengesetztes* Symbol besteht aus mehreren einfachen Symbolen. In beiden Fällen wird ein Symbol als *unzerlegbar* angesehen. – siehe Abschnitt 2.1 auf Seite 12. 12, 13

**Transformation** Eine Umformung oder Erzeugung einer Formel aus einer vorgegebenen Menge von Formeln, d. h. die Anwendung einer Schlussregel. 20

**Transformationsmenge** Eine Menge von Transformationen. 20

**vergleichbar** Zwei Objekte  $A$  und  $B$  sind vergleichbar, wenn beide von derselben Art sind, d. h. wenn beide z. B. jeweils Mengen, Zeichenfolgen, Zahlen, usw. sind. Dabei muss bei Formeln zwischen der Formel an sich und dem Ergebnis der Formel unterschieden werden. – siehe Abschnitt 2.2.2.1 auf Seite 17. 17, 27

**Vertauschung** Die Vertauschung von zwei unabhängigen Teil-Formeln ( $\alpha$  und  $\beta$ ) in einer anderen Formel ( $\gamma$ ) – formal:  $\gamma(\alpha \rightleftharpoons \beta)$ . Die Vertauschung ist eine spezielle Form der Substitution. – siehe die Definition (3.1.2) im Unterabschnitt 3.1.2 auf Seite 27. 27, 28

**Voraussetzung** Die Voraussetzungen einer Schlussregel  $\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{F}}$  sind die Elemente von  $\mathcal{V}$ . 19, 20, 27, 28, 30–32

**Wahrheitswert** Die Werte  $\langle \top \rangle$  und  $\langle \perp \rangle$ , oft auch mit  $\langle \text{wahr} \rangle$  und  $\langle \text{falsch} \rangle$ ,  $\langle \text{true} \rangle$  und  $\langle \text{false} \rangle$  oder einfach  $\langle 1 \rangle$  und  $\langle 0 \rangle$  bezeichnet. 18, 20, 21

**Zeichenfolge** Folgen von unzerlegbaren Zeichen und Symbolen, wobei Leerstellen und sonstiger Zwischenraum nicht zählen und nur zur besseren Darstellung dienen. Dabei sind als spezielle Symbole auch Zeichenketten erlaubt, solange die Zerlegung eindeutig bleibt. Z. B. kann  $\langle \text{sin} \rangle$  als ein einzelnes Symbol – für die Sinusfunktion – aufgefasst werden, aber auch als Folge der Buchstaben  $\langle \text{s} \rangle$ ,  $\langle \text{i} \rangle$  und  $\langle \text{n} \rangle$ . Formeln werden immer als Zeichenfolgen aufgefasst. 12, 13, 17

**Zeichenkette** Folgen von unzerlegbaren Zeichen, auch Leerstellen und sonstigem Zwischenraum. – siehe auch Zeichenfolge. 12, 13

**zulässige Transformation** Eine Transformation aus einer vorgegebenen Menge von Transformationen oder eine daraus zulässiger Weise abgeleitete Transformation. 19, 26