Dr. Winfried Teschers
Anton-Günther-Straße 26c
91083 Baiersdorf
winfried.teschers@t-online.de

Projektdokument

ASBA
Axiome, Sätze, Beweise und Auswertungen

Projekt zur maschinellen Überprüfung von mathematischen Beweisen und deren Ausgabe in lesbarer Form

Winfried Teschers

11. Dezember 2018

Es wird ein Programmsystem beschrieben, das zu eingegebenen Axiomen, Sätzen und Beweisen letztere prüft, Auswertungen generiert und unter Zuhilfenahme gegebener Ausgabeschemata eine Ausgabe im LaTeX-Format in mathematisch üblicher Schreibweise mit Formeln erstellt.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Schon während meiner aktiven Zeit habe ich davon geträumt, ein Programm zu erstellen, mit dem man mathematische Sätze und Beweise speichern und überprüfen kann. Es sollte auch statistische Auswertungen beherrschen und u. a. Fragen beantworten können wie z. B. „Welche Axiome sind zum Beweis eines bestimmten Satzes erforderlich?“ oder „Wie viele Beweisschritte erfordert ein bestimmter Beweis?“. Ein Beweis mit weniger Axiomen und weniger Beweisschritten wäre dann vorzuziehen.

Einige Jahre nach meiner Pensionierung habe ich Ende 2016 endlich damit angefangen, das Projekt ASBA zu starten. Im Internet habe ich das Projekt „Hilbert II“ [22] gefunden, dass eine ähnliche Zielsetzung hat. Ich habe dann mit dem Projektleiter Michael Meyling Kontakt aufgenommen und war zuversichtlich, Synergien nutzen zu können. Leider hat sich dann herausgestellt, dass mein Ansatz viel umfangreicher und somit mit „Hilbert II“ wohl nicht kompatibel ist. Daher betreibe ich ASBA als ein Ein-Mann-Projekt und dies wird bis zur Fertigstellung der ersten Version dieses Dokuments wohl so bleiben müssen. Vielleicht ergibt sich dann ja eine Zusammenarbeit mit anderen Enthusiasten.

Da in diesem Dokument viele mathematische Formeln vorkommen und ASBA auch LaTeX-Code generieren soll, ist es in LaTeX verfasst. Dieses für mich neue Textsystem war eine große, spannende Herausforderung und ist einer der Gründe für die lange Dauer der Erstellung dieses Dokuments. Hinzu kommt, dass ich keinen Termindruck habe und endlich mal 100% versuchen kann – in meinem Job wurde ich daran aus verständlichen Gründen gehindert.

ASBA soll eine Basis für die Überprüfung und Archivierung mathematischer Sätze und Beweise sein. Daher halte ich es für unerlässlich, alle verwendeten Begriffe und Bezeichnungen (d. h. Benennungen und Symbole) eindeutig genug zu definieren (100%!). Natürlich will ich mich dabei an die übliche Nomenklatur halten. Aber was ist üblich? Steht $\subset$ für „Teilmenge“ oder „echteTeilmenge“? Ist 0 ein Element aus $\mathbb{N}$ oder nicht? Daher habe ich versucht, alle wichtigen, verwendeten Bezeichnungen der Mathematik, mit dem Schwerpunkt Logik, aber auch der formalen Metasprache streng zu definieren, normalerweise im Text, teilweise aber nur in einer Fußnote, auf jeden Fall aber im Glossar. Dort sind auch manche Bezeichnungen aufgeführt, die im Text nicht definiert wurden.

Baiersdorf, den 07. Dezember 2018

Winfried Teschers

Vereinbarungen

In diesem Dokument werden verschiedene Textauszeichnungen mit folgenden Bedeutungen verwendet:

Fußnoten dienen nur zu weiteren Erläuterungen sowie Verweisen in dieses Dokument und die Literatur. Daher können sie auch etwas „lascher“ formuliert sein. Für das Verständnis des Textes sollten sie nicht nötig sein, es reichen Grundkenntnisse der Mathematik.

PS: Texte, deren Bearbeitung zurückgestellt ist, sind in dieser Schriftfarbe geschrieben.

1. Analyse

In der Mathematik gibt es eine unüberschaubare Menge an Axiomen, Sätzen, Beweisen, Fachbegriffen und Fachgebieten. Zu den meisten Fachgebieten gibt es noch ungelöste Probleme.

Es fehlt ein System, das einen Überblick bietet und die Möglichkeit, Beweise automatisch zu überprüfen. Außerdem sollte all dies in üblicher mathematischer Schreibweise ein- und ausgegeben werden können. In diesem Dokument werden die Grundlagen für das zu entwickelnde Programmsystem **ASBA** (ein Akronym für „**A**xiome, **S**ätze, **B**eweise und **A**uswertungen“) behandelt.

Ein Programmsystem mit ähnlicher Aufgabenstellung findet sich im GitHub Projekt *Hilbert II* ([22, 23]). Einige Ideen sind von dort übernommen worden.

1.1. Fragen

Einige der Fragen, die in diesem Zusammenhang auftauchen, werden nun formuliert:

1. **Grundlagen**: Was sind die Grundlagen? Z. B. welche Logik und welche Mengenlehre.
2. **Basis**: Welche wichtigen Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Fachgebiete gibt es? Welche davon sind Standard?
3. **Axiome**: Welche Axiome werden bei einem Satz oder Beweis vorausgesetzt? Allgemein anerkannte oder auch strittige, wie z. B. den *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* (*tertium non datur*) oder das *Auswahlaxiom*.
4. **Beweis**: Ist ein Beweis fehlerfrei?
5. **Konstruktion**: Gibt es einen konstruktiven Beweis?
6. **Vergleiche**: Welcher Beweis ist besser? Nach welchem Kriterium? Z. B. elegant, kurz, einsichtig oder wenige Axiome. Was heißt eigentlich *elegant*?
7. **Definitionen**: Was ist mit einem Fachbegriff jeweils genau gemeint? Z. B. *Stetigkeit*, *Integral* und *Analysis*.
8. **Abhängigkeiten**: Wie heißt ein Fachbegriff in einer anderen Sprache? Ist wirklich dasselbe gemeint? Was ist mit Fachbegriffen in verschiedenen Fachgebieten?
9. **Überblick**: Ist ein Axiom, Satz, Beweis oder Fachbegriff schon einmal — ggf. abweichend — definiert, formuliert oder bewiesen worden?
10. **Darstellung**: Wie kann man einen Satz und den zugehörigen Beweis — ggf. auch spezifisch für ein Fachgebiet — darstellen?
11. **Forschung**: Welche Probleme gibt es noch zu erforschen.

1.2. Eigenschaften

ASBA soll ausgehend von den Fragen in Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite entwickelt werden, und die folgenden Eigenschaften haben:

1. **Daten**: Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Fachgebiete können in formaler Form gespeichert werden — auch (noch) nicht oder unvollständig bewiesene Sätze. Dabei soll die übliche mathematische Schreibweise verwendet werden können.

2. **Definitionen**: Es können Fachbegriffe für Axiome, Sätze, Beweise und Fachgebiete — letztere mit eigenen Axiomen, Sätzen, Beweisen, Fachbegriffen und über- oder untergeordneten Fachgebieten — definiert werden. Die Definitionen dürfen an anderer Stelle definierte Fachbegriffe und Fachgebiete verwenden.[1)]

3. **Prüfung**: Vorhandene Beweise können automatisch geprüft werden.

4. **Ausgaben**: Die Axiome, Sätze und Beweise können in üblicher Schreibweise — abhängig von Sprache und Fachgebiet — ausgegeben werden.

5. **Auswertungen**: Zusätzlich zur Ausgabe der gespeicherten Daten sind verschiedene Auswertungen möglich, unter anderem für die meisten der unter Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite behandelten Fragen.

Damit ASBA nicht umsonst erstellt wird und möglichst breite Verwendung findet, werden noch zwei Punkte angefügt:

6. **Lizenz**: Die Software ist *Open Source*.

7. **Akzeptanz**: ASBA wird von Mathematikern akzeptiert und verwendet.

Tabelle 1.1 auf der nächsten Seite zeigt, wie sich die Eigenschaften zu den Fragen im Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite verhalten. Mit einem X werden die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Eigenschaften zur Beantwortung der entsprechenden Frage beitragen sollen. Idealerweise sollte die Erfüllung aller angegebenen Eigenschaften alle gestellten Fragen beantworten, was allerdings illusorisch ist.

1) Rekursive Definitionen sollten ebenfalls möglich sein.

Frage \ Eigenschaft	1 Daten	2 Definitionen	3 Prüfung	4 Ausgaben	5 Auswertungen	6 Lizenz	7 Akzeptanz
1 Grundlagen	X	X	-	X	X	-	-
2 Basis	X	X	-	X	X	-	-
3 Axiome	X	X	-	X	X	-	-
4 Beweis	X	-	X	X	-	-	-
5 Konstruktion	X	-	-	X	-	-	-
6 Vergleiche	X	-	-	-	X	-	-
7 Definitionen	X	X	-	X	-	-	-
8 Abhängigkeiten	X	-	-	X	-	-	-
9 Überblick	X	-	-	-	X	-	-
10 Darstellung	-	X	-	X	-	-	-
11 Forschung	X	-	-	-	X	-	-

Tabelle 1.1.: Fragen (1.1) → Eigenschaften (1.2)

1.3. Ziele

Um die Eigenschaften von Abschnitt 1.2 auf der vorherigen Seite zu erreichen, werden für ASBA die folgenden Ziele[2)] gesetzt:

1. **Daten**: Die verteilte Datenbank von ASBA enthält möglichst viele wichtige Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe, Fachgebiete und Ausgabeschemata[3)].
2. **Form**: Die Daten liegen in formaler, geprüfter Form vor.
3. **Eingaben**: Die Eingabe von Daten erfolgt in einer formalen Syntax unter Verwendung der üblichen mathematischen Schreibweise.
4. **Prüfung**: Beweise können automatisch geprüft[4)] werden.
5. **Ausgaben**: Die Ausgabe kann in einer eindeutigen, formalen Syntax gemäß vorhandener Ausgabeschemata erfolgen.
6. **Auswertungen**: Zusätzlich zur Ausgabe der Daten sind verschiedene Auswertungen möglich. Insbesondere kann zu jedem Beweis angegeben werden, wie lang er ist und welche Axiome und Sätze[5)] er benötigt.
7. **Anpassbarkeit**: Fachbegriffe und die Darstellung bei der Ausgabe können mit Hilfe von — gegebenenfalls unbenannten — untergeordneten Fachgebieten angepasst werden.

2) Es sind eigentlich Anforderungen. Diese Bezeichnung wird aber schon im Kapitel 4 auf Seite 46 verwendet.

3) Um den Punkt 4 von Abschnitt 1.2 auf der vorherigen Seite erfüllen zu können, werden noch fachgebietsspezifische Ausgabeschemata benötigt, welche die Art der Ausgaben beschreiben.

4) An dieser Stelle soll ASBA soll keine Beweise finden — das ist Ziel von Punkt 17, sondern nur vorhandene prüfen.

5) Sätze, die quasi als Axiome verwendet werden.

8. **Individualität**: Axiome und Sätze können für jeden Beweis individuell vorausgesetzt werden. Dabei sind fachgebietsspezifische Fachbegriffe erlaubt.
9. **Internet**: Die Daten können auf mehrere Dateien verteilt sein. Ein Teil davon — oder sogar alle — können im Internet liegen.
10. **Kommunikation**: Die Kommunikation mit ASBA kann mit den Fachbegriffen der einzelnen Fachgebiete erfolgen.
11. **Zugriff**: Der Zugriff auf ASBA kann lokal und über das Internet erfolgen.
12. **Unabhängigkeit**: ASBA kann online und offline arbeiten.
13. **Rekursion**: Es kann rekursiv über alle verwendeten Dateien — auch solchen, die im Internet liegen — ausgewertet werden.
14. **Bedienbarkeit**: ASBA ist einfach zu bedienen.
15. **Lizenz**: Die Software ist *Open Source*.
16. **Zwischenspeicher**: Wichtige Auswertungen können an vorhandenen Dateien angehängt oder separat in eigenen Dateien gespeichert werden.
17. **Beweisunterstützung**: ASBA hilft bei der Erstellung von Beweisen.

Punkt 16 wurde noch angefügt, damit ASBA effizient arbeiten kann und um die Akzeptanz zu erhöhen. Um letzteres zu erreichen, dafür ist auch Punkt 17 nützlich. Es bietet sich ja auch an, die Fähigkeiten, die ASBA mit der Prüfung von Beweisen haben wird, auch auf die Erstellung von Beweisen anzuwenden. Die Reihenfolge der Ziele stellt noch keine Priorisierung fest.

Die Tabelle 1.2 zeigt wieder, wie sich die Ziele zu den Eigenschaften im Abschnitt 1.2 auf Seite 7 verhalten. Mit einem X werden wieder die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Ziele zur Sicherstellung der entsprechenden Eigenschaft beitragen sollen. Idealerweise sollte durch Erreichen aller aufgestellten Ziele ASBA alle angegebenen Eigenschaften aufweisen, was wahrscheinlich ebenfalls illusorisch ist.

Eigenschaft \ Ziel	1 Daten	2 Form	3 Eingaben	4 Prüfung	5 Ausgaben	6 Auswertungen	7 Anpassbarkeit	8 Individualität	9 Internet	10 Kommunikation	11 Zugriff	12 Unabhängigkeit	13 Rekursion	14 Bedienbarkeit	15 Lizenz	16 Zwischenspeicher	17 Beweisunterstützung
1 Daten	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2 Definitionen	X	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3 Prüfung	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4 Ausgaben	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 Auswertungen	-	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6 Lizenz	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	-	-
7 Akzeptanz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabelle 1.2.: Eigenschaften (1.2) → Ziele (1.3)

1.4. Zusammenfassung

Frage \ Ziel	1 Daten	2 Form	3 Eingaben	4 Prüfung	5 Ausgaben	6 Auswertungen	7 Anpassbarkeit	8 Individualität	9 Internet	10 Kommunikation	11 Zugriff	12 Unabhängigkeit	13 Rekursion	14 Bedienbarkeit	15 Lizenz	16 Zwischenspeicher	17 Beweisunterstützung
1 Grundlagen	X	X	X	-	X	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2 Basis	X	X	X	-	X	X	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3 Axiome	X	X	X	-	X	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4 Beweis	X	X	X	X	X	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 Konstruktion	X	X	X	-	X	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6 Vergleiche	X	X	X	-	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7 Definitionen	X	X	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8 Abhängigkeiten	X	X	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9 Überblick	X	X	X	-	-	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 Darstellung	X	-	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11 Forschung	X	X	X	-	-	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Die nächsten beiden Punkte sind Eigenschaften aus Abschnitt 1.2 auf Seite 7:																	
6 Lizenz	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	-	-
7 Akzeptanz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabelle 1.3.: Fragen (1.1) → Ziele (1.3)

Die Tabelle 1.3 ist eine Kombination der Tabellen 1.1 und 1.2 und zeigt, wie sich die Ziele im Abschnitt 1.3 auf Seite 8 zu den Fragen im Abschnitt 1.1 auf Seite 6 verhalten. Auch in dieser Tabelle werden mit einem X die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Ziele für die Beantwortung der entsprechenden Frage nötig sind. Mit einem kleinen x werden sie markiert, wenn sie zur Beantwortung der Fragen nicht nötig, aber von Interesse sind. Idealerweise sollte das Erreichen aller aufgestellten Ziele alle gestellten Fragen beantworten, was natürlich auch illusorisch ist.

1.5. Die Umgebung von ASBA

In der Abbildung 1.1 wird beschrieben, welche Interaktionen ASBA mit der Umgebung hat, d. h. welche Ein- und Ausgaben existieren und woher sie kommen bzw. wohin sie gehen.

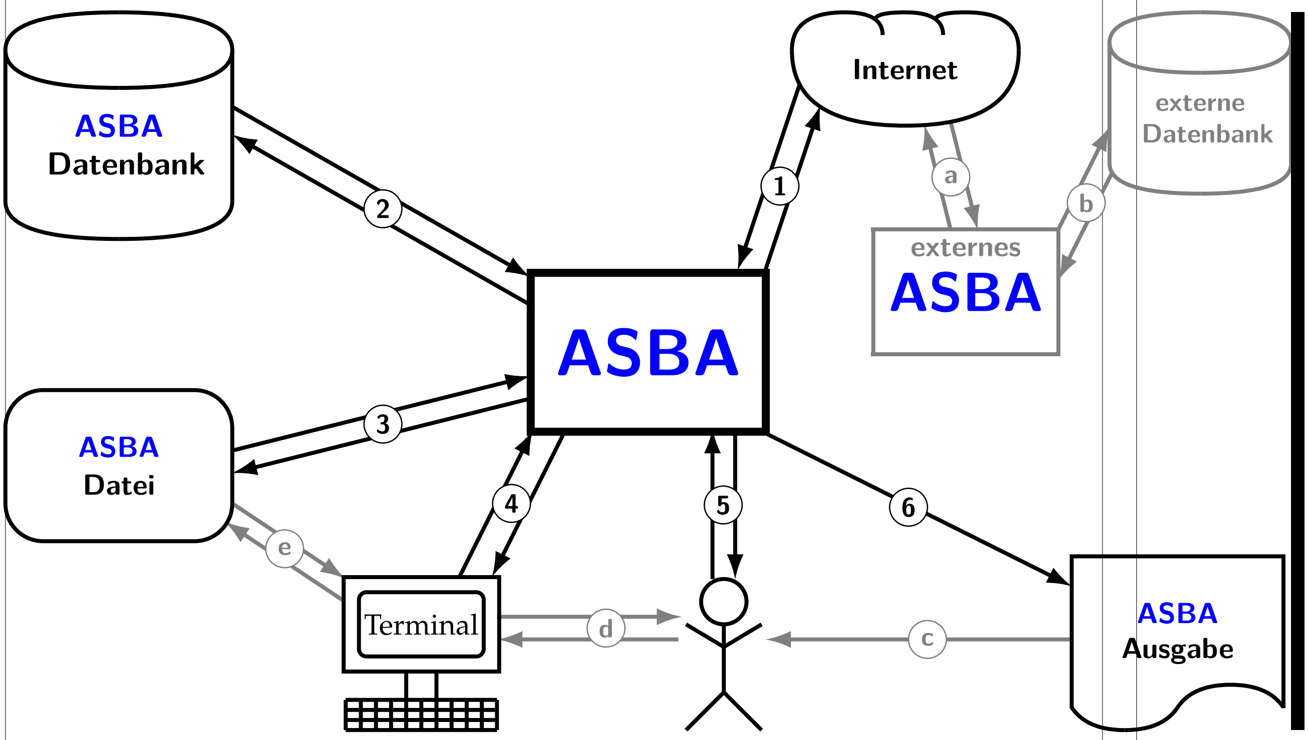

Abbildung 1.1.: Die Umgebung von ASBA

In den in der Abbildung 1.1 abgebildeten Datenflüssen (1) bis (6) und (a) bis (e) werden die folgenden Daten übertragen:

(1) **ASBA→ Internet** Inhalte der Datenbank.

Internet → ASBA Inhalte der externen Datenbank.

(2) **Datenbank → ASBA** Inhalte der Datenbank und Antworten auf Datenbankanweisungen.

ASBA→ Datenbank Inhalte der Datei, der externen Datenbank und Datenbankanweisungen.

(3) **Datei → ASBA** Inhalte der Datei.

ASBA→ Datei Die Datei wird um zusätzliche Auswertungen ergänzt, z. B. ob die Beweise korrekt sind, welche Axiome und Sätze — auch externe aus dem Internet — verwendet wurden, Länge des Beweises usw.

(4) **Terminal → ASBA** Anweisungen, Daten und Batchprogramme.

ASBA→ Terminal Antworten auf Anweisungen, Auswertungen usw.

Außerdem interaktive Ein- und Ausgabe durch einen Anwender, wie in (5) beschrieben.

(5) **Anwender ↔ ASBA** Interaktive Ein- und Ausgaben durch einen Anwender mit Komponenten von (3), (4) und (6). — Die Kommunikation läuft i. Alg. über ein Terminal.

(6) **ASBA→ Ausgabe** Inhalte von Datei und Datenbank in lesbarer Form, u. a. mit Hilfe von Ausgabeschemata auch mit Formeln. Die Ausgabe kann auch in eine Datei erfolgen, z. B. im LaTeX-Format.

(a) **Internet → externes ASBA** Inhalte der Datenbank.

externes ASBA→ Internet Inhalte der externen Datenbank.

(b) **externe Datenbank → externes ASBA** Inhalte der externen Datenbank.

externes ASBA→ externe Datenbank Inhalte der Datenbank.

(c) **Ausgabe → Anwender** Alle Daten der Ausgabe.

(d) **Anwender ↔ Terminal** Interaktive Ein- und Ausgabe durch einen Anwender, wie in (5) beschrieben.

(e) **Terminal ↔ Datei** Erstellen und Bearbeiten der Datei durch einen Anwender. — siehe (d)

Die Datenflüsse (a) bis (e) erfolgen außerhalb von ASBA und werden nicht weiter behandelt.

Die Datenbank und die Datei enthalten im Prinzip die gleichen Daten, wobei sie in der Datei im Textformat in lesbarer Form und in der Datenbank in einem internen Format vorliegen. Zudem enthält die Datenbank i. Alg. sehr viel mehr Daten. Es handelt sich dabei jeweils um die folgenden Daten:

Axiome [ok] Ein **Axiom** ist eine Aussage, die nicht aus anderen Aussagen abgeleitet werden kann. Es können wie bei Sätzen Prämissen und Konklusionen vorhanden sein, aber keine Beweise.

Sätze [ok] Ein **Satz** ist eine Aussage, bestehend aus einer Anzahl von Prämissen und Konklusionen und einem Beweis, der die Konklusionen aus den Prämissen ableitet.

Beweise [ok] (Ein Auszug aus Wikipedia[38] steht im Glossar.)
Ein **Beweis** besteht aus einer Folge von Beweisschritten, die aus gegebenen Prämissen Konklusionen ableitet.

Fachbegriffe [ok] (Ein Auszug aus Wikipedia[73] steht im Glossar.)
Ein **Fachbegriff** ist für ASBA eine Benennung für einen Begriff aus einem Fachgebiet. Insbesondere kann es auch ein spezielles Symbol sein.

Fachgebiete [ok] (Ein Auszug aus Wikipedia[44] steht im Glossar.)
Ein **Fachgebiet** ist für ASBA ein Teilgebiet der Mathematik mit einer zugehörigen Basis aus Axiomen, Sätzen, Fachbegriffen und Darstellungsweisen, z. B. Logik und Mengenlehre.

Ein **Fachgebiet** kann bei ASBA sehr klein sein und im Extremfall kein einziges Element enthalten. *Umgebung* wäre vielleicht eine bessere Bezeichnung, ist aber schon ein verbreiteter Fachbegriff, so dass in diesem Dokument die Bezeichnung "'Fachgebiet"' verwendet wird.

Ausgabeschemata [!] Ein **Ausgabeschema** ist für ASBA eine Beschreibung, wie ein bestimmtes mathematisches Objekt ausgegeben werden soll. Dies kann z. B. ein Stück LaTeX-Code mit entsprechenden Parametern sein.

Auswertungen [ok] Eine **Auswertung** ist für ASBA eine statistische oder andere Auswertung, die bestimmten Elementen der Datei bzw. Datenbank zugeordnet sind. Z. B. können zu einem Satz alle für einen Beweis notwendigen Axiome angegeben werden.

Alle Daten können interne und externe Verweise enthalten.

1.6. Basis von Beweisen

Da ein Computerprogramm erstellt werden soll, muss die Grundstruktur des Vorgehens bei Beweisen definiert werden.[6)]

Die logische Darstellung von mathematischen Aussagen, wozu auch Axiome und Sätze gehören, erfolgt, da es sich immer um Formeln handelt, an besten mit Symbolfolgen[7)], d. h. Folgen von Zeichen und Symbolen, in denen Zwischenraum — insbesondere Leerstellen — nicht zählen. Mehrdimensionale Formeln, wie z. B. Matrizen, Baumstrukturen, Funktionsschemata und anderes, können auch als (eindimensionale) Symbolfolgen dargestellt werden.[8)] Beweise sind letztendlich nichts anderes, als erlaubte Transformationen dieser Symbolfolgen.

Bausteine sind Grundelemente, auch **Zeichen** oder **(Satz-)Buchstaben** genannt, aus denen die Symbolfolgen bestehen dürfen, und müssen definiert werden.

Formationsregeln dienen zur Festlegung, wie man aus den Bausteinen Ausdrücke erzeugen kann, und müssen ebenfalls definiert werden.

Sätze lassen sich als eine Menge von Formeln, den Prämissen, wozu auch Axiome und andere Sätze gehören können, einer weiteren Menge von Formeln (Symbolfolgen), den Konklusionen, und der Angabe eines Beweises darstellen.

Beweise zu gegebenen Prämissen und Konklusionen lassen sich als Folge von Transformationen, beginnend mit den Prämissen und endend mit den Konklusionen, darstellen.

Transformationsregeln definieren, welche Transformationen mit gegebenen Formelmengen zulässig sind.[9)]

---

6) siehe [52]

7) Die interne Darstellung der Symbolfolgen kann zur Optimierung von ASBA von der logischen abweichen.

8) Z. B. könnte man eine 2×2-Matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ auch darstellen als Folge von Zeilen: $\langle\langle[(a,b),(c,d)]\rangle\rangle$, oder noch einfacher: $\langle\langle[a,b;c,d]\rangle\rangle$. In ASBA wird die LaTeX-Syntax verwendet.
Damit wird die soeben angegebene Matrix codiert durch ⟪$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$⟫.

9) siehe [2, 68, 70]

2. Logische Grundlagen

Die logischen Grundlagen werden einerseits gebraucht, um die erlaubten Beweisschritte[1] zu definieren, andererseits dienen sie auch zum Testen von ASBA. Daher werden sie in diesem Kapitel 2 ausführlicher behandelt, als für die Erstellung von ASBA erforderlich ist. Alle in diesem Dokument aufgeführten Axiome, Sätze und Beweise sollen dazu kodiert und die Beweise dann von ASBA verifiziert werden.

Speziell in diesem Kapitel 2 wollen wir mit möglichst exakt definierten **Begriffen**[0] und den zugehörigen einheitlichen, systematischen **Bezeichnungen**[0] (d. h. **Benennungen**[0] und Symbolen) arbeiten. Wenn sie in dieser Schriftart erscheinen, gibt es eine Definition im Symbolverzeichnis (ab Seite 63) oder Glossar (ab Seite 71)[2], und diese Bedeutung ist dann gemeint. Gleichzeitig ist damit im PDF-Dokument ein Link dorthin verbunden. An Stellen, wo eine Benennung[3] definiert wird, wird sie **in dieser** Schriftart ausgegeben. Wenn die Benennung mit der Fußnote „[0]“ versehen ist, steht die vollständige Definition nur im Glossar und nicht im laufenden Text. Eine vertiefende Beschreibung im Glossar oder Symbolverzeichnis ist unabhängig davon immer möglich.

Die Sache an sich:	Begriff	
Darstellung:	Bezeichnung	
Darstellungsmittel:	Benennung	Symbol

Wenn im Text „wir“ verwendet wird, geht es um Definitionen, die von allgemein bekannten möglicherweise abweichen.[4] Die Verwendung von „wir“ ist allerdings möglicherweise nicht konsistent und soll nur als Hinweis dienen.

2.1. Metasprache

Wenn man über eine Sprache, die sogenannte Objektsprache, spricht, braucht man eine zweite Sprache, die sogenannte Metasprache, in der Aussagen über erstere getroffen werden können.[5] Wenn die Objektsprache die der Mathematik ist, wählt man üblicherweise die natürliche Sprache als Metasprache. Leider ist diese oft ungenau, nicht immer eindeutig und abhängig vom Zusammenhang, in dem sie gesprochen wird.[6] Um diese Probleme in den Griff zu bekommen, kann die Metasprache auch formalisiert werden. Durch diese Formalisierung erinnert sie dann schon an mathematische Formeln. Die **Sprachebenen**[0] sollten aber sorgfältig unterschieden werden.

[0] Die vollständige Definition steht nur im Glossar.
[1] siehe Abschnitt 2.2.6 auf Seite 31
[2] Möglicherweise steht dort statt einer Definition auch nur eine Referenz zur Definition im laufenden Text.
[3] Für Symbole gilt kann leider nur die Farbe, nicht die Schriftart geändert werden.
[4] „Wir“ und nicht „ich“, da der Leser eingeschlossen werden soll und in Zukunft möglicherweise auch andere Autoren an diesem Dokument beteiligt sein werden.
[5] Die beiden Sprachen können auch übereinstimmen, z. B. wenn man über die natürliche Sprache spricht.
[6] Man betrachte die beiden formal verschiedenen Aussagen „Studenten und Rentner zahlen die Hälfte.“ und „Studenten oder Rentner zahlen die Hälfte.“, die beide das gleiche meinen. — Entnommen aus [2] Abschnitt 1.2 Bemerkung 1.

2.1.1. Sprachebenen

Metasprache In diesem Dokument die obere Sprachebene: [ok] Die Sprache, in der Aussagen über eine andere Sprache getroffen werden können. In diesem Dokument ist dies immer die normale Umgangssprache. Ihre Syntax ist gegeben, bzgl. der Semantik bemühen wir uns um exakte Definitionen der Begriffe und Bezeichnungen. Ihre Syntax und Semantik wird in diesem Dokument nicht behandelt.

formale Metasprache In diesem Dokument die mittlere Sprachebene: [ok] Die Metasprache, deren Ausdrucksmittel nur atomare Aussagen und definierte Metasymbole sind. In diesem Dokument ist ihre Syntax und Semantik passend für ASBA definiert, in der Regel parallel zur Prädikatenlogik. Ihre Syntax und Semantik werden im Folgenden noch entwickelt.

Objektsprache In diesem Dokument die untere Sprachebene: [ok] Die Sprache, über die mittels einer (formalen) Metasprache "'geredet"' wird. Unser Objekt, mit dem mathematische Beweise formuliert werden sollen, ist die Logik. Demnach sind die Ausdrucksmittel der Objektsprache die der Logik. Wir verwenden in diesem Dokument die Prädikatenlogik oder, als echte Teilsprache, die Aussagenlogik.

Die entsprechende Syntax wird im Folgenden noch entwickelt. Die Semantik kann bis zu einem gewissen Grad offen bleiben, um so auch Raum für alternative Logiken zu lassen.

2.1.2. Aussagen

Wir definieren zunächst noch einige Begriffe.

Wahrheitswert [ok] (Ein Auszug aus Wikipedia[76] steht im Glossar.)
Ein **Wahrheitswert** ist ein Wert, den eine Aussage in Bezug auf Wahrheit annehmen kann. Für die Darstellung der Wahrheitswerte abhängig von der Sprachebene und dem logischen Wert der Aussage definieren wir:

	Aussagewert		
Sprachebene	**wahr**	**falsch**	**Symbolart**
Metasprache	*wahr*	*falsch*	normaler Text
formale Metasprache	true	false	Metasymbol
Objektsprache	$\top$	$\perp$	Objektsymbol

Tabelle 2.1.: Darstellung der Wahrheitswerte

Wir schließen nicht aus, dass es weitere Wahrheitswerte gibt.

Aussage [ok] Wikipedia[33] schreibt dazu:

> sffamily Eine **Aussage** im Sinn der aristotelischen Logik ist ein sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist zu *fragen*, ob es wahr oder falsch ist (so genanntes Aristotelisches Zweiwertigkeitsprinzip). Es ist nicht erforderlich, *sagen* zu können, ob das Gebilde wahr oder falsch ist. Es genügt, dass die Frage nach Wahrheit („Zutreffen“) oder Falschheit („Nicht-Zutreffen“) sinnvoll ist, – was zum Beispiel bei Fragesätzen,

Ausrufen und Wünschen nicht der Fall ist. Aussagen sind somit Sätze, die Sachverhalte beschreiben und denen man einen Wahrheitswert zuordnen kann.

Dies gilt natürlich auch, wenn metasprachliche Symbole verwendet werden, wovon wir im Folgenden reichlich Gebrauch machen. Da man Relationen und logischen Ausdrücken ebenfalls einen Wahrheitswert zuordnen kann[7)], können wir sie auch als Aussagen behandeln. Es handelt sich dann um **logische**, im Gegensatz zu **metasprachlichen Aussagen**.

Beispiele für Aussagen in Metasprache sind

(a) „Morgen scheint die Sonne."

(b) „Ich bin 1,83 m groß."

(c) „Ich habe ein rotes Auto und das kann 200 km/h schnell fahren."

(d) „Alle Iren haben rote Haare."

Wie (c) zeigt, kann eine Aussage auch aus anderen Aussagen zusammengesetzt sein. Wir definieren daher:

Teilaussage [ok] Eine Aussage A heißt eine **Teilaussage**[8)] **von** einer Aussage B, wenn sie Teil von B ist und man sie ohne Bedeutungsänderung von B dort klammern könnte.

echte Teilaussage [ok] Eine Teilaussage A einer Aussage B heißt **echte Teilaussage** von B, wenn A verschieden von B ist.

atomare Aussage [ok] Eine Aussage heißt **atomar**[9)], wenn sie nicht zerlegbar ist, d. h. wenn sie keine echte Teilaussage enthält.

zerlegbare Aussage [ok] Eine Aussage heißt **zerlegbar**[10)] wenn sie mindestens eine echte Teilaussage enthält.

Während (a) und (b) atomare Aussagen sind, ist (c) zerlegbar. Für alle vier Aussagen ist es sinnvoll zu fragen, ob sie gelten oder nicht; für (a) allerdings nur im Nachhinein und für den zweiten Teil von (c) nur weil klar ist, worauf sich „das" bezieht. Offensichtlich muss manchmal der Zusammenhang, in dem eine Aussage formuliert wird, bekannt sein. Z. B. ist die Bedeutung von „Ich" nur dann bekannt, wenn man weiss, von wem die Aussage ist.

In (b) kann man „Ich" durch irgend eine andere Person X ersetzten[11)] und (d) kann umformuliert werden. Es ergeben sich dann die Aussagen

(e) „X ist 1,83 m groß"

(f) „Für alle X gilt: Wenn X ein Ire ist, dann hat X rote Haare."

Den Wahrheitswert von (e) kann man erst dann bestimmen, wenn der Wert der Variablen X bekannt ist, während bei (f) alle zulässigen Werte für X im Prinzip schon bekannt sind. Man sagt, dass die Variable$X$ in (e) frei und in (f) gebunden vorkommt. Die freien Variablen einer Aussage nennt man auch ihre Parameter und eine Aussage mit mindestens einem Parameter eine parametrisierte Aussage.

7) Zumindest prinzipiell nach Ersetzung von Variablen durch konkrete Werte.

8) synonym: **Unteraussage**

9) synonym: **unzerlegbar**

10) alternativ: **zusammengesetzt**— wir unterscheiden allerdings die beiden Begriffe. Aus zerlegbar folgt zusammengesetzt, aber nicht immer umgekehrt.

11) Dass dann auch „bin" durch „ist" ersetzt werden muss, ist von untergeordneter Bedeutung.

Die Parameter einer Aussage dürfen, soweit nicht anderweitig eingeschränkt, durch jedes zulässige **Objekt**[12)] ersetzt werden. Denkbar sind Symbole, Formeln und Aussagen sowie Mengen, Symbolfolgen und Zahlen; ganz allgemein jedes reale oder gedachte Ding an sich.

Wir definieren noch für Aussagen bzw. Objekte A und B:[13)]

Eigenschaft [?] Ist x ein Parameter einer Aussage A, so ist die Aussage „x hat die Eigenschaft A" gleichbedeutend damit, das A gilt. Wir schreiben etwas unpräzise auch $A(x)$, besonders dann, wenn auch $A(y)$ für $y \neq x$ von Interesse ist.

$:\equiv$ **Objektdefinition** [ok] Eine Metadefinition: Die formale Definition eines Objekts. $\langle\!\langle A :\equiv B \rangle\!\rangle$ steht für „A ist **definitionsgemäß gleich** B" für Objekte A und B. Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B. [14)]

$:\Leftrightarrow$ **Aussagedefinition** [ok] Eine Metadefinition: Die formale Definition einer Aussage. $\langle\!\langle A :\Leftrightarrow B \rangle\!\rangle$ steht für „A ist **definitionsgemäß äquivalent zu** B" für Aussagen A und B. Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B. [15)]

2.1.3. Bereiche

Wir definieren:

Bereich, Element [ok] Ein **Bereich** ist eine Zusammenfassung von Aussagen und Objekten. Für solche Zusammenfassungen brauchen wir nur wenige Eigenschaften, die explizit angegeben werden. Die in einem Bereich zusammengefassten Aussagen und Objekte bezeichnen wir wie üblich als seine **Elemente**. Klassen und Mengen sind spezielle Bereiche.[16)]

und für Aussagen und Objekte a und Bereiche A:

$$a \in A \quad :\Leftrightarrow \quad a \text{ ist ein } \textbf{Element aus } A$$

$\in$ ist eine Relation. Gemäß (2.1) Seite 23 ist $\ni$ die Umkehrrelationen zu $\in$ (Sprechweise: *... enthält als Element ...*). Schließlich sind $\notin$ und $\not\ni$ gemäß (2.2) Seite 23 noch die zugehörigen Negationen. Diese vier Relationen bezeichnen wir als **Elementrelationen**.

12) [ok] (Ein Auszug aus Wikipedia[59] steht im Glossar.)
Ein **Objekt** ist in diesem Dokument immer ein Element aus $\mathcal{U}$.

13) Üblicherweise werden mit den Definitionen neue, ggf. parametrisierte, Begriffe und Symbole eingeführt. Die Anforderungen an A und B sind intuitiv klar. Insbesondere darf B nicht von A abhängig sein. Rekursive Definitionen sind allerdings zulässig. Man betrachtet dann die gegebenen Definitionen mit Parametern als eine Menge von Definitionen, in denen für bestimmte Parameter alle möglichen Ersetzungen durchgeführt wurden. Dann muss diese Menge nur noch in die richtige Reihenfolge gebracht werden können.

14) Nach den Definitionen von $:\Leftrightarrow$ und $:\equiv$ sind zwei Ausdrücke P und Q schon dann gleich, wenn nach der Ersetzung aller Vorkommen von A durch B sowohl in P als auch in Q die resultierenden Ausdrücke $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ gleich sind.

15) Wenn Aussagen auch Objekte sind, kann $:\Leftrightarrow$durch $:\equiv$ersetzt werden.

16) In der Tat ist $\mathcal{U}$ nur eine Klasse und keine Menge.

$\mathcal{U}$

Wir definieren noch für Bereiche A und B[17)]

$A \subseteq B$:⇔ alle Elemente aus A sind auch Elemente aus B
Sprechweise: A ist ein **Teilbereich** von B

$A \equiv B$:⇔ $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$

$A \subset B$:⇔ $A \subseteq B$ und nicht $A \equiv B$
Sprechweise: A ist **echter Teilbereich** von B

Gemäß (2.1) Seite 23 sind $\supset$ und $\supseteq$ die Umkehrrelationen zu $\subset$ und $\subseteq$ (Sprechweisen: ... *ist [**echte**] **Obermenge** von* ...). Es gelten entsprechende Gleichungen wie (2.3) und (2.4) Seite 24. Schließlich sind $\not\subset$, $\not\subseteq$, $\not\supset$ und $\not\supseteq$ gemäß (2.2) Seite 23 noch die zugehörigen Negationen. Diese acht Relationen bezeichnen wir als **Bereichsrelationen**.

Wir definieren:

Diskursuniversum $\mathcal{U}$ [?] (Ein Auszug aus Wikipedia[41] steht im Glossar.)
Das **Diskursuniversum** $\mathcal{U}$ ist der vorgegebene Bereich aller Objekte, die in Aussagen einen Parameter ersetzen dürfen.

Aussagenbereich $\mathcal{A}$ [ok] Der **Aussagenbereich** $\mathcal{A}$ ist der Bereich aller formalen Aussagen, d. h. der Aussagen in Objektsprache. Es kann $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ gelten, muss es aber nicht.

Objektbereich $\mathcal{O}$ [ok] Der **Objektbereich** $\mathcal{O}$ ist der Bereich aller formalen Objekte, d. h. der Objekte, die in Aussagen in Objektsprache einen Parameter ersetzen dürfen. Diese Objekte sind notwendigerweise auch in Objektsprache geschrieben und offensichtlich ist $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$.

$\mathbb{N}$ ist der Bereich der **natürlichen Zahlen**[0)] ohne 0

$\mathbb{N}_0$ ist der Bereich der **natürlichen Zahlen**[0)] (einschließlich 0)

Wenn wir von einer natürlichen Zahl sprechen, meinen wir immer ein Element aus $\mathbb{N}_0$.

2.1.4. Metaoperationen

Zerlegbare Aussagen wie (c) können zum Teil formalisiert werden. Dies wird mit den folgenden Definitionen erreicht:[18)]

$\sim A$	:⇔	A **gilt nicht**.
$A \Rightarrow B$	:⇔	**Wenn** A gilt **dann** gilt auch B.
$A \Leftarrow B$	:⇔	A gilt **sofern** B gilt.
$A \Leftrightarrow B$	:⇔	A gilt **genau dann wenn** B gilt.
$A \ \&\ B$	:⇔	A **und** B.
$A \parallel B$	:⇔	A **oder** B.

Offensichtlich sind das alles ebenfalls Aussagen, jetzt aber teilweise formalisiert. (c) lässt sich dann ausdrücken als „‚Ich habe ein rotes Auto' & ‚das kann 200 km/h schnell

17) In der Literatur wird ⟨$\subset$⟩ oft in der Bedeutung von ⟨$\subseteq$⟩ verwendet. Wir verwenden ⟨$\subset$⟩ jedoch nur, wenn wir explizit Ungleichheit verlangen.

18) Damit es nicht zu Verwechslungen führt, verwenden wir für die metasprachliche Negation nicht das logische Symbol ⟨$\neg$⟩. Wegen (2.1) Seite 23 ist die Definition von ⟨$\Leftarrow$⟩ überflüssig, wird wegen der angegebenen Sprechweise aber dennoch angegeben.

fahren.'“. $\langle\!\langle A \Leftarrow B\rangle\!\rangle$ ist nur eine andere Schreibweise für $\langle\!\langle B \Rightarrow A\rangle\!\rangle$. – Ein Symbol für „nicht“ wird in diesem Dokument nicht gebraucht.

Wir nennen & und || **Metaoperationen** und $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ und $\Leftrightarrow$ **Metarelationen**[19]. Die damit gebildeten Aussagen können natürlich auch geklammert werden, um die Reihenfolge der Auswertung eindeutig zu machen. Für den Fall fehlender Klammern sind ihre Prioritäten in der Tabelle 2.3 auf Seite 26 angegeben.

Um Verwechslungen mit den Junktoren zu vermeiden, verwenden wir für die metasprachlichen Operationen „und“ und „oder“ die Symbole $\langle\&\rangle$ und $\langle\|\rangle$. A und B können als Operanden von $\langle\Leftrightarrow\rangle$, $\langle\&\rangle$ und $\langle\|\rangle$ vertauscht werden, ohne das Ergebnis zu ändern.[20] Wird in einer (Teil-)Aussage nur eine der Operationen & oder || verwendet, können die Klammern dort weggelassen und die Operationen in beliebiger Reihenfolge ausgewertet werden, wiederum ohne das Ergebnis zu ändern.[21] Zusammengefasst ist die Reihenfolge der Operationen und der Auswertung dort beliebig.

2.1.5. Mit Gleichheit verwandte Relationen

2.1.5.1. Vergleichbar

Zwei Objekte A und B sind **vergleichbar**, wenn beide von derselben Objektart sind, d. h. wenn z. B. jeweils beide Mengen, Symbolfolgen, Zahlen, usw. sind. Dabei muss bei Formeln zwischen der Formel an sich und dem Ergebnis der Formel unterschieden werden. Siehe Beispiel (a).

Intuitiv scheint klar zu sein, was damit gemeint ist. Wenn aber entschieden werden muss, ob z. B. (a) „1+1“ gleich „2“ oder (b) „1+1“ gleich „1 + 1“ ist, muss man erst entscheiden, von welcher Objektart die beiden zu vergleichenden Ausdrücke sind, d. h. *wie* verglichen wird. Wenn sie als jeweiliges Ergebnis der beiden Formeln, verglichen werden, dann ist (a) richtig. Wenn sie als Formeln, d. h. als Symbolfolgen, verglichen werden, ist (a) falsch. Wenn die Ausdrücke in (b) als Symbolfolgen verglichen werden, dann ist (b) richtig. Wenn sie als Zeichenketten verglichen werden, ist (b) falsch.

Die folgende Tabelle fasst dass zusammen:

A	B	Objektart	A gleich B
$1+1$	2	Objekt	richtig
$\langle\!\langle 1+1\rangle\!\rangle$	$\langle\!\langle 2\rangle\!\rangle$	Formel	falsch
$\langle\!\langle 1+1\rangle\!\rangle$	$\langle\!\langle 1\ +\ 1\rangle\!\rangle$	Symbolfolge	richtig
"`1+1`"	"`1 + 1`"	Zeichenkette	falsch

2.1.5.2. Vergleiche

A und B seien Objekte. Dann definieren wir:

[19] Man könnte Metaoperationen und Metarelationen auch als **Metajunktoren** bezeichnen. Zur Unterscheidung von Operationen und Relationen vergleiche aber auch die Fußnote 37 auf Seite 23.

[20] D. h. die Operationen $\langle\Leftrightarrow\rangle$, $\langle\&\rangle$ und $\langle\|\rangle$ sind *kommutativ*.

[21] D. h. die Operationen & und || sind auch *assoziativ*. Bei den den logischen Operationen $\wedge$ und $\vee$ müssen Kommutativität und Assoziativität durch Axiome gefordert werden. Die Kommutativität von $\Leftrightarrow$ kann abgeleitet werden.

$\equiv$ **Gleichheit** ⟪$A \equiv B$⟫ heißt, dass A und B in den interessierenden Eigenschaften für $\equiv$ übereinstimmen.[22)] Sprechweisen: „A ist *dasselbe* wie B“ oder „A ist *identisch* zu B“ — Inwieweit die Begriffe *Gleichheit* und *Identität* korrelieren, wird in diesem Dokument nicht erörtert.[23)]

$\not\equiv$ **Ungleichheit** ⟪$A \not\equiv B$⟫ heißt, dass A und B in mindestens einer interessierenden Eigenschaft für $\equiv$ nicht übereinstimmen. Sprechweisen: „A ist *nicht dasselbe* wie B“ (aber vielleicht das gleiche; siehe $\Leftrightarrow$) oder „A ist *nicht identisch* zu B“.

$\equiv$und $\not\equiv$ bezeichnen wir als **Gleichheitsrelationen**. Gleichheit ist eine **Äquivalenzrelation**, d. h. sie ist *reflexiv* $(a \sim a)$, *transitiv* $(((a \sim b) \,\&\, (b \sim c)) \Rightarrow (a \sim c))$ und *symmetrisch* $((a \sim b) \Rightarrow (b \sim a))$ – jeweils für alle zulässigen Objekte a, b und c.

2.1.6. Bezeichnungen

Symbole umfassen neben speziellen Symbolen auch Buchstaben, Ziffern und Sonderzeichen. Symbole, für die es kein eigenes typographisches Zeichen gibt, können auch durch Aufeinanderfolge mehrerer typographischer Zeichen, i. Alg. lateinische Buchstaben, dargestellt werden. Wir nennen sie dann **zusammengesetzte Symbole**, im Gegensatz zu den **einfachen Symbolen**. Charakteristisch für ein Symbol ist, dass es ohne Bedeutungsverlust nicht zerlegt werden kann. Ein zusammengesetztes Symbol ist i. Alg. zerlegbar, kann aber auch als atomar, d. h. unzerlegbar, definiert werden, wie z. B. sin als Symbol für die Sinusfunktion. Symbole werden ⟨so⟩ quotiert; zerlegbare können aber auch wie Symbolfolgen quotiert werden. — Die Quotierung ist kein Bestandteil des Symbols!

Wird für bestimmte Objekte ein Symbol verwendet, so nennen wir dies ein **Objektsymbol**. Ist das Objekt eine Funktion, Operation, Relation usw., so nennen wir das Symbol ein **Funktionssymbol**, **Operationssymbol**, **Relationssymbol** usw.

Zeichenketten sind Folgen von einfachen Symbolen, in denen im Prinzip auch Leerstellen und andere nicht druckbare Zeichen zulässig sind.[24)] Damit Leerstellen in Zeichenketten leicht bestimmt und sogar gezählt werden können, werden Zeichenketten stets ”`in dieser`” Schriftart und Quotierung dargestellt. — Die Quotierung ist kein Bestandteil der Zeichenkette!

Symbolfolgen sind ähnlich wie Zeichenketten, außer das sie als Bausteine neben einfachen auch zusammengesetzte, aber atomare Symbole enthalten können und Leerzeichen und andere Zwischenraumzeichen nicht zählen. Letztere dienen nur der optischen Trennung der Symbole und der besseren Lesbarkeit. Symbolfolgen werden stets ⟪in dieser⟫ Quotierung dargestellt. — Die Quotierung ist kein Bestandteil der Symbolfolge!

Formeln sind in diesem Dokument immer nach vorgegebenen Regeln aufgebaute Symbolfolgen[25)]. Daher werden sie wie Symbolfolgen quotiert. — Die Quotierung ist kein Bestandteil der Symbolfolge!

---

22) Z. B. sind zwei Junktoren üblicherweise dann gleich, wenn sie stets denselben *Wahrheitswert* liefern. Ihre Bezeichnungen können dabei durchaus verschieden sein, interessieren bei der Feststellung der Gleichheit aber nicht. Z. B. bezeichnen ⟨&⟩ und ⟨|⟩ dieselbe Operation, haben aber verschiedene Priorität. — siehe Tabelle 2.3 auf Seite 26

23) siehe [48]

24) Da beim Ausdruck optisch nicht entschieden werden kann, ob ein Zwischenraum (white space) aus einem Tabulator oder evtl. mehreren Leerzeichen besteht, verwenden wir nur einzelne Leerzeichen als Zwischenraumzeichen und vermeiden Zeilenumbrüche.

25) Es kann verschiedene Arten von Formeln geben, z. B. aussagenlogische, prädikatenlogische und solche, die ein Taschenrechner auswerten kann.

Man kann eine Formel auch dadurch charakterisieren, dass sie ein Element aus einer vorgegebenen Menge $\mathcal{L}$ von Symbolfolgen ist.[26] Das ist dann so ziemlich die einfachste Regel.

Wenn eine Symbolfolge nicht korrekt nach den vorgegebenen Regeln aufgebaut ist bzw. kein Element aus der vorgegebenen Menge $\mathcal{L}$ ist, werden wir sie *nicht* als Formel bezeichnen, auch nicht als „fehlerhafte Formel“ oder ähnlich. Sie ist dann einfach keine Formel.

Objekte sind z. B. Symbole, Zeichenketten, Symbolfolgen und Formeln, oder auch Aussagen, Mengen, Zahlen, usw. — ganz allgemein reale oder gedachte Dinge an sich. Eine Formel, die nicht quotiert ist, steht für den Wert dieser Formel, der dann wieder ein Objekt ist. Entsprechend steht ein Symbol, das nicht quotiert ist, für das dadurch bezeichnete Objekt. Z. B. bezeichnet das Symbol $\langle\mathbb{N}\rangle$ die Menge $\mathbb{N}$der natürlichen Zahlen ohne 0.

2.1.7. Quotierung

Zur Verdeutlichung der soeben definierten Quotierungen ein Beispiel:[27]

sin	Objekt	die Sinusfunktion
$\langle\text{sin}\rangle$	Bezeichnung	für das Objekt
$\langle\!\langle\text{sin}\rangle\!\rangle$	Symbolfolge (Formel)	aus dem zusammengesetzten, atomaren Symbol $\langle\text{sin}\rangle$
$\langle\!\langle sin\rangle\!\rangle$	Symbolfolge (Formel)	aus den einfachen Symbolen $\langle s\rangle$, $\langle i\rangle$ und $\langle n\rangle$
“`sin`”	Zeichenkette	aus den einfachen Symbolen $\langle\texttt{s}\rangle$, $\langle\texttt{i}\rangle$ und $\langle\texttt{n}\rangle$

Die Bezeichnung eines Objekts kann auch aus mehreren Symbolen bestehen, d. h. einer Symbolfolge oder sogar einer ganzen Formel; z. B. ist die Bezeichnung für das indizierte Objekt a_i gleich $\langle\!\langle a_i\rangle\!\rangle$.

2.1.8. Weitere Bezeichnungen

Folge

Tupel Ein n-**Tupel** ist eine endliche Folge $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

- n, die **Länge**, d. h. die Anzahl der **Komponenten** aus $\vec{a}$, ist eine natürliche Zahl.

  $\text{len }\ \vec{a} \coloneqq \text{len}(\vec{a}) \coloneqq n$

- Die a_i für $1 \leqslant i \leqslant n$ sind Elemente meist vorgegebener Mengen.
- $\text{set }\ \vec{a} \coloneqq \text{set}(\vec{a}) \coloneqq$ die Menge aller Komponenten a_i aus $\vec{a}$.

Für $n = 0$ ist $\vec{a} = ()$, das **leere Tupel** oder 0-**Tupel**.

Wo immer $\vec{a}$ und a_i mit $i \in \mathbb{N}_0$ gemeinsam vorkommen, ist a_i die i-te Komponente aus $\vec{a}$.

Relation Eine n-**stellige Relation**[28] R ist ein $(1{+}n)$-Tupel $(G, A_1, \ldots, A_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

[26] Die Formel wird dann auch **Wort** der **Sprache** $\mathcal{L}$ genannt - besonders, wenn die Elemente aus $\mathcal{L}$ Zeichenketten statt Symbolfolgen sind. Wir bleiben der Klarheit willen bei „Formel“.

[27] Was atomare und was zerlegbare Symbole sind, muss jeweils definiert werden, bzw. ergibt sich aus dem Zusammenhang.

[28] siehe [66]

- n, die **relationale Stelligkeit**, ist eine natürliche Zahl.

  $\mathrm{stel_r}\, R \coloneqq \mathrm{stel_r}(R) \coloneqq n$

- Die A_i für $1 \leqslant i \leqslant n$ sind Mengen, die **Trägermengen** (carrier) von R.

  $\mathrm{car}_i R \coloneqq \mathrm{car}_i(R) \coloneqq A_i$

- G, der **Graph** von R, ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A_1 \times \ldots \times A_n$.

  $\mathrm{graph}\, R \coloneqq \mathrm{graph}(R) \coloneqq G$ (oft einfach mit R bezeichnet)

- $R(a_1, \ldots, a_n) :\Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in G$

Für $n = 0$ ist $G \subseteq \{()\}$[29], d. h. $R()$ ist entweder *wahr* (true) oder *falsch* (false).
Für $n = 1$ ist $G \subseteq A_1$, d. h. R kann als Teilmenge von A_1 aufgefasst werden.
Für $n = 2$ heißt die Relation **binär** und man schreibt $\langle\!\langle xRy \rangle\!\rangle$ statt $\langle\!\langle R(x,y) \rangle\!\rangle$ bzw. $\langle\!\langle (x,y) \in R \rangle\!\rangle$.

Ist $R = (G, M, \ldots, M)$, so heißt R eine n-stellige Relation **auf**[30] M.

Ist $|G|$ endlich, so nennen wir auch R **endlich**.

Umkehrrelation Die **Umkehrrelation von**[31] einer binären Relation (G, A, B) ist die Relation (G', B, A) mit $G' \coloneqq \{(b, a) \mid (a, b) \in G\}$. Üblicherweise wird das zugehörige Relationssymbol gespiegelt.

Funktion Eine n-**stellige Funktion**[32] ist ein $(1{+}n{+}1)$-Tupel $f = (G, A_1, \ldots, A_n, B)$ mit folgenden Eigenschaften:

- n, die **Stelligkeit**[33], ist eine natürliche Zahl.

  $\mathrm{stel_f}\, f \coloneqq \mathrm{stel_f}(f) \coloneqq n$

- f ist eine $(n{+}1)$-stellige Relation.

- Zu jedem n-Tupel $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a_1, \ldots, a_n, b) \in G$, den **Funktionswert** von $\vec{a}$.

  $f\vec{a} \coloneqq f a_1 \ldots a_n \coloneqq f(\vec{a}) \coloneqq f(a_1, \ldots, a_n) \coloneqq b$ [34]

- $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ ist der **Definitionsbereich** (domain) von f.

  $\mathrm{dom}\, f \coloneqq \mathrm{dom}(f) \coloneqq A_1 \times \ldots \times A_n$

- B ist der **Zielbereich** (target) von f

  $\mathrm{tar}\, f \coloneqq \mathrm{tar}(f)$

[29] Das kartesische Produkt enthält nur noch das 0-Tupel $()$.
[30] alternativ: **in**
[31] alternativ: **für**
[32] siehe [46]
[33] Die Werte der Stelligkeit als Relation und als Funktion sind verschieden, d. h. es gilt stets: $\mathrm{stel_r}(f) = \mathrm{stel_f}(f) + 1$.
[34] $f(a_1, \ldots, a_n)$ und $f(a_1, \ldots, a_n, b)$ sind wohl zu unterscheiden. Ersteres ist ein Funktionsaufruf mit einem Funktionswert, letzteres eine Relation mit einem Wahrheitswert.

Für $n = 0$ ist $G = ((), b)$ für ein $b \in B$ und somit $f() = b$. f kann damit auch als Konstante b aufgefasst werden.[35)]

Man sagt: f ist eine n-stellige Funktion von $A_1 \times \ldots \times A_n$ **nach**[36)] B (Schreibweise: $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to B$) oder, im Fall $n = 1$, f ist eine Funktion von A nach B (Schreibweise: $f : A \to B$). Mit $A :\equiv A_1 \times \ldots \times A_n$ kann für $n > 0$ jede Funktion als 1-stellig aufgefasst werden.

Operationen in oder auf einer Menge M sind n-stellige Funktionen $M^n \to M$. Für eine **binäre**, d. h. 2-stellige Operation $\circledast$ schreibt man i. Alg. $\langle\langle x \circledast y \rangle\rangle$ statt $\langle\langle \circledast(x, y) \rangle\rangle$. Wenn nicht anders angegeben, sind Operationen stets binär. 0-stellige Operationen können wieder als Konstante aufgefasst werden.

Um Missverständnisse zu vermeiden, werden wir die Bezeichnung „Operator“ nicht verwenden.

Junktoren sind aussagenlogische Relationen und Operationen.[37)]

2.1.9. Relationen und Operationen

Als Beispielsymbol für unäre Operationen wird $\langle \ominus \rangle$ und für binäre Operationen $\langle \circledast \rangle$ verwendet. Beispielsymbole für binäre Relationen sind $\langle \prec \rangle$ und $\langle \preceq \rangle$, für ihre Umkehrrelationen $\langle \succ \rangle$ bzw. $\langle \succeq \rangle$ sowie für ihre **Negationen** $\langle \nprec \rangle$ bzw. $\langle \npreceq \rangle$.[38)] Wenn nichts anderes gesagt wird, gelte mit diesen Symbolen bei gegebenem $\langle \prec \rangle$[39)] stets:

$$(A \succ B) \quad :\Leftrightarrow \quad (B \prec A) \qquad \text{, die **Umkehrrelation** von } \prec \tag{2.1}$$

$$(A \nprec B) \quad :\Leftrightarrow \quad \sim(A \prec B) \qquad \text{, die **Negation** von } \prec \tag{2.2}$$

Dabei ist $\langle \succ \rangle$ ist die waagerechte Spiegelung von $\langle \prec \rangle$ und statt des senkrechten kann auch ein schräger Strich genommen werden.

Sei nun $\prec$ gegeben und $\nsucc$ die Umkehrrelation der Negation von $\prec$. Dann gilt wegen 2.1 und 2.2

$$(A \nsucc B) \Leftrightarrow (B \nprec A) \Leftrightarrow \sim(B \prec A)$$

Sei nun umgekehrt $\nsucc$ die Negation der Umkehrrelation von $\prec$. Dann gilt wegen 2.2 und 2.1

$$(A \nsucc B) \Leftrightarrow \sim(A \succ B) \Leftrightarrow \sim(B \prec A)$$

35) Bei der Schreibweise ohne Klammern steht da statt $\langle\langle f() \rangle\rangle$ nur noch $\langle\langle f \rangle\rangle$ und statt $\langle\langle f() = b \rangle\rangle$, insgesamt also nur noch $\langle\langle f = b \rangle\rangle$.

36) alternativ: **in**

37) Ein n-stelliger Junktor J sei eine Operation und somit eine Funktion. Wegen $M = \{\text{true}, \text{false}\}$ kann er auch als eine n-stellige Relation J' aufgefasst werden: $J' :\equiv \{\vec{a} \in M^n \mid J(\vec{a}) = \text{true}\}$.
Umgekehrt kann eine n-stellige aussagenlogische Relation J' mittels: $J''(\vec{a}) :\equiv$ true für $\vec{a} \in J'$, false sonst, für $\vec{a} \in M^n$, auch als n-stellige Operation aufgefasst werden.
Falls $J(\vec{a}) = \text{true}$ ist $\vec{a} \in J'$ und somit $J''(\vec{a}) = \text{true}$. Für $J(\vec{a}) = \text{false}$ ist $\vec{a} \notin J'$ und somit $J''(\vec{a}) = \text{false}$. Also ist $J = J''$ und so können die n-stelligen aussagenlogischen Relationen und Operationen einander eineindeutig zugeordnet werden.
Daher sind in der Aussagenlogik Relationen und Operationen nicht von vornherein unterscheidbar. Wegen der Verabredungen in Unterabschnitt 2.1.9 muss für die verwendeten Junktoren daher jeweils wohl definiert sein, ob sie als Relation und Operation zu verstehen sind.

38) Die Relationen brauchen keine Ordnungsrelationen sein, auch wenn die angegebenen Symbole dies nahe legen. Wenn eine der Relationen $\prec$, $\preceq$, $\succ$ oder $\succeq$ definiert ist, sind wegen (2.1), (2.3) und (2.4) auch die anderen drei Relationen definiert sowie wegen (2.2) auch $\nprec$, $\npreceq$, $\nsucc$ und $\nsucceq$. Der senkrechte Strich bei den Negationen kann auch schräg sein, wie z. B. bei $\not\equiv$.

39) entsprechend mit $\langle \succ \rangle$, $\langle \preceq \rangle$, $\langle \succeq \rangle$ und anderen, nicht horizontal symmetrischen Symbolen.

Also stimmt die Umkehrrelation der Negation mit der Negation der Umkehrrelation überein und wir brauchen keine verschiedenen Symbole dafür.

Je nachdem ob $\prec$ oder $\preceq$ gegeben ist[40)] gelte ferner:

$$(A \preceq B) \quad :\Leftrightarrow \quad ((A \prec B) \parallel (A \equiv B)) \tag{2.3}$$
$$(A \prec B) \quad :\Leftrightarrow \quad ((A \preceq B) \mathbin{\&} (A \not\equiv B)) \tag{2.4}$$

Man beachte, dass, wenn man $\langle :\Leftrightarrow \rangle$ durch $\langle \Leftrightarrow \rangle$ ersetzt, weder (2.3) aus (2.4) folgt noch umgekehrt. (2.3) und (2.4) folgen aber dann auseinander, wenn aus $\langle \prec \rangle$ die Ungleichheit bzw. aus der Gleichheit $\langle \preceq \rangle$ folgt. Beispiele dazu sind in der Tabelle 2.2 angegeben.

	$A,\ A$	$A,\ B$	$B,\ A$	$B,\ B$	
$\equiv$	$A = A$			$B = B$	
$\prec$		$A \prec B$			Es gilt (2.3)
$\preceq$	$A \preceq A$	$A \preceq B$		$B \preceq B$	und (2.4)
$\prec$		$A \prec B$		$B \prec B$	Es gilt (2.3)
$\preceq$	$A \preceq A$	$A \preceq B$		$B \preceq B$	aber nicht (2.4)
$\prec$		$A \prec B$			Es gilt (2.4)
$\preceq$	$A \preceq A$	$A \preceq B$			aber nicht (2.3)

Tabelle 2.2.: Beispiele für $\prec$ und $\preceq$

Seien $\circ_1$ und $\circ_2$ binäre Operationen oder Relationen (auch gemischt) und mindestens eins von beiden eine Relation. Dann treffen wir folgende Vereinbarung:[41)]

$A \circ_1 B \circ_2 C$ steht für $A \circ_1 B \quad \& \quad B \circ_2 C$

Ist diese Interpretation nicht gewünscht, so müssen Klammern verwendet werden.

Für den Fall fehlender Klammern sind die Prioritäten in der Tabelle 2.3 auf Seite 26 angegeben. Damit wären dann alle Klammern in diesem Unterabschnitt 2.1.9 überflüssig.

2.1.10. Prioritäten

Die Tabelle 2.3 auf Seite 26 listet zur Vermeidung von Klammern die Prioritäten der in diesem Dokument verwendeten Operationen, Relationen, Junktoren und Metadefinitionen in absteigender Folge von höherer zu niedrigerer Priorität, d. h. von starker zu schwacher Bindung auf.[42)] Das Weglassen redundanter Klammern wird in diesem Kapitel 2 nicht weiter thematisiert.[43)] Zur besseren Verständlichkeit werden aber gele-

40) entsprechend mit $\succ$ oder $\succeq$oder anderen nicht horizontal symmetrischen Paaren von Symbolen.

41) wird auch in der Literatur verwendet, z. B. z. B. [2], Notationen Seite xxi

42) Priorität 1 ist höher und bindet damit stärker als Priorität 2, usw.

43) Gesetzt den Fall, dass ASBA die Prämissen und Konklusionen eines mathematischen Satzes richtig und die Beweisschritte, z. B. durch fehlerhafte Interpretation einer Formel, falsch einliest, ansonsten aber richtig arbeitet. Dann kann man folgende Fälle unterscheiden:
— Ein falscher Satz kann dadurch nicht als richtig bewertet werden.
— Ein richtiger Satz wird wahrscheinlich auch bei eigentlich richtigem Beweis als nicht bewiesen gelten, was natürlich unbefriedigend ist.
— In äußerst unwahrscheinlichen Fällen kann dabei auch ein eigentlich falscher Beweis in einen richtigen verwandelt werden, was zwar schön ist, aber leider steht in der Dokumentation dann ein falscher Beweis.
In keinem Fall wird durch diesen Fehler die Menge der richtigen Sätze durch einen falschen Satz „verunreinigt“.

gentlich auch redundante Klammern verwendet, insbesondere wenn Prioritäten unklar oder in der Literatur auch anders definiert sind. Die Prioritäten der Junktoren wurden aus [2] Kapitel 1.1 Seite 5 entnommen und ergänzt und die der Metaoperationen daran angeglichen.

Für Operationen derselben Priorität wählen wir in diesem Dokument Rechtsklammerung[44].

2.2. Beweise in ASBA

Die Regeln zur Formulierung und Prüfung der Beweise müssen in ASBA fest codiert werden. Sie sind quasi die Axiome von ASBA und sollten daher möglichst wenig voraussetzen. In ASBA wird dazu ein *Genzen-Kalkül*[45] verwendet. Die Definition von *Schlussregel* und *Beweis* ist in diesem Dokument ASBA-spezifisch, um später eine leichtere Programmierung zu erreichen. Insbesondere müssen alle abzuspeichernden Mengen endlich sein. Dies berücksichtigen wir in den Beispielen, fordern zunächst aber nicht notwendig Beschränktheit. Zuerst brauchen wir aber noch ein paar Definitionen.

2.2.1. Definitionen und Verabredungen

Zu $\langle \text{len} \rangle$ und $\langle \text{set} \rangle$ Vergleiche die Definition von *n-Tupel* im Unterabschnitt 2.1.8 auf Seite 21.

$$
\begin{array}{llll}
|M| & :\equiv & \text{Kardinalität von } M & \text{, die } \textbf{Anzahl der Elemente} \text{ aus } M \\
M^n & :\equiv & M \times \ldots \times M \quad \text{, für } n \in \mathbb{N}_0 & \text{, das } \textbf{kartesische Produkt} \text{ aus } n \text{ Mengen } M \\
M^0 & \equiv & \{()\} & \text{, wobei } () \text{ das } \textbf{0-Tupel} \text{ ist} \\
\mathcal{T}(M) & :\equiv & \{\vec{a} \in M^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} & \text{, die Menge der } \textbf{Tupel über } M \text{ (}\textbf{Tupelmenge}\text{)} \\
(A,B)^{<} & :\equiv & A & \text{, die } \textbf{linke Seite} \text{ eines geordneten Paares.} \quad (2.5) \\
(A,B)^{>} & :\equiv & B & \text{, die } \textbf{rechte Seite} \text{ eines geordneten Paares.} \quad (2.6) \\
\mathcal{P}(M) & :\equiv & \{A \mid A \subseteq M\} & \text{, die } \textbf{Potenzmenge} \text{ der Menge } M \quad (2.7) \\
\mathcal{P}_e(M) & :\equiv & \{A \subseteq M \mid |A| \in \mathbb{N}_0\} & \text{, die } \textbf{endlichen Teilmengen} \text{ von } M \\
\mathcal{R}(M) & :\equiv & \{R \mid R \subseteq M \times M\} & \text{, die Menge der } \textbf{binären Relationen in } M \quad (2.8) \\
\mathcal{R}_e(M) & :\equiv & \{R \subseteq M \times M \mid |R| \in \mathbb{N}_0\} & \text{, die } \textbf{endlichen binären Relationen in } M \\
\vdash_R & :\equiv & R & \text{, für Relationen } R \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})) \quad (2.9)
\end{array}
$$

44) Die Symbole unärer Operationen stehen in diesem Dokument stets links *vor* dem Operanden, so dass es für sie nur Rechtsklammerung geben kann. Zur Rechtsklammerung bei binären Operationen ein Zitat aus [2] Kapitel 1.1 Seite 5: „Diese hat gegenüber Linksklammerung Vorteile bei der Niederschrift von Tautologien in $\rightarrow$, […]“. Die meisten Autoren bevorzugen Linksklammerung, was natürlicher erscheint. Dann sollte man aber für die Potenz doch noch Rechtsklammerung wählen, sonst ist $\langle\!\langle a^{x^y} = (a^x)^y = a^{(x*y)} \rangle\!\rangle$ und nicht wie wahrscheinlich erwünscht $\langle\!\langle a^{(x^y)} \rangle\!\rangle$.

45) siehe [2] Kapitel 1.4 und [68, 70]

Klammern	( ) ⟨ ⟩ ⟪ ⟫ " "
Operationen haben unterschiedliche Priorität.	
Unäre Operationen [1] [2]	⊖ ¬ ∼
Binäre Bereichsoperationen	× ∪ ∩
Binäre Operationen [1]	⊛
Binäre Junktoren [2]	∧ ↑ ∨ ∨̇ ↓ ← → ↔
Binäre Relationen haben gleiche Priorität.	
Binäre Elementrelationen[3]	∈ ∉ ∋ ∌
Binäre Bereichsrelationen[3]	⊂ ⊄ ⊆ ⊈ ⊃ ⊅ ⊇ ⊉
Binäre Relationen [1]	< ≮ ≤ ≰ > ≯ ≥ ≱
Gleichheitsrelation [4]	≡ ≢
Ableitungsrelation [5]	⊢
Ersetzung [5]	⇆ ⟻
Sonstige binäre Verknüpfungen haben unterschiedliche Priorität.	
Objektdefinition [6]	:≡
Binäre Metaoperationen [7] [8]	& ‖ | ⇐ ⇔ ⇒
Aussagedefinition [6]	:⇔
Natürliche Sprache	
Innerhalb natürlicher Sprache deren Strukturelemente, z. B. Satzzeichen [9]	. , ; usw.

1 siehe Unterabschnitt 2.1.9 auf Seite 23
2 siehe Tabelle 3.3 auf Seite 41
3 siehe Unterabschnitt 2.1.6 auf Seite 20
4 siehe Paragraph 2.1.5.2 auf Seite 19
5 siehe Unterabschnitt 3.1.1 auf Seite 32
6 siehe Paragraph **??** auf Seite ??
7 siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 18
8 ⟨|⟩ wird nur bei den Schlussregeln (siehe Unterabschnitt 2.2.3 auf Seite 28) verwendet. ⟨&⟩ und ⟨|⟩ bezeichnen die gleiche Operation, haben aber unterschiedliche Priorität.
9 Innerhalb von Formeln können Satzzeichen eine andere Bedeutung und Priorität haben.

Tabelle 2.3.: Prioritäten in abnehmender Reihenfolge

Offensichtlich gilt für Mengen M und N:

$$\mathcal{P}_e(M) \subseteq \mathcal{P}(M) \quad , \quad \mathcal{R}_e(M) \subseteq \mathcal{R}(M) \tag{2.10}$$

$$\mathcal{R}(M) = \mathcal{P}(M \times M) = \mathcal{P}(M^2) \quad , \quad \mathcal{R}_e(M) = \mathcal{P}_e(M \times M) = \mathcal{P}_e(M^2) \tag{2.11}$$

$$\mathcal{P}(M) \subset \mathcal{P}(N) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_e(M) \subset \mathcal{P}_e(N) \quad \Leftrightarrow \quad M \subset N$$

$$\mathcal{R}(M) \subset \mathcal{R}(N) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{R}_e(M) \subset \mathcal{R}_e(N) \quad \Leftrightarrow \quad M \subset N$$

$$\vec{a} \in \mathcal{T}(M^2) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{set}(\vec{a}) \in \mathcal{R}_e(M) \tag{2.12}$$

2.2.2. Formeln und Ableitungen

Im Folgenden sei $\mathcal{L}$ stets eine gegebene Menge von Formeln, z. B. alle korrekten Formeln der Aussagenlogik oder der Prädikatenlogik. Für die folgenden Betrachtungen ist aber nur nötig, dass die Elemente aus $\mathcal{L}$ Symbolfolgen sind. Die Teilmengen von $\mathcal{L}$ nennen wir **Formelmengen**. Es sind genau die Elemente aus $\mathcal{P}(\mathcal{L})$.

Bei einem Beweis werden aus einer Formelmenge Γ von Axiomen und schon bewiesenen Formeln mittels zulässiger [46] Ableitungen die Formeln einer Formelmenge Δ abgeleitet; Schreibweise: $\langle\!\langle \Gamma \vdash \Delta \rangle\!\rangle$.

Für Teilmengen Γ und Δ von $\mathcal{L}$ sei also:

- $\Gamma \ \vdash \ \Delta :\Leftrightarrow \Gamma$ **ableitbar** Δ; oder auch Γ **beweisbar** Δ.
- $\Gamma \ \vdash \ \Delta$ nennen wir auch eine **Ableitung in** $\mathcal{L}$. Damit ist (Γ, Δ) ein Element aus einer binären Relation $\vdash$ in $\mathcal{P}(\mathcal{L})$, einer sogenannten **Ableitungsrelation**.
- Wenn wir von einer Ableitung **a** sprechen, meinen wir immer ein Element aus einer Ableitungsrelation, d. h. ein geordnetes Paar, z. B. $(\Gamma, \Delta) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$, dargestellt als $\Gamma \vdash \Delta$.
- Um möglicherweise verschiedene Ableitungsrelationen unterscheiden zu können, indizieren wir $\langle \vdash \rangle$ ggf. mit der zugrundeliegenden Relation R, d. h. wir schreiben $\langle \vdash_R \rangle$ und sprechen dann von R-**ableitbar**, R-**beweisbar** und R-**Ableitung**.

Zur Vereinfachung der Darstellung und besseren Lesbarkeit treffen wir noch folgende Vereinbarungen für die beiden Seiten von $\langle\!\langle \Gamma \vdash \Delta \rangle\!\rangle$ (natürlich nur, wenn dies nicht zu Verwechslungen führt):

- Eine Aufzählung von Formelmengen und einzelnen Formeln steht für die Vereinigung der Formelmengen mit der Menge der einzeln angegebenen Formeln. Z. B. steht $\langle\!\langle \Gamma, \alpha \vdash \beta \rangle\!\rangle$ für $\langle\!\langle (\Gamma \cup \{\alpha\}) \vdash \{\beta\} \rangle\!\rangle$.
- Diese Aufzählungen können auch leer sein und stehen dann für die leere Menge. Z. B. steht $\langle\!\langle \vdash \ \alpha \to (\beta \to \alpha) \rangle\!\rangle$ für $\langle\!\langle \varnothing \vdash \{\alpha \to (\beta \to \alpha)\} \rangle\!\rangle$.
- Ist die Aufzählung links vom Relationssymbol $\langle \vdash \rangle$ leer, kann auch das Relationssymbol wegfallen. Im letzten Beispiel also einfach $\langle\!\langle \{\alpha \to (\beta \to \alpha)\} \rangle\!\rangle$. Das entspricht dann einem **Axiom**.

[46] Was *zulässig* heißt, muss im entsprechenden Kontext jeweils definiert sein. Üblicherweise sind das bestimmte Ableitungsregeln und Ersetzungen.

Im Folgenden halten wir uns bei der Verwendung von Buchstaben so weit wie möglich an folgende Vereinbarungen:[47]

griechisch, klein:	$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	Formel	$\in \mathcal{L}$
griechisch, groß:	$\Gamma, \Delta, \Theta, \ldots$	Formelmenge	$\in \mathcal{P}(\mathcal{L})$
lateinisch, fett, klein:	$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$	Ableitung	$\in \mathcal{P}(\mathcal{L})^2$
lateinisch, fett, groß:	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	Ableitungsrelation	$\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2) = \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$

Damit definieren wir folgende Aussagen:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Ableitungen aus } \mathbf{A} \text{ lassen sich die aus } \mathbf{B} \text{ ableiten.} \tag{2.13}$$

$$\frac{\vec{\mathbf{a}}}{\vec{\mathbf{b}}} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Komponenten aus } \vec{\mathbf{a}} \text{ lassen sich die aus } \vec{\mathbf{b}} \text{ ableiten.} \tag{2.14}$$

$$\frac{\mathbf{a}_1 \mid \ldots \mid \mathbf{a}_n}{\mathbf{b}_1 \mid \ldots \mid \mathbf{b}_m} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Ableitungen } \mathbf{a}_i \text{ lassen sich die } \mathbf{b}_j \text{ ableiten.} \tag{2.15}$$

wobei in der letzten Definition $1 \leqslant i \leqslant n$ und $1 \leqslant j \leqslant m$ sei und die $\mathbf{a}_i$ und die $\mathbf{b}_j$ dabei jeweils beliebig permutiert werden können. $\langle | \rangle$ und Bruchstrich stehen für die Metaoperationen $\langle \& \rangle$ und $\langle \Rightarrow \rangle$.[48] Wir nennen alle drei Formen **Schlussregeln**[49]. Die Elemente aus A bzw. die Komponenten a_i nennen wir die **Prämissen** und die Elemente aus B bzw. die Komponenten b_j die **Konklusionen**[50] der Schlussregel. Offensichtlich gilt:

$$\frac{a_1 \mid \ldots \mid a_n}{b_1 \mid \ldots \mid b_m} \Leftrightarrow \frac{\vec{a}}{\vec{b}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{set}(\vec{a})}{\mathrm{set}(\vec{b})} \tag{2.16}$$

Wir nennen eine Schlussregel auch einen **formalen Satz** und nennen sie **beschränkt**, wenn sie nur endlich viele Prämissen und Konklusionen hat. Die Schlussregeln nach (2.14) und (2.15) sind per se beschränkt. Die nach (2.13) genau dann, wenn $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ endliche Mengen sind, d. h. wenn sie Elemente aus ...

Die Mengen der Prämissen und Konklusionen dürfen auch leer sein. Dies führt zu den folgenden Spezialfällen:

Eine Schlussregel $\frac{A}{\varnothing}$ ohne Konklusionen ist immer gültig.

Ein Menge B von Ableitungen, die als Axiome dienen sollen, kann als Schlussregel $\frac{\varnothing}{B}$ ohne Prämissen repräsentiert werden.

2.2.3. Schlussregeln

Wir betrachten zuerst noch die Menge der binären Relationen[51] in $\mathcal{P}(\mathcal{L})$. Sei also R eine solche binäre Relation und $A \in R$. Dann gilt wegen (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) und (2.9)

[47] Die letzte Gleichung ergibt sich aus (2.11) auf Seite 27.
[48] Der Bruchstrich hat die übliche Priorität, | die schwächste. Man beachte, dass Zähler und Nenner auch leer sein können, d. h. n und m gleich 0 sein dürfen. In der Praxis liegen sie bei kleinen Werten, typischerweise 0, 1 oder 2.
[49] Genau genommen nur um die Darstellung einer Schlussregel. Die Exakte Definition erfolgt im Unterabschnitt 2.2.3.
[50] synonym: **Folgerungen**
[51] siehe Unterabschnitt 2.1.8 auf Seite 21

auf Seite 25:

$$
\begin{array}{llll}
A \in R \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})) & & & \\
A = (A^<, A^>) & \text{und es gilt} & A^<, A^> \subseteq \mathcal{L} & \\
A^< \vdash_R A^> & \text{oder einfach} & A^< \vdash A^> & \text{ist eine } R\text{-Ableitung} \\
 & & & \\
A^< \; R\text{-ableitbar} \; A^> & \text{oder einfach} & A^< \;\text{ableitbar}\; A^> &
\end{array}
$$

Nach diesen Vorbereitungen fassen wir noch mal zusammen:
Ein geordnetes Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{K}) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)^2 = \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))^2$ heißt eine **Schlussregel für** $\mathcal{L}$, geschrieben $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$; und es gilt:

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{P} \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})) & \text{, die } \textbf{Prämissen} & & \text{, eine Menge von } \mathcal{P}\textbf{-Ableitungen}. \\
\mathcal{K} \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})) & \text{, die } \textbf{Konklusionen} & & \text{, eine Menge von } \mathcal{K}\textbf{-Ableitungen}. \\
\mathbf{a} \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow & \mathbf{a} = (\Gamma, \Delta) \;\&\; \Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{L}) & & \text{, Schreibweise: } \Gamma \vdash_{\mathcal{P}} \Delta \\
\mathbf{a} \in \mathcal{K} \quad \Rightarrow & \mathbf{a} = (\Gamma, \Delta) \;\&\; \Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{L}) & & \text{, Schreibweise: } \Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \Delta
\end{array}
$$

mit Γ und Δ jeweils passend.

***** Fehlende Verweise: Ableitungsmenge, $\neq$, true, $\vdash$, $\vdash_R$. *****

Die Schlussregel entspricht der Aussage:

> *Mit den Prämissen aus $\mathcal{P}$ lassen sich alle Konklusionen aus $\mathcal{K}$ ableiten*[52].

Die Schlussregel heißt **allgemeingueltig**, wenn aus den Prämissen alle Konklusionen abgleitet werden können. In diesem Fall kann sie zur zulässigen Transformation von weiteren Formeln dienen.

Die Mengen der Prämissen und Konklusionen sowie die beiden Seiten einer Ableitung dürfen auch leer sein. Dies führt zu den folgenden semantischen Spezialfällen:

- Eine Ableitung $(A, \varnothing)$ ist trivial allgemeingültig. Daher können solche Prämissen und Konklusionen ohne Probleme weggelassen werden.
- Ein Menge B von Formeln, die Axiome sein sollen, kann durch eine Prämisse $(\varnothing, B)$ repräsentiert werden.
- Ein Menge B von Formeln, die als allgemeingültig zu beweisen sind, kann durch eine Konklusion $(\varnothing, B)$ repräsentiert werden.

Wenn eine Schlussregel $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$ beschränkt ist, sind $\mathcal{P}$ und $\mathcal{K}$ endliche Mengen und es gibt wegen (2.12) auf Seite 27 zwei Tupel $\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{k}} \in \mathcal{T}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)$, so dass gilt: [53]

$$
\begin{array}{llllllll}
\mathcal{P} & \equiv & \text{set}(\vec{\mathbf{p}}) & , \mathcal{K} & \equiv & \text{set}(\vec{\mathbf{k}}) & & \\
N & \geqslant & |\mathcal{P}| & , M & \geqslant & |\mathcal{K}| & \text{, mit } N, M \in \mathbb{N}_0 & \\
\vec{\mathbf{p}} & \equiv & \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N\} & , \vec{\mathbf{k}} & \equiv & \{\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_M\} & & \\
\mathbf{p}_n & \equiv & (\mathbf{p}_n^<, \mathbf{p}_n^>) & , \mathbf{k}_m & \equiv & (\mathbf{k}_m^<, \mathbf{k}_m^>) & \text{, für } 1 \leqslant n \leqslant N \text{ , } 1 \leqslant m \leqslant M & \\
 & & & & & & & \\
\mathbf{p}_n^< & \vdash_{\mathcal{P}} & \mathbf{p}_n^> & , \mathbf{k}_m^< & \vdash_{\mathcal{K}} & \mathbf{k}_m^> & \text{, für } 1 \leqslant n \leqslant N \text{ , } 1 \leqslant m \leqslant M &
\end{array}
\tag{2.17}
$$

[52] mittels noch zu definierender *zulässiger Transformationen*

[53] Statt $\geqslant$ könnte in (2.17) auch $\equiv$ genommen werden. Dann müssten die $\mathbf{p}_n$ und die $\mathbf{k}_m$ jeweils paarweise verschieden sein, was wir nicht voraussetzen wollen.

also

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{p}} &= \{(\mathbf{p}_n^<, \mathbf{p}_n^>) \mid 1 \leqslant n \leqslant N\}\\ \vec{\mathbf{k}} &= \{(\mathbf{k}_m^<, \mathbf{k}_m^>) \mid 1 \leqslant m \leqslant M\}\end{aligned}$$

und wir nennen auch das Paar $(\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{k}})$ Schlussregel. Diese ist per se beschränkt und ein Element aus $\mathcal{T}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)^2$. Nun haben wir alternative Schreibweisen für beschränkte Schlussregeln:[54)]

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{set}(\vec{\mathbf{p}})}{\mathrm{set}(\vec{\mathbf{k}})} \Leftrightarrow \frac{\vec{\mathbf{p}}}{\vec{\mathbf{k}}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{p}_1^< \vdash_{\mathcal{P}} \mathbf{p}_1^> \mid \dots \mid \mathbf{p}_N^< \vdash_{\mathcal{P}} \mathbf{p}_N^>}{\mathbf{k}_1^< \vdash_{\mathcal{K}} \mathbf{k}_1^> \mid \dots \mid \mathbf{k}_M^< \vdash_{\mathcal{K}} \mathbf{k}_M^>} \text{, **Schlussregel** oder **formaler Satz**} \tag{FS}$$

2.2.4. Beweise

Für einen **Beweis** in ASBA ist stets gegeben:[55)]

$\mathcal{L}$, eine Menge von Formeln, die zugrundeliegende **Sprache**.

$\mathcal{E} \subseteq \{E \mid E : \mathcal{L} \to \mathcal{L}\}$, eine Menge von Funktionen, die **Ersetzungen**.

$\mathcal{C} \in \mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})))$, eine Menge von **Schlussregeln**.

$\mathcal{E} \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$, eine Menge von Ableitungen, die **Ergebnisse**.

Die *Ersetzungen* sorgen z. B. dafür, dass aus einer allgemeingültigen Formel wie $\langle\!\langle \alpha \to (\beta \to \alpha)\rangle\!\rangle$ z. B. die allgemeingültige Formel $\langle\!\langle \gamma \to (\delta \to \gamma)\rangle\!\rangle$ abgeleitet werden kann. Die *Schlussregeln* geben erlaubte Schlussfolgerungen aus gegebenen Elementen an und umfassen auch die Prämissen eines Satzes. Die *Ergebnisse* schließlich sind das, was mittels eines Beweises aus den gegebenen Prämissen $\mathcal{L}$, $\mathcal{E}$ und $\mathcal{C}$ gefolgert werden soll.

Im Fall von beschränkten Schlussregeln können statt $\mathcal{C}$ und $\mathcal{E}$ auch

$\vec{\mathcal{C}} \in \mathcal{T}(\mathcal{T}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)^2)$, ein Tupel aus **Schlussregeln**.

$\vec{\mathbf{e}} \in \mathcal{T}(\mathcal{P}(\mathcal{L})^2)$, ein Tupel aus **Ableitungen**, die **Ergebnisse**.

gegeben sein. Mit

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &\coloneqq \{(\mathrm{set}(\vec{\mathbf{p}}), \mathrm{set}(\vec{\mathbf{k}})) \mid (\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{k}}) \in \mathrm{set}(\vec{\mathcal{C}})\}\\ \mathcal{E} &\coloneqq \mathrm{set}(\vec{\mathbf{e}})\end{aligned}$$

ergibt sich wegen (2.10) und (2.12) auf Seite 27 wieder die erste Form.

2.2.5. Beispiel für einen Beweis

> > > Nacharbeiten < < <

> > > Hier weitermachen < < <

54) Nach (2.13), (2.14) und (2.15) auf Seite 28 sind die „Brüche“ Aussagen, und keine Paare mehr. Die Äquivalenz der Aussagen steht schon in (2.16) auf Seite 28

55) ASBA selbst kann nur endliche Mengen aBspeichern. Für ASBAmuss daher einschränkend $\mathcal{C} \in \mathcal{R}_e(\mathcal{R}_e(\mathcal{P}_e(\mathcal{L})))$ und $\mathcal{E} \in \mathcal{R}_e(\mathcal{P}_e(\mathcal{L}))$ sein.

Zur Veranschaulichung ein Beispiel:[56)]

$$
\begin{array}{lrl}
E_{\alpha,\beta}(\delta) & \coloneqq & \text{das } \delta\text{, bei dem alle Vorkommen von } \alpha \text{ durch } \beta \text{ ersetzt wurden} \\
\mathcal{L} & \coloneqq & \text{die Menge aller Formeln der aussagenlogischen Sprache} \\
\mathbf{p}_1 & \coloneqq & (A, \{\alpha\}) \\
\mathbf{p}_2 & \coloneqq & (B, \{\alpha \to \beta\}) \\
\mathbf{p}_3 & \coloneqq & (A \cup B, \{\beta\}) \\
\mathcal{E} & \coloneqq & \{E_{\alpha,\delta}, E_{\beta,B}, E_{\beta,B\to\delta}, E_{\gamma,\delta}\} \\
\mathcal{C} & \coloneqq & \ldots \\
\chi_1 & \coloneqq & \alpha \to (\beta \to \alpha) \\
\chi_2 & \coloneqq & (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \\
\mathcal{X} & \coloneqq & \{\chi_1, \chi_2\} \\
\vdash_{\mathcal{K}} & \coloneqq & \ldots
\end{array}
$$

2.2.6. Beweisschritte

Ein Beweis[57)] in ASBA besteht aus

einer Schlussregel	$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$		
einer Folge	$\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_K)$	von *Beweisschritten* b_k	, die **Beweisschrittfolge**
einer Folge	$\mathcal{T} = (T_1, T_2, ..., T_K)$	von *Transformationen* T_k	, die **Transformationsfolge**

Dabei ist K ein Element aus $\mathbb{N}_0$, $0 \leqslant k \leqslant K$, die **Beweisschritte** b_k sind Schlussregeln und die Transformationen T_k werden später definiert. Wir definieren noch:

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{B}_k & \coloneqq & \{b_1, \ldots, b_k\} \quad \text{, für } 0 \leqslant k \leqslant K \\
\mathcal{B} & \coloneqq & \mathcal{B}_K
\end{array}
$$

und nennen $\mathcal{B}$ die **Beweisschrittmenge** der Beweisschrittfolge $\vec{b}$. Dann ist $\mathcal{B}_0 = \varnothing$ und $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{B}$ für $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant K$. – Wir nennen die Beweisschrittfolge auch eine **Ableitung** aus $\mathcal{K}$ aus $\mathcal{P}$.

Jeder Beweisschritt b_k für $1 \leqslant k \leqslant K$ muss entweder eine Prämisse aus $\mathcal{P}$ oder durch Anwendung einer allgemeingültigen Schlussregel auf eine Teilmenge von $\mathcal{B}_{k-1}$ eine wahre Formel oder eine weitere allgemeingültige Schlussregel sein. Schließlich muss noch

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$$

sein, da jede Konklusion aus $\mathcal{K}$ in der Folge $\vec{b}$ vorkommen und somit Element aus der Menge $\mathcal{B}$ sein muss.

==

56) siehe [47]
57) siehe [2] Kapitel 1.6 und 3.6

3. Ideen

3.1. Schlussregeln

In diesem Abschnitt geht es um zulässige Transformationen, d. h. allgemeingültige Schlussregeln. Dazu gehören zunächst die Basisregeln. Dann aber auch alle aus den Basisregeln und den bis dahin allgemeingültigen Schlussregeln korrekt abgeleiteten neuen Schlussregeln. Die Schlussregeln haben die Form eines Formalen Satzes.

3.1.1. Basisregeln

Gemäß [2] Kapitel 1.4 *Ein vollständiger aussagenlogischer Kalkül* werden sechs Basisregeln definiert. Zuvor werden aber noch einige Definitionen gebraucht. Dazu seien n, m, k und l natürliche Zahlen (auch 0), α, α_i, β und β_j Formeln X, X_i, Y und Y_j Mengen von Formeln und

$$X \coloneqq X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$$
$$Y \coloneqq Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$$

X und Y können auch die leere Menge sein. Damit wird definiert:

$\alpha \vdash \beta \quad :\Leftrightarrow$ β ist mittels schrittweiser Anwendung *zulässiger Transformationen* (siehe weiter unten) aus α ableitbar. Sprechweise: Aus α ist β **ableitbar** oder **beweisbar**; kurz: „α *ableitbar* β“ bzw. „α *beweisbar* β“ — Es kann auch $\langle\alpha\rangle$ durch $\langle X\rangle$ und/oder $\langle\beta\rangle$ durch $\langle Y\rangle$ ersetzt werden.

$\vdash \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \varnothing \vdash \beta \qquad$ ($\langle\vdash\rangle$ kann dann auch ganz entfallen)

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \quad \vdash \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \quad :\Leftrightarrow \quad X \vdash Y$$

Eine **zulässige Transformation** ist die Anwendung einer *Ersetzung*[1] (siehe unten), einer *Basisregel* (siehe unten) oder einer davon abgeleiteten sonstigen *Schlussregel*, z. B. aus Unterabschnitt 2.2.3 auf Seite 28. Bei den Schlussregeln und der Ersetzung $\langle\leftarrow\!\!\prec\rangle$ soll das Komma stärker binden als $\langle\vdash\rangle$, $\langle\leftarrow\!\!\prec\rangle$ und $\langle|\rangle$, wobei $\langle|\rangle$ für „und“ bzw. $\langle\&\rangle$[2] steht und schwächer bindet als $\langle\vdash\rangle$ und $\langle\leftarrow\!\!\prec\rangle$.[3]

Zur der Auswahl der Basisregeln, der Formulierung und der Bezeichnungen wird auf [2, 70] zurückgegriffen. Wie in [70] steht $\langle E\rangle$ für „-Einführung“ und $\langle B\rangle$ für „-Beseitigung“ (oder „-Elimination“) von Junktoren.[4]

1) siehe Unterabschnitt 3.1.2 auf der nächsten Seite
2) siehe Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 18
3) siehe Fußnote 3 von Tabelle 2.3 auf Seite 26
4) In der Monotonieregel wird in diesem Dokument, anders als in [2], $\langle\!\langle X, Y\rangle\!\rangle$ statt $\langle\!\langle Y$, für $Y \supseteq X\rangle\!\rangle$ genommen. Das ist gleichwertig, vermeidet aber den Zusatz $\langle\!\langle$, für $Y \supseteq X\rangle\!\rangle$. Außerdem werden bei den Bezeichnungen $\langle\!\langle(\wedge 1)\rangle\!\rangle$ und $\langle\!\langle(\wedge 2)\rangle\!\rangle$ gemäß [70] durch $\langle\!\langle(\wedge\mathrm{E})\rangle\!\rangle$ bzw. $\langle\!\langle(\wedge\mathrm{B})\rangle\!\rangle$ ersetzt.

Im Folgenden seien α und β Formeln und X und Y Mengen von Formeln. Für die sechs Basisregeln werden dann nur noch die Junktoren $\langle\neg\rangle$ und $\langle\wedge\rangle$ benötigt. Bei den weiteren Schlussregeln wird noch $\langle\rightarrow\rangle$ gemäß der Definition 3.6 auf Seite 43 verwendet.

$$\frac{}{\alpha \vdash \alpha} \qquad \text{(Anfangsregel)} \qquad \text{(AR)}$$

$$\frac{X \vdash \alpha}{X, Y \vdash \alpha} \qquad \text{(Monotonieregel)} \qquad \text{(MR)}$$

$$\frac{X \vdash \alpha, \neg\alpha}{X \vdash \beta} \qquad \text{(Einführung/Beseitigung der Negation Teil 1)} \qquad (\neg 1)$$

$$\frac{X, \alpha \vdash \beta \mid X, \neg\alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta} \qquad \text{(Einführung/Beseitigung der Negation Teil 2)} \qquad (\neg 2)$$

$$\frac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta} \qquad \text{(Einführung der Konjunktion)} \qquad (\wedge\text{E})$$

$$\frac{X \vdash \alpha \wedge \beta}{X \vdash \alpha, \beta} \qquad \text{(Beseitigung der Konjunktion)} \qquad (\wedge\text{B})$$

In einer Schlussregel werden die Formeln[5] über dem Querstrich als **Prämissen** und die unter dem Querstrich als **Konklusionen** der Regel bezeichnet. Eine Schlussregel steht für die Aussage, dass mit ihren Prämissen auch auch ihre Konklusionen gelten. – Im Gegensatz zu den weiteren Schlussregeln werden die oben aufgelisteten Basisregeln nicht weiter hinterfragt, d. h. sie gelten quasi als Axiome.

3.1.2. Identitätsregeln

Die zulässigen Transformationen, d. h. die Anwendung der Schlussregeln, erfordern zulässige Ersetzungen. Damit wird dem Gleichheits- oder Identitätszeichen $\langle\equiv\rangle$ mittels Einführungs- und Beseitigungsregel eine Bedeutung verliehen.[6] Dazu seien α, β und γ vergleichbare[7] Formeln.

Zunächst wird definiert:

$\gamma(\alpha \leftarrowtail \beta) \quad :\equiv$ Die Formel, die man erhält, wenn in γ alle oder nur einige Vorkommen von α durch β ersetzt werden. — Gegebenenfalls muss noch die Auswahl der Ersetzungen angegeben werden, andernfalls werden alle Vorkommen ersetzt. Letzteres heißt dann **vollständige** Ersetzung.

$\gamma(\alpha \leftrightarrows \beta) \quad :\equiv$ Die Formel, die man erhält, wenn in γ alle α und β miteinander vertauscht werden. Dazu ist es nötig, das α und β voneinander unabhängig sind, vorzugsweise zwei verschiedene Variable.

[5] hier: Aussagen in einer formalen Form.
[6] siehe [70]
[7] siehe Ende von Unterabschnitt 2.1.4 auf Seite 18

$\langle\!\langle \alpha \leftarrowtail \beta \rangle\!\rangle$ heißt **Ersetzung** und $\langle\!\langle \alpha \leftrightarrows \beta \rangle\!\rangle$ **Vertauschung** oder kurz **Tausch**. – Sei noch $S = (s_1, s_2, ...)$ eine endliche Folge von Ersetzungen, die auch Vertauschungen enthalten und auch leer sein kann.

Dann wird definiert:

$$
\begin{aligned}
\gamma(S) &\coloneqq \gamma(s_1)(s_2)... \qquad (3.1)\\
\gamma(\varnothing) &= \gamma \qquad \text{(nur zur Verdeutlichung)}\\
\gamma(s_1, s_2, ...) &\coloneqq \gamma(S)
\end{aligned}
$$

Die Vertauschung ist eine spezielle Form der Ersetzung. Wenn x und y zwei verschiedene Variable, die in α, β und γ nicht vorkommen, gilt:

$$\gamma(\alpha \leftrightarrows \beta) = \gamma(\alpha \leftarrowtail x, \beta \leftarrowtail y, y \leftarrowtail \alpha, x \leftarrowtail \beta)$$

Sei zusätzlich noch s eine Ersetzung. Folgende Sprechweisen werden verwendet:

$\gamma(\alpha \leftarrowtail \beta)$: In γ wird α **(vollständig) durch** β **substituiert**.

$\gamma(\alpha \leftrightarrows \beta)$: In γ werden α und β **vertauscht**.

$\gamma(s)$: s wird auf γ **angewendet**.

$\gamma(S)$: Die Ersetzungen aus S werden in der angegebenen Reihenfolge auf γ angewendet.

$\gamma(S)$: S wird auf γ angewendet.

Bei obiger Definition der Ersetzung bleibt noch offen, unter welchen Prämissen sie angewendet werden darf. Das soll hier nicht untersucht werden. In diesem Abschnitt genügt es, das nur Vertauschung und vollständige Ersetzung verwendet werden. In diesen Fällen sind beliebige Ersetzungen von Variablen durch Formeln erlaubt.

Ist γ wie oben und S eine Menge von Ersetzungen.

Nun können die beiden Identitätsregeln definiert werden:

$$\frac{}{\alpha \equiv \alpha} \qquad \text{(Einführung der Identität)} \qquad (\equiv \mathrm{E})$$

$$\frac{\alpha \equiv \beta \mid \gamma}{\gamma(\alpha \leftarrowtail \beta)} \qquad \text{(Beseitigung der Identität)} \qquad (\equiv \mathrm{B})$$

Die Identitätsregeln werden hier eingeführt, um die Ersetzung zu rechtfertigen. Wie die Basisregeln gelten sie als Axiome, würden also eigentlich dazu gehören. Da sie aber nicht weiter verwendet werden, werden sie in diesem Dokument nicht zu den Basisregeln gezählt.

3.1.3. Weitere Schlussregeln

In [2] werden aus den Basisregeln mittels zulässiger Transformationen weitere Schlussregeln abgeleitet.[8)] Man vergleiche auch mit [70].

8) In [2] werden die Identitätsregeln zwar weder aufgeführt noch angewandt, ohne Ersetzung geht es aber nicht.

$$\frac{X, \neg\alpha \vdash \alpha}{X \vdash \alpha} \quad \text{(Beseitigung der Negation; Indirekter Beweis)} \tag{$\neg$3}$$

$$\frac{X, \neg\alpha \vdash \beta, \neg\beta}{X \vdash \alpha} \quad \text{(Reductio ad absurdum)} \tag{$\neg$4}$$

$$\frac{X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \rightarrow \beta} \quad \text{(Einführung der Implikation)} \tag{$\rightarrow$ E}$$

$$\frac{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}{X, \alpha \vdash \beta} \quad \text{(Beseitigung der Implikation)} \tag{$\rightarrow$ B}$$

$$\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta} \quad \text{(\textbf{Schnittregel})} \tag{SR}$$

$$\frac{X \vdash \alpha \mid \alpha \rightarrow \beta}{X \vdash \beta} \quad \text{(\textbf{Abtrennungsregel} — \textit{Modus ponens})} \tag{TR}$$

Dabei werden zum Beweis der Schlussregeln in [2] folgende Basisregeln verwendet:

Schlussregel	:	verwendete Basisregeln
$\neg$3	:	AR, MR, $\neg$2
$\neg$4	:	AR, MR, $\neg$1, $\neg$2
$\rightarrow$ E	:	AR, MR, $\neg$1, $\neg$2, $\wedge$E
$\rightarrow$ B	:	AR, MR, $\neg$1, $\neg$2, $\wedge$B
SR	:	AR, MR, $\neg$1, $\neg$2
TR	:	AR, MR, $\neg$1, $\neg$2, $\wedge$E

3.1.4. Beispiel einer Ableitung

Als Beispiel wird hier die Schnittregel aus den Basisregeln abgeleitet.[9] Dazu wird verabredet, dass in der Tabelle 3.1 auf Seite 37 der Inhalt der Zelle in der Zeile i und der Spalte (X_n) mit X_i bezeichnet wird. Zur kürzeren Darstellung wird statt auf die vollständigen Spaltenüberschriften nur auf die dort notierten (X_n) verwiesen. Dass in der Spalte (n) stets die Zeilennummer steht, wird im folgenden nicht mehr extra erwähnt.

[9] Die Form der Tabelle ist angelehnt an [70] Kapitel 2.2.4 *Eine Beispielableitung*.

Für die ausgefüllten Felder wird nun definiert:[10)]

$$R_i :\equiv \begin{cases} \text{“}\texttt{Prämisse}\text{”} = \text{Die Aussage } A_i \text{ ist eine Prämisse.} \\ \text{“}\texttt{Konklusion}\text{”} = \text{Die Aussage } A_i \text{ ist eine Konklusion.} \\ \text{“}\texttt{Annahme}\text{”} = \text{Die Aussage } A_i \text{ wird vorübergehend als zutreffend angenommen.} \\ j = \text{Verweis auf die Schlussregel } \overline{R}_j \text{ für ein } j < i. \\ \text{Verweis (ohne Klammern) auf eine allgemeingültige Schlussregel.} \end{cases}$$

$S_i :\equiv$ Die Folge von den anzuwendenden Ersetzungen.

$\overline{R}_i :\equiv$ Das Ergebnis der in der angegebenen Reihenfolge angewendeten Ersetzungen aus S_i auf die Schlussregel R_i

$Z_i :\equiv$ Die Indizes j (mit $j < i$) als Verweise auf eine oder mehrere Aussagen A_j, welche zusammen genau die Prämissen der Schnittregel $\overline{R}_i$ erfüllen.

$A_i :\equiv$ Konklusion(en) der Schlussregel $\overline{R}_i$ — auch in Form der Indizes von einem oder mehreren von Aj (mit $j < i$). In der Ergebniszeile kann hier auch die bewiesene Aussage als Schlussregel stehen.

$D_i :\equiv$ die Indizes der A_j, von denen A_i abhängig ist.

Bis zur Zeile i hat man die folgende Schlussregel bewiesen:

$$\frac{A_{i_1} \mid A_{i_2} \ldots}{A_i} \quad \text{, für alle } i_j \in D_i$$

Sei nun

$$\Gamma_i :\equiv \begin{cases} \text{leer} & \text{für } R_i = \text{“}\texttt{Prämisse}\text{”} \\ \text{leer} & \text{für } R_i = \text{“}\texttt{Konklusion}\text{”} \\ \text{leer} & \text{für } R_i = \text{“}\texttt{Annahme}\text{”} \\ \overline{R}_j & \text{für } R_i = j \quad \text{(eine \textbf{interne} Schlussregel)} \\ \text{die Schlussregel} & \text{für } R_i = \text{Verweis auf eine \textbf{externe} Schlussregel} \end{cases}$$

Damit gilt für die Einträge in einer Zeile i:

- Wenn Γ_i nicht leer ist, ist R_i eine Schlussregel mit $R_i = \Gamma_i(S_i)$[11)].
- Wenn A_i nicht leer ist, ist $R_i = \dfrac{A_{z_1} \mid A_{z_2} \mid \ldots}{A_i}$ (alle $z_j \in Z_i$).
- Wenn A_i nicht leer ist, ist bis jetzt die Schlussregel $\dfrac{A_{d_1} \mid A_{d_2} \mid \ldots}{A_i}$ (alle $d_j \in D_i$) schon bewiesen.

S_i, Z_i und D_i dürfen dabei auch leer sein.

Die Erzeugung einer Tabelle analog zu 3.1 auf der nächsten Seite wird im folgenden beschrieben. Zellen, für die kein Inhalt angegeben wird, bleiben leer. Rückwärts-Referenzen auf schon ausgefüllte Zellinhalte sind jederzeit möglich. Das Eintragen der Zeilennummer i wird nicht extra erwähnt. – Die Tabelle und die Beschreibung sind so ausführlich, damit man daraus leicht ein Computerprogramm erstellen kann.

---

10) Eigentlich müsste man für jede Ersetzung aus S_i eine eigene Zeile vorsehen. Um die Tabellen für die Beweise kürzer zu halten, werden aufeinanderfolgende Ersetzungen zusammengefasst.

11) siehe Definition (3.1) von Unterabschnitt 3.1.2 auf Seite 33

Zeile (n)	Regel (R_n)	Substitu-tionen (S_n)	erzeugte Regel $(\overline{R}_n)$	angewendet auf ... (Z_n)	Aussage (A_n)	Abhängig-keiten (D_n)
1	Voraus-setzung				$X \vdash \alpha$	1
2	Voraus-setzung				$X, \alpha \vdash \beta$	2
3	Folge-rung				$X \vdash \beta$	3
4	MR		$\dfrac{X \vdash \alpha}{X, Y \vdash \alpha}$			
5	4	$Y \leftarrowtail \neg\alpha$	$\dfrac{X \vdash \alpha}{X, \neg\alpha \vdash \alpha}$	1	$X, \neg\alpha \vdash \alpha$	1
6	AR		$\dfrac{}{\alpha \vdash \alpha}$			
7	6	$\alpha \leftarrowtail \neg\alpha$	$\dfrac{}{\neg\alpha \vdash \neg\alpha}$		$\neg\alpha \vdash \neg\alpha$	
8	4	$\alpha \leftarrowtail \neg\alpha$ $X \leftarrowtail \neg\alpha$ $Y \leftarrowtail X$	$\dfrac{\neg\alpha \vdash \neg\alpha}{X, \neg\alpha \vdash \neg\alpha}$	7	$X, \neg\alpha \vdash \neg\alpha$	
9	$\neg 1$		$\dfrac{X \vdash \alpha, \neg\alpha}{X \vdash \beta}$			
10	9	$X \leftarrowtail X, \neg\alpha$	$\dfrac{X, \neg\alpha \vdash \alpha, \neg\alpha}{X, \neg\alpha \vdash \beta}$	5, 8	$X, \neg\alpha \vdash \beta$	1
11	$\neg 2$		$\dfrac{X, \alpha \vdash \beta \mid X, \neg\alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$	2, 10	3	1, 2
12	AR, MR, $\neg 1$, $\neg 2$		$\dfrac{A_1 \mid A_2}{A_3}$		$\dfrac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$	

Tabelle 3.1.: Ableitung der Schnittregel aus den Basisregeln

1. Am Anfang der Tabelle werden zuerst Prämissen, dann zu beweisende Konklusionen und schließlich Annahmen aufgeführt.[12)] Jede der drei Gruppen kann auch leer sein und es ist auch möglich, die Zeilen an anderen Stellen der Tabelle anzugeben, spätestens aber, wenn darauf verwiesen wird. Für jede Prämisse, Konklusion und Annahme gibt es eine Zeile:

   a) $R_i =$ "`Prämisse`", "`Konklusion`" oder "`Annahme`".

   b) $A_i =$ Die aktuelle Prämisse, Konklusion oder Annahme.

   c) $D_i = i$ (ein Verweis auf A_i).

2. In den nächsten Zeilen werden die Beweisschritte aufgeführt, für jeden Schritt eine Zeile.

   Zunächst kann R_i kann auf zwei Arten erzeugt werden:

   a) i. $R_i =$ Verweis auf eine allgemeingültige Schlussregel.

      ii. $\overline{R}_i =$ Die Schlussregel, auf die verwiesen wird.

   oder

12) Die Angabe ist dann erforderlich, wenn darauf verwiesen wird. Durch die Auflistung hat man aber einen vollständigen Überblick über die Prämissen und Konklusionen eines Beweises und die Zwischenannahmen. Auf jede nötige Prämisse und jede verwendete Zwischenannahme wird in der Spalte (Z_n) mindestens einmal verwiesen, so dass sie auch aufgeführt werden müssen. Die Angabe der Konklusionen erleichtert die Erstellung einer *Ergebniszeile* (siehe Punkt 3).

a) i. $R_i = j$, wenn die schon bewiesene Schlussregel $\overline{R}_j$ (mit $j < i$) angewendet werden soll.

ii. S_i = Die auf die Schlussregel R_i anzuwendende Ersetzung.

iii. $\overline{R}_i$ = Das Ergebnis der Ersetzung S_i auf die Schlussregel R_i.

Man beachte, dass die Schlussregel $\overline{R}_i$, stets allgemeingültig ist, da sie ausschließlich aus allgemeingültigen Schlussregeln mittels Ersetzungen abgeleitet worden ist. Daher gibt es auch keine Beschränkung weiterer Ersetzungen durch irgendwelche Abhängigkeiten.

Nun kann die Zeile beendet werden, oder es geht weiter mit:

b) Z_n = Die Indizes aller A_j (mit $j < i$), die eine Prämisse der Schlussregel $\overline{R}_i$ sind, möglichst in der verwendeten Reihenfolge. — Für jedes angegebene j werden noch die Abhängigkeiten D_j den Abhängigkeiten D_i hinzugefügt.

c) A_i = Konklusion(en) der Schlussregel $\overline{R}_i$. — Wenn diese Konklusionen schon als Aussagen A_j (mit $j < i$) vorhanden sind, können auch einfach deren Indizes eingetragen werden. Damit werden die Zusammenhänge und der Abschluss des Beweises besser ersichtlich.

d) D_i = Die Verweise wurden schon in (2b) eingetragen.[13)]

Der Beweis muss so lange fortgeführt werden, bis alle Konklusionen als Aussagen in der Spalte (A_n) erschienen und dort jeweils nur von den gegebenen Prämissen abhängig sind.

3. In einer **Ergebniszeile**, die dann die letzte ist, kann noch die bewiesene Behauptung in Form einer Schlussregel formuliert und in einer passenden Spalte notiert werden. Zusätzlich können dort auch noch alle verwendeten Schlussregeln gesammelt werden. Dies kann z. B. folgendermaßen geschehen:

   a) (R_n) = Verweise auf alle verwendeten externen Schlussregeln.

   b) $(\overline{R}_n)$ = Die bewiesene Behauptung als Schlussregeln, wobei alle A_i, die Prämissen sind, als Prämisse und alle A_j, die Konklusionen sind, als Konklusion eingesetzt werden. Das ergibt dann:

$$\frac{A_{i_1} \mid A_{i_2} \mid \ldots}{A_{j_1} \mid A_{j_2} \mid \ldots}$$

   c) $(A_n) = \overline{R}_i$, wobei die Prämissen und Konklusionen aufgelöst werden.

   d) (D_n) = Die Vereinigung aller Abhängigkeiten der Konklusionen, vermindert um die Prämissen. — Wenn das Feld dabei nicht leer bleibt, ist der Beweis missglückt!

Ein weiteres Beispiel in der Tabelle 3.2 auf der nächsten Seite soll verdeutlichen, wie Abhängigkeiten von Zwischenannahmen wieder beseitigt werden können.[14)]

> > > Beispielableitung der Kontraposition vervollständigen < < <

Bevor die Schlussregeln weiter behandelt werden, werden noch Elemente der *Aussagenlogik* und der *Prädikatenlogik* behandelt. Wir stützen uns dabei weitgehend auf [2], ohne das jedes Mal anzugeben.

13) Wenn D_n leer ist, dann ist A_n allgemeingültig.
14) siehe [70], Kapitel 2.2.4 *Eine Beispielableitung*

Zeile (n)	Regel (R_n)	Substitutionen (S_n)	erzeugte Regel ($\overline{R}_n$)	angewendet auf ... (Z_n)	Aussage (A_n)	Abhängigkeiten (D_n)
1	Folgerung				$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	1
2	Annahme				$\alpha \to \beta$	2
3	Annahme				$\neg\beta$	3
4	Annahme				α	4
5	$\to$ B		$\frac{X \vdash \alpha \to \beta}{X, \alpha \vdash \beta}$			
6	-1	$X \leftarrowtail \emptyset$	$\frac{\alpha \to \beta}{\alpha \vdash \beta}$	2	$\alpha \vdash \beta$	2
7	SR		$\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$			
8	-1	$X \leftarrowtail \emptyset$	$\frac{\alpha \mid \alpha \vdash \beta}{\beta}$	4, 6	β	4, 6
9′	$\wedge$E		$\frac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta}$			
10′	-1	$X \leftarrowtail \emptyset$	$\frac{\alpha \mid \beta}{\alpha \wedge \beta}$			
11′	-1	$\alpha \leftrightarrows \beta$ $\alpha \leftarrowtail \neg\beta$	$\frac{\beta \mid \neg\beta}{\beta \wedge \neg\beta}$	8, 3	$\beta \wedge \neg\beta$	
9	$\neg$1		$\frac{X \vdash \alpha, \neg\alpha}{X \vdash \beta}$			
10	-1	$X \leftarrowtail \emptyset$	$\frac{\alpha \mid \neg\alpha}{\beta}$			
11	-1	$\alpha \leftrightarrows \beta$ $\alpha \leftarrowtail \neg\alpha$	$\frac{\beta \mid \neg\beta}{\neg\alpha}$	8, 3	$\neg\alpha$	2, 3, 4
12	$\to$ E		$\frac{X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \to \beta}$			
13	-1	$X \leftarrowtail \emptyset$	$\frac{\alpha \vdash \beta}{\alpha \to \beta}$			
14	-1	$\alpha \leftrightarrows \beta$ $\alpha \leftarrowtail \neg\alpha$ $\beta \leftarrowtail \neg\beta$	$\frac{\neg\beta \vdash \neg\alpha}{\neg\beta \to \neg\alpha}$	3, 11, ???	$\neg\beta \to \neg\alpha$	2, 3, 4, ???
15	$\to$ E+1	$\alpha \leftarrowtail \gamma$ $\beta \leftarrowtail \delta$ $\gamma \leftarrowtail \alpha \to \beta$ $\delta \leftarrowtail \neg\beta \to \neg\alpha$	$\frac{\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha}{(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)}$	2, 14	$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	2, 3, 4, ???
16	$\to$ E, $\to$ B, SR		$\overline{A_1}$		$\overline{(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)}$	

Tabelle 3.2.: Ableitung der Kontraposition aus allgemeingültigen Schlussregeln

3.2. Aussagenlogik

3.2.1. Konstante und Operationen

Die Tabelle 3.3 auf der nächsten Seite[15)] definiert für die zweiwertige Logik Konstante und Junktoren über die Wahrheitswerte ihrer Anwendung. So ergeben sich, abhängig von den Wahrheitswerten der Operanden A und B,[16)] die in der Tabelle angegebenen Wahrheitswerte für die Operationen. Die mit 0, 1 und 2 benannten Spalten werden jeweils nur für die 0-, 1- und 2-stelligen Junktoren, d. h. für die Konstanten, die unären und die binären Junktoren ausgefüllt. Dabei werden die Konstanten als 0-stellige Junktoren angesehen. Hat der Inhalt einer Zelle keine Relevanz, steht dort ein Minuszeichen, ist kein Wert bekannt, so bleibt sie leer.

Um vollständig zu sein, d. h. alle 22 möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten für höchstens zwei Variable zu berücksichtigen, enthält die Tabelle auch viele ungebräuchliche Symbole und Operationen. Junktoren ohne Angabe einer Priorität sind in diesem Dokument nicht weiter von Interesse. — Im Folgenden werden von den in der Tabelle aufgeführten Junktoren nur noch $\bot$, $\top$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$, $\uparrow$, $\downarrow$ und $\dot\vee$ verwendet.

Für einige Junktorsymbole[17)], Namen und Sprechweisen sind auch Alternativen angegeben. Die durchgestrichenen (d. h. negierten) Symbole sind ungebräuchlich und nur aus formalen Gründen aufgeführt. Wenn für eine bestimmte Kombination von Wahrheitswerten mehr als eine Zeile angegeben ist, so können die zugehörigen Junktoren zwar formal verschieden sein, liefern in der zweiwertigen Aussagenlogik jedoch dieselben Ergebnisse.

Die zur Einsparung von Klammern definierten Prioritäten sind in der Tabelle 2.3 auf Seite 26 angegeben.[18)]

3.2.2. Formalisierung

Da sie die Grundlage — quasi das Fundament — des mathematischen Inhalts von ASBA sind, müssen die Axiome, Sätze, Beweise, usw. der Aussagenlogik (und später der Prädikatenlogik) in streng formaler Form vorliegen.[19)] Da Computerprogramme mit der *Polnischen Notation*[20)] besser umgehen können und Klammern dort überflüssig sind, werden viele Formeln auch parallel in der Polnischen Notation angegeben. Dies wird auf Wunsch auch bei Ausgaben von ASBA so gehandhabt.

15) Die Tabelle basiert auf den Wahrheitstafeln in [51] Kapitel 2.2 und [2] Kapitel 1.1 Seite 3.

16) A und B können hier beliebige Aussagen sein — auch Formeln —, die jeweils genau einen Wahrheitswert repräsentieren.

17) Symbole, die für Junktoren verwendet werden.

18) Zur Erinnerung: Es gilt Rechtsklammerung. siehe Unterabschnitt 2.1.10 auf Seite 24

19) Die Formalisierung stützt sich auf [35]; siehe auch [25, 28].

20) Bei der **Polnischen Notation** stehen die Operanden bzw. Argumente von Relationen und Funktionen stets rechts von den Relations- und Funktionssymbolen. Dadurch kann auf Gliederungszeichen wie Klammern und Kommata verzichtet werden. Noch einfacher für Computer ist die **umgekehrte Polnische Notation**, bei der die Operanden und Argumente links von den Symbolen stehen.

A	-	W	F	W	W	F	F	-	Aussage A	-
B	-	-	-	W	F	W	F	-	Aussage B	-
Junktor[1]	**0**[2]	**1**		**2**				**Name**[3]	**Sprechweise**	**Prio**[4]
$\top$	W	-	-	-	-	-	-	Verum	***wahr***	-
$\bot$	F	-	-	-	-	-	-	Falsum	***falsch***	-
	-	W	W	-	-	-	-			-
$(\ldots)$	-	W	F	-	-	-	-	Klammerung	A **ist geklammert**	-[5]
$\neg$	-	F	W	-	-	-	-	Negation	**Nicht** A	1[6]
	-	F	F	-	-	-	-			-
	-	-	-	W	W	W	W	Tautologie		-
$\vee$	-	-	-	W	W	W	F	Disjunktion; Adjunktion; Alternative	A **oder** B	3
$\leftarrow \Leftarrow \subset$	-	-	-	W	W	F	W	Replikation; Konversion; konverse Implikation	A **folgt aus** B	4
$\rfloor$	-	-	-	W	W	F	F	Präpendenz	Identität von A	-
$\rightarrow \Rightarrow \supset$	-	-	-	W	F	W	W	Implikation; Subjunktion; Konditional	**Aus** A **folgt** B; Wenn A dann B; A nur dann wenn B	4
$\lfloor$	-	-	-	W	F	W	F	Postpendenz	Identität von B	-
$\leftrightarrow \Leftrightarrow$	-	-	-	W	F	F	W	Äquivalenz; Bijunktion; Bikonditional	A **genau dann wenn** B; A dann und nur dann wenn B	5
$\wedge$ & $\cdot$	-	-	-	W	F	F	F	Konjunktion	A **und** B; Sowohl A als auch B	2
$\uparrow \barwedge \mid$	-	-	-	F	W	W	W	NAND; Unverträglichkeit; Sheffer-Funktion	**Nicht zugleich** A **und** B	2
$\dot\vee \veebar + \oplus$	-	-	-	F	W	W	F	XOR; Antivalenz; ausschließende Disjunktion	**Entweder** A **oder** B	3
$\not\leftrightarrow \not\Leftrightarrow \not\equiv$	-	-	-	"	"	"	"	Kontravalenz		-
$\lceil$	-	-	-	F	W	F	W	Postnonpendenz	Negation von B	-
$\not\rightarrow \not\Rightarrow \not\supset$	-	-	-	F	W	F	F	Postsektion		-
$\rceil$	-	-	-	F	F	W	W	Pränonpendenz	Negation von A	-
$\not\leftarrow \not\Leftarrow \not\subset$	-	-	-	F	F	W	F	Präsektion		-
$\downarrow \overline{\vee}$	-	-	-	F	F	F	W	NOR; Nihilation; Peirce-Funktion	**Weder** A **noch** B	3
	-	-	-	F	F	F	F	Kontradiktion		-

[1] Die Junktoren $\langle\subset\rangle$, $\langle\supset\rangle$, $\langle\not\subset\rangle$ und $\langle$*nsupset*$\rangle$ haben hier nicht die Bedeutung der entsprechenden Operationen der Mengenlehre und dürfen nicht damit verwechselt werden; entsprechendes gilt für $\langle+\rangle$ und $\langle\cdot\rangle$ mit Addition und Multiplikation.
[2] 0-stellige Junktoren sind Konstante, hier *Wahrheitswerte*.
[3] Ist eine Zelle in dieser Spalte leer, so ist die zugehörige Zeile nur vorhanden, um alle binären Junktoren aufzuführen.
[4] Je kleiner die Zahl, je höher die Priorität.
[5] Klammerung ist genau genommen keine Operation und wird nicht nur bei logischen, sondern auch bei anderen Ausdrücken verwendet. Ihre Priorität - sofern man überhaupt davon sprechen kann - kann nur höher als die aller Junktoren sein.
[6] Die Priorität der unären Operationen muss höher sein als die aller mehrwertigen, also auch der binären Operationen. Wenn die Symbole aller unären Operationen auf derselben Seite des Operanden stehen, brauchen sie eigentlich keine Priorität, da die Auswertung nur von innen (dem Operanden) nach außen erfolgen kann. Nur wenn es sowohl links-, als auch rechtsseitige unäre Operationen gibt, muss man für diese Prioritäten definieren.

Tabelle 3.3.: Definition von aussagenlogisches Symbolen.

3.2.2.1. Bausteine der aussagenlogischen Sprache

Zur Einteilung der Junktoren werden die folgenden Mengen definiert:

$$
\begin{array}{lll l}
\mathcal{J}_\mathrm{c} & \coloneqq & \{\top, \bot\} & \text{, Menge der } \textbf{aussagenlogischen Konstanten} \\
\mathcal{J}_\mathrm{u} & \coloneqq & \{\neg\} & \text{, Menge der } \textbf{unären Junktoren} \\
\mathcal{J}_\mathrm{b} & \coloneqq & \{\wedge, \vee, \dot{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\} & \text{, Menge der } \textbf{binären Junktoren}
\end{array}
$$

Um damit Formeln zu bilden, werden noch Variable gebraucht:

$$
\mathcal{Q} \coloneqq \{\mathbf{q}_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \quad \text{, Menge der } \textbf{aussagenlogischen Variablen}
$$

Die Mengen $\mathcal{J}_\mathrm{c}$, $\mathcal{J}_\mathrm{u}$, $\mathcal{J}_\mathrm{b}$ und $\mathcal{Q}$ müssen paarweise disjunkt sein. – Damit können die folgende Mengen definiert werden:

$$
\begin{array}{lll l}
\mathcal{J} & \coloneqq & \mathcal{J}_\mathrm{c} \cup \mathcal{J}_\mathrm{u} \cup \mathcal{J}_\mathrm{b} & \text{, Menge der } \textbf{Junktorsymbole} \\
\mathcal{A} & \coloneqq & \mathcal{Q} \cup \mathcal{J} & \text{, Alphabet der aussagenlogischen Sprache für } \mathcal{J} \\
\mathcal{J}_x & \subseteq & \mathcal{J} & \text{, eine Teilmenge von } \mathcal{J} \text{ für eine Indexvariable } x \\
\mathcal{A}_x & \coloneqq & \mathcal{Q} \cup \mathcal{J}_x & \text{, Alphabet der aussagenlogischen Sprache für } \mathcal{J}_x
\end{array}
$$

Für Elemente aus $\mathcal{Q}$ verwenden wir normalerweise die kleinen, lateinischen Buchstaben a, b, c, usw.

3.2.2.2. Aussagenlogische Formeln

Neben dem Alphabet $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}_x$ werden noch Klammern als Gliederungszeichen verwendet. Damit können nun rekursiv für jede Teilmenge $\mathcal{J}_x$ von $\mathcal{J}$ zwei Mengen von aussagenlogischen Formeln definiert werden, wobei wir für diese Formeln die kleinen, griechischen Buchstaben α, β, γ, usw. verwenden.

$\mathcal{L}_x^\mathrm{A}$ sei die Menge der auf folgende Weise definierten **aussagenlogischen Formel** mit **Klammerung** zum Alphabet $\mathcal{A}_x$:

$$
\begin{array}{rcrl r}
 & & \mathcal{Q} \subset \mathcal{L}_x^\mathrm{A} & \text{, die Variablen} & \\
 & & \mathcal{J}_x \cap \mathcal{J}_\mathrm{c} \subset \mathcal{L}_x^\mathrm{A} & \text{, die Konstanten} & \\
\alpha \in \mathcal{L}_x^\mathrm{A} & \Rightarrow & (\ominus\alpha) \in \mathcal{L}_x^\mathrm{A} & \text{, für } \ominus \in \mathcal{J}_\mathrm{u} \cap \mathcal{J}_x & (3.2) \\
\alpha, \beta \in \mathcal{L}_x^\mathrm{A} & \Rightarrow & (\alpha \circledast \beta) \in \mathcal{L}_x^\mathrm{A} & \text{, für } \circledast \in \mathcal{J}_\mathrm{b} \cap \mathcal{J}_x & (3.3)
\end{array}
$$

Nur die auf diese Weise konstruierten Formeln sind Elemente aus $\mathcal{L}_x^\mathrm{A}$. – Für $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}$ sei noch $\mathcal{L}^\mathrm{A} \coloneqq \mathcal{L}_x^\mathrm{A}$.

$\mathcal{L}_x^\mathrm{Ap}$ sei die Menge der auf folgende Weise definierten **aussagenlogischen Formeln** in **Polnischer Notation**:

$$
\begin{array}{rcrl r}
 & & \mathcal{Q} \subset \mathcal{L}_x^\mathrm{Ap} & \text{, die Variablen} & \\
 & & \mathcal{J}_x \cap \mathcal{J}_\mathrm{c} \subset \mathcal{L}_x^\mathrm{Ap} & \text{, die Konstanten} & \\
\alpha \in \mathcal{L}_x^\mathrm{Ap} & \Rightarrow & \ominus\alpha \in \mathcal{L}_x^\mathrm{Ap} & \text{, für } \ominus \in \mathcal{J}_\mathrm{u} \cap \mathcal{J}_x & (3.4) \\
\alpha, \beta \in \mathcal{L}_x^\mathrm{Ap} & \Rightarrow & \circledast\alpha\beta \in \mathcal{L}_x^\mathrm{Ap} & \text{, für } \circledast \in \mathcal{J}_\mathrm{b} \cap \mathcal{J}_x & (3.5)
\end{array}
$$

Nur die auf diese Weise konstruierten Formeln sind Elemente aus $\mathcal{L}_x^{\mathrm{Ap}}$. – Für $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}$ sei noch $\mathcal{L}^{\mathrm{Ap}} :\equiv \mathcal{L}_x^{\mathrm{Ap}}$.

Wie man leicht sieht, gilt

$$\mathcal{J}_x \subset \mathcal{J}_y \subseteq \mathcal{J} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}_x \subset \mathcal{A}_y \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{L}_x^{\mathrm{A}} \subset \mathcal{L}^{\mathrm{A}}{}_y \subseteq \mathcal{L}^{\mathrm{A}} \\ \mathcal{L}_x^{\mathrm{Ap}} \subset \mathcal{L}^{\mathrm{Ap}}{}_y \subseteq \mathcal{L}^{\mathrm{Ap}} \end{cases}$$

und weiterhin gibt es eine bijektive Abbildung von $\mathcal{L}^{\mathrm{A}}$ nach $\mathcal{L}^{\mathrm{Ap}}$. Auf einen Beweis verzichten wir. Durch Anwendung der Klammerregeln von Paragraph 3.2.2.1 auf der vorherigen Seite lassen sich in der Regel noch viele Klammern der Formeln aus $\mathcal{L}_x^{\mathrm{A}}$ einsparen. Die Formeln aus $\mathcal{L}_x^{\mathrm{Ap}}$ sind frei von Klammern. Die Namen der Junktoren finden sich in der Tabelle 3.3 auf Seite 41.

Die Formeln, die nach einer der Regeln (3.2), (3.3), (3.4) oder (3.5) gebildet wurden, sind offensichtlich zerlegbar, die anderen, d. h. Variablen und Konstanten (aus $\mathcal{Q}$ bzw. $\mathcal{J}_c$), sind nicht zerlegbar. Letztere bezeichnet man auch als **atomare Formeln**.

3.2.3. Definition von Junktoren durch andere

Im folgenden gelte für zwei aussagenlogische Formeln α und β:

$\alpha \equiv \beta \quad :\Leftrightarrow \quad$ α und β stimmen als Zeichenkette überein.

$\alpha \Leftrightarrow \beta \quad :\Leftrightarrow \quad$ α und β können mit Hilfe erlaubter Ersetzungen und geltender Axiome — siehe Unterabschnitt 3.2.4 auf der nächsten Seite — ineinander überführt werden.

Es werden verschiedene Teilmengen von $\mathcal{J}$ eingeführt, die jeweils ausreichen um alle anderen Elemente aus $\mathcal{J}$ zu definieren:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\mathrm{bool}} &:\equiv \{\neg, \wedge, \vee\} \qquad (\textbf{Boolesche Signatur})\\
\mathcal{J}_{\mathrm{and}} &:\equiv \{\neg, \wedge\}\\
\mathcal{J}_{\mathrm{or}} &:\equiv \{\neg, \vee\}\\
\mathcal{J}_{\mathrm{imp}} &:\equiv \{\neg, \rightarrow\}\\
\mathcal{J}_{\mathrm{rep}} &:\equiv \{\neg, \leftarrow\}\\
\mathcal{J}_{\mathrm{nand}} &:\equiv \{\uparrow\}\\
\mathcal{J}_{\mathrm{nor}} &:\equiv \{\downarrow\}
\end{aligned}$$

Solche Teilmengen heißen logische Signatur.

Im Folgenden stehen jeweils links die Formeln in üblicher Schreibweise vollständig geklammert und rechts in Polnischer Notation (ohne Klammern). Ferner seien α und β beliebige, nicht notwendig verschiedene Formeln aus der passenden Menge $\mathcal{L}_x^{\mathrm{A}}$ bzgl. der um die mit Hilfe der Definitionen erweiterten Formelmenge.

Ausgehend von den Junktoren aus der Booleschen Signatur $\mathcal{J}_{\mathrm{bool}}$ werden die restlichen Junktoren aus $\mathcal{J}$ definiert. Die Definitionen sind in zwei Gruppen eingeteilt, und zwar die mit den Junktoren aus $\mathcal{J}_{\mathrm{and}}$:

$$(\alpha \rightarrow \beta) :\equiv (\neg(\alpha \wedge (\neg\beta))) \qquad \rightarrow \alpha\beta :\equiv \neg \wedge \alpha\neg\beta \tag{3.6}$$

$$(\alpha \leftarrow \beta) :\equiv (\neg(\beta \wedge (\neg\alpha))) \qquad \leftarrow \beta\alpha :\equiv \neg \wedge \beta\neg\alpha \tag{3.7}$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) :\equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftarrow \beta)) \qquad \leftrightarrow \alpha\beta :\equiv \wedge \rightarrow \alpha\beta \leftarrow \alpha\beta$$

$$\bot :\equiv (\mathbf{q}_0 \wedge (\neg\mathbf{q}_0)) \qquad \bot :\equiv \wedge\mathbf{q}_0\neg\mathbf{q}_0$$

$$(\alpha \uparrow \beta) :\equiv (\neg(\alpha \wedge \beta)) \qquad \uparrow \alpha\beta :\equiv \neg \wedge \alpha\beta \tag{3.8}$$

und die mit den Junktoren aus $\mathcal{J}_{\text{or}}$:

$$\begin{aligned} (\alpha \downarrow \beta) &\coloneqq (\neg(\alpha \vee \beta)) & \downarrow \alpha\beta &\coloneqq \neg \vee \alpha\beta \\ (\alpha \dot\vee \beta) &\coloneqq ((\alpha \vee \beta) \wedge (\neg(\alpha \wedge \beta))) & \dot\vee \alpha\beta &\coloneqq \wedge \vee \alpha\beta \neg \wedge \alpha\beta \\ \top &\coloneqq (\mathbf{q}_0 \vee (\neg \mathbf{q}_0)) & \top &\coloneqq \vee \mathbf{q}_0 \neg \mathbf{q}_0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ist $\langle\vee\rangle$ oder $\langle\wedge\rangle$ nicht vorgegeben, d. h. wird von den Elementen aus $\mathcal{J}_{\text{and}}$ bzgl. $\mathcal{J}_{\text{or}}$ statt von denen aus $\mathcal{J}_{\text{bool}}$ ausgegangen, so muss man den fehlenden Junktor mittels der passenden der beiden folgenden Definitionen einführen:

$$\begin{aligned} (\alpha \vee \beta) &\coloneqq (\neg((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))) & \vee\alpha\beta &\coloneqq \neg \wedge \neg\alpha\neg\beta \\ (\alpha \wedge \beta) &\coloneqq (\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))) & \wedge\alpha\beta &\coloneqq \neg \vee \neg\alpha\neg\beta \end{aligned}$$

Nun sind wieder alle Junktoren definiert.

Entsprechend wird bei Vorgabe von $\mathcal{J}_{\text{imp}}$ bzgl. $\mathcal{J}_{\text{rep}}$ die passende der beiden folgenden Definitionen ausgewählt:

$$\begin{aligned} (\alpha \vee \beta) &\coloneqq ((\neg\alpha) \to \beta) & \vee\alpha\beta &\coloneqq \to \neg\alpha\beta \\ (\alpha \wedge \beta) &\coloneqq (\neg((\neg\beta) \leftarrow \alpha)) & \wedge\alpha\beta &\coloneqq \neg \leftarrow \neg\beta\alpha \end{aligned}$$

woraufhin dann (3.6) bzgl. (3.7) als Gleichung nachzuweisen ist. Da aus (3.7) durch Vertauschung der Variablen unmittelbar

$$(\alpha \leftarrow \beta) \Leftrightarrow (\beta \to \alpha) \qquad \leftarrow \alpha\beta \Leftrightarrow \to \beta\alpha$$

folgt, vermindert sich der Aufwand dazu erheblich.

Bei Vorgabe von $\mathcal{J}_{\text{nand}}$ bzgl. $\mathcal{J}_{\text{nor}}$ schließlich werden die passenden Definition aus

$$\begin{aligned} (\neg\alpha) &\coloneqq (\alpha \downarrow \alpha) & \neg\alpha &\coloneqq \downarrow \alpha\alpha \\ (\neg\alpha) &\coloneqq (\alpha \uparrow \alpha) & \neg\alpha &\coloneqq \uparrow \alpha\alpha \end{aligned}$$

und, da $\langle\neg\rangle$ jetzt definiert ist, aus

$$\begin{aligned} (\alpha \vee \beta) &\coloneqq (\neg(\alpha \downarrow \beta)) & \vee\alpha\beta &\coloneqq \neg \downarrow \alpha\beta \\ (\alpha \wedge \beta) &\coloneqq (\neg(\alpha \uparrow \beta)) & \wedge\alpha\beta &\coloneqq \neg \uparrow \alpha\beta \end{aligned} \tag{3.10}$$

ausgewählt und es ist (3.8) bzgl. (3.9) als Gleichung nachzuweisen.

Abschließend ist noch nachzuweisen, dass mit Hilfe der jeweils passenden der Definitionen (3.6) bis (3.10), ausgehend vom jeweils passenden $\mathcal{L}_x^{\mathrm{A}}$, genau die gesamte Formelmenge $\mathcal{L}^{\mathrm{A}}$ erzeugt werden kann.

3.2.4. Aussagenlogisches Axiomensysteme

Ausgehend von der logischen Signatur $\mathcal{J}_{\text{and}} = \{\neg, \wedge\}$ und der Definition 3.6 auf der vorherigen Seite von $\langle\to\rangle$ werden die folgenden vier logischen Axiome definiert:

$$\begin{aligned} &(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) && \to\to \alpha \to \beta\gamma \to\to \alpha\beta \to \alpha\gamma \\ &\alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta && \to \alpha \to \beta \wedge \alpha\beta \\ &\alpha \wedge \beta \to \alpha\,; \quad \alpha \wedge \beta \to \beta && \to \wedge\alpha\beta\alpha\,; \quad \to \wedge\alpha\beta\beta \\ &(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha) && \to\to \alpha\neg\beta \to \beta\neg\alpha \end{aligned}$$

> > > Aussagenlogik weiter bearbeiten. < < <

Siehe **Aussagenlogik** im Glossar.

[?] Wikipedia[34] schreibt dazu:

> sffamily Die **Aussagenlogik** ist ein Teilgebiet der Logik, das sich mit Aussagen und deren Verknüpfung durch Junktoren befasst, ausgehend von strukturlosen Elementaraussagen (Atomen), denen ein Wahrheitswert zugeordnet wird. In der *klassischen Aussagenlogik* wird jeder Aussage genau einer der zwei Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ zugeordnet. Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage lässt sich ohne zusätzliche Informationen aus den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen bestimmen.

3.3. Prädikatenlogik

> > > Prädikatenlogik bearbeiten. < < <

Siehe **Prädikatenlogik** im Glossar.

Wikipedia[62] schreibt dazu:

> sffamily Die **Prädikatenlogiken** (auch **Quantorenlogiken**) bilden eine Familie logischer Systeme, die es erlauben, einen weiten und in der Praxis vieler Wissenschaften und deren Anwendungen wichtigen Bereich von Argumenten zu formalisieren und auf ihre Gültigkeit zu überprüfen. Auf Grund dieser Eigenschaft spielt die Prädikatenlogik eine große Rolle in der Logik sowie in Mathematik, Informatik, Linguistik und Philosophie.

3.4. Mengenlehre

> > > Mengenlehre bearbeiten. < < <

Siehe **Mengenlehre** im Glossar.

[?] Wikipedia[61] schreibt dazu:

> sffamily Die **Mengenlehre** ist ein grundlegendes Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Untersuchung von Mengen, also von Zusammenfassungen von Objekten, beschäftigt. Die gesamte Mathematik, wie sie heute üblicherweise gelehrt wird, ist in der Sprache der Mengenlehre formuliert und baut auf den Axiomen der Mengenlehre auf. Die meisten mathematischen Objekte, die in Teilbereichen wie Algebra, Analysis, Geometrie, Stochastik oder Topologie behandelt werden, um nur einige wenige zu nennen, lassen sich als Mengen definieren. Gemessen daran ist die Mengenlehre eine recht junge Wissenschaft; erst nach der Überwindung der Grundlagenkrise der Mathematik im frühen 20. Jahrhundert konnte die Mengenlehre ihren heutigen, zentralen und grundlegenden Platz in der Mathematik einnehmen.

4. Design

Dieses Projekt soll Open Source sein. Daher gilt für die Dokumente die *GNU Free Documentation License (FDL)* und für die Software die *GNU Affero General Public License (APGL)*. Die *GNU General Public License (GPL)* reicht für die Software nicht aus, da (ein Teil von) ASBA auch mittels eines Servers betrieben werden kann und soll. Damit das Projekt gegebenenfalls durch verschiedene Entwickler gleichzeitig bearbeitet werden kann und wegen des Konfigurationsmanagements wurde es als ein GitHub Projekt erstellt (siehe [24]).

Wenn die Lizenzen nicht mitgeliefert wurden, können sie unter `http://www.gnu.org/licenses/` gefunden werden.

4.1. Anforderungen

Die Anforderungen ergeben sich zunächst aus den Zielen im Abschnitt 1.3 auf Seite 8. Die beiden Ziele 1 *Daten* und 15 *Lizenz* sind für die Entwicklung von ASBA von sekundärer Bedeutung und werden daher in diesem Abschnitt nicht übernommen. Die anderen Ziele werden noch verfeinert.

> > > Ziele aus Abschnitt "Ziele" in Anforderungen umwandeln. < < <

1. **Form**: Die Daten liegt in formaler, geprüfter Form vor. — siehe Ziel 2 auf Seite 8
2. **Eingaben**: Die Eingabe von Daten erfolgt in einer formalen Syntax unter Verwendung der üblichen mathematischen Schreibweise. Folgende Daten können eingegeben werden:
   a) Axiome
   b) Sätze
   c) Beweise
   d) Fachbegriffe
   e) Fachgebiete
   f) Ausgabeschemata

   Dabei sind alle Begriffe nur innerhalb eines Fachgebiets und seiner untergeordneten Fachgebiete gültig, solange sie nicht umdefiniert werden. Das oberste Fachgebiet ist die ganze Mathematik. — siehe Ziel 3 auf Seite 8
3. **Prüfung**: Vorhandene Beweise können automatisch geprüft werden. — siehe Ziel 4 auf Seite 8
4. **Ausgaben**: Die Ausgabe kann in einer eindeutigen, formalen Syntax gemäß vorhandener Ausgabeschemata erfolgen. — siehe Ziel 5 auf Seite 8

5. **Auswertungen**: Zusätzlich zur Ausgabe der Daten sind verschiedene Auswertungen möglich. Insbesondere kann zu jedem Beweis angegeben werden, wie lang er ist und welche Axiome und Sätze[1)] er benötigt. — siehe Ziel 6 auf Seite 8
6. **Anpassbarkeit**: Fachbegriffe und die Darstellung bei der Ausgabe können mit Hilfe von — gegebenenfalls unbenannten — untergeordneten Fachgebieten angepasst werden. — siehe Ziel 7 auf Seite 8
7. **Individualität**: Axiome und Sätze können für jeden Beweis individuell vorausgesetzt werden. Dabei sind fachgebietsspezifische Fachbegriffe erlaubt. — siehe Ziel 8 auf Seite 9)
8. **Internet**: Die Daten können auf mehrere Dateien verteilt sein. Ein Teil davon — oder sogar alle — können im Internet liegen. — siehe Ziel 9 auf Seite 9
9. **Kommunikation**: Die Kommunikation mit ASBA kann mit den Fachbegriffen der einzelnen Fachgebiete erfolgen. — siehe Ziel 10 auf Seite 9
10. **Zugriff**: Der Zugriff auf ASBA kann lokal und über das Internet erfolgen. — siehe Ziel 11 auf Seite 9
11. **Unabhängigkeit**: ASBA kann offline und online arbeiten. — siehe Ziel 12 auf Seite 9
12. **Rekursion**: Es kann rekursiv über alle verwendeten Dateien — auch solchen, die im Internet liegen — ausgewertet werden. — siehe Ziel 13 auf Seite 9
13. **Bedienbarkeit**: ASBA ist einfach zu bedienen. — siehe Ziel 14 auf Seite 9
14. **Zwischenspeicher**: Wichtige Auswertungen können an vorhandenen Dateien angehängt oder separat in eigenen Dateien gespeichert werden. — siehe Ziel 16 auf Seite 9
15. **Beweisunterstützung**: ASBA hilft bei der Erstellung von Beweisen. — siehe Ziel 17 auf Seite 9

4.2. Axiome

> > > Axiome auswählen und definieren. < < <

4.3. Beweise

> > > Schlussregeln auswählen und Beweise definieren. < < <

4.4. Datenstruktur

> > > Datenstruktur abstrakt und in XML definieren. < < <

4.5. Bausteine

> > > Bausteine? definieren. < < <

1) Sätze, die quasi als Axiome verwendet werden.

A. Anhang

A.1. Werkzeuge

Da dies ein Open Source Projekt sein soll, müssen alle Werkzeuge, die zum Ablauf der Software erforderlich sind, ebenfalls Open Source sein. Für die reine Entwicklung sollte das auch gelten, muss es aber nicht.

Werkzeuge zur Übersetzung der Quelldateien

1. Ein Übersetzer für LaTeX Quellcode (*.tex). — Verwendet wird *MiKTeX*.
2. Ein Übersetzer für C++ Quellcode (*.c, *.cpp, *.h, *.hpp). — Verwendet wird *Visual Studio Community 2017*.

Nicht unbedingt nötig, aber sinnvoll:

3. Ein Dokumentationssystem für in C++ Quellcode und darin enthaltene Doxygen Kommentare (*.c, *.cpp, *.h, *.hpp). — Verwendet wird *Doxygen* mit Konfigurationsdatei „Doxyfile“.
4. Ein Konfigurationsmanagementsystem zur Verwaltung der Quelldateien. — Verwendet wird *GitHub*.

Werkzeuge für die Entwicklung

5. *GitHub* als Online Konfigurationsmanagementsystem zur Zusammenarbeit verschiedener Entwickler.
→ `https://github.com/` — Lizenz siehe [9]
6. GitHub benötigt *Git* als Konfigurationsmanagementsystem.
→ `https://git-scm.com/` — Lizenz siehe [9]
7. *MiKTeX* für Dokumentation und Ausgaben in LaTeX.
→ `https://miktex.org/` — Lizenz siehe [15]
8. angedacht: *Visual Studio Community 2017*[1)] (*VS*) als Entwicklungsumgebung für C++.
→ `https://www.visualstudio.com/downloads/` — Lizenz siehe [14]
9. angedacht: In *Visual Studio Community 2015* integrierte Datenbank für Ausgabeschemata, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Fachgebiete. — Lizenz siehe [14]
10. angedacht: *RapidXml* für Ein- und Ausgabe in XML.
→ `http://rapidxml.sourceforge.net/index.htm` — Lizenz siehe [5] oder wahlweise [17] [2)]

1) Visual Studio Community ist zwar nicht Open Source, darf aber zur Entwicklung von Open Source Software unentgeltlich verwendet werden.
2) RapidXml stellt eine C++ Header-Datei zur Verfügung. Wenn diese im Quellcode eines Programms enthalten ist, gilt das ganze Programm als Open Source. Wenn diese Header-Datei nur in einer Bibliothek innerhalb eines Projekts verwendet wird, so gilt nur diese Bibliothek als Open Source.

11. angedacht: *Doxygen* als Dokumentationssystem für C++.
→ http://www.stack.nl/~dimitri/doxygen/ — Lizenz siehe [9]
12. angedacht: Doxygen benötigt *Ghostscript* als Interpreter für Postscript und PDF.
→ http://ghostscript.com/ — Lizenz siehe [7]
13. angedacht: Doxygen benötigt *Graphviz* mit *Dot* zur Erzeugung und Visualisierung von Graphen.
→ http://www.graphviz.org/Home.php — Lizenz siehe [6]
14. angedacht: Software Entwicklungsumgebung für C++.
→ https://www.qt.io/developers/ — Lizenz siehe [10] und siehe [12]

Werkzeuge zur Bearbeitung der Quelldateien

15. *TEXstudio* als Editor für LATEX.
→ http://www.texstudio.org/ — Lizenz siehe [9]
TEXstudio benötigt einen Interpreter für Perl:
16. *Strawberry Perl* als Interpreter für Perl.
→ http://strawberryperl.com/ — Lizenz: Various OSI-compatible Open Source licenses, or given to the public domain
17. *Notepad*++ als Text-Editor.
→ https://notepad-plus-plus.org/ — Lizenz siehe [8]
18. *WinMerge* zum Vergleich von Dateien und Verzeichnissen.
→ http://winmerge.org/ — Lizenz siehe [8]

Im Projekt *qedeq* verwendete Werkzeuge

- *Java* als Programmiersprache und Laufzeitumgebung.
→ https://www.java.com/de/download/win10.jsp — Lizenz siehe [18]
- *Apache Ant* als Java Bibliothek und Kommandozeilen-Werkzeug um Java Programme zu erzeugen.
→ http://ant.apache.org/ — Lizenz siehe [4]
- *Checkstyle* zur statischen Code-Analyse für Java.
→ http://checkstyle.sourceforge.net/ — Lizenz siehe [11]
- *Clover*[3)] als Testwerkzeug zur Analyse der Code-Abdeckung.
→ https://www.atlassian.com/software/clover/ — Lizenz siehe [13]
- *Eclipse IDE for Java Developers* als Entwicklungsumgebung für Java.
→ http://www.eclipse.org/downloads/packages/eclipse-ide-java-developers/neon1a/ — Lizenz siehe [19]
- *JUnit* zur Erzeugung von wiederholbaren Tests.
→ http://junit.org/junit4/ — Lizenz siehe [6]
- *Xerces2* als XML-Parser in Java.
→ http://xerces.apache.org/xerces2-j/ — Lizenzen siehe [4, 16, 20, 21]

3) Clover ist proprietäre Software, aber auf Anfrage frei für 30 Tage. Danach ist eine einmalige Lizenzgebühr fällig.

A.2. Die Struktur ausgewählter Begriffeund Bezeichnungen

Objekt [1)]

[1] Fußnote zur Tabelle

Tabelle A.1.: Ausgewählte Begriffe

Metasprache: natürliche Sprache	Metasprache: formale Metasprache	Objektsprache: Aussagenlogik	Objektsprache: Prädikatenlogik
	Symbole		
	Metasymbol	Objektsymbol	
	Beispielsymbole		
unäre Operation	$\ominus$		
binäre Operation	$\circledast$		
binäre Relationen	$<\ \preceq\ >\ \succeq\ \nprec\ \npreceq\ \nsucc\ \nsucceq$		
	Wahrheitswerte		
wahr *falsch*	true false	$\top\ \bot$	
	Operation Relation Umkehrrelation Negation		
	Metaoperation Metarelation	Junktor	
nicht	$\sim$	$\neg$	
und oder dann	$\&\ \parallel\ \Rightarrow$	$\wedge\ \vee\ \rightarrow$	
dann wenn wenn	$\Leftrightarrow\ \Leftarrow$	$\leftrightarrow\ \leftarrow$	
und[1] entweder oder	$\mid$	$\dot{\vee}$	
nicht und nicht oder		$\uparrow\ \downarrow$	
gleich ungleich	$\equiv\ \not\equiv$	$=\ \neq$	
definitionsgemäß gleich	$:\Leftrightarrow$		
definitionsgemäß gleich	$:\equiv$		
Quantoren	$\forall\ \exists\ \exists!$	$\bigwedge\ \bigvee\ \dot{\bigvee}$	
Ersetzung Vertauschung	$\longleftarrow\!\!\prec\ \leftrightarrows$		
Ableitungsrelationen:	$\vdash\ \vdash_R\ \vdash_{\mathcal{P}}\ \vdash_{\mathcal{K}}\ \vdash_{\mathcal{E}}$		
Elementrelationen:	$\in\ \ni\ \notin\ \not\ni$		
Bereichsrelationen:	$\subset\ \subseteq\ \supset\ \supseteq\ \not\subset\ \not\subseteq\ \not\supset\ \not\supseteq$		
Komponentenrelationen:	⋿ ⋻ ⋿̸ ⋻̸		
Folgenrelationen:	$\sqsubset\ \sqsubseteq\ \sqsupset\ \sqsupseteq\ \not\sqsubset\ \not\sqsubseteq\ \not\sqsupset\ \not\sqsupseteq$		
ausgewählte Bereiche	$\mathbb{N}\ \mathbb{N}_0\ \mathcal{U}\ \mathcal{A}\ \mathcal{O}\ \mathcal{L}$		
	unär / **binär**		
Bereichsoperationen	$\mathcal{P}\ \mathcal{P}_e\ \mathcal{R}\ \mathcal{R}_e\ \mathcal{F}\ \mathcal{F}_e\ \mathcal{T}$ / $\cap\ \cup\ \setminus\ \times$		
unäre Operationen auf:	**Relationen** / **Funktionen**		
	$stel_r$ / $stel_f$		
Definitions- Zielbereich	dom tar		
Quell- Wertebereich	src ran		
Trägermenge	car car $_i$		
Graph	graph		
unäre Operationen auf:	Folgen Tupel		
	len set		

Die erste Spalte beschreibt die anderen Spalten. Nur Teile **in dieser Schriftart** gelten als Überschriften.

[1] nur in Schlussregeln

Tabelle A.2.: Ausgewählte Bezeichnungen

A.3. Offene Aufgaben

1. TODOs bearbeiten.
2. Eingabeprogramm erstellen (liest XML).
3. Prüfprogramm erstellen.
4. Ausgabeprogramm erstellen (schreibt XML).
5. Formelausgabe erstellen (erzeugt LaTeX aus XML).
6. Axiome sammeln und eingeben.
7. Sätze sammeln und eingeben.
8. Beweise sammeln und eingeben.
9. Fachbegriffe und Symbole sammeln und eingeben.
10. Fachgebiete sammeln und eingeben.
11. Ausgabeschemata sammeln und eingeben.

B. Verzeichnisse

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Jürgen Michael Glubrecht / Arnold Oberschelp / Günter Todt, *Klassenlogik* – Mannheim; Wien; Zürich: Bibliographisches Institut, 1983.

[2] Wolfgang Rautenberg, *Einführung in die Mathematische Logik*: Ein Lehrbuch, 3. Auflage, Vieweg+Teubner 2008 13, 14, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 38, 40

[3] Norbert Schwarz, *Einführung in TEX*: „unveränderte“ PDF-Fassung der 3. Auflage von 1991 → `http://www.ruhr-uni-bochum.de/www-rz/schwanbs/TeX/` — 06.02.2002 [1)]

[4] *Apache License*, Version 2.0 → `http://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0` — 01.2004 49

[5] *Boost Software License* 1.0 → `http://www.boost.org/users/license.html` — 17.08.2003 48

[6] *Eclipse Public License* Version 1.0 → `http://www.eclipse.org/org/documents/epl-v10.php` — 09.03.2017 49

[7] *GNU Affero General Public License* → `http://www.gnu.org/licenses/agpl` — 19.11.2007 49

[8] *GNU General Public License*, Version 1 → `http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-1.0` — 02.1989 49

[9] *GNU General Public License*, Version 2 → `http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-2.0` — 06.1991 48, 49

[10] *GNU General Public License*, Version 3 → `http://www.gnu.org/licenses/gpl` — 29.06.2007 49

[11] *GNU Lesser General Public License*, Version 2.1 → `http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/lgpl-2.1` — 02.1999 49

[12] *GNU Lesser General Public License*, Version 3.0 → `http://www.gnu.org/licenses/lgpl` — 29.06.2007 49

[13] Lizenz für *Clover* → `https://www.atlassian.com/software/clover` — 2017 49

[14] Lizenz für *Microsoft Visual Studio Express 2015* → `https://www.visualstudio.com/de/license-terms/mt171551/` — 2017 48

[15] Lizenz für *MikTeX* → `https://miktex.org/kb/copying` — 13.04.2017 48

[16] Lizenz für *SAX* → `http://www.saxproject.org/copying.html` — 05.05.2000 49

[17] *MIT License* → `https://opensource.org/licenses/MIT/` — 09.03.2017 48

[1)] Der Pfeil (→) verweist stets auf einen Link zu einer Seite im Internet. Das Datum hinter dem Link gibt an — je nachdem welches bekannt ist — das Datum der letzten Änderung, den Stand der Seite oder das Datum, an dem die Seite angeschaut oder ein Zitat entnommen wurde. Sind mehrere Daten vorhanden, wird das erste vorhandene in der angegebenen Reihenfolge genommen. — Dies gilt für alle in diesem Dokument im Literaturverzeichnis aufgelisteten Seiten im Internet.

[18] *Oracle Binary Code License Agreement* → http://java.com/license — 02.04.2013 49

[19] *OSI Certified Open Source Software* → https://opensource.org/pressreleases/certified-open-source.php — 16.06.1999 49

[20] *W3C Document License* → http://www.w3.org/Consortium/Legal/2015/doc-license — 01.02.2015 49

[21] *W3C Software Notice and License* → http://www.w3.org/Consortium/Legal/2002/copyright-software-20021231.html — 13.05.2015 49

[22] *Hilbert II — Introduction* → http://www.qedeq.org/ — 20.01.2014 4, 6

[23] *Formal Correct Mathematical Knowledge*: GitHub Repository vom Projekt Hilbert II → https://github.com/m-31/qedeq/ — 18.03.2017 6

[24] *ASBA — Axiome, Sätze, Beweise und Auswertungen*. Projekt zur maschinellen Überprüfung von mathematischen Beweisen und deren Ausgabe in lesbarer Form: GitHub Repository vom Projekt ASBA — in Bearbeitung → https://github.com/Dr-Winfried/ASBA 46

[25] Meyling, Michael: *Anfangsgründe der mathematischen Logik* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_logic_v1_de.pdf — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung) 40

[26] Meyling, Michael: *Formale Prädikatenlogik* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_formal_logic_v1_de.pdf — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)

[27] Meyling, Michael: *Axiomatische Mengenlehre* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_set_theory_v1_de.pdf — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)

[28] Meyling, Michael: *Elements of Mathematical Logic* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_logic_v1_en.pdf — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung) 40

[29] Meyling, Michael: *Formal Predicate Calculus* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_formal_logic_v1_en.pdf — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)

[30] Meyling, Michael: *Axiomatic Set Theory* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_set_theory_v1_en.pdf — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)

[31] Wikipedia Hauptseite → https://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Hauptseite — 07.11.2017 89, 90, 94

[32] Wikipedia: *Ableitung (Logik)* → https://de.wikipedia.org/wiki/Ableitung_(Logik) — 20.02.2018 71

[33] Wikipedia: *Aussage (Logik)* → https://de.wikipedia.org/wiki/Aussage_(Logik) — 11.03.2018 15, 72

[34] Wikipedia: *Aussagenlogik* → https://de.wikipedia.org/wiki/Aussagenlogik — 18.01.2018 44, 73

[35] Wikipedia: *Aussagenlogik* Kapitel 4 *Formaler Zugang* → https://de.wikipedia.org/wiki/Aussagenlogik#Formaler_Zugang — 18.01.2018 40

[36] Wikipedia: *Begriff* → https://de.wikipedia.org/wiki/Begriff — 12.03.2018 73

[37] Wikipedia: *Benennung* → https://de.wikipedia.org/wiki/Benennung — 12.05.2015 74

[38] Wikipedia: *Beweis (Mathematik)* → https://de.wikipedia.org/wiki/Beweis_(Mathematik) — 08.11.2017 12, 74

[39] Wikipedia: *Bezeichnung* → https://de.wikipedia.org/wiki/Bezeichnung — 25.02.2018 75

[40] Wikipedia: *Darstellung (Wiedergabe)* → https://de.wikipedia.org/wiki/Darstellung_(Wiedergabe) — 31.10.2016 75

[41] Wikipedia: *Diskursuniversum* → https://de.wikipedia.org/wiki/Diskursuniversum — 12.01.2017 18, 76

[42] Wikipedia: *Element (Mathematik)* → https://de.wikipedia.org/wiki/Element_(Mathematik) — 09.01.2016 77

[43] Wikipedia: *Folge (Mathematik)* → https://de.wikipedia.org/wiki/Folge_(Mathematik) — 14.02.2018 78

[44] Wikipedia: *Fachgebiet* → https://de.wikipedia.org/wiki/Fachgebiet — 17.01.2018 12, 78

[45] Wikipedia: *Funktion (Mathematik)* → https://de.wikipedia.org/wiki/Funktion_(Mathematik) — 12.03.2018 79

[46] Wikipedia: *Funktion (Mathematik)* Kapitel 2.1 *Mengentheoretische Definition* → https://de.wikipedia.org/wiki/Funktion_(Mathematik)#Mengentheoretische_Definition — 27.01.2018 22

[47] Wikipedia: *Hilbert-Kalkül* Kapitel 1.4 *Modus (ponendo) ponens* → https://de.wikipedia.org/wiki/Hilbert-Kalk%C3%BCl#Modus_(ponendo)_ponens — 18.06.16 31

[48] Wikipedia: *Identität (Logik)* Kapitel 2.3 *Identität in der Informatik* → https://de.wikipedia.org/wiki/Identit%C3%A4t_(Logik)#Identit.C3.A4t_in_der_Informatik — 18.05.2017 20

[49] Wikipedia: *Intuitionismus (Logik und Mathematik)* → https://de.wikipedia.org/wiki/Intuitionismus_(Logik_und_Mathematik) — 22.06.2018 94

[50] Wikipedia: *Junktor* → https://de.wikipedia.org/wiki/Junktor — 18.03.2017 80

[51] Wikipedia: *Junktor* Kapitel 2.2 *Mögliche Junktoren* → https://de.wikipedia.org/wiki/Junktor#M.C3.B6gliche_Junktoren — 21.10.2017 40

[52] Wikipedia: *Kalkül* → https://de.wikipedia.org/wiki/Kalk%C3%BCl — 26.02.2017 13, 81

[53] Wikipedia: *Kartesisches Produkt*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Kartesisches_Produkt — 21.02.2018 87

[54] Wikipedia: *Klasse (Mengenlehre)*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Klasse_(Mengenlehre) — 25.03.2018 81

[55] Wikipedia: *Klassenlogik* → https://de.wikipedia.org/wiki/Klassenlogik — 05.01.2017 81

[56] Wikipedia: *Konstante (Logik)*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Konstante_(Logik) — 20.01.2016 81

[57] Wikipedia: *Logik* → https://de.wikipedia.org/wiki/Logik — 28.01.2018 82

[58] Wikipedia: *Mathematische Logik*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematische_Logik — 21.03.2018 82

[59] Wikipedia: *Mathematisches Objekt*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches_Objekt — 29.06.2018 17, 85

[60] Wikipedia: *Menge* → https://de.wikipedia.org/wiki/Menge_(Mathematik) — 07.03.2018 83

[61] Wikipedia: *Mengenlehre* → https://de.wikipedia.org/wiki/Mengenlehre — 17.01.2018 45, 83

[62] Wikipedia: *Prädikatenlogik*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik — 01.03.2018 45, 87

[63] Wikipedia: *Prädikatenlogik erster Stufe*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik_erster_Stufe — 26.11.2017

[64] Wikipedia: *Quantor* → https://de.wikipedia.org/wiki/Quantor — 12.03.2018 87

[65] Wikipedia: *Relation (Mathematik)*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Relation_(Mathematik) — 16.03.2018 88

[66] Wikipedia: *Relation (Mathematik)* Kapitel 1.1 *Mehrstellige Relation* → https://de.wikipedia.org/wiki/Relation_(Mathematik)#Mehrstellige_Relation — 27.01.2018 21

[67] Wikipedia: *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_vom_ausgeschlossenen_Dritten — 13.01.2018 94

[68] Wikipedia: *Schlussregel* → https://de.wikipedia.org/wiki/Schlussregel — 29.03.2015 13, 25, 89

[69] Wikipedia: *Signatur (Modelltheorie)*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Signatur_(Modelltheorie) — 04.03.2018 89

[70] Wikipedia: *Systeme natürlichen Schließens* → https://de.wikipedia.org/wiki/Systeme_nat%C3%BCrlichen_Schlie%C3%9Fens — 25.10.2017 13, 25, 32, 33, 34, 35, 38

[71] Wikipedia: *Semantik* → https://de.wikipedia.org/wiki/Semantik — 04.03.2018

[72] Wikipedia: *Syntax* → https://de.wikipedia.org/wiki/Syntax — 14.11.2017

[73] Wikipedia: *Terminus* → https://de.wikipedia.org/wiki/Terminus — 13.01.2018 12, 78

[74] Wikipedia: *Tupel* → https://de.wikipedia.org/wiki/Tupel — 17.12.2017 91

[75] Wikipedia: *Variable (Mathematik)* → https://de.wikipedia.org/wiki/Variable_(Mathematik) — 08.03.2018 92

[76] Wikipedia: *Wahrheitswert* → https://de.wikipedia.org/wiki/Wahrheitswert — 03.07.2017 15, 93

Index

Die Einordnung von einem Substantiv mit Adjektiven erfolgt stets unter dem Substantiv. Ist das Substantiv und ggf. ein oder mehrere Adjektive schon vorher aufgelistet worden, werden diese Worte durch je ein „—“ ersetzt.

Symbolverzeichnis

Mit Seitenzahlen **in dieser** Schriftart wird auf die Definition oder sonstige wichtige Stellen verwiesen.

In eckigen Klammern wird wird, sofern vorhanden, die Benennung für das jeweilige Symbol angegeben, für Funktionen und Relationen auch mittels eines Aufrufs. Die Wörter **in dieser** Schrift sind notwendig für die Definition, solche *in dieser* Schrift können auch weggelassen werden.

$(A \Leftrightarrow B) :\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \,\&\, (B \Rightarrow A))$

$\Leftrightarrow$ Eine binäre Metarelation: $(A \Leftrightarrow B) :\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \,\&\, (B \Rightarrow A))$ [*A gilt genau* **dann wenn** *B gilt*]. **18**, 19f, 23f, 26ff, 30, **43**, 44, 51, , 84, 95, *siehe* &, $\Rightarrow$, $:\Leftrightarrow$ & $\leftrightarrow$

$(A :\Leftrightarrow B)$

$:\Leftrightarrow$ [ok] Die **Aussagedefinition** – eine binäre Metarelation: $(A :\Leftrightarrow B)$ [*A gilt* **definitionsgemäß** *genau* **dann wenn** *B gilt*]. **17**, 18, 22ff, 26ff, 32, 43, 51, , 73, *siehe* $:\equiv$ & Objektdefinition

Metaoperationen und -relationen mit Objekten Im Folgenden seien A und B beliebige metasprachliche Objekte. , *siehe* Metaoperation & Metarelation

$(A \equiv B)$

$\equiv$ **Metasprachliche Gleichheit** – eine binäre Metarelation: $(A \equiv B)$ [*A ist* **gleich** *B*][2]. **18**, **20**, 24ff, 29, 33f, **43**, 51, , 64, 80, 92, *siehe* $=$

$(A \not\equiv B) :\Leftrightarrow \sim(A \equiv B)$

$\not\equiv$ Metasprachliche **Ungleichheit** – eine binäre Metarelation: $(A \not\equiv B) :\Leftrightarrow \sim(A \equiv B)$ [*A ist* **ungleich** *B*][3].
Die Negation von $\equiv$. **20**, 23f, 26, 51, , 80, 92, *siehe* $\sim$, $:\Leftrightarrow$, $\equiv$ & $\neq$

Sonstige Metaoperationen und -relationen Im Folgenden seien A und B metasprachliche Aussagen oder Bereichen davon und α und β ???.

$(A \vdash B)$

$\vdash$ Die **Ableitungsrelation** – eine binäre Metarelation: $(A \vdash B)$ [*A ist* **ableitbar** *aus B*][4]. 26, **27**, 29f, **32**, 33, 35, 37, 39, 51, , 71, *siehe* ableitbar

$(A \vdash_R B) :\Leftrightarrow ((A, B) \in R_g)$

$\vdash_R$ Die *R*-**Ableitungsrelation** – eine binäre Metarelation: $(A \vdash_R B) :\Leftrightarrow ((A, B) \in R_g)$ [*A ist* R-**ableitbar** *aus B*][5].
Die Darstellung einer Relation $R \in \mathcal{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$ als Ableitungsrelation. **25**, **27**, 29, 51, , 71, *siehe* $\vdash$, $:\Leftrightarrow$, $\in$, g & ableitbar

$(\alpha \leftarrowtail \beta)$

$\leftarrowtail$ Die **Ersetzung**: $(\alpha \leftarrowtail \beta)$ [*α wird* **ersetzt durch** *β*][6]. 26, 32, **33**, 34, 37, 39, 51,

$(\alpha \leftrightarrows \beta)$

$\leftrightarrows$ Die **Vertauschung**: $(\alpha \leftrightarrows \beta)$ [*α wird* **vertauscht mit** *β*]. 26, **33**, 34, 39, 51, , 93

Elementrelationen [ok] Im Folgenden sei x ein beliebiges Element und M eine beliebige Menge.

$(x \in M)$

$\in$ [ok] Eine **Elementrelation**: $(x \in M)$ [*x ist ein Element* **aus** *M*][7].
Die grundlegende Relation der Mengenlehre. **17**, 26, 51, , 64, 77, 86, 88ff, 95, *siehe* Element & Komponente

$(M \ni x) :\Leftrightarrow (x \in M)$

$\ni$ [ok] Eine **Elementrelation**: $(M \ni x) :\Leftrightarrow (x \in M)$ [*M* **enthält** *x als Element*].
Die Umkehrrelation von $\in$. **17**, 26, 51, , 77, *siehe* $:\Leftrightarrow$ & Element

$(x \notin M) :\Leftrightarrow \sim(x \in M)$

$\notin$ [ok] Eine **Elementrelation**: $(x \notin M) :\Leftrightarrow \sim(x \in M)$ [*x ist* **nicht** *ein Element* **aus** *M*][8].
Die Negation von $\in$. **17**, 26, 51, , 77, *siehe* $\sim$ & $:\Leftrightarrow$

$(M \not\ni x) :\Leftrightarrow \sim(x \in M)$

$\not\ni$ [ok] Eine **Elementrelation**: $(M \not\ni x) :\Leftrightarrow \sim(x \in M)$ [*M* **enthält** *x* **nicht** *als Element*].
Die Negation der Umkehrrelation und gleichzeitig die Umkehrrelation der Negation von $\in$. **17**, 26, 51, , 77, *siehe* $\sim$ & $:\Leftrightarrow$

Bereichsrelationen und -operationen [9] Im Folgenden seien M und N beliebige Mengen. , *siehe* Menge, Metaoperation & Metarelation

[2] alternativ: **dasselbe wie** oder **identisch zu**
[3] alternativ: **nicht gleich**, **nicht dasselbe wie** oder **nicht identisch zu**
[4] synonym: beweisbar
[5] synonym: R-beweisbar
[6] alternativ: **substituiert durch**
[7] alternativ: **von**; „*a* von *M*“ könnte z. B. auch „Komponente *a* von der Folge *M*“ meinen. Daher bevorzugen wir für Elemente „aus“ und für Komponenten „von“.
[8] alternativ: **kein Element aus**
[9] In diesem Dokument Metarelationen und operationen.

$\subset$ [ok] Eine Bereichsrelation: $(M \subset N) :\Leftrightarrow ((M \subseteq N)\ \&\ (M \not\equiv N))$ [*M ist eine* **echte Teilmenge** *von* N].
Ursprünglich wurde $\subset$ im Sinne von $\subseteq$ verwendet. 4, **18**, 26f, 42f, 51, , 65, 74, 91, 95, *siehe* &, $:\Leftrightarrow$, $\not\equiv$ & echte Teilmenge

$(M \subset N) :\Leftrightarrow ((M \subseteq N)\ \&\ (M \not\equiv N))$

$\subseteq$ [ok] Eine Bereichsrelation: $(M \subseteq N) :\Leftrightarrow \forall x : ((x \in M) \Rightarrow (x \in N))$ [*M ist eine* **Teilmenge** *von* N]. **18**, 22, 25ff, 29ff, 42f, 51, , 65, 71, 73f, 86, 88, 91, 95, *siehe* $\Rightarrow$, $:\Leftrightarrow$, $\in$, $\forall$ & Teilmenge

$(M \subseteq N) :\Leftrightarrow \forall x : ((x \in M) \Rightarrow (x \in N))$

$\supset$ [ok] Eine Bereichsrelation: $(M \supset N) :\Leftrightarrow (N \subset M)$ [*M ist eine* **echte Obermenge von** N].
Die Umkehrrelation von $\subset$. Ursprünglich wurde $\supset$ im Sinne von $\supseteq$ verwendet. **18**, 26, 51, , 65, 74, 85, *siehe* $:\Leftrightarrow$ & echte Obermenge

$(M \supset N) :\Leftrightarrow (N \subset M)$

$\supseteq$ [ok] Eine Bereichsrelation: $(M \supseteq N) :\Leftrightarrow (N \subseteq M)$ [*M ist eine* **Obermenge von** N].
Die Umkehrrelation von $\subseteq$. **18**, 26, 32, 51, , 65, 74, 85, *siehe* $:\Leftrightarrow$ & Obermenge

$(M \supseteq N) :\Leftrightarrow (N \subseteq M)$

$\not\subset$ [ok] Eine Bereichsrelation: $(M \not\subset N) :\Leftrightarrow \sim(M \subset N)$ [*M ist* **keine echte Teilmenge** *von* N].
Die Negation von $\subset$. **18**, 26, 51, , 74, *siehe* $\sim$, $:\Leftrightarrow$ & echte Teilmenge

$(M \not\subset N) :\Leftrightarrow \sim(M \subset N)$

$\not\subseteq$ [ok] Eine Bereichsrelation: $(M \not\subseteq N) :\Leftrightarrow \sim(M \subseteq N)$ [*M ist* **keine Teilmenge** *von* N].
Die Negation von $\subseteq$. **18**, 26, 51, , 74, *siehe* $\sim$, $:\Leftrightarrow$ & Teilmenge

$(M \not\subseteq N) :\Leftrightarrow \sim(M \subseteq N)$

$\not\supset$ [ok] Eine Bereichsrelation: $(M \not\supset N) :\Leftrightarrow \sim(N \subset M)$ [*M ist* **keine echte Obermenge von** N].
Die Negation der Umkehrrelation und gleichzeitig die Umkehrrelation der Negation von $\subset$. **18**, 26, 51, , 74, *siehe* $\sim$ & $:\Leftrightarrow$

$(M \not\supset N) :\Leftrightarrow \sim(N \subset M)$

$\not\supseteq$ [ok] Eine Bereichsrelation: $(M \not\supseteq N) :\Leftrightarrow \sim(N \subseteq M)$ [*M ist* **keine Obermenge von** N].
Die Negation der Umkehrrelation und gleichzeitig die Umkehrrelation der Negation von $\subseteq$. **18**, 26, 51, , 74, *siehe* $\sim$ & $:\Leftrightarrow$

$(M \not\supseteq N) :\Leftrightarrow \sim(N \subseteq M)$

$\cap$ Eine Bereichsoperation: $M \cap N :\equiv \{x \mid (x \in M)\ \&\ (x \in N)\}$ [*Der* **Durchschnitt von** M **und** N]. 26, 42, 51, , 74, *siehe* &, $:\equiv$, $\in$ & Durchschnitt

$M \cap N :\equiv \{x \mid (x \in M)\ \&\ (x \in N)\}$

$\cup$ Eine Bereichsoperation: $M \cup N :\equiv \{x \mid (x \in M) \parallel (x \in N)\}$ [*Die* **Vereinigung von** M **und** N]. 26f, 31f, 42, 51, , 74, 95, *siehe* $\parallel$, $:\equiv$, $\in$, Menge, Bereichsoperation & Vereinigung

$M \cup N :\equiv \{x \mid (x \in M) \parallel (x \in N)\}$

$\setminus$ Eine Bereichsoperation: $M \setminus N :\equiv \{x \mid (x \in M)\ \&\ (x \notin N)\}$ [*Die* **Differenz von** M **und** N]. 51, , 84, *siehe* &, $:\equiv$, $\in$, $\notin$, Differenz, Menge & Bereichsoperation

$M \setminus N :\equiv \{x \mid (x \in M)\ \&\ (x \notin N)\}$

$\times$ Eine Bereichsoperation: $M \times N :\equiv \{(x,y) \mid (x \in M)\ \&\ (y \in N)\}$ [*Das* **kartesische Produkt von** M **und** N][10]. 22f, 25ff, 51, , 74, 80, 84, 86ff, *siehe* &, $:\equiv$, $\in$, kartesisches Produkt, Menge, Bereichsoperation & Mengenprodukt

$M \times N :\equiv \{(x,y) \mid (x \in M)\ \&\ (y \in N)\}$

Komponentenrelationen Im Folgenden sei x eine beliebige Komponente und F eine beliebige Folge. , *siehe* Komponentenrelation

⋿ Eine Komponentenrelation: $(x ⋿ F)$ [*x ist eine* **Komponente von** F][11]. 51, , 66, 81, *siehe* Element & Komponente

$(x ⋿ F)$

∃ Eine Komponentenrelation: $(F ∃ x) :\equiv (x ⋿ F)$ [*F* **enthält** *x als Komponente*].

$(F ∃ x) :\equiv (x ⋿ F)$

10) synonym: Mengenprodukt
11) alternativ: **aus**; „x aus F“ könnte z. B. auch „Element x aus der Menge F“ meinen. Daher bevorzugen wir für Komponenten „von“ und für Elemente „aus“.

Die Umkehrrelation von $\vDash$. 51, , 81, *siehe* $:\equiv$ & Komponente

$(x \nvDash F) :\equiv \sim(x \vDash F)$

$\nvDash$ Eine Komponentenrelation: $(x \nvDash F) :\equiv \sim(x \vDash F)$ [x *ist* **keine Komponente aus** F]. Die Negation von $\vDash$. 51, , 81, *siehe* $\sim$, $:\equiv$ & Komponente

$(F \nDashv x) :\equiv \sim(x \vDash F)$

$\nDashv$ Eine Komponentenrelation: $(F \nDashv x) :\equiv \sim(x \vDash F)$ [F **enthält** x **nicht** *als Komponente*]. Die Negation der Umkehrrelation und gleichzeitig die Umkehrrelation der Negation von $\vDash$. 51, , 81, *siehe* $\sim$, $:\equiv$ & Komponente

Folgenoperationen und -relationen Im Folgenden seien $\vec{a}$ eine endliche und $\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ beliebige Folgen. , *siehe* Folgenoperation, Folgenrelation & Tupel

$\{a_1, \ldots, a_n\} \sqcup \{c_1, c_2, \ldots\} :\equiv \{a_1, \ldots, a_n, c_1, c_2, \ldots\}$

$\sqcup$ Eine Folgenoperation: $\{a_1, \ldots, a_n\} \sqcup \{c_1, c_2, \ldots\} :\equiv \{a_1, \ldots, a_n, c_1, c_2, \ldots\}$ [$\vec{a}$ **verkettet** *mit* $\vec{c}$]. , *siehe* $:\equiv$, Folge & Verkettung

$(\vec{c} \sqsubset \vec{d}) :\Leftrightarrow ((\vec{c} \sqsubseteq \vec{d})\ \&\ (\vec{c} \not\equiv \vec{d}))$

$\sqsubset$ Eine Folgenoperation: $(\vec{c} \sqsubset \vec{d}) :\Leftrightarrow ((\vec{c} \sqsubseteq \vec{d})\ \&\ (\vec{c} \not\equiv \vec{d}))$ [$\vec{c}$ *ist eine* **echte Teilfolge** *von* $\vec{d}$]. 51, , 66, *siehe* &, $:\Leftrightarrow$, $\not\equiv$, $\sqsubseteq$ & echte Teilfolge

$(\vec{c} \sqsubseteq \vec{d}) :\Leftrightarrow ((\exists \vec{a} : (\vec{a} \sqcup \vec{c}) \equiv \vec{d}) \parallel (\exists \vec{a}, \vec{b} : (\vec{a} \sqcup \vec{c} \sqcup \vec{b}) \equiv \vec{d}))$

$\sqsubseteq$ Eine Folgenrelation: $(\vec{c} \sqsubseteq \vec{d}) :\Leftrightarrow ((\exists \vec{a} : (\vec{a} \sqcup \vec{c}) \equiv \vec{d}) \parallel (\exists \vec{a}, \vec{b} : (\vec{a} \sqcup \vec{c} \sqcup \vec{b}) \equiv \vec{d}))$ [$\vec{c}$ *ist eine* **Teilfolge von** $\vec{d}$][12]. 51, , 66, *siehe* $:\Leftrightarrow$, $\equiv$, $\exists$, Folge & Teilfolge

$(\vec{c} \sqsupset \vec{d}) :\Leftrightarrow (\vec{d} \sqsubset \vec{c})$

$\sqsupset$ Eine Folgenrelation: $(\vec{c} \sqsupset \vec{d}) :\Leftrightarrow (\vec{d} \sqsubset \vec{c})$ [$\vec{c}$ *ist eine* **echte Oberfolge von** $\vec{d}$]. Die Umkehrrelation von $\sqsubset$. 51, , *siehe* $:\Leftrightarrow$ & echte Oberfolge

$(\vec{c} \sqsupseteq \vec{d}) :\Leftrightarrow (\vec{d} \sqsubseteq \vec{c})$

$\sqsupseteq$ Eine Folgenrelation: $(\vec{c} \sqsupseteq \vec{d}) :\Leftrightarrow (\vec{d} \sqsubseteq \vec{c})$ [$\vec{c}$ *ist eine* **Oberfolge von** $\vec{d}$]. Die Umkehrrelation von $\sqsubseteq$. 51, , *siehe* $:\Leftrightarrow$ & Oberfolge

$(\vec{c} \not\sqsubset \vec{d}) :\Leftrightarrow \sim(\vec{c} \sqsubset \vec{d})$

$\not\sqsubset$ Eine Folgenrelation: $(\vec{c} \not\sqsubset \vec{d}) :\Leftrightarrow \sim(\vec{c} \sqsubset \vec{d})$ [$\vec{c}$ *ist* **keine echte Teilfolge von** $\vec{d}$]. Die Negation von $\sqsubset$. 51, , *siehe* $\sim$, $:\Leftrightarrow$ & echte Teilfolge

$(\vec{c} \not\sqsubseteq \vec{d}) :\Leftrightarrow \sim(\vec{c} \sqsubseteq \vec{d})$

$\not\sqsubseteq$ Eine Folgenrelation: $(\vec{c} \not\sqsubseteq \vec{d}) :\Leftrightarrow \sim(\vec{c} \sqsubseteq \vec{d})$ [$\vec{c}$ *ist* **keine Teilfolge von** $\vec{d}$]. Die Negation von $\sqsubseteq$. 51, , *siehe* $\sim$, $:\Leftrightarrow$ & Teilfolge

$(\vec{c} \not\sqsupset \vec{d}) :\Leftrightarrow \sim(\vec{d} \sqsubset \vec{c})$

$\not\sqsupset$ Eine Folgenrelation: $(\vec{c} \not\sqsupset \vec{d}) :\Leftrightarrow \sim(\vec{d} \sqsubset \vec{c})$ [$\vec{c}$ *ist* **keine echte Oberfolge von** $\vec{d}$]. Die Negation der Umkehrrelation und gleichzeitig die Umkehrrelation der Negation von $\sqsubset$. 51, , *siehe* $\sim$, $:\Leftrightarrow$ & echte Oberfolge

$(\vec{c} \not\sqsupseteq \vec{d}) :\Leftrightarrow \sim(\vec{d} \sqsubseteq \vec{c})$

$\not\sqsupseteq$ Eine Folgenrelation: $(\vec{c} \not\sqsupseteq \vec{d}) :\Leftrightarrow \sim(\vec{d} \sqsubseteq \vec{c})$ [$\vec{c}$ *ist* **keine Oberfolge von** $\vec{d}$]. Die Negation der Umkehrrelation und gleichzeitig die Umkehrrelation der Negation von $\sqsubseteq$. 51, , *siehe* $\sim$, $:\Leftrightarrow$ & Oberfolge

Junktoren [13] Im Folgenden seien A und B beliebige logische Aussagen. , *siehe* Junktor

$Wert(\bot) :\equiv falsch$

$\bot$ [ok] Ein 0-stelliger Junktor, d. h. eine aussagenlogische Konstante: $Wert(\bot) :\equiv falsch$ [**falsch**]. 15, **40**f, 42, **43**, 51, , 94, *siehe* false, *falsch* & Wahrheitswert

$Wert(\top) :\equiv wahr$

$\top$ [ok] Ein 0-stelliger Junktor, d. h. eine aussagenlogische Konstante: $Wert(\top) :\equiv wahr$ [**wahr**]. 15, **40**f, 42, **44**, 51, , 94, *siehe* true, *wahr* & Wahrheitswert

$\neg A$

$\neg$ Ein unärer Junktor: $\neg A$ [**nicht** A]. 18, 26, 33, 35, 37, 39, **40**f, 42ff, 51, , 67, 82, 90, *siehe* $\sim$

$A \wedge B$

$\wedge$ Ein binärer Junktor: $A \wedge B$ [A **und** B][14]. 19, 26, 32f, 39, **40**f, 42ff, 51, , 67, 80, 86, 90, *siehe* & & $\uparrow$

$A \vee B$

$\vee$ Ein binärer Junktor: $A \vee B$ [A **oder** B]. 19, 26, **40**f, 42ff, 51, , 67, 86, 90, *siehe* $\parallel$, $\downarrow$ & $\dot\vee$

$(\neg A \vee B)$

$\rightarrow$ Ein binärer Junktor: $(A \rightarrow B) :\Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ [wenn A **dann** B]. 25ff, 30f, 33, 35, 39, **40**f, 42, **43**, 44, 51, , 67, 82, 86, *siehe* $\Rightarrow$

$\leftarrow$ Ein binärer Junktor: $(A \leftarrow B) :\Leftrightarrow (B \rightarrow A)$ [A **wenn** B]. 26, **40**f, 42, **43**, 44, 51, , 86, *siehe* $\Leftarrow$

$(A \leftarrow B) :\Leftrightarrow (B \rightarrow A)$

$\leftrightarrow$ Ein binärer Junktor: $(A \leftrightarrow B) :\Leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ [A genau **dann wenn** B]. 26, **40**f, 42, **43**, 51, , 86, *siehe* $\Leftrightarrow$

$(A \leftrightarrow B) :\Leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

$\uparrow$ Ein binärer Junktor: $(A \uparrow B) :\Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$ [**nicht** (A **und** B)]. 26, **40**f, 42, **43**, 44, 51, , *siehe* $\wedge$

$(A \uparrow B) :\Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$

$\downarrow$ Ein binärer Junktor: $(A \downarrow B) :\Leftrightarrow \neg(A \vee B)$ [**nicht** (A **oder** B].[15] 26, **40**f, 42f, **44**, 51, , *siehe* $\vee$ & $\dot\vee$

$(A \downarrow B) :\Leftrightarrow \neg(A \vee B)$

$\dot\vee$ Ein binärer Junktor: $(A \dot\vee B) :\Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A))$ [**entweder** A **oder** B]. 26, **40**f, 42, **44**, 51, , *siehe* $\vee$ & $\downarrow$

$(A \dot\vee B) :\Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A))$

$=$ **LogischeGleichheit**: $A = B$ [A ist **gleich** B]. 51, , 68, *siehe* $\equiv$

$A = B$

$\neq$ **Logische Ungleichheit**: $A \neq B$ [A ist **ungleich** B]. 29, 51, , *siehe* $\not\equiv$

$A \neq B$

Quantoren Im Folgenden seien a, b und x metasprachliche bzw. logische Variablen und $A(x)$ eine Aussage bzw. Formel mit der freien Variablen x. , *siehe* Aussage, Formel, Quantor, Variable, logische Variable & metasprachliche Variable

$\forall$ Ein metasprachlicher Quantor: $\forall x A(x)$ [**für alle** x **gilt** $A(x)$]. 51, , 72, *siehe* $\bigwedge$

$\forall x A(x)$

$\exists$ Ein metasprachlicher Quantor: $\exists x A(x)$ [**es gibt ein** x **so dass** $A(x)$]. 51, , 78, *siehe* $\bigvee$

$\exists x A(x)$

$\exists!$ Ein metasprachlicher Quantor: $(\exists! x A(x)) :\Leftrightarrow ((\exists x A(x))\ \&\ ((A(a)\ \&\ A(b)) \Rightarrow (a = b)))$ [**es gibt genau ein** x **so dass** $A(x)$]. 51, , *siehe* $\dot\bigvee$

$(\exists! x A(x)) :\Leftrightarrow ((\exists x A(x))\ \&\ ((A(a)\ \&\ A(b)) \Rightarrow (a = b)))$

$\bigwedge$ Ein **logischer Quantor**: $\bigwedge x A(x)$ [**für alle** x **gilt** $A(x)$]. 51, , 72, *siehe* $\forall$

$\bigwedge x A(x)$

$\bigvee$ Ein **logischer Quantor**: $\bigvee x A(x)$ [**es gibt ein** x **so dass** $A(x)$]. 51, , 78, *siehe* $\exists$

$\bigvee x A(x)$

$\dot\bigvee$ Ein **logischer Quantor**: $(\dot\bigvee x A(x)) :\Leftrightarrow ((\bigvee x A(x)) \wedge ((A(a) \wedge A(b)) \rightarrow (a = b)))$ [**es gibt genau ein** x **so dass** $A(x)$]. 51, , *siehe* $\exists!$

$(\dot\bigvee x A(x)) :\Leftrightarrow ((\bigvee x A(x)) \wedge ((A(a) \wedge A(b)) \rightarrow (a = b)))$

Schlussregeln

($\wedge$B) Eine Schlussregel: Beseitigung von $\wedge$. **33**, 35, , *siehe* $\wedge$

($\wedge$E) Eine Schlussregel: Einführung von $\wedge$. **33**, 35, 39,

($\vee$B) Eine Schlussregel: Beseitigung von $\vee$.

($\vee$E) Eine Schlussregel: Einführung von $\vee$.

($\rightarrow$ B) Eine Schlussregel: Beseitigung von $\rightarrow$. **35**,

($\rightarrow$ E) Eine Schlussregel: Einführung von $\rightarrow$. **35**,

($\neg$1) Eine Schlussregel: Einführung/Beseitigung von $\neg$, Teil 1. **33**, 35, 37, 39,

($\neg$2) Eine Schlussregel: Einführung/Beseitigung von $\neg$, Teil 2. **33**, 35, 37,

($\neg$3) Eine Schlussregel: Beweistechnik „**Indirekter Beweis**“. **35**, , *siehe* Beweis

---

[12] Im letzteren Fall muss $\vec{c}$ eine endliche Folge sein.

[13] In diesem Dokument aussagenlogische Konstante, Relationen und Operationen, d. h. Objektkonstante, relationen und operationen.

[14] alternativ: **sowohl ... als auch ...**

[15] alternativ: **weder ... noch ...**

(¬4) Eine Schlussregel]: **Reductio ad absurdum** (**Indirekter Beweis**). **35**, , *siehe* Beweis

(= B) Eine Schlussregel: Beseitigung von =. **34**,

(= E) Eine Schlussregel: Einführung von =. **34**,

(AR) Eine Schlussregel: Die Anfangsregel. **33**, 35, 37, , 72

(FS) Eine Schlussregel: Ein formaler Satz. **30**,

(MR) Eine Schlussregel: Die Monotonieregel. **33**, 35, 37,

(SR) Eine Schlussregel: Die Schnittregel. **35**,

(TR) Eine Schlussregel: Die Abtrennungsregel. **35**,

Text-Symbole Die folgenden Symbole sind alphabetisch geordnet und auch im Index aufgeführt. □ dient nur zur Verdeutlichung, an welche Stelle die Indizes gehören.

$\mathcal{A}$ [ok] Der Bereich der Aussagen in Objektsprache. 18, 51, , 73, 86

$\mathcal{A}$ Das Alphabet der aussagenlogischen Sprache. **42**, 43, , 68

$\mathcal{A}_x$ Eine Teilmenge des Alphabets $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Sprache. **42**, 43,

$\mathcal{B}$ Eine Menge von Beweisschritten. 31,

$\vec{b}$ Ein Tupel von Beweisschritten. 31,

b Ein Beweisschritt. 31,

$\mathcal{C}$ Eine Menge von Schlussregeln. 30f, , 89

C Eine Schlussregel. 30,

car Für eine Relation[16] $R = (G, A_1, \ldots, A_n)$ ist $\operatorname{car}(R) :\equiv A_1 \times \ldots \times A_n$ und $\operatorname{car}_i(R) :\equiv A_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$. 22, 51, , *siehe* Trägermenge

val Der Wert einer Formel, nachdem die Variablen mit Werten belegt wurden. 22, 51, , 75, 88, *siehe* Formel, Variable & Wert

$\square_\mathrm{e}$ Eine Operation mittels eines Index:

$$X_\mathrm{e} :\equiv \begin{cases} \{M \in X \mid |M| \in \mathbb{N}_0\} & \text{, für eine Menge } X \text{ von Mengen} \\ \{R \in X \mid |R_g| \in \mathbb{N}_0\} & \text{, für eine Menge } X \text{ von Relationen} \\ \{F \in X \mid \operatorname{len}(F) \in \mathbb{N}_0\} & \text{, für eine Menge } X \text{ von Folgen} \end{cases}$$

, *siehe* Menge

$\mathcal{E}$ Eine Menge von Ersetzungen. 30f, , 78, *siehe* E

E Eine Ersetzung. 30f, , *siehe* $\mathcal{E}$

$\mathcal{F}$ $\mathcal{F}(M) :\equiv \{F \mid F \text{ ist Folge über } M\}$. 51, , *siehe* $\mathcal{F}_\mathrm{e}$ & Menge

$\mathcal{F}_\mathrm{e}$ $\mathcal{F}(M) :\equiv \{F \in \mathcal{F}(M) \mid \operatorname{len}(F) \in \mathbb{N}_0\}$. 51, , *siehe* $\mathcal{F}$, Folgenmenge & Menge

[16] Funktionen sind spezielle Relationen. Für eine Funktion $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to B$ gilt demnach: $\operatorname{car}(f) :\equiv A_1 \times \ldots \times A_n \times B$; $\operatorname{car}_i(f) :\equiv A_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$; $\operatorname{car}_{n+1}(f) :\equiv B$

Glossar

Die Einordnung von einem Substantiv mit Adjektiven erfolgt stets unter dem Substantiv. Ist das Substantiv und ggf. ein oder mehrere Adjektive schon vorher aufgelistet worden, werden diese Worte durch je ein „—“ ersetzt.

Mit Seitenzahlen **in dieser** Schriftart wird auf die Definition oder sonstige wichtige Stellen verwiesen.

Vielfach ist hier der erste Abschnitt[17] aus dem entsprechenden Wikipedia-Artikel zitiert, manchmal gekürzt und immer ohne die originalen Fußnoten und ohne Verweise auf andere Wikipedia-Artikel. Letztere werden allerdings noch, wie im Original, in blau angegeben.

default | **A** | **B** | **D** | **E** | **F** | **G** | **I** | **J** | **K** | **L** | **M** | **N** | **O** | **P** | **Q** | **R** | **S** | **T** | **U** | **V** | **W** | **Z**

default

$:\equiv$ [ok] Die **Objektdefinition** – eine binäre Metarelation: $(A :\equiv B)$ [*A ist* **definitionsgemäß gleich** *B*][18]. **17**, 21ff, 25f, 30–34, 36, 42ff, 51, , 81, 86, 88, *siehe* $:\Leftrightarrow$ & $(A :\equiv B)$

A

Abbildung Synonym zu Funktion.

ableitbar [?] Wenn sich eine Formel β aus einer anderen Formel α mittels zulässiger Transformationen ableiten lässt, heißt β **ableitbar** aus α. Sprechweise: α **ableitbar**[19] β. Eine oder beide Formeln α bzw. β dürfen dabei durch Formelmengen ersetzt werden. **27**, 29, **32**, , 75, *siehe* Ableitungsrelation

Ableitung [?] Wikipedia[32] schreibt dazu:

> sffamily Eine **Ableitung**, **Herleitung**, oder Deduktion ist in der Logik die Gewinnung von Aussagen aus anderen Aussagen. Dabei werden Schlussregeln auf Prämissen angewandt, um zu Konklusionen zu gelangen. Welche Schlussregeln dabei erlaubt sind, wird durch das verwendete Kalkül bestimmt.
>
> Die Ableitung ist zusammen mit der semantischen Konklusion einer der zwei logischen Methoden, um auf die Konklusion zu kommen.

Eine Ableitung ist für ASBA eine Aussage $A \vdash B$ bzw. allgemeiner $A \vdash_R B$ mit $A, B \subseteq \mathcal{L}$, wobei $\mathcal{L}$ eine Sprache ist. Dies entspricht einem Element (A, B) aus einer Ableitungsrelation $\vdash$ bzw. $\vdash_R$ (d. h. $(A, B) \in R_g$. Die semantische Aussage ist die, das die Formeln aus B aus den Formeln aus A abgeleitet werden können. **27**, 28f, **30**f, 35, 37, 39, 53, , 71, 77, 81, 87, *siehe* Ableitungsmenge, Ableitungsrelation, Konklusion, Logik, Prämisse & Schlussregel

Ableitungsmenge [?] Eine Menge von Ableitungen, letztlich nichts anderes als eine Ableitungsrelation. 29, , 77, 81, 87

Ableitungsrelation [?] Eine binäre Relation $\vdash$ aus $\mathcal{P}(\mathcal{L})^2$. Für $R \in \mathcal{P}(\mathcal{L})^2$ auch mit $\vdash_R$ bezeichnet. 26, **27**, 28, 51, , 64, 71, *siehe* Ableitung

[17] Der Teil zwischen Überschrift und Inhaltsverzeichnis.
[18] alternativ: **dasselbe wie** oder **identisch zu**
[19] synonym: beweisbar

Abtrennungsregel [?] Eine Schlussregel. **35**, , 68, *siehe* (TR)

Äquivalenzrelation [?] Eine **Äquivalenzrelation** ist eine binäre Relation auf einer Menge M mit folgenden Eigenschaften (dabei sei $\sim$ die Äquivalenzrelation):

reflexiv	:	$a \sim a$
transitiv	:	$((a \sim b) \,\&\, (b \sim c)) \Rightarrow (a \sim c)$
symmetrisch	:	$(a \sim b) \Rightarrow (b \sim a)$

jeweils für alle Elemente a, b und c aus M. **20**,

Allquantor [?] Man nennt den Quantor $\forall$ bzw. $\bigwedge$ auch **Allquantor**.

Alphabet [Beschreibung fehlt noch] 42, , 68

Anfangsregel [?] Die Schlussregel (AR) um anfangen zu können. Eine Schlussregel: Die Anfangsregel. **33**, , 68, 72

ASBA [?] ist ein Akronym für „**A**xiome, **S**ätze, **B**eweise und **A**uswertungen". Es bezeichnet das in diesem Dokument beschriebene Programmsystem, das zu eingegebenen Axiomen, Sätzen und Beweisen letztere prüft, Auswertungen generiert und unter Zuhilfenahme gegebener Ausgabeschemata eine Ausgabe im LaTeX-Format in mathematisch üblicher Schreibweise mit Formeln erstellt. **6**, 7ff, 11–15, 24f, 27, 29ff, 40, 46f, 53, , 71ff, 78, 84, 95

atomar [?] Das Attribut **atomar** kann auf Aussagen, Formeln und Symbole angewendet werden. Atomar sind solche, die keine echten Teilobjekte gleicher Objektart enthalten. 15, **16**, 20f, 43, , **72**, 79, 84, **90**, 92, *siehe* zerlegbar

Ausgabeschema [!] Ein **Ausgabeschema** ist für ASBA eine Beschreibung, wie ein bestimmtes mathematisches Objekt ausgegeben werden soll. Dies kann z. B. ein Stück LaTeX-Code mit entsprechenden Parametern sein. 1, 8, **12**, 46, 48, 52, , 72

Aussage [ok] Wikipedia[33] schreibt dazu:

> sffamily Eine **Aussage** im Sinn der aristotelischen Logik ist ein sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist zu *fragen*, ob es wahr oder falsch ist (so genanntes Aristotelisches Zweiwertigkeitsprinzip). Es ist nicht erforderlich, *sagen* zu können, ob das Gebilde wahr oder falsch ist. Es genügt, dass die Frage nach Wahrheit („Zutreffen") oder Falschheit („Nicht-Zutreffen") sinnvoll ist, – was zum Beispiel bei Fragesätzen, Ausrufen und Wünschen nicht der Fall ist. Aussagen sind somit Sätze, die Sachverhalte beschreiben und denen man einen Wahrheitswert zuordnen kann.

Dies gilt natürlich auch, wenn metasprachliche Symbole verwendet werden, wovon wir im Folgenden reichlich Gebrauch machen. Da man Relationen und logischen Ausdrücken ebenfalls einen Wahrheitswert zuordnen kann[20], können wir sie auch als Aussagen behandeln. Es handelt sich dann um **logische**, im Gegensatz zu **metasprachlichen Aussagen**. 12ff, **15**, 16–19, 21, 29f, 33, 36–41, , 67f, 71–77, 82, 84–87, 89ff, 95

—, atomare [ok] Eine Aussage heißt **atomar**[21], wenn sie nicht zerlegbar ist, d. h. wenn sie keine echte Teilaussage enthält. **16**,

—, formale [ok] Eine **formale Aussage** ist eine Aussage in Objektsprache. 18, , 73

[20] Zumindest prinzipiell nach Ersetzung von Variablen durch konkrete Werte.

[21] synonym: **unzerlegbar**

—, logische [ok] **Logische Aussagen** sind logische Ausdrücke, wozu auch Ergebnisse von Relationen sowie Ergebnisse von Funktionen mit Wertebereich aus den Wahrheitswerten gehören können. **16**, , 66, **72**

—, metasprachliche [ok] Eine **metasprachliche Aussage** ist eine Aussage in Metasprache. **16**, , 63f, **72**

—, parametrisierte [!] Eine Aussage heißt **parametrisiert**, wenn sie mindestens einen Parameter enthält. 16,

—, zerlegbare [ok] Eine Aussage heißt **zerlegbar**[22)] wenn sie mindestens eine echte Teilaussage enthält. **16**,

Aussagedefinition [ok] Eine Metadefinition: Die formale Definition einer Aussage. $\langle\!\langle A :\Leftrightarrow B \rangle\!\rangle$ steht für „A ist **definitionsgemäß äquivalent zu** B" für Aussagen A und B. Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B. **17**, 26, , 64, 84, *siehe* Objektdefinition

Aussagenbereich [ok] Der **Aussagenbereich** $\mathcal{A}$ ist der Bereich aller formalen Aussagen, d. h. der Aussagen in Objektsprache. Es kann $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ gelten, muss es aber nicht. **18**,

Aussagenlogik [?] Wikipedia[34] schreibt dazu:

> sffamily Die **Aussagenlogik** ist ein Teilgebiet der Logik, das sich mit Aussagen und deren Verknüpfung durch Junktoren befasst, ausgehend von strukturlosen Elementaraussagen (Atomen), denen ein Wahrheitswert zugeordnet wird. In der *klassischen Aussagenlogik* wird jeder Aussage genau einer der zwei Wahrheitswerte „wahr" und „falsch" zugeordnet. Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage lässt sich ohne zusätzliche Informationen aus den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen bestimmen.

15, 27, 38–41, 43, **44**, 51, , 86, *siehe* Aussage, Junktor, Logik, Prädikatenlogik & Wahrheitswert

Auswertung [ok] Eine **Auswertung** ist für ASBA eine statistische oder andere Auswertung, die bestimmten Elementen der Datei bzw. Datenbank zugeordnet sind. Z. B. können zu einem Satz alle für einen Beweis notwendigen Axiome angegeben werden. 1, **12**, **47**,

Axiom [ok] Ein **Axiom** ist eine Aussage, die nicht aus anderen Aussagen abgeleitet werden kann. Es können wie bei Sätzen Prämissen und Konklusionen vorhanden sein, aber keine Beweise. 1, **6**, 7–11, **12**, 13f, 19, 25, **27**, 28f, 33f, 40, 43f, 46f, 52, , 70, 72f, 78f, *siehe* X & $\mathcal{X}$

Axiomensystem [!] Eine Menge von Axiomen. 44,

B

Basisregel [?] Eine Schlussregel, die nicht mehr auf andere zurückgeführt wird. Obwohl das auch auf die Identitätsregeln zutrifft, werden diese in diesem Dokument aber nicht dazu gezählt. 32–35, 37, 53, , 80, 89

Baustein [Beschreibung fehlt noch] 13, 42,

Begriff [ok] Wikipedia[36] schreibt dazu:

22) alternativ: **zusammengesetzt**— wir unterscheiden allerdings die beiden Begriffe. Aus zerlegbar folgt zusammengesetzt, aber nicht immer umgekehrt.

> sffamily Mit dem Ausdruck **Begriff** (mittelhochdeutsch und frühneuhochdeutsch *begrif* oder *begrifunge*) ist allgemein der Bedeutungsinhalt einer Bezeichnung angesprochen. Die Abgrenzung zwischen Begriffen und rein gedanklichen (mentalen) Einheiten erfolgt jedoch oft unscharf: Teilweise wird ein *Begriff* als „mentale Informationseinheit“ beschrieben, (also genauso wie in der Kognitionswissenschaft das Konzept). Präziser ist die Abgrenzung des *Begriffes* als *Konzept, das sprachlich benannt ist*, oder geradezu als die *Kombination aus einer sprachlichen Bezeichnung und dem entsprechenden Konzept*.

12, **14**, 15ff, 20, 46, 50, 53, , 73, 78, 84, *siehe* Bezeichnung

Beispielsymbol [Beschreibung fehlt noch] , 63, *siehe* Symbol

Benennung [ok] Wikipedia[37] schreibt dazu:

> sffamily Eine **Benennung** ist die Bezeichnung eines Gegenstandes durch ein Wort oder mehrere Wörter.[1] Die Benennung gilt in der Sprachwissenschaft und in der Terminologielehre als die sprachliche Form, mit der Begriffe ins Bewusstsein gerufen werden.[2] Eine Benennung ist insofern die Versprachlichung einer Vorstellung.[2] Der weiter gefasste Oberbegriff *Bezeichnung* beinhaltet demgegenüber, neben der *Benennung*, auch nichtsprachliches, wie Nummern, Notationen und Symbole.[3] Bei einer fachsprachlichen Benennung spricht man auch von einem Fachausdruck oder Terminus.[2] Benennungen kommen als Einwort- und als Mehrwortbenennungen, auch Mehrworttermini genannt, vor.

12, **14**, , 63, 78, *siehe* Bezeichnung & Symbol

Bereich [ok] Ein **Bereich** ist eine Zusammenfassung von Aussagen und Objekten. Für solche Zusammenfassungen brauchen wir nur wenige Eigenschaften, die explizit angegeben werden. Die in einem Bereich zusammengefassten Aussagen und Objekte bezeichnen wir wie üblich als seine **Elemente**. Klassen und Mengen sind spezielle Bereiche.[23] **17**, 18, , 64, 68, 73f, 76f, 81, 85f, 91, *siehe* Element, Klasse, & Menge

Bereichsoperation [ok] Eine **Bereichsoperation** ist eine Operation auf Bereichen. Hoier sind <es die Operationen $\cup$, $\cap$und $\times$. 26, 51, , 65, 70, 75, 77, 93

Bereichsrelation [ok] Eine **Bereichsrelationen** ist eine Relation zwischen Bereichen. In diesem Dokument sind es die acht Relationen $\subset$, $\subseteq$, $\supset$, $\supseteq$, $\not\subset$, $\not\subseteq$, $\not\supset$und $\not\supseteq$. **18**, 26, 51, , 65

beschränkt [?] Eine Schlussregel heißt beschränkt, wenn sie nur endlich viele Prämissen und Konklusionen hat. **28**, 30, , 74

Beweis [ok] Wikipedia[38] schreibt dazu:

> sffamily Ein **Beweis** ist in der Mathematik die als fehlerfrei anerkannte Herleitung der Richtigkeit bzw. der Unrichtigkeit einer **Aussage** aus einer Menge von Axiomen, die als wahr vorausgesetzt werden, und anderen Aussagen, die bereits bewiesen sind. Um den Beweis klar vom gültigen Schluss zu unterscheiden, spricht man auch vom **axiomatischen Beweis**.

[23] In der Tat ist $\mathcal{U}$ nur eine Klasse und keine Menge.

> Umfangreichere Beweise von mathematischen Sätzen werden in der Regel in mehrere kleine Teilbeweise aufgeteilt, siehe dazu Satz und Hilfssatz.
>
> In der Beweistheorie, einem Teilgebiet der mathematischen Logik, werden Beweise formal als Ableitungen aufgefasst und selbst als mathematische Objekte betrachtet, um etwa die Beweisbarkeit oder Unbeweisbarkeit von Sätzen aus gegebenen Axiomen selbst zu beweisen.

Ein **Beweis** besteht aus einer Folge von Beweisschritten, die aus gegebenen Prämissen Konklusionen ableitet. 1, **6**, 7–11, **12**, 13ff, 24f, 27, 29, **30**, 31, 35–38, 40, 43, 46ff, 52, , 72f, 77, 81, 86f, 89, *siehe* Ableitung, Aussage & Axiom

beweisbar Synonym zu ableitbar. **27**, **32**, , 64, 71

Beweisschritt Eine Vorschrift, wie aus vorgegebenen Aussagen (den Prämissen) weitere (die Konklusionen) folgen. 12, 14, 24, **31**, 37, , 68, 75, *siehe* b, $\mathcal{B}$ & $\vec{b}$

Beweisschrittfolge Eine Folge von Beweisschritten. **31**, , 75

Beweisschrittmenge Eine Menge von Beweisschritten, insbesondere die Menge der Glieder einer Beweisschrittfolge. **31**,

Bezeichnung [ok] Wikipedia[39] schreibt dazu:

> sffamily Eine **Bezeichnung** ist die Repräsentation eines Begriffs mit sprachlichen oder anderen Mitteln. Erfolgt diese Repräsentation mittels Wörtern, handelt es sich um eine Benennung. Eine nichtsprachliche Bezeichnung kann durch ein Symbol erfolgen.

8, 12, **14**, 15, 20f, 23, 32, 50f, 53, , 78, 84, *siehe* Begriff, Benennung & Symbol

binär [?] Eine Operation, Funktion oder Relation heißt **binär**, wenn ihre Stelligkeit gleich 2 ist. **22**f, 24–28, 40f, 51, , 63f, 70ff, 84, 86f, 92, *siehe* unär

D

Darstellung [Beschreibung ergänzen]Wikipedia[40] schreibt dazu:

> sffamily Unter **Darstellung** (zur semantischen Wurzel *dar-* „öffentlich übergeben“, vergleiche Darbietung, Darlehen, darreichen) versteht man die Umsetzung von Sachverhalten, Ereignissen oder abstrakten Konzepten mittels Zeichen, performativer Handlungen oder Modellen. Historisch reicht die Darstellung von der mündlichen Überlieferung über das Schauspiel bis zur Computergrafik und schließt zahlreiche Vermittlungsmethoden zwischen Text, Bild und künstlerischer Aufführung ein.

Die **Darstellung** mathematischer Objekte geschieht auf mehreren Ebenen **6**, 8, 10, 15, 28, 47, 53, , 64, 75, 89

—, interne [Beschreibung fehlt noch] 13,

—, logische [Beschreibung fehlt noch] 13,

Darstellungsweise [?] Die Art der Darstellung mathematischer Objekte. 12, , 78

Definitionsbereich [?] Für eine Funktion $f : A \to B$ ist dom$(f)A$ ihr Definitionsbereich (domain). **22**, 51, , 75, 80, 88, *siehe* dom, Quellbereich & Funktion

Differenz [Beschreibung ergänzen]Eine Bereichsoperation:

Diskursuniversum [?] Wikipedia[41] schreibt dazu:

> sffamily Unter einem **Diskursuniversum** versteht man in der Logik und Sprachphilosophie die Gesamtheit der Gegenstände, auf die sich Aussagen wie „alle Gegenstände sind … " (Allaussage) oder „es gibt keine Gegenstände, die … sind" (negative Existenzaussage) beziehen. Solche Aussagen sind nur sinnvoll, wenn die Bedeutung von „Gegenstand" auf einen bestimmten Bereich, das Diskursuniversum, eingeschränkt wird. Ausmaß und Art der Einschränkung hängen vom Inhalt und vom Zusammenhang der Aussagen ab. Es gibt daher nicht nur ein Diskursuniversum, sondern verschiedene Diskursuniversen.
>
> Der englische Ausdruck **Universe of Discourse** wird auch in der deutschsprachigen Logik- und Informatikliteratur verwendet. Er geht auf Augustus De Morgan (1847) zurück und bezeichnet den Bereich der Gegenstände (im weitesten Sinn), über die überhaupt geredet werden soll.
>
> Missverständnisse und Streit entstehen in der Logik wie im Alltag oft dadurch, dass Personen „aneinander vorbei" von verschiedenen Dingen reden. Jemand behauptet z. B., dass es keine geflügelten Pferde gibt. Sein Widerpart weist dies mit dem Hinweis auf den Pegasus zurück. Beide bewegen sich gedanklich in verschiedenen Welten. Ihr Streit lässt sich schlichten, wenn sie sich auf ein gemeinsames Diskursuniversum einigen, d. h. aushandeln, wovon die Rede (der Diskurs) sein soll, ob nur von physisch existierenden Pferden oder auch von Fabelwesen.
>
> Auch beim Gebrauch negativer (komplementärer) Begriffe spielt das Diskursuniversum eine Rolle. Ausdrücke wie „Nichtschwimmer", „Nichtfachmann", „Nichtwähler" können sinnvoll nur auf Personen angewandt werden. Die Nichtwähler bilden mit den Wählern zusammen das auf wahlberechtigte Personen eingeschränkte Diskursuniversum. Die Einschränkung geschieht beim Gebrauch solcher Begriffe automatisch. Wird die Automatik außer Betrieb gesetzt, indem man z. B. einen stillgelegten Schornstein als Nichtraucher bezeichnet, entsteht ein Wortspiel. Allgemein gilt für jeden Begriff: wird er mit dem zugehörigen negativen Begriff vereinigt (genauer: werden deren Extensionen vereinigt), so bilden beide zusammen das Diskursuniversum oder den Bereich der Anwendungsfälle des positiv bestimmten Komplementärbegriffs:
>
> [eine Tabelle]
>
> In der Mengenlehre entspricht dem Diskursuniversum die Grundmenge, die Mengen entsprechen den Begriffen, die Komplemente von Mengen der Negation von Begriffen. In der Prädikatenlogik entspricht dem Diskursuniversum der Bereich der Definitionsmenge, den die Gegenstandsvariable einer quantifizierten Aussage durchlaufen kann.
>
> Das *Universe of Discourse* wird in der Logik zumeist abgekürzt mit *U*, in der Informatik auch mit *UoD*.
>
> Das *U* ist in der Regel eine Teilmenge aller existierenden Objekte und insbesondere in der Prädikatenlogik der bei der Verwendung von Quantoren festgelegte oder vorausgesetzte Objektbereich.

$\mathcal{U}$

Das **Diskursuniversum** $\mathcal{U}$ ist der vorgegebene Bereich aller Objekte, die in Aussagen einen Parameter ersetzen dürfen. **18**, , 70, *siehe* Aussage, Begriff & Logik

Dummy [Beschreibung fehlt noch]

—, dummy [Beschreibung fehlt noch]

Durchschnitt [Beschreibung ergänzen]Eine Bereichsoperation:

E

echt [!] Attribut für Oberaussage, Oberfolge, Oberformel, Oberobjekt, Obermenge, Obersprache, Obersymbol, Teilaussage, Teilfolge, Teilformel, Teilobjekt, Teilmenge, Teilsprache und Teilsymbol.

Eigenschaft [?] Ist x ein Parameter einer Aussage A, so ist die Aussage „x hat die Eigenschaft A“ gleichbedeutend damit, das A gilt. Wir schreiben etwas unpräzise auch $A(x)$, besonders dann, wenn auch $A(y)$ für $y \neq x$ von Interesse ist. **17**, , 77, 81

Eigenschaft, interessierende [?] Solche Eigenschaften von Objekten, die im aktuellen Zusammenhang von Interesse sind, z. B. einen bestimmten Wert zu haben, Element aus einer bestimmten Menge zu sein, ein bestimmtes Objekt zu bezeichnen, usw. 20, , 80, 92

Element [ok] Wikipedia[42] schreibt dazu:

> sffamily Ein **Element** in der Mathematik ist immer im Rahmen der Mengenlehre oder Klassenlogik zu verstehen. Die grundlegende Relation, wenn x ein Element ist und M eine Menge oder Klasse ist, lautet:
>
> > „x ist Element von M“ oder mit Hilfe des Elementzeichens „$x \in M$“.
>
> Die Mengendefinition von Georg Cantor beschreibt anschaulich, was unter einem Element im Zusammenhang mit einer Menge zu verstehen ist:
>
> > „Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“
>
> Diese anschauliche Mengenauffassung der naiven Mengenlehre erwies sich als nicht widerspruchsfrei. Heute wird daher eine axiomatische Mengenlehre benutzt, meist die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, teilweise auch eine allgemeinere Klassenlogik.

In diesem Dokument sind **Elemente** stets Aussagen oder Objekte und wir schreiben immer „Element **aus**“ und lassen neben Mengen und Klassen auch Bereiche zu. 12, **17**, 18, 21, 25, 27f, 30f, 42ff, , 64f, 69, 71f, 74, 77ff, 81ff, 86f, 90–95, *siehe* Mengenlehre & Relation

Elementoperation [Beschreibung fehlt noch]

Elementrelation [ok] Eine **Elementrelation** ist eine Relation zwischen einem Element und einem Bereich. Hier sind es die vier Relationen $\in$, $\ni$, $\notin$und $\not\ni$. **17**, 26, 51, , 64, *siehe* Komponentenrelation

Ergebnis [?] Eine Ableitung: Ein Ergebnis eines Beweises. **30**, , 70, 77, *siehe* **e**, $\mathcal{E}$ & $\vdash_{\mathcal{E}}$

Ergebnismenge [?] Eine Ableitungsmenge: Die Menge $\mathcal{E}$ der Ergebnisse eines Beweises.

Ersetzung [?] Eine Funktion zur Transformation einer Formel mittels Ersetzung in eine gleichwertige. Die Ersetzung heißt zulässig, wenn sie vorgegebene Regeln erfüllt. 17, 26, **30**, 32f, **34**, 36, 38, 43, 51, , 64, 68, 78, 80, 93, 95

Ersetzungsmenge [?] Eine Menge von Ersetzungen, meistens mit $\mathcal{E}$ bezeichnet.

Existenzquantor [?] Man nennt den Quantor $\exists$ bzw. $\bigvee$ auch **Existenzquantor**.

F

Fachbegriff [ok] Wikipedia[73] schreibt dazu:

> sffamily Ein **Terminus** oder **Fachbegriff** ist eine definierte Benennung für einen Begriff innerhalb der Fachsprache eines Fachgebietes. Synonyme dazu sind auch **Term** oder **Terminus technicus** (lateinisch *terminus technicus*; Genus *m.*; Pl. *Termini technici*, kurz *Termini*). *Terminus* kann allerdings neben der rein sprachlichen *Benennung* auch den Bedeutungsinhalt, den *Begriff* selbst, ansprechen.
>
> Eine vergleichbare Bezeichnung ist **Fachwort**. Ein **Fachausdruck** ist ein sprachlicher Ausdruck, der in einer Fachsprache verwendet wird und dort eine spezielle Bedeutung besitzt. *Fachausdruck* gilt gegenüber *Fachwort* als ein geeigneteres Ersatzwort für Terminus. Denn ein Terminus kann nicht nur in der Form einer Einwortbenennung, sondern auch als Mehrwortbenennung (auch *Mehrwortterminus*) vorliegen.
>
> Die Menge aller Termini eines Fachgebietes (die Benennungen aller Begriffe) bildet die jeweilige fachspezifische Terminologie (den Fachwortschatz). Mit der Untersuchung und Aufstellung von Terminologien beschäftigt sich die Terminologielehre. Wenn ein Fachwortschatz standardisiert oder normiert ist, spricht man auch von einem Thesaurus oder kontrollierten Vokabular und nennt die darin enthaltenen Termini Deskriptoren.

Ein **Fachbegriff** ist für ASBA eine Benennung für einen Begriff aus einem Fachgebiet. Insbesondere kann es auch ein spezielles Symbol sein. 6–9, **12**, 46ff, 52, , 78, *siehe* Begriff & Fachgebiet

Fachgebiet [ok] Wikipedia[44] schreibt dazu:

> sffamily **Fachgebiet** (auch **Fachbereich** oder **Fachrichtung** oder **Domäne**) ist das auf ein bestimmtes Wissensgebiet begrenzte Wissen.

Ein **Fachgebiet** ist für ASBA ein Teilgebiet der Mathematik mit einer zugehörigen Basis aus Axiomen, Sätzen, Fachbegriffen und Darstellungsweisen, z. B. Logik und Mengenlehre.

Ein **Fachgebiet** kann bei ASBA sehr klein sein und im Extremfall kein einziges Element enthalten. *Umgebung* wäre vielleicht eine bessere Bezeichnung, ist aber schon ein verbreiteter Fachbegriff, so dass in diesem Dokument die Bezeichnung "'Fachgebiet"' verwendet wird. 6–9, **12**, 46ff, 52, , 78

falsch [ok] Ein metasprachlicher Wahrheitswert in Textform. 15, 22, **41**, 51, , 69, 94, *siehe wahr*, false & $\perp$

Folge [!] Wikipedia[43] schreibt dazu:

> sffamily Als **Folge** oder **Sequenz** wird in der Mathematik eine Auflistung (Familie) von endlich oder unendlich vielen fortlaufend nummerierten Objekten (beispielsweise Zahlen) bezeichnet. Dasselbe Objekt kann in einer Folge auch mehrfach auftreten. Das Objekt mit der Nummer i, man sagt auch: mit dem Index i i, wird i-tes Glied oder i-te Komponente der Folge genannt. Endliche wie unendliche Folgen finden sich in allen Bereichen der Mathematik. Mit unendlichen Folgen, deren Glieder Zahlen sind, beschäftigt sich vor allem die Analysis.
>
> Ist n die Anzahl der Glieder einer endlichen Folge, so spricht man von einer Folge der Länge n, einer n-gliedrigen Folge oder von einem n-Tupel. Die Folge ohne Glieder, deren Index-Bereich also leer ist, wird leere Folge, 0-gliedrige Folge oder 0-Tupel genannt.

12f, 21, 51, , 64–69, 75, 79, 81, 85, 90, 92, 95

—, leere [?] Eine Folge heißt **leer**, wenn ihre Länge 0 ist, d. h. wenn sie keine Komponenten besitzt. , *siehe* len, Folge & Tupel

Folgenmenge [Beschreibung fehlt noch]

Folgenoperation [Beschreibung fehlt noch] , 66

Folgenrelation [Beschreibung fehlt noch] 51, , 66

Folgerung Synonym zu Konklusion. **28**,

Folgerungsmenge Synonym zu Konklusionsmenge.

Formationsregel [Beschreibung fehlt noch] 13,

Formel [?] Unter einer **Formel** verstehen wir stets eine mathematische Formel. Diese kann aus einem einzigen Symbol bestehen (atomare Formel), andererseits aber auch mehrdimensional sein, lässt sich dann aber mittels geeigneter Definitionen immer eindeutig als eine Symbolfolge schreiben. 1, 12ff, 17, 19ff, 24, 26–34, 40, 42, **43**, , 67ff, 71f, 78f, 84ff, 89ff, 93ff

—, allgemeingültige [?] Eine Formel heißt **allgemeingültig**, wenn sie aus den Axiomen und allgemeingültigen Schlussregeln abgeleitet werden kann. 30,

—, aussagenlogische [?] Eine Formel heißt **aussagenlogisch**, wenn sie ein Element aus $\mathcal{L}^A$ ist. 20, **42**, 43, , 69

—, praedikatenlogische [?] Eine Formel heißt **prädikatenlogisch**, wenn sie ein Element aus $\mathcal{L}^A$ ist.

Formelmenge [?] Eine Menge von Formeln, oft mit $\mathcal{L}$ bezeichnet. Man nennt $\mathcal{L}$ auch eine Sprache und ihre Elemente Wörter, insbesondere dann, wenn es eindeutige Regeln zur Konstruktion von $\mathcal{L}$ gibt. Wir bevorzugen „Formel“ und „Formelmenge“. 13, **27**, 28, 43f, , 69, 71, 79, 90

Funktion [?] Wikipedia[45] schreibt dazu:

> sffamily In der Mathematik ist eine **Funktion** (lateinisch *functio*) oder **Abbildung** eine Beziehung (Relation) zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (Funktionsargument, unabhängige Variable, x-Wert) genau ein Element der anderen Menge (Funktionswert, abhängige Variable, y-Wert) zuordnet. Der Funktionsbegriff wird in der Literatur unterschiedlich definiert, jedoch geht man generell von der Vorstellung aus, dass Funktionen mathematischen Objekten mathematische Objekte zuordnen, zum Beispiel jeder reellen Zahl deren

Quadrat. Das Konzept der Funktion oder Abbildung nimmt in der modernen Mathematik eine zentrale Stellung ein; es enthält als Spezialfälle unter anderem parametrische Kurven, Skalar- und Vektorfelder, Transformationen, Operationen, Operatoren und vieles mehr.

Eine n-**stellige Funktion** f von einer Menge $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, dem Definitionsbereich, in eine Menge B, den Zielbereich, ist eine $(n+1)$-stellige Relation $(G, A_1, \ldots, A_n, B)$ derart, dass es für jedes $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ genau ein $b \in B$ gibt mit $(a_1, \ldots, a_n, b) \in f$. Dieses b wird auch mit $\langle\!\langle f(a_1, \ldots, a_n)\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle f a_1 \ldots a_n\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle f(\vec{a})\rangle\!\rangle$ oder $\langle\!\langle f\vec{a}\rangle\!\rangle$ bezeichnet.
Schreibweise: $\langle\!\langle f : A \to B\rangle\!\rangle$ bzw. $\langle\!\langle f : A_1 \times \ldots \times A_n \to B\rangle\!\rangle$ **22**, 23, 30, 40, 51, , 63, 68–71, 73, 75, 78, 80, 84, 86ff, 90, 92, 94f, *siehe* Abbildung, Element, Menge, Objekt & Relation

Funktionssymbol [?] Ein Symbol für eine Funktion. , 84

Funktionswert [?] einer Funktion. **22**,

G

Gleichheit [?] Eine Gleichheitsrelation: Zwei Objekte A und B sind **gleich** (dasselbe; identisch), $A \equiv B$, wenn sie in den interessierenden Eigenschaften für $\equiv$ übereinstimmen. 19, **20**, , 64, 67, 80

Gleichheitsrelation [?] Eine mit Gleichheit verwandte Relation: $\equiv$und $\not\equiv$. **20**, 26, , 80, 92

Gliederungszeichen [Beschreibung fehlt noch] , 84

Graph [?] einer Funktion oder Relation. **22**, 51, , *siehe* graph

I

Identitätsregel [?] Eigentlich eine Basisregel zur Identität. Da die Identitätsregeln nur zur Rechtfertigung der Ersetzung verwendet werden, werden sie in diesem Dokument nicht zu den Basisregeln gezählt. 33f, , 73, 80

J

Junktor [?] Wikipedia[50] schreibt dazu:

> sffamily Ein **Junktor** (von lat. *iungere* „verknüpfen, verbinden“) ist eine logische Verknüpfung zwischen Aussagen innerhalb der Aussagenlogik, also ein logischer Operator. Junktoren werden auch Konnektive, Konnektoren, Satzoperatoren, Satzverknüpfer, Satzverknüpfungen, Aussagenverknüpfer, logische Bindewörter, Verknüpfungszeichen oder Funktoren genannt und als logische Partikel klassifiziert.
>
> Sprachlich wird zwischen der jeweiligen Verknüpfung selbst (zum Beispiel der Konjunktion) und dem sie bezeichnenden Wort beziehungsweise Sprachzeichen (zum Beispiel dem Wort „und“ beziehungsweise dem Zeichen „$\wedge$“) oft nicht unterschieden.

Ein **Junktor** ist eine aussagenlogische Operation oder -Relation. Da die Werte einer aussagenlogischen Operation Wahrheitswerte sind, kann man einen Junktor auch stets als Relation verstehen. 19f, 23–26, 32f, 40–44, 51, , 66, 80f, *siehe* Metajunktor

—, binärer [Beschreibung fehlt noch] **42**, , 66f, 69

—, unärer [Beschreibung fehlt noch] **42**, , 66, 69

Junktorsymbol [?] Ein Symbol für einen Junktor. 40, **42**, , 69

K

Kalkuel [Beschreibung ergänzen]Wikipedia[52] schreibt dazu:

> sffamily Als der oder das **Kalkül** (französisch *calcul* „Rechnung"; von lateinisch *calculus* „Rechenstein", „Spielstein") versteht man in den formalen Wissenschaften wie Logik und Mathematik ein System von Regeln, mit denen sich aus gegebenen Aussagen (Axiomen) weitere Aussagen ableiten lassen. Kalküle, auf eine Logik selbst angewandt, werden auch Logikkalküle genannt.

> > > Beschreibung fehlt noch < < < , *siehe* Axiom & Logik

Klammerung [Beschreibung fehlt noch] **42**, , 69

Klasse [ok] Wikipedia[54] schreibt dazu:

> sffamily Als **Klasse** gilt in der Mathematik, Klassenlogik und Mengenlehre eine Zusammenfassung beliebiger Objekte, definiert durch eine logische Eigenschaft, die alle Objekte der Klasse erfüllen. Vom Klassenbegriff ist der Mengenbegriff zu unterscheiden. Nicht alle Klassen sind automatisch auch Mengen, weil Mengen zusätzliche Bedingungen erfüllen müssen. Mengen sind aber stets Klassen und werden daher auch in der Praxis in Klassenschreibweise notiert.

Eine **Klasse** ist eine Bereich, deren Elemente genau die Objekte mit einer bestimmten Eigenschaft sind. Schreibweise: $\{x \mid Eigenschaft(x)\}$ – Jede Menge ist auch eine Klasse und jede Klasse ein Bereich. 17, , 74, 77, 83, *siehe* Menge & Mengenlehre

Klassenlogik [Beschreibung ergänzen]Wikipedia[55] schreibt dazu:

> sffamily Die **Klassenlogik** ist im weiteren Sinn eine Logik, deren Objekte als Klassen bezeichnet werden. Im engeren Sinn spricht man von einer Klassenlogik nur dann, wenn Klassen durch eine Eigenschaft ihrer Elemente beschrieben werden. Diese Klassenlogik ist daher eine Verallgemeinerung der Mengenlehre, die nur eine eingeschränkte Klassenbildung erlaubt.

, *siehe* Klasse & Logik

Komponente [?] Die Komponenten einer Folge $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)$ sind die a_i. a_i heißt die i-**te Komponente** von $\vec{a}$. , 64f, 69, 79, 81, *siehe* Folge & Tupel

Komponentenmenge [?] $\mathrm{set}(\vec{a}) :\equiv \{a \mid a \sqsubset \vec{a}\}$ ist die **Komponentenmenge** einer Folge bzw. eines Tupels $\vec{a}$. , *siehe* Menge

Komponentenrelation [?] Eine **Komponentenrelation** ist eine Relation zwischen einer (möglichen) Komponente und einer Folge: $\sqsubset$, $\sqsupset$, $\not\sqsubset$und $\not\sqsupset$ 51, , 65f, *siehe* Elementrelation

Konklusion [?] Eine Ableitung: Die Konklusionen einer Schlussregel $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$ bzw. $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$ sind die Elemente aus $\mathcal{K}$ bzw. $\vdash_{\mathcal{K}}$. Die Konklusionen werden normalerweise mit $\mathbf{k}_i$ bezeichnet. 12f, 24, **28**f, 31, **33**, 36ff, , 69, 73, 75, 79, 81, 89, *siehe* Schlussregel

Konklusionsmenge [?] Eine Ableitungsmenge: Die Menge $\mathcal{K}$ der Konklusionen einer Schlussregel bzw. eines Beweises. , 79

Konstante [?] Wikipedia[56] schreibt dazu:

> sffamily Allgemein ist eine **Konstante** (von lateinisch *constans* „feststehend“) ein Zeichen beziehungsweise ein Sprachausdruck mit einer „genau bestimmte[n]Bedeutung, die im Laufe der Überlegungen unverändert bleibt“[1]. Die Konstante ist damit ein Gegenbegriff zur Variablen.

, 82, 86, *siehe* Symbol & Variable

—, aussagenlogische [?] Eine Konstante heißt **aussagenlogisch**, wenn sie ein Element aus $\mathcal{J}_c$ ist. **42**, , 66f, 69

Kontraposition [?] Die allgemeingültige Aussage: $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$. 39, 53,

L

Logik [!] Wikipedia[57] schreibt dazu:

> sffamily Mit **Logik** (von altgriechisch [. . .],denkende Kunst‘, ‚Vorgehensweise‘) oder auch **Folgerichtigkeit** wird im Allgemeinen das vernünftige Schlussfolgern und im Besonderen dessen Lehre – die **Schlussfolgerungslehre** oder auch **Denklehre** – bezeichnet. In der Logik wird die Struktur von Argumenten im Hinblick auf ihre Gültigkeit untersucht, unabhängig vom Inhalt der Aussagen. Bereits in diesem Sinne spricht man auch von „formaler“ Logik. Traditionell ist die Logik ein Teil der Philosophie. Ursprünglich hat sich die traditionelle Logik in Nachbarschaft zur Rhetorik entwickelt. Seit dem 20. Jahrhundert versteht man unter Logik überwiegend symbolische Logik, die auch als grundlegende Strukturwissenschaft, z. B. innerhalb der Mathematik und der theoretischen Informatik, behandelt wird.
>
> Die moderne symbolische Logik verwendet statt der natürlichen Sprache eine künstliche Sprache (Ein Satz wie *Der Apfel ist rot* wird z. B. in der Prädikatenlogik als $f(a)$ formalisiert, wobei a für *Der Apfel* und f für *ist rot* steht) und verwendet streng definierte Schlussregeln. Ein einfaches Beispiel für ein solches formales System ist die Aussagenlogik (dabei werden sogenannte atomare Aussagen durch Buchstaben ersetzt). Die symbolische Logik nennt man auch mathematische Logik oder formale Logik im engeren Sinn.

6, 12, 15, , 78, 86, 94, *siehe* atomar, Aussage, Aussagenlogik, Prädikatenlogik & Schlussregel

—, mathematische [!] Wikipedia[58] schreibt dazu:

> sffamily Die **mathematische Logik**, auch **symbolische Logik**, (alternativer Sprachgebrauch auch *Logistik*), ist ein Teilgebiet der Mathematik, insbesondere als Methode der Metamathematik und eine Anwendung der modernen formalen Logik. Oft wird sie wiederum in die Teilgebiete Modelltheorie, Beweistheorie, Mengenlehre und Rekursionstheorie aufgeteilt. Forschung im Bereich der mathematischen Logik hat zum Studium der Grundlagen der Mathematik beigetragen und wurde auch durch dieses motiviert. Infolgedessen wurde sie auch unter dem Begriff *Metamathematik* bekannt.
>
> Ein Aspekt der Untersuchungen der mathematischen Logik ist das Studium der Ausdrucksstärke von formalen Logiken und formalen Beweissystemen. Eine Möglichkeit, die Komplexität solcher Systeme zu

messen, besteht darin, festzustellen, was damit bewiesen oder definiert werden kann.

Früher wurde die mathematische Logik auch *symbolische Logik* (als Gegensatz zur philosophischen Logik) genannt, wobei jener Name mittlerweile nur noch für gewisse Aspekte der Beweistheorie verwendet wird.

, *siehe* Mengenlehre & Fachgebiet

M

Menge [!] Wikipedia[60] schreibt dazu:

> sffamily Eine **Menge** ist ein Verbund, eine Zusammenfassung von einzelnen Elementen. Die *Menge* ist eines der wichtigsten und grundlegenden Konzepte der Mathematik, mit ihrer Betrachtung beschäftigt sich die Mengenlehre.
>
> Bei der Beschreibung einer Menge geht es ausschließlich um die Frage, welche Elemente in ihr enthalten sind. Es wird nicht danach gefragt, ob ein Element mehrmals enthalten ist oder ob es eine Reihenfolge unter den Elementen gibt. Eine Menge muss kein Element enthalten – es gibt genau eine Menge ohne Elemente, die „leere Menge“. In der Mathematik sind die Elemente einer Menge häufig Zahlen, Punkte eines Raumes oder ihrerseits Mengen. Das Konzept ist jedoch auf beliebige Objekte anwendbar: z. B. in der Statistik auf Stichproben, in der Medizin auf Patientenakten, am Marktstand auf eine Tüte mit Früchten.
>
> Ist die Reihenfolge der Elemente von Bedeutung, dann spricht man von einer endlichen oder unendlichen Folge, wenn sich die Folgenglieder mit den natürlichen Zahlen aufzählen lassen (das erste, das zweite, usw.). Endliche Folgen heißen auch Tupel. In einem Tupel oder einer Folge können Elemente auch mehrfach vorkommen. Ein Gebilde, das wie eine Menge Elemente enthält, wobei es zusätzlich auf die Anzahl der Exemplare jedes Elements ankommt, jedoch nicht auf die Reihenfolge, heißt Multimenge.

Eine **Menge** ist eine Klasse mit zusätzlichen Eigenschaften. 13, 17, 21–25, 27–31, 34, 42f, , 64f, 68–75, 77–81, 83, 85–89, 91f, 95, *siehe* , Element, Folge, leere Menge, Mengenlehre & Tupel

—, leere [?] $\emptyset$, die **leere Menge**, ist die einzige Menge ohne Elemente. Sie wird auch mit $\langle\!\langle\{\}\rangle\!\rangle$ bezeichnet. 27, 32, , 69

Mengenlehre [?] Wikipedia[61] schreibt dazu:

> sffamily Die **Mengenlehre** ist ein grundlegendes Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Untersuchung von Mengen, also von Zusammenfassungen von Objekten, beschäftigt. Die gesamte Mathematik, wie sie heute üblicherweise gelehrt wird, ist in der Sprache der Mengenlehre formuliert und baut auf den Axiomen der Mengenlehre auf. Die meisten mathematischen Objekte, die in Teilbereichen wie Algebra, Analysis, Geometrie, Stochastik oder Topologie behandelt werden, um nur einige wenige zu nennen, lassen sich als Mengen definieren. Gemessen daran ist die Mengenlehre eine recht junge Wissenschaft; erst

nach der Überwindung der Grundlagenkrise der Mathematik im frühen 20. Jahrhundert konnte die Mengenlehre ihren heutigen, zentralen und grundlegenden Platz in der Mathematik einnehmen.

6, 12, 41, **45**, , 64, 78, *siehe* Axiom, Fachgebiet, Menge & Objekt

Mengenoperation [Beschreibung fehlt noch]

Mengenprodukt Synonym zu kartesisches Produkt.

Mengenrelation [Beschreibung fehlt noch]

Metadefinition [?] Eine Metaoperation: Die formale Definition einer Aussage (Aussagedefinition) bzw. eines Objekts (Objektdefinition). 17, 24, , 73, 86

Metaformel [?] Eine Formel der formalen Metasprache.

Metajunktor [Beschreibung fehlt noch] , *siehe* Junktor

Metaoperation [?] Eine Operation der Metasprache: &, ‖ oder |. 18, **19**, 25f, 28, 51, , 63f, 84, *siehe* Objektoperation

Metarelation [?] Eine Relation der Metasprache: $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ oder $\Leftrightarrow$. **19**, 51, , 63f, 71, *siehe* Objektrelation

Metasprache [ok] Die Sprache, in der Aussagen über eine andere Sprache getroffen werden können. In diesem Dokument ist dies immer die normale Umgangssprache. Ihre Syntax ist gegeben, bzgl. der Semantik bemühen wir uns um exakte Definitionen der Begriffe und Bezeichnungen. 14, **15**, 16, 51, , 73, 84, 86, 90, 94, *siehe* Objektsprache

—, formale [ok] Die Metasprache, deren Ausdrucksmittel nur atomare Aussagen und definierte Metasymbole sind. In diesem Dokument ist ihre Syntax und Semantik passend für ASBA definiert, in der Regel parallel zur Prädikatenlogik. **15**, 51, , 84, 86, 89f, 94

Metasymbol [?] Ein Symbol der formalen Metasprache. 15, 51, , 84, *siehe* Objektsymbol

Metavariable [?] Eine Variable der formalen Metasprache.

Monotonieregel [?] Eine Schlussregel. 32, **33**, , 68, *siehe* (MR)

N

Negation [?] Die **Negation** *von* einer binären Relation (G, A, B) ist die Relation (H, A, B) mit $H = (A \times B) \backslash G\}$. Üblicherweise wird das zugehörige Relationssymbol mit einem schrägen oder vertikalen Strich durchgestrichen. Die Negation der Umkehrrelation einer Relation ist gleich der Umkehrrelation ihrer Negation. 17f, **23**, 24, 51, , 63–66, 92

Notation, Polnische [?] Bei der **Polnischen Notation** stehen die Argumente von Relationen und Funktionen stets rechts von den Relations- und Funktionssymbolen. Dadurch kann auf Gliederungszeichen wie Klammern und Kommata verzichtet werden. Noch einfacher für Computer ist die **umgekehrte Polnische Notation**, bei der die Argumente immer links stehen. **40**, **42**, , 69

O

Oberaussage [ok] Eine Aussage A ist genau dann eine **Oberaussage** einer Aussage B, wenn B eine Teilaussage von A ist. , 77

—, echte [ok] Eine Aussage A ist genau dann eine **echte Oberaussage** einer Aussage B, wenn B eine echte Teilaussage von A ist.

Oberbereich [ok] Ein Bereich A ist ist genau dann ein **Oberbereich** von einem Bereich B, wenn $A \supseteq B$ ist. , *siehe* Teilbereich

—, echter [ok] Ein Bereich A ist ist genau dann ein **echter Oberbereich** von einem Bereich B, wenn $A \supset B$ ist. , *siehe* echter Teilbereich

Oberfolge [?] Eine Folge A ist genau dann eine **Oberfolge** einer Folge B, wenn B eine Teilfolge von A ist. , 77

—, echte [?] Eine Folge A ist genau dann eine **echte Oberfolge** einer Folge B, wenn B eine echte Teilfolge von A ist.

Oberformel [?] Eine Formel A ist genau dann eine **Oberformel** einer Formel B, wenn B eine Teilformel von A ist. , 77

—, echte [?] Eine Formel A ist genau dann eine **echte Oberformel** einer Formel B, wenn B eine echte Teilformel von A ist.

Obermenge [ok] Eine Menge A ist genau dann eine **Obermenge** von einer Menge B, wenn $A \supseteq B$ ist. **18**, , 77, *siehe* Oberbereich & Teilmenge

—, echte [ok] Eine Menge A ist genau dann eine **echte Obermenge** von einer Menge B, wenn $A \supset B$ ist. **18**, , *siehe* echter Oberbereich & echte Teilmenge

Oberobjekt [?] Eine Objekt A ist genau dann ein **Oberobjekt** eines Objekts B, wenn B ein Teilobjekt von A ist. , 77

—, echtes [?] Ein Objekt A ist genau dann ein **echtes Oberobjekt** eines Objekts B, wenn B ein echtes Teilobjekt von A ist.

Obersprache [?] Eine Sprache A ist genau dann eine **Obersprache** einer Sprache B, wenn B eine Teilsprache von A ist. , 77

—, echte [?] Eine Sprache A ist genau dann eine **echte Obersprache** einer Sprache B, wenn B eine echte Teilsprache von A ist.

Obersymbol [?] Eine Symbol A ist genau dann ein **Obersymbol** eines Symbols B, wenn B ein Teilsymbol von A ist. , 77

—, echtes [?] Eine Symbol A ist genau dann ein **echtes Obersymbol** eines Symbols B, wenn B ein echtes Teilsymbol von A ist.

Objekt [ok] Wikipedia[59] schreibt dazu:

> sffamily Als **mathematische Objekte** werden die abstrakten Objekte bezeichnet, die in den verschiedenen Teilgebieten der Mathematik beschrieben und untersucht werden. Grundlegende Beispiele sind Zahlen, Mengen und geometrische Körper, weiterführend sind beispielsweise Graphen, Integrale und Kohomologien. Die Fragen zur Existenz und zu der Natur von mathematischen Objekten sind zentral in der Philosophie der Mathematik. Die zeitgenössische Mathematik hingegen klammert diese Fragestellungen aus und beschäftigt sich innerstrukturell mit ihnen. Dies schließt Bereiche wie Mengenlehre, Prädikatenlogik, Modelltheorie und Kategorientheorie mit ein, in denen die (sonst übergeordneten) mathematischen Strukturen wie Axiome, Schlussregeln und Beweise erforscht werden, die damit selbst zu mathematischen Objekten werden. Die Ansichten darüber, was mathematische Objekte

sind, haben sich im Lauf der Geschichte der Mathematik stark gewandelt.

Ein **Objekt** ist in diesem Dokument immer ein Element aus $\mathcal{U}$. 12, 15, 17–21, 50, , 63, 72, 74–77, 81, 84ff, 93

—, formales [ok] Ein **formales Objekt** ist ein Objekt, das in Aussagen in Objektsprache einen Parameter ersetzen darf. Es ist notwendigerweise in Objektsprache geschrieben. 18, , 86

—, metasprachliches [?] Ein **metasprachliches Objekt** ist ein Objekt in Metasprache. , 64

Objektart [Beschreibung fehlt noch] 19, , 72, 93

Objektbereich [ok] Der **Objektbereich** $\mathcal{O}$ ist der Bereich aller formalen Objekte, d. h. der Objekte, die in Aussagen in Objektsprache einen Parameter ersetzen dürfen. Diese Objekte sind notwendigerweise auch in Objektsprache geschrieben und offensichtlich ist $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$. **18**,

Objektdefinition [ok] Eine Metadefinition: Die formale Definition eines Objekts. $\langle\!\langle A :\equiv B \rangle\!\rangle$ steht für „A ist **definitionsgemäß gleich** B“ für Objekte A und B. Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B. **17**, 26, , 71, 84, *siehe* Aussagedefinition

Objektformel [?] Eine Formel der Objektsprache.

Objektkonstante [?] Eine Konstante der Objektsprache. , 67

Objektoperation [?] Eine Operation der Objektsprache: $\wedge$, $\vee$. , 67, *siehe* Metaoperation

Objektrelation [?] Eine Relation der Objektsprache: $\rightarrow$, $\leftarrow$ oder $\leftrightarrow$. , 67, *siehe* Metarelation

Objektsprache [ok] Die Sprache, über die mittels einer (formalen) Metasprache "'geredet"' wird. Unser Objekt, mit dem mathematische Beweise formuliert werden sollen, ist die Logik. Demnach sind die Ausdrucksmittel der Objektsprache die der Logik. Wir verwenden in diesem Dokument die Prädikatenlogik oder, als echte Teilsprache, die Aussagenlogik. 14, **15**, 18, 51, , 68, 72f, 86, 89f, 94

Objektsymbol [?] Ein Symbol der Objektsprache. 15, **20**, 51, , *siehe* Metasymbol

Operation [?] Eine **Operation** ist eine — meistens binäre, d. h. zweiwertige — Funktion $M^n \to M$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Für eine binäre, d. h. $n = 2$, Operation $\circledast : M \times M \to M$ schreibt man meistens $x \circledast y$ statt $\circledast(x, y)$. Für $n = 0$ kann man die Operation mit einer Konstanten identifizieren. 19f, 23–26, 40f, 51, , 63, 68f, 74f, 80, 84, 86f, 92

—, aussagenlogische [Beschreibung ergänzen]Die **aussagenlogischen Operationen** sind ... 23, , 67, 80

Operationssymbol [?] Ein Symbol für eine Operation.

Ordnungsrelation [?] Eine **Ordnungsrelation** ist ein binäre Relation auf einer Menge M mit der folgenden Eigenschaft (dabei sei $\preceq$ die Ordnungsrelation):

transitiv : $\quad ((a \preceq b) \;\&\; (b \preceq c)) \Rightarrow (a \preceq c)$

jeweils für alle Elemente a, b und c aus M.

P

Paar, geordnetes [Beschreibung fehlt noch]

Parameter [!] Die **Parameter** einer Aussage sind deren freie Variablen. 16ff, , 73, 76f, 86, *siehe* Aussage & Variable

Potenzmenge [?] Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge ihrer Teilmengen. **25**, , 70, 87

Prädikat [?] Ein Element der Prädikatenlogik. — Z. B. kann man eine Gruppe als ein zweistelliges Prädikat $Gruppe(G, +)$ definieren, in dem G eine Menge und $+$ eine Operation, d. h. eine binäre (zweistellige) Funktion $+ : G \times G \to G$ ist, so dass die Gruppenaxiome erfüllt sind. , 87, 90

Prädikatenlogik Wikipedia[62] schreibt dazu:

> sffamily Die **Prädikatenlogiken** (auch **Quantorenlogiken**) bilden eine Familie logischer Systeme, die es erlauben, einen weiten und in der Praxis vieler Wissenschaften und deren Anwendungen wichtigen Bereich von Argumenten zu formalisieren und auf ihre Gültigkeit zu überprüfen. Auf Grund dieser Eigenschaft spielt die Prädikatenlogik eine große Rolle in der Logik sowie in Mathematik, Informatik, Linguistik und Philosophie.

15, 27, 38, 40, **45**, 51, , 84, 86f, *siehe* Aussagenlogik & Logik

Prämisse [?] Eine Ableitung: Die Prämissen einer Schlussregel $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$ bzw. $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$ sind die Elemente aus $\mathcal{P}$ bzw. $\vdash_{\mathcal{P}}$. Die Prämissen werden normalerweise mit $\mathbf{p}_i$ bezeichnet. 12f, 24, **28**f, 31, **33**, 34, 36ff, , 70, 73, 75, 87, 89, 93, *siehe* Schlussregel

Prämissenmenge [?] Eine Ableitungsmenge: Die Menge $\mathcal{P}$ der Prämissen einer Schlussregel bzw. eines Beweises.

Produkt, kartesisches [?] Wikipedia[53] schreibt dazu:

> sffamily Das **kartesische Produkt** oder **Mengenprodukt** ist in der Mengenlehre eine grundlegende Konstruktion, aus gegebenen Mengen eine neue Menge zu erzeugen. [...] Das kartesische Produkt zweier Mengen ist die Menge aller geordneten Paare von Elementen der beiden Mengen, wobei die erste Komponente ein Element der ersten Menge und die zweite Komponente ein Element der zweiten Menge ist. Allgemeiner besteht das kartesische Produkt mehrerer Mengen aus der Menge aller Tupel von Elementen der Mengen, wobei die Reihenfolge der Mengen und damit der entsprechenden Elemente fest vorgegeben ist. Die Ergebnismenge des kartesischen Produkts wird auch **Produktmenge**, **Kreuzmenge** oder **Verbindungsmenge** genannt. [...]

, 69, 84

Q

Quantor [Beschreibung ergänzen]Wikipedia[64] schreibt dazu:

> sffamily Ein **Quantor** oder **Quantifikator**, die Re-Latinisierung des von C. S. Peirce eingeführten Ausdrucks „quantifier“, ist ein Operator der Prädikatenlogik. Neben den Junktoren sind die Quantoren Grundzeichen der Prädikatenlogik. Allen Quantoren gemeinsam ist, dass sie Variablen binden.
>
> Die beiden gebräuchlichsten Quantoren sind der *Existenzquantor* (in natürlicher Sprache zum Beispiel als „mindestens ein“ ausgedrückt)

und der *Allquantor* (in natürlicher Sprache zum Beispiel als „alle“ oder „jede/r/s“ ausgedrückt). Andere Arten von Quantoren sind *Anzahlquantoren* wie „ein“ oder „zwei“, die sich auf Existenz- beziehungsweise Allquantor zurückführen lassen, und Quantoren wie „manche“, „einige“ oder „viele“, die auf Grund ihrer Unbestimmtheit in der klassischen Logik nicht verwendet werden.

51, , 72, 78, 93, *siehe* Allquantor, Existenzquantor, Junktor & Prädikatenlogik

—, logischer [Beschreibung fehlt noch] , 67

—, metasprachlicher [Beschreibung fehlt noch] , 67

Quellbereich [?] Für die Funktion $f : A \to B$ ist die Menge $\mathrm{src}(f) \coloneqq \{a \in A \mid f(a) \text{ existiert}\}$ ihr Quellbereich[24] (source). 51, , 70, 88, *siehe* Definitionsbereich & Menge

R

Relation [?] Wikipedia[65] schreibt dazu:

> sffamily Eine **Relation** (lateinisch *relatio* „Beziehung“, „Verhältnis“) ist allgemein eine Beziehung, die zwischen Dingen bestehen kann. Relationen im Sinne der Mathematik sind ausschließlich diejenigen Beziehungen, bei denen stets klar ist, ob sie bestehen oder nicht; Objekte können also nicht „bis zu einem gewissen Grade“ in einer Relation zueinander stehen. Damit ist eine einfache mengentheoretische Definition des Begriffs möglich: Eine Relation R ist eine Menge von n-Tupeln. In der Relation R zueinander stehende Dinge bilden n-Tupel, die Element von R sind.
>
> Wird nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben, versteht man unter einer Relation gemeinhin eine zweistellige oder binäre Relation. Bei einer solchen Beziehung bilden dann jeweils zwei Elemente a und b ein geordnetes Paar (a, b). Stammen dabei a und b aus verschiedenen Grundmengen A und B, so heißt die Relation *heterogen* oder „Relation *zwischen* den Mengen A und B.“ Stimmen die Grundmengen überein ($A = B$), dann heißt die Relation *homogen* oder „Relation *in* bzw. *auf* der Menge A.“
>
> Wichtige Spezialfälle, zum Beispiel Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen, sind Relationen *auf* einer Menge.
>
> Heute sehen manche Autoren den Begriff Relation nicht unbedingt als auf Mengen beschränkt an, sondern lassen jede aus geordneten Paaren bestehende Klasse als Relation gelten.

Eine n-**stellige Relation** R ist ein $(1+n)$-Tupel $(G, A_1, \ldots, A_n)$ mit $G \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$). 16–19, 21, 23–27, 40, 51, , 63f, 68–75, 77, 80, 84, 86, 88, 90ff, *siehe* Äquivalenzrelation, Begriff, Menge, Objekt & Ordnungsrelation

—, aussagenlogische [Beschreibung ergänzen]Die **aussagenlogischen** Relationen sind ... 23, , 67, 80

Relationssymbol [?] Ein Symbol für eine Relation. , 84, 92

S

[24] Der **Quellbereich** $\mathrm{src}(f)$ unterscheidet sich nur bei **partiellen** Funktionen vom Definitionsbereich $\mathrm{dom}(f)$, d. h. solchen Funktionen, für die $f(a)$ nicht für alle $a \in A$ definiert ist.

Satz [ok] Ein **Satz** ist eine Aussage, bestehend aus einer Anzahl von Prämissen und Konklusionen und einem Beweis, der die Konklusionen aus den Prämissen ableitet. 1, 6–9, 11, **12**, 13f, 24, 30, 32, 40, 46ff, 52, 72f, 78, 89

—, formaler [?] Formale Darstellung eines mathematischen Satzes. **28**, **30**, , 68, *siehe* (FS)

Schlussregel [?] Wikipedia[68] schreibt dazu:

> sffamily Eine **Schlussregel** (oder *Inferenzregel*) bezeichnet eine Transformationsregel (Umformungsregel) in einem Kalkül der formalen Logik, d. h. eine syntaktische Regel, nach der es erlaubt ist, von bestehenden Ausdrücken einer formalen Sprache zu neuen Ausdrücken überzugehen. Dieser regelgeleitete Übergang stellt eine Schlussfolgerung dar.

Eine Schlussregel $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$ entspricht der Aussage:

> Wenn alle Prämissen $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ zutreffen, dann auch alle Konklusionen $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$.

Wenn diese Aussage zutrifft, kann die Schlussregel zur zulässigen Transformation von Formeln dienen. 25f, **28**ff, 31–38, 47, , 63, 67f, 72ff, 81, 84, 87, 89, 91, *siehe* C, $\mathcal{C}$ & Kalkül

—, allgemeingültige [?] Eine Schlussregel heißt **allgemeingültig**, wenn sie aus den Basisregeln und schon bekannten allgemeingültigen Schlussregeln abgeleitet werden kann. 31f, 36–39, 53, , 79, 89

Schlussregelmenge [?] Eine Menge von Schlussregeln, meistens mit $\mathcal{C}$ bezeichnet. , *siehe* $\mathcal{C}$

Schnittregel [?] Eine allgemeingültige Schlussregel. **35**, 36f, 53, , 68, *siehe* (SR)

Semantik [!] Wikipedia[31] schreibt dazu:

> sffamily **Semantik** [...], auch **Bedeutungslehre**, nennt man die Theorie oder Wissenschaft von der Bedeutung der Zeichen. *Zeichen* können hierbei beliebige Symbole sein, insbesondere aber auch Sätze, Satzteile, Wörter oder Wortteile.

In der formalen Metasprache und der Objektsprache sind die Zeichen die Symbole und Formeln. 15, , 84

Signatur [?] Wikipedia[69] schreibt dazu:

> sffamily In der mathematischen Logik besteht eine **Signatur** aus der Menge der Symbole, die in der betrachteten Sprache zu den üblichen, rein logischen Symbolen hinzukommt, und einer Abbildung, die jedem Symbol der Signatur eine Stelligkeit eindeutig zuordnet. Während die logischen Symbole wie $\forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$ stets als „für alle“, „es gibt ein“, „und“, „oder“, „folgt“, „äquivalent zu“ bzw. „nicht“ interpretiert werden, können durch die semantische Interpretation der Symbole der Signatur verschiedene Strukturen (insbesondere Modelle von Aussagen der Logik) unterschieden werden. Die Signatur ist der spezifische Teil einer elementaren Sprache.
>
> Beispielsweise lässt sich die gesamte Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre in der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe und dem einzigen Symbol $\in$(neben den rein logischen Symbolen) formulieren; in diesem Fall ist die Symbolmenge der Signatur gleich $\{\in\}$.

, 90, *siehe* Abbildung, Logik, Prädikatenlogik, Sprache, Stelligkeit & Symbol

—, Boolesche [?] Die logische Signatur $\{\neg, \wedge, \vee\}$. **43**,

—, logische [?] Abweichend von der Definition von Signatur in Wikipedia ist eine **logische Signatur** eine Teilmenge von $\mathcal{J}$, ausreichend um damit und mit $\mathcal{Q}$ und Klammerung alle anderen Elemente aus $\mathcal{J}$ zu definieren. 43f, , 90

Sprache [?] — Siehe Formelmenge. 15, **21**, **30**, , 69, 71, 79, 84ff, 90, 94

—, aussagenlogische [Beschreibung fehlt noch] 31, 42, , 68

Sprachebene [ok] Wir unterscheiden in diesem Dokument drei **Sprachebenen**: Die obere Ebene mit der Metasprache, die mittlere mit der formalen Metasprache und die untere mit der Objektsprache. Mit einer Sprache einer höheren Ebene kann man u. a. Aussagen über Sprachen mit niedrigere Ebene treffen. **14**, 15,

n-stellig [?] Eine Funktion, Relation oder ein Prädikat mit der Stelligkeit $n \in \mathbb{N}_0$ nennt man **n-stellig**. , 66, 80, 87f, *siehe* stel_f & stel_r

Stelligkeit [?] einer Funktion, Relation oder eines Prädikats. **22**, , 75, 90, 92, *siehe* stel_f & stel_r

Symbol [?] Ein **einfaches Symbol** ist ein druckbares typographisches Zeichen, das als Einheit angesehen wird. Ein **zusammengesetztes Symbol** besteht aus mehreren einfachen Symbolen. Wird ein Symbol, das kann auch ein zusammengesetztes Symbol sein, stets als Einheit angesehen, nennen wir es **atomar**[25], andernfalls **zerlegbar**. Im Einzelfall muss für ein Symbol definiert werden, ob es zerlegt werden kann oder nicht. Ein *einfaches* Symbol ist offensichtlich immer atomar. 12, 14, 17, 20f, 23f, 40, 51, , 63, 68ff, 72, 78–81, 84ff, 88ff, 94f, *siehe* Beispielsymbol, Metasymbol & Objektsymbol

—, aussagenlogisches [Beschreibung ergänzen]Die **aussagenlogischen** Symbole sind ... 41, 53,

—, metasprachliches [Beschreibung fehlt noch] 16, , 72

—, zusammengesetztes [Beschreibung fehlt noch] 20,

Symbolfolge [?] Eine **Symbolfolge** ist eine Folge von atomaren Symbolen. 13, 17, 19ff, 27, , 79, 93, *siehe* Zeichenkette

Syntax [!] Wikipedia[31] schreibt dazu:

> sffamily Unter **Syntax** [. . .] versteht man allgemein ein Regelsystem zur Kombination elementarer Zeichen zu zusammengesetzten Zeichen in natürlichen oder künstlichen Zeichensystemen. Die Zusammenfügungsregeln der Syntax stehen hierbei den Interpretationsregeln der Semantik gegenüber.

Wir nennen in der formalen Metasprache und der Objektsprache die elementaren Zeichen Symbole und die zusammengesetzten Zeichen Formeln. 8, 15, 46, , 84, *siehe* Semantik & Sprache

T

Teilaussage [ok] Eine Aussage A heißt eine **Teilaussage**[26] **von** einer Aussage B, wenn sie Teil von B ist und man sie ohne Bedeutungsänderung von B dort klammern könnte. **16**, , 77, 84, 91f

25) alternativ: **unzerlegbar**
26) synonym: **Unteraussage**

—, echte [ok] Eine Teilaussage A einer Aussage B heißt **echte Teilaussage** von B, wenn A verschieden von B ist. **16**, , 72f, 85, 95

Teilbereich [ok] Ein Bereich A ist genau dann ein **Teilbereich** von einem Bereich B, wenn $A \subseteq B$ ist. **18**, , *siehe* Oberbereich

—, echter [ok] Ein Bereich A ist genau dann ein **echter Teilbereich** von einem Bereich B, wenn $A \subset B$ ist. **18**, , *siehe* echter Oberbereich

Teilfolge [Beschreibung fehlt noch] , 77, 85

—, echte [Beschreibung fehlt noch] , 85, 95

Teilformel [Beschreibung fehlt noch] , 77, 85, 92

—, echte [Beschreibung fehlt noch] , 85, 95

Teilmenge [ok] Eine Menge A ist ist genau dann eine **Teilmenge** von einer Menge B, wenn $A \subseteq B$ ist. 22, 25, 27, 31, 42f, , 68f, 77, 87, 90, 92, *siehe* Obermenge & Teilbereich

—, echte [ok] Eine Menge A ist ist genau dann eine **echte Teilmenge** von einer Menge B, wenn $A \subset B$ ist. , *siehe* echte Obermenge & echter Teilbereich

Teilobjekt [Beschreibung fehlt noch] , 72, 77, 85, 92

—, echtes [Beschreibung fehlt noch] , 85

Teilsprache [Beschreibung fehlt noch] , 77, 85

—, echte [Beschreibung fehlt noch] 15, , 85f

Teilsymbol [Beschreibung fehlt noch] , 77, 85, 92

—, echtes [Beschreibung fehlt noch] , 85, 95

Trägermenge [?] einer Relation. **22**, 51, , *siehe* car

Transformation [?] Eine Umformung oder Erzeugung einer Formel aus einer vorgegebenen Menge von Formeln, d. h. die Anwendung einer Schlussregel. 13, 31, 34, , 70f, 78, 89, 91, 95, *siehe* T, $\mathcal{T}$ & zulässige Transformation

—, zulässige [?] Eine Transformation heißt **zulässig**, wenn sie Element aus einer vorgegebenen Menge von Transformationen oder eine daraus zulässigerweise abgeleitete Transformation ist. 29, **32**, 33,

Transformationsfolge [?] Eine Folge von Transformationen. **31**, , *siehe* T, $\mathcal{T}$ & Transformation

Transformationsregel [Beschreibung fehlt noch] 13,

Tupel [?] Wikipedia[74] schreibt dazu:

> sffamily **Tupel** (abgetrennt von mittellat. *quintuplus* ‚fünffach', *septuplus* ‚siebenfach', *centuplus* ‚hundertfach' etc.) sind in der Mathematik neben Mengen eine wichtige Art und Weise, mathematische Objekte zusammenzufassen. Ein Tupel besteht aus einer Liste endlich vieler, nicht notwendigerweise voneinander verschiedener Objekte. Dabei spielt, im Gegensatz zu Mengen, die Reihenfolge der Objekte eine Rolle. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Tupel formal als Mengen darzustellen. Tupel finden in vielen Bereichen der Mathematik Verwendung, zum Beispiel als Koordinaten von Punkten oder als Vektoren in mehrdimensionalen Vektorräumen.

Von Tupeln unabhängig von ihrer Länge ist selten die Rede. Vielmehr verwendet man das Wort n-**Tupel** und die im nächsten Abschnitt genannten Spezialfälle davon dann, wenn sich aus dem Zusammenhang die Länge als feste Zahl oder als benannte Konstante wie n ergibt. Betrachtet man dagegen viele endliche Folgen unterschiedlicher Längen von Elementen einer Grundmenge, spricht man von endlichen Folgen oder definiert einen neuen Begriff, der oft mit „Kette" zusammengesetzt ist, z. B. Zeichenkette, Additionskette.

Ein n-**Tupel**[27] $\vec{a}$ ist eine endliche Folge[28] $(a_1, \ldots, a_n)$ **von** seinen **Komponenten** a_i. Sind alle Komponenten Elemente aus derselben Menge M, so heißt $\vec{a}$ ein n-Tupel **auf** M. 21f, **25**, 29f, 51, , 68ff, 81, 88, 92, *siehe* Folge, Komponente, Menge, Objekt, Symbolfolge & Zeichenkette

Tupelmenge [?] Die Tupelmenge $\mathcal{T}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller n-Tupel aus M^n für alle $n \in \mathbb{N}_0$. **25**, , 92

U

Umkehrrelation [?] Die **Umkehrrelation**[29] *von* einer binären Relation (G, A, B) ist die Relation (H, B, A) mit $H = \{(b, a) \mid (a, b) \in G\}$. Üblicherweise wird das zugehörige Relationssymbol gespiegelt. Die Umkehrrelation der Negation einer Relation ist gleich der Negation ihrer Umkehrrelation. 17f, **22**f, 24, 51, , 63–66, 84, *siehe* Menge

unär [?] Eine Operation, Funktion oder Relation heißt **unär**, wenn ihre Stelligkeit gleich 1 ist. 23, 25, 40f, 51, , 63, *siehe* binär

Ungleichheit [?] Eine Gleichheitsrelation: Zwei Objekte A und B sind **nicht gleich**[30] $A \not\equiv B$, wenn sie in mindestens einer interessierenden Eigenschaft für $\equiv$ nicht übereinstimmen. 18, **20**, , 64, 67

Unteraussage Synonym zu Teilaussage. **16**, , **90**

Unterformel Synonym zu Teilformel.

Untermenge Synonym zu Teilmenge.

Unterobjekt Synonym zu Teilobjekt.

Untersymbol Synonym zu Teilsymbol.

unzerlegbar Synonym zu atomar. **16**, 20, , **72**

V

Variable [!] Wikipedia[75] schreibt dazu:

sffamily Eine **Variable** ist ein Name für eine Leerstelle in einem logischen oder mathematischen Ausdruck.[1]Der Begriff leitet sich vom lateinischen Adjektiv *variabilis* (veränderlich) ab. Gleichwertig werden auch die Begriffe *Platzhalter* oder *Veränderliche* benutzt. Als „Variable" dienten früher Wörter oder Symbole, heute verwendet man zur mathematischen Notation in der Regel Buchstaben als Zeichen. Wird anstelle der Variablen ein konkretes Objekt eingesetzt, so ist darauf zu achten,

27) alternativ: **Vektor**
28) alternativ: **Sequenz**
29) alternativ: **konverse Relation**, **Konverse** oder **inverse Relation**
30) alternativ: **nicht dasselbe** oder **nicht identisch**

dass überall dort, wo die Variable auftritt, auch dasselbe Objekt benutzt wird.

16, , 68, 72, 84, 93, *siehe* Konstante

—, aussagenlogische [?] Die **aussagenlogischen** Variablen sind die Elemente aus $\mathcal{Q}$. **42**, , 70, 93

—, freie [!] Eine Variable heißt **frei**, wenn sie nicht gebunden ist. 16, , 67, 87, 93

—, gebundene [!] Eine Variable heißt durch einen bestimmten Quantor **gebunden**, wenn sie die zum Quantor gehörige Variable ist und im zugehörigen Ausdruck auch frei vorkommt. 16, , 93

—, logische [?] Die **logischen** Variablen entsprechen den aussagenlogischen. , 67

—, metasprachliche [Beschreibung ergänzen]Die **metasprachlichen** Variablen sind die Elemente aus ... , 67

Vereinigung [Beschreibung ergänzen]Eine Bereichsoperation: **> > > Beschreibung fehlt noch < < <**

vergleichbar [?] Zwei Objekte A und B sind vergleichbar, wenn beide von derselben Objektart sind, d. h. wenn beide z. B. jeweils Mengen, Symbolfolgen, Zahlen, usw. sind. Dabei muss bei Formeln zwischen der Formel an sich und ihrem *Wert* oder *Ergebnis* unterschieden werden. **19**, 33, , 93

Verkettung [Beschreibung fehlt noch]

Vertauschung [?] Die **Vertauschung** von zwei unabhängigen Teil-Formeln (α und β) in einer anderen Formel (γ)
— Formal: $\gamma(\alpha \leftrightarrows \beta)$. Die Vertauschung ist eine spezielle Form der Ersetzung. **34**, 44, 51, , 64

Voraussetzung Synonym zu Prämisse.

W

wahr [ok] Ein metasprachlicher Wahrheitswert in Textform. 15, 22, **41**, 51, , 70, 94, *siehe falsch*, true & $\top$

Wahrheitswert [ok] Wikipedia[76] schreibt dazu:

> sffamily Ein **Wahrheitswert** ist in Logik und Mathematik ein *logischer Wert*, den eine Aussage in Bezug auf Wahrheit annehmen kann.
>
> In der zweiwertigen klassischen Logik kann eine Aussage nur entweder *wahr* oder *falsch* sein, die Menge der Wahrheitswerte $\{W, F\}$ hat so zwei Elemente. In mehrwertigen Logiken enthält die Wahrheitswertemenge mehr als zwei Elemente, z. B. in einer dreiwertigen Logik oder einer Fuzzy-Logik, die damit zu den nichtklassischen zählen. Hier wird dann auch neben Wahrheitswerten von *Quasiwahrheitswerten*, *Pseudowahrheitswerten* oder *Geltungswerten* gesprochen.
>
> Die Abbildung der Menge von Aussagen einer (meist formalen) Sprache auf die Wahrheitswertemenge wird Wahrheitswertzuordnung genannt und ist eine aussagenlogisch spezifische Bewertungsfunktion. In der klassischen Logik kann auch explizit die Klasse aller wahren Aussagen beziehungsweise die Klasse aller falschen Aussagen definiert werden. Die Abbildung von Wahrheitswerten der (atomaren)

Teilaussagen einer zusammengesetzten Aussage auf die Wahrheitswertemenge heißt Wahrheitswertefunktion oder Wahrheitsfunktion. Die Wertetabelle dieser Funktion im mathematischen Sinn wird auch als Wahrheitstafel bezeichnet und häufig dazu verwendet, die Bedeutung wahrheitsfunktionaler Junktoren anzugeben.

Wir verwenden nur die beiden **Wahrheitswerte** der zweiwertigen klassischen Logik, die wir (in der Metasprache) mit ⟨*wahr*⟩ und ⟨*falsch*⟩ bezeichnen. In der formalen Metasprache hingegen verwenden wir ⟨true⟩ und ⟨false⟩ und in der Objektsprache ⟨$\top$⟩ und ⟨$\bot$⟩. In der Literatur findet man auch einfach ⟨1⟩ und ⟨0⟩.

Ist statt Wahrheit nur Beweisbarkeit von Interesse, so gelangt man zum Intuitionismus, in dem der Satz vom ausgeschlossenen Dritten[31)] nicht gilt.

Wikipedia[49] Kapitel 1 schreibt dazu:

> sffamily Die Wahrheit eines mathematischen Satzes wird im Intuitionismus bezogen auf die Möglichkeit, einen entsprechenden Beweis zu formulieren. Wahrheit entsteht also erst durch die Verifizierung. Wahre Sätze oder von ihnen beschriebene Objekte haben keine Existenz unabhängig von tatsächlichen Denkprozessen. Dies steht im Kontrast unter anderem zum sog. Platonismus in der Philosophie der Mathematik.

15, 16, 20, 40f, 51, 53, , 72f, 80, 94, *siehe* atomar, Aussage, Element, Junktor, Logik, Satz & Teilaussage

—, aussagenlogischer [!] Es gib nur die beiden **aussagenlogischen Wahrheitswerte** $\top$ und $\bot$.

—, metasprachlicher [?] Es gib die beiden **metasprachlichen Wahrheitswerte** in Textform (*wahr*, *falsch*) und in der formalen Metasprache (true, false). , 69f, 78, 93

Wert [!] Der **Wert** einer Formel ergibt sich rekursiv aus der Belegung der Symbole, aus denen die Formel besteht. Beispielsweise hat die Formel ⟪a+b=c⟫ mit der Belegung von ⟨a⟩, ⟨b⟩, ⟨c⟩, ⟨$+$⟩ und ⟨$=$⟩ durch die Zahlen Eins, Zwei und Drei, den Additionsoperator und die Gleichheit den Wert "'*wahr*"'.[32)] Belegt man bei sonst gleicher Belegung ⟨c⟩ mit Vier, so ist der Wert hingegen "'*falsch*"'. 15f, , 68

—, logischer [!] Synonym zu Wahrheitswert.

Wertebereich [?] einer Funktion. 51, , 70, 73, *siehe* ran, Zielbereich & Funktion

WikiDummy [Beschreibung fehlt noch]Wikipedia[31] schreibt dazu:

> sffamily

Wikipedia [?] Wikipedia[31] schreibt dazu:

> sffamily Wikipedia ist ein Projekt zum Aufbau einer [Internet-]Enzyklopädie aus freien Inhalten.

12, 15, 17f, 44f, , 71–83, 85, 87–94

Wort [?] Synonym: Formel — Ein Element aus einer Sprache. **21**, , 79, *siehe* Formelmenge

Z

31) siehe [67]

32) Genau genommen true, was wiederum standardmäßig die Belegung *wahr*hat.

Zahl, natürliche [Beschreibung fehlt noch]Eine verbreitete Version für die Definition der Menge $\mathbb{N}_0$ der **natürlichen Zahlen** ist folgende:

$\varnothing \in \mathbb{N}_0$

$n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n \cup \{n\} \in \mathbb{N}_0$

Nur die so definierten Elemente sind Elemente aus $\mathbb{N}_0$.

Man nennt $n \cup \{n\}$ auch den **Nachfolger** von n und es gilt:

$n \subset \mathbb{N}_0$, für $n \in \mathbb{N}_0$

$n < m \Leftrightarrow n \subset m$, für $n, m \in \mathbb{N}_0$

$n \leqslant m \Leftrightarrow n \subseteq m$, für $n, m \in \mathbb{N}_0$

18, , 69

Zeichenkette [?] Eine Folge von (typographischen) Zeichen, auch Leerstellen und sonstigem Zwischenraum. 19ff, 43, , *siehe* Symbolfolge

zerlegbar [?] Eine Aussage, Formel, Folge oder Symbol, die eine echte Teilaussage, -folge, -formel bzw.. -symbol enthalten, heißt **zerlegbar**. **16**, 18, 20f, 43, , 72, **73**, **90**, *siehe* atomar

Ziel [?] Ein **Ziel** ist in diesem Dokument eine Anforderungen an ASBA. 8f,

Zielbereich [?] einer Funktion. **22**, 51, , 70, 80, *siehe* tar, Wertebereich & Funktion

zulässig [?] Eine Eigenschaft von Formel, Transformation und Ersetzung. 33f, , 71, 78, 89, *siehe* Formel, Transformation & Ersetzung