Dr. Winfried Teschers
Anton-Günther-Straße 26c
91083 Baiersdorf
winfried.teschers@t-online.de

Projektdokument

ASBA

Axiome, Sätze, Beweise und Auswertungen

Projekt zur maschinellen Überprüfung von mathematischen Beweisen und deren Ausgabe in lesbarer Form

Winfried Teschers

24. März 2018

Es wird ein Programmsystem beschrieben, das zu eingegebenen Axiomen, Sätzen und Beweisen letztere prüft, Auswertungen generiert und unter Zuhilfenahme gegebener Ausgabeschemata eine Ausgabe im LaTeX-Format in mathematisch üblicher Schreibweise mit Formeln erstellt.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Schon während meiner aktiven Zeit habe ich davon geträumt, ein Programm zu erstellen, mit dem man mathematische Sätze und Beweise speichern und überprüfen kann. Es sollte auch statistische Auswertungen beherrschen und u. a. Fragen beantworten können wie z. B. „Welche Axiome sind zum Beweis eines bestimmten Satzes erforderlich?“ oder „Wie viele Beweisschritte erfordert ein bestimmter Beweis?“. Ein Beweis mit weniger Axiomen und weniger Beweisschritten wäre dann vorzuziehen.

Einige Jahre nach meiner Pensionierung habe ich Ende 2016 endlich damit angefangen, das Projekt ASBA zu starten. Im Internet habe ich das Projekt „Hilbert II“ [19] gefunden, dass eine ähnliche Zielsetzung hat. Ich habe dann mit dem Projektleiter Michael Meyling Kontakt aufgenommen und war zuversichtlich, Synergien nutzen zu können. Leider hat sich dann herausgestellt, dass mein Ansatz viel umfangreicher und somit mit „Hilbert II“ wohl nicht kompatibel ist. Daher betreibe ich ASBA als ein Ein-Mann-Projekt und dies wird bis zur Fertigstellung der ersten Version dieses Dokuments wohl so bleiben müssen. Vielleicht ergibt sich dann ja eine Zusammenarbeit mit anderen Enthusiasten.

Da in diesem Dokument viele mathematische Formeln vorkommen und ASBA auch LaTeX-Code generieren soll, ist es in LaTeX verfasst. Dieses für mich neue Textsystem war eine große, spannende Herausforderung und ist einer der Gründe für die lange Dauer der Erstellung dieses Dokuments. Hinzu kommt, dass ich keinen Termindruck habe und endlich mal 100% versuchen kann – in meinem Job wurde ich daran aus verständlichen Gründen gehindert.

ASBA soll eine Basis für die Überprüfung und Archivierung mathematischer Sätze und Beweise sein. Daher halte ich es für unerlässlich, alle verwendeten Begriffe eindeutig genug zu spezifizieren (100%!). Natürlich will ich mich dabei an die übliche Nomenklatur halten. Aber was ist üblich? Steht $\langle\subset\rangle$ für „Teilmenge“ oder „echte Teilmenge“? Ist 0 ein Element aus $\mathbb{N}$ oder nicht? Daher habe ich versucht, alle wichtigen, verwendeten Begriffe der Mathematik, aber auch der formalen Metasprache streng zu definieren, normalerweise im Text, teilweise aber nur in einer Fußnote, auf jeden Fall aber im Glossar. Dort sind auch manche Begriffe aufgeführt, die im Text nicht definiert wurden.

Alle im Glossar und Symbolverzeichnis aufgeführten Begriffe werden bei der Definition **in dieser** und bei der Verwendung in dieser Schriftart ausgegeben. Zusätzlich sind die Begriffe und Symbole im PDF-Dokument mit einem Link ins Glossar bzw. Symbolverzeichnis versehen.

Fußnoten dienen nur zu weiteren Erläuterungen sowie Verweisen in dieses Dokument und in die Literatur. Daher können sie auch etwas „lascher“ formuliert sein. Für das Verständnis des Textes sollten sie nicht nötig sein, es reichen Grundkenntnisse der Mathematik.

Wenn im Text „wir“ verwendet wird, geht es um Definitionen, die von allgemein bekannten möglicherweise abweichen. „Wir“ und nicht „ich“, da ich den Leser einschließe und außer an dieser Einleitung in Zukunft möglicherweise auch andere Autoren an diesem Dokument beteiligt sein werden.

Baiersdorf, den 03. März 2018

Winfried Teschers

PS: Texte, deren Bearbeitung zurückgestellt ist, sind in dieser Schriftfarbe geschrieben.

1. Analyse

In der Mathematik gibt es eine unüberschaubare Menge an Axiomen, Sätzen, Beweisen, *Fachbegriffen*[1)] und *Teilgebieten*[2)]. Zu den meisten Teilgebieten gibt es noch ungelöste Probleme.

Es fehlt ein System, das einen Überblick bietet und die Möglichkeit, Beweise automatisch zu überprüfen. Außerdem sollte all dies in üblicher mathematischer Schreibweise ein- und ausgegeben werden können. In diesem Dokument werden die Grundlagen für das zu entwickelnde Programmsystem **ASBA** (ein Akronym für „**A**xiome, **S**ätze, **B**eweise und **A**uswertungen“) behandelt.

Ein Programmsystem mit ähnlicher Aufgabenstellung findet sich im GitHub Projekt *Hilbert II* ([19, 20]). Einige Ideen sind von dort übernommen worden.

1.1. Fragen

Einige der Fragen, die in diesem Zusammenhang auftauchen, werden nun formuliert:

1. **Grundlagen**: Was sind die Grundlagen? Z. B. welche Logik und welche Mengenlehre.
2. **Basis**: Welche wichtigen Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Teilgebiete gibt es? Welche davon sind Standard?
3. **Axiome**: Welche Axiome werden bei einem Satz oder Beweis vorausgesetzt? Allgemein anerkannte oder auch strittige, wie z. B. den *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* (*tertium non datur*) oder das *Auswahlaxiom*.
4. **Beweis**: Ist ein Beweis fehlerfrei?
5. **Konstruktion**: Gibt es einen konstruktiven Beweis?
6. **Vergleiche**: Welcher Beweis ist besser? Nach welchem Kriterium? Z. B. elegant, kurz, einsichtig oder wenige Axiome. Was heißt eigentlich *elegant*?
7. **Definitionen**: Was ist mit einem Fachbegriff jeweils genau gemeint? Z. B. *Stetigkeit*, *Integral* und *Analysis*.
8. **Abhängigkeiten**: Wie heißt ein Fachbegriff in einer anderen Sprache? Ist wirklich dasselbe gemeint? Was ist mit Fachbegriffen in verschiedenen Teilgebieten?
9. **Überblick**: Ist ein Axiom, Satz, Beweis oder Fachbegriff schon einmal — ggf. abweichend — definiert, formuliert oder bewiesen worden?
10. **Darstellung**: Wie kann man einen Satz und den zugehörigen Beweis — ggf. auch spezifisch für ein Teilgebiet — darstellen?

---

1) **Fachbegriffe** sind Namen für mathematische Elemente und Konstruktionen, z. B. Axiomen, Sätze, Beweise und Teilgebiete. Symbole können als spezielle Fachbegriffe aufgefasst werden.

2) Ein **Teilgebiet** ist ein Teil der Mathematik mit einer zugehörigen Basis an Axiomen, Sätzen, Fachbegriffen und Darstellungen, z. B. Logik und Mengenlehre. Ein Teilgebiet kann sehr klein sein und im Extremfall bei ASBA kein einziges Element enthalten. *Umgebung* wäre eine bessere Bezeichnung, ist aber schon ein verbreiteter Fachbegriff, so dass hier die Bezeichnung Teilgebiet verwendet wird.
Statt „Teilgebiet“ könnte man auch „Theorie“ nehmen. An *Theorien* (siehe [1] Kapitel 2.5, Seite 64) werden jedoch bestimmte Anforderungen gestellt, die vom hier behandelten Programmsystem aber nicht notwendigerweise überprüft werden sollen. Theorien sind allerdings i. Alg. auch Teilgebiete.

11. **Forschung**: Welche Probleme gibt es noch zu erforschen.

1.2. Eigenschaften

ASBA soll ausgehend von den Fragen in Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite entwickelt werden, und die folgenden Eigenschaften haben:

1. **Daten**: Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Teilgebiete können in formaler Form gespeichert werden — auch (noch) nicht oder unvollständig bewiesene Sätze. Dabei soll die übliche mathematische Schreibweise verwendet werden können.

2. **Definitionen**: Es können Fachbegriffe für Axiome, Sätze, Beweise und Teilgebiete — letztere mit eigenen Axiomen, Sätzen, Beweisen, Fachbegriffen und über- oder untergeordneten Teilgebieten — definiert werden. Die Definitionen dürfen wiederum an dieser Stelle schon bekannte Fachbegriffe und Teilgebiete verwenden.

3. **Prüfung**: Vorhandene Beweise können automatisch geprüft werden.

4. **Ausgaben**: Die Axiome, Sätze und Beweise können in üblicher Schreibweise — abhängig von Sprache und Teilgebiet — ausgegeben werden.

5. **Auswertungen**: Zusätzlich zur Ausgabe der gespeicherten Daten sind verschiedene Auswertungen möglich, unter anderem für die meisten der unter Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite behandelten Fragen.

Damit ASBA nicht umsonst erstellt wird und möglichst breite Verwendung findet, werden noch zwei Punkte angefügt:

6. **Lizenz**: Die Software ist *Open Source*.

7. **Akzeptanz**: ASBA wird von Mathematikern akzeptiert und verwendet.

Tabelle 1.1 auf der nächsten Seite zeigt, wie sich die Eigenschaften zu den Fragen im Abschnitt 1.1 auf der vorherigen Seite verhalten. Mit einem X werden die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Eigenschaften zur Beantwortung der entsprechenden Frage beitragen sollen. Idealerweise sollte die Erfüllung aller angegebenen Eigenschaften alle gestellten Fragen beantworten, was allerdings illusorisch ist.

Frage \ Eigenschaft	1 Daten	2 Definitionen	3 Prüfung	4 Ausgaben	5 Auswertungen	6 Lizenz	7 Akzeptanz
1 Grundlagen	X	X	-	X	X	-	-
2 Basis	X	X	-	X	X	-	-
3 Axiome	X	X	-	X	X	-	-
4 Beweis	X	-	X	X	-	-	-
5 Konstruktion	X	-	-	X	-	-	-
6 Vergleiche	X	-	-	-	X	-	-
7 Definitionen	X	X	-	X	-	-	-
8 Abhängigkeiten	X	-	-	X	-	-	-
9 Überblick	X	-	-	-	X	-	-
10 Darstellung	-	X	-	X	-	-	-
11 Forschung	X	-	-	-	X	-	-

Tabelle 1.1.: Fragen (1.1) → Eigenschaften (1.2)

1.3. Ziele

Um die Eigenschaften von Abschnitt 1.2 auf der vorherigen Seite zu erreichen, werden für ASBA die folgenden Ziele[3)] gesetzt:

1. **Daten**: Die verteilte Datenbank von ASBA enthält möglichst viele wichtige Axiome, Sätze, Beweise, Fachbegriffe, Teilgebiete und Ausgabeschemata[4)].
2. **Form**: Die Daten liegen in formaler, geprüfter Form vor.
3. **Eingaben**: Die Eingabe von Daten erfolgt in einer formalen Syntax unter Verwendung der üblichen mathematischen Schreibweise.
4. **Prüfung**: Beweise können automatisch geprüft[5)] werden.
5. **Ausgaben**: Die Ausgabe kann in einer eindeutigen, formalen Syntax gemäß vorhandener Ausgabeschemata erfolgen.
6. **Auswertungen**: Zusätzlich zur Ausgabe der Daten sind verschiedene Auswertungen möglich. Insbesondere kann zu jedem Beweis angegeben werden, wie lang er ist und welche Axiome und Sätze[6)] er benötigt.
7. **Anpassbarkeit**: Fachbegriffe und die Darstellung bei der Ausgabe können mit Hilfe von — gegebenenfalls unbenannten — untergeordneten Teilgebieten angepasst werden.
8. **Individualität**: Axiome und Sätze können für jeden Beweis individuell vorausgesetzt werden. Dabei sind fachgebietsspezifische Fachbegriffe erlaubt.

---

3) Es sind eigentlich Anforderungen. Dieser Begriff wird aber schon im Kapitel 4 auf Seite 42 verwendet.
4) Um den Punkt 4 von Abschnitt 1.2 auf der vorherigen Seite erfüllen zu können, werden noch fachgebietsspezifische Ausgabeschemata benötigt, welche die Art der Ausgaben beschreiben.
5) Hier soll ASBA soll keine Beweise finden — das ist Ziel von Punkt 17, sondern nur vorhandene prüfen.
6) Sätze, die quasi als Axiome verwendet werden.

9. **Internet**: Die Daten können auf mehrere Dateien verteilt sein. Ein Teil davon — oder sogar alle — können im Internet liegen.
10. **Kommunikation**: Die Kommunikation mit ASBA kann mit den Fachbegriffen der einzelnen Teilgebiete erfolgen.
11. **Zugriff**: Der Zugriff auf ASBA kann lokal und über das Internet erfolgen.
12. **Unabhängigkeit**: ASBA kann online und offline arbeiten.
13. **Rekursion**: Es kann rekursiv über alle verwendeten Dateien — auch solchen, die im Internet liegen — ausgewertet werden.
14. **Bedienbarkeit**: ASBA ist einfach zu bedienen.
15. **Lizenz**: Die Software ist *Open Source*.
16. **Zwischenspeicher**: Wichtige Auswertungen können an vorhandenen Dateien angehängt oder separat in eigenen Dateien gespeichert werden.
17. **Beweisunterstützung**: ASBA hilft bei der Erstellung von Beweisen.

Punkt 16 wurde noch angefügt, damit ASBA effizient arbeiten kann und um die Akzeptanz zu erhöhen. Um letzteres zu erreichen, dafür ist auch Punkt 17 nützlich. Es bietet sich ja auch an, die Fähigkeiten, die ASBA mit der Prüfung von Beweisen haben wird, auch auf die Erstellung von Beweisen anzuwenden. Die Reihenfolge der Ziele stellt noch keine Priorisierung fest.

Die Tabelle 1.2 zeigt wieder, wie sich die Ziele zu den Eigenschaften im Abschnitt 1.2 auf Seite 6 verhalten. Mit einem X werden wieder die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Ziele zur Sicherstellung der entsprechenden Eigenschaft beitragen sollen. Idealerweise sollte durch Erreichen aller aufgestellten Ziele ASBA alle angegebenen Eigenschaften aufweisen, was wahrscheinlich ebenfalls illusorisch ist.

Eigenschaft \ **Ziel**	1 Daten	2 Form	3 Eingaben	4 Prüfung	5 Ausgaben	6 Auswertungen	7 Anpassbarkeit	8 Individualität	9 Internet	10 Kommunikation	11 Zugriff	12 Unabhängigkeit	13 Rekursion	14 Bedienbarkeit	15 Lizenz	16 Zwischenspeicher	17 Beweisunterstützung
1 Daten	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2 Definitionen	X	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3 Prüfung	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4 Ausgaben	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 Auswertungen	-	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6 Lizenz	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	-	-
7 Akzeptanz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabelle 1.2.: Eigenschaften (1.2) → Ziele (1.3)

1.4. Zusammenfassung

Frage \ Ziel	1 Daten	2 Form	3 Eingaben	4 Prüfung	5 Ausgaben	6 Auswertungen	7 Anpassbarkeit	8 Individualität	9 Internet	10 Kommunikation	11 Zugriff	12 Unabhängigkeit	13 Rekursion	14 Bedienbarkeit	15 Lizenz	16 Zwischenspeicher	17 Beweisunterstützung
1 Grundlagen	X	X	X	-	X	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2 Basis	X	X	X	-	X	X	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3 Axiome	X	X	X	-	X	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4 Beweis	X	X	X	X	X	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 Konstruktion	X	X	X	-	X	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6 Vergleiche	X	X	X	-	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7 Definitionen	X	X	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8 Abhängigkeiten	X	X	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9 Überblick	X	X	X	-	-	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 Darstellung	X	-	X	-	X	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11 Forschung	X	X	X	-	-	X	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Die nächsten beiden Punkte sind Eigenschaften aus Abschnitt 1.2 auf Seite 6:																	
6 Lizenz	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	-	-
7 Akzeptanz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabelle 1.3.: Fragen (1.1) → Ziele (1.3)

Die Tabelle 1.3 ist eine Kombination der Tabellen 1.1 und 1.2 und zeigt, wie sich die Ziele im Abschnitt 1.3 auf Seite 7 zu den Fragen im Abschnitt 1.1 auf Seite 5 verhalten. Auch hier werden mit einem X die Spalten einer Zeile markiert, deren zugehörige Ziele für die Beantwortung der entsprechenden Frage nötig sind. Mit einem kleinen x werden sie markiert, wenn sie zur Beantwortung der Fragen nicht nötig, aber von Interesse sind. Idealerweise sollte das Erreichen aller aufgestellten Ziele alle gestellten Fragen beantworten, was natürlich auch illusorisch ist.

1.5. Die Umgebung von ASBA

In der Abbildung 1.1 wird beschrieben, welche Interaktionen ASBA mit der Umgebung hat, d. h. welche Ein- und Ausgaben existieren und woher sie kommen bzw. wohin sie gehen.

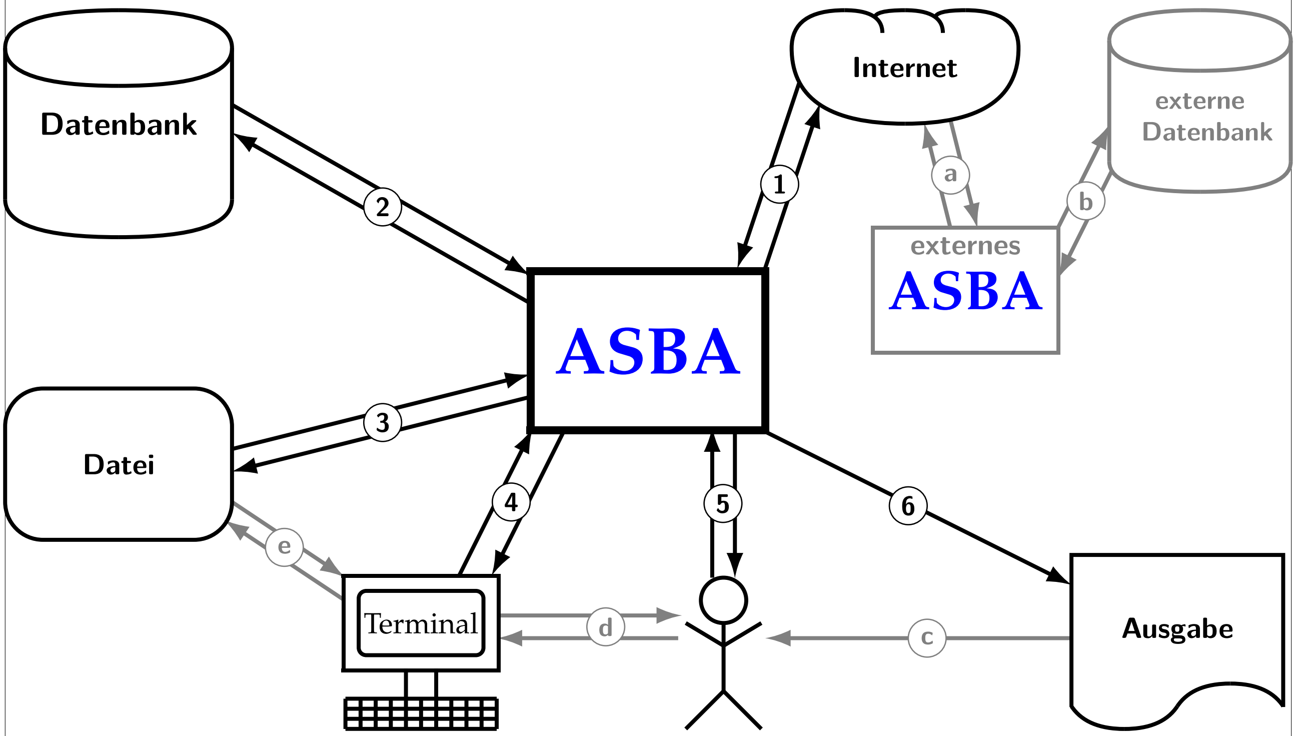

Abbildung 1.1.: Die Umgebung von ASBA

In den in der Abbildung 1.1 abgebildeten Datenflüssen (1) bis (6) und (a) bis (e) werden die folgenden Daten übertragen:

(1) **ASBA→ Internet** Inhalte der Datenbank.

Internet → ASBA Inhalte der externen Datenbank.

(2) **Datenbank → ASBA** Inhalte der Datenbank und Antworten auf Datenbankanweisungen.

ASBA→ Datenbank Inhalte der Datei, der externen Datenbank und Datenbankanweisungen.

(3) **Datei → ASBA** Inhalte der Datei.

ASBA→ Datei Die Datei wird um zusätzliche Auswertungen ergänzt, z. B. ob die Beweise korrekt sind, welche Axiome und Sätze — auch externe aus dem Internet — verwendet wurden, Länge des Beweises usw.

(4) **Terminal → ASBA** Anweisungen, Daten und Batchprogramme.

ASBA→ Terminal Antworten auf Anweisungen, Auswertungen usw.

Außerdem interaktive Ein- und Ausgabe durch einen Anwender, wie in (5) beschrieben.

(5) **Anwender ↔ ASBA** Interaktive Ein- und Ausgaben durch einen Anwender mit Komponenten von (3), (4) und (6). — Die Kommunikation läuft i. Alg. über ein Terminal.

(6) **ASBA→ Ausgabe** Inhalte von Datei und Datenbank in lesbarer Form, u. a. mit Hilfe von Ausgabeschemata auch mit Formeln. Die Ausgabe kann auch in eine Datei erfolgen, z. B. im LaTeX-Format.

(a) **Internet → externes ASBA** Inhalte der Datenbank.

externes ASBA→ Internet Inhalte der externen Datenbank.

xiom

(b) **externe Datenbank → externes ASBA** Inhalte der externen Datenbank.

externes ASBA→ externe Datenbank Inhalte der Datenbank.

(c) **Ausgabe → Anwender** Alle Daten der Ausgabe.

(d) **Anwender ↔ Terminal** Interaktive Ein- und Ausgabe durch einen Anwender, wie in (5) beschrieben.

(e) **Terminal ↔ Datei** Erstellen und Bearbeiten der Datei durch einen Anwender. — siehe (d)

Die Datenflüsse (a) bis (e) erfolgen außerhalb von ASBAund werden nicht weiter behandelt.

Die Datenbank und die Datei enthalten im Prinzip die gleichen Daten, wobei sie in der Datei im Textformat in lesbarer Form und in der Datenbank in einem internen Format vorliegen. Zudem enthält die Datenbank i. Alg. sehr viel mehr Daten. Es handelt sich dabei jeweils um die folgenden Daten:

Axiome Ein **Axiom** ist eine Aussage, die nicht aus anderen Aussagen abgeleitet werden kann. Es können wie bei Sätzen Prämissen vorhanden sein, aber keine Beweise.

Sätze Ein **Satz** besteht aus einer Anzahl von Prämissen und Konklusionen und einem Beweis, der die Konklusionen aus den Prämissen ableitet. Letztere können Axiome und andere Sätze sein, auf die dann verwiesen wird.

Beweise Ein **Beweis** besteht aus einer Folge von Beweisschritten, die aus gegebenen Prämissen Konklusionen ableitet.

Fachbegriffe Ein **Fachbegriff** ist ein Name für ein Objekt bzw. eine Eigenschaft in einem bestimmten Teilgebiet.

Teilgebiete Ein **Teilgebiet** ist ein Teil der Mathematik mit einer zugehörigen Basis aus Axiomen, Sätzen, Fachbegriffen und Ausgabeschemata, quasi eine untergeordnete Datenbank.

Ausgabeschemata Eine **Ausgabeschema** ist eine Beschreibung, wie ein bestimmtes mathematisches Objekt ausgegeben werden soll. Dies kann z. B. ein Stück LaTeX-Code mit entsprechenden Parametern sein.

Auswertungen Statistische und andere Auswertungen, die bestimmten Elementen der Datei bzw. Datenbank zugeordnet sind. Z. B. können zu einem Satz alle für einen Beweis notwendigen Axiome angegeben werden — als Verweise.

Die Daten können interne und externe Verweise enthalten.

1.6. Basis von Beweisen

Da ein Computerprogramm erstellt werden soll, muss die Grundstruktur des Vorgehens bei Beweisen definiert werden.[7)]

[7)] siehe [41]

Die logische Darstellung von mathematischen Aussagen, wozu auch Axiome und Sätze gehören, erfolgt, da es sich immer um Formeln handelt, an besten mit Zeichenfolgen[8], d. h. Folgen von Zeichen und Symbolen, in denen Zwischenraum — insbesondere Leerstellen — nicht zählen. Mehrdimensionale Formeln, wie z. B. Matrizen, Baumstrukturen, Funktionsschemata und anderes, können auch als (eindimensionale) Zeichenfolgen dargestellt werden.[9] Beweise sind letztendlich nichts anderes, als erlaubte Transformationen dieser Zeichenfolgen.

Bausteine sind Grundelemente, auch **Zeichen** oder **(Satz-)Buchstaben** genannt, aus denen die Zeichenfolgen bestehen dürfen, und müssen definiert werden.

Formationsregeln dienen zur Festlegung, wie man aus den Bausteinen Ausdrücke erzeugen kann, und müssen ebenfalls definiert werden.

Sätze lassen sich als eine Menge von Formeln, den Prämissen, wozu auch Axiome und andere Sätze gehören können, einer weiteren Menge von Formeln (Zeichenfolgen), den Konklusionen, und der Angabe eines Beweises darstellen.

Beweise zu gegebenen Prämissen und Konklusionen lassen sich als Folge von Transformationen, beginnend mit den Prämissen und endend mit den Konklusionen, darstellen.

Transformationsregeln definieren, welche Transformationen mit gegebenen Formelmengen[] zulässig sind.[10]

[8] Die interne Darstellung der Zeichenfolgen kann zur Optimierung des Programms von der logischen abweichen.

[9] Z. B. könnte man eine 2×2-Matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ auch darstellen als Folge von Zeilen: $\langle\!\langle[(a, b), (c, d)]\rangle\!\rangle$, oder noch einfacher: $\langle\!\langle[a, b; c, d]\rangle\!\rangle$. In ASBA wird die LaTeX-Syntax verwendet. Damit wird die soeben angegebene Matrix codiert durch ⟪$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$⟫.

[10] siehe [1, 52, 54]

2. Mathematische Grundlagen

Die mathematischen Grundlagen werden einerseits gebraucht, um die erlaubten Beweisschritte[1)] zu definieren, andererseits dienen sie auch zum Testen von ASBA. Daher werden sie in diesem Kapitel 2 ausführlicher behandelt, als für die Erstellung von ASBA erforderlich ist. Alle hier[2)]aufgeführten Axiome, Sätze und Beweise sollen dazu kodiert und die Beweise dann von ASBA verifiziert werden.

Speziell in diesem Kapitel 2 wollen wir mit möglichst exakt definierten Notationen[3)] operieren. Wenn sie in dieser Schriftart erscheinen, gibt es eine Definition im Symbolverzeichnis oder Glossar[4)], und diese Bedeutung ist dann gemeint. Gleichzeitig ist damit im PDF-Dokument ein Link dorthin verbunden. An Stellen, wo eine Notation definiert wird, wird sie **in dieser**[5)] Schriftart ausgegeben. Wird normale, schwarze Schrift verwendet, ist die alltägliche Bedeutung gemeint, die manchmal recht ungenau ist.

Sätze mit „wir“ bestimmen Notationen, die evtl. nur für dieses Dokument gelten. Bei allgemein bekannten Notationen wird „wir“ nicht verwendet. Die Verwendung von „wir“ ist allerdings möglicherweise nicht konsistent und soll nur als Hinweis dienen.

Wenn die genaue Bedeutung einer Notation bei ihrer Verwendung noch nicht definiert ist, ist sie an der entsprechenden Stelle noch nicht notwendig oder so bekannt und eindeutig, dass auf eine Definition verzichtet wird. In letzterem Fall findet sich aber oft dennoch eine Definition im Symbolverzeichnis ab Seite 56 oder Glossar ab Seite 63.

2.1. Metasprache

Wenn man über eine Sprache, die sogenannte **Objektsprache**, spricht, braucht man eine zweite Sprache, die sogenannte **Metasprache**, in der Aussagen über erstere getroffen werden können.[6)] Wenn die Objektsprache die der Mathematik ist, wählt man üblicherweise die natürliche Sprache als Metasprache. Leider ist diese oft ungenau, nicht immer eindeutig und abhängig vom Zusammenhang, in dem sie gesprochen wird.[7)] Um diese Probleme in den Griff zu bekommen, kann die Metasprache auch formalisiert werden. Durch diese Formalisierung erinnert sie dann schon an mathematische Formeln. Die Sprachebenen sollten aber sorgfältig unterschieden werden.

Wir unterscheiden hier drei Sprachebenen:

Metasprache Die normale Umgangssprache.

---

1) siehe Abschnitt 2.3.6 auf Seite 27

2) Mit **hier** ist immer speziell dieses Dokument gemeint.

3) Dazu zählen wir auch Begriffe und Symbole.

4) Möglicherweise steht dort statt einer Definition auch nur eine Referenz zur Definition im laufenden Text.

5) Für Symbole gilt dies leider nur für die Schriftfarbe.

6) Die beiden Sprachen können auch übereinstimmen, z. B. wenn man über die natürliche Sprache spricht.

7) Man betrachte die beiden Aussagen „Studenten und Rentner zahlen die Hälfte.“ und „Studenten oder Rentner zahlen die Hälfte.“, die beide das gleiche meinen. — Entnommen aus [1] Abschnitt 1.2 Bemerkung 1.
Ein weiteres Problem ist, dass man unauflösbare Widersprüche formulieren kann, z. B. „Der Barbier ist der Mann im Ort, der genau die Männer im Ort rasiert, die sich nicht selbst rasieren.“. Und der Barbier? Wenn er sich selbst rasiert, dann rasiert er sich nicht selbst, und wenn er sich nicht selbst rasiert, dann rasiert er sich selbst. Was denn nun? — Quelle unbekannt) – Das Problem ist verwandt mit dem Problem der „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“.

formale Metasprache Eine Sprache, die als Ausdrucksmittel nur Metasymbole verwendet. Die meisten der hier auftretenden Formeln sind in dieser Sprache formuliert, weswegen wir sie dann konsequenterweise als **Metaformeln** bezeichnen.

Objektsprache Unser Objekt ist die Mathematik, genauer mathematische Formeln, die wir dann entsprechend als Objektformeln bezeichnen.

Die genaue Definition der formalen Metasprache und der Objektsprache[8)] folgt noch.

2.1.1. Aussagen

Wir definieren jetzt einige Begriffe.

Wahrheitswert Wikipedia[57] schreibt dazu:

> Ein **Wahrheitswert** ist in Logik und Mathematik ein *logischer Wert*, den eine Aussage in Bezug auf Wahrheit annehmen kann.
>
> In der zweiwertigen klassischen Logik kann eine Aussage nur entweder *wahr* oder *falsch* sein, die Menge der Wahrheitswerte $\{W, F\}$ hat so zwei Elemente. In mehrwertigen Logiken enthält die Wahrheitswertemenge mehr als zwei Elemente, z. B. in einer dreiwertigen Logik oder einer Fuzzy-Logik, die damit zu den nichtklassischen zählen. Hier wird dann auch neben Wahrheitswerten von *Quasiwahrheitswerten*, *Pseudowahrheitswerten* oder *Geltungswerten* gesprochen.
>
> Die Abbildung der Menge von Aussagen einer (meist formalen) Sprache auf die Wahrheitswertemenge wird Wahrheitswertzuordnung genannt und ist eine aussagenlogisch spezifische Bewertungsfunktion. In der klassischen Logik kann auch explizit die Klasse aller wahren Aussagen beziehungsweise die Klasse aller falschen Aussagen definiert werden. Die Abbildung von Wahrheitswerten der (atomaren) Teilaussagen einer zusammengesetzten Aussage auf die Wahrheitswertemenge heißt Wahrheitswertefunktion oder Wahrheitsfunktion. Die Wertetabelle dieser Funktion im mathematischen Sinn wird auch als Wahrheitstafel bezeichnet und häufig dazu verwendet, die Bedeutung wahrheitsfunktionaler Junktoren anzugeben.

Für die Darstellung der Wahrheitswerte abhängig von der Sprachebene und dem logischen Wert der Aussage definieren wir:

	Aussagewert		
Sprachebene	**wahr**	**falsch**	**Symbolart**
Metasprache	*wahr*	*falsch*	normaler Text
formale Metasprache	true	false	Metasymbol
Objektsprache	$\top$	$\perp$	Objektsymbol

Tabelle 2.1.: Darstellung der Wahrheitswerte

Aussage Wikipedia[30] schreibt dazu:

> Eine **Aussage** im Sinn der aristotelischen Logik ist ein sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist zu *fragen*, ob es wahr oder falsch ist (so genanntes Aristotelisches Zweiwertigkeitsprinzip). Es ist nicht erforderlich, *sagen* zu können, ob das Gebilde wahr oder falsch ist. Es genügt, dass die Frage nach Wahrheit („Zutreffen“) oder Falschheit („Nicht-Zutreffen“) sinnvoll ist, – was zum Beispiel bei Fragesätzen, Ausrufen und Wünschen nicht der Fall ist. Aussagen sind somit Sätze, die Sachverhalte beschreiben und denen man einen Wahrheitswert zuordnen kann.

8) Es wird sogar verschiedene Objektsprachen geben.

Beispiele für Aussagen in Metasprache sind (a) „Morgen scheint die Sonne.“, (b) „Ich bin 1,83 m groß.“, (c) „Ich habe ein rotes Auto und das kann 200 km/h schnell fahren.“, usw. Wie Beispiel (c) zeigt, kann eine Aussage auch aus anderen Aussagen zusammengesetzt sein. Wir definieren daher:

Teilaussage Eine Aussage A heißt eine **Teilaussage**[9] **von** einer Aussage B, wenn sie Teil von A ist. Man sagt dann auch, dass B die Teilaussage A enthält.

echte Teilaussage Eine Teilaussage A von B heißt **echte** Teilaussage von B, wenn A verschieden von B ist.

zerlegbare Aussage Eine Aussage heißt **zerlegbar**[10] wenn sie mindestens eine echte Teilaussage enthält.

atomare Aussage Eine Aussage heißt **atomar**[11], wenn sie nicht zerlegbar ist, d. h. wenn sie keine echte Teilaussage enthält.

Während die Beispiele (a) und (b) atomare Aussagen sind, ist Beispiel (c) zerlegbar. Für alle drei Aussagen ist es sinnvoll zu fragen, ob sie gelten oder nicht; für (a) allerdings nur im Nachhinein und für den zweiten Teil von (c) nur weil klar ist, worauf sich „das“ bezieht. Offensichtlich muss manchmal der Zusammenhang, in dem eine Aussage formuliert wird, bekannt sein. Z. B. ist die Bedeutung von „Ich“ nur dann bekannt, wenn man weiss, von wem die Aussage ist.

2.1.2. Aussagen und Metaoperationen

Zerlegbare Aussagen wie (c) können zum Teil formalisiert werden. Dies wird mit den folgenden Definitionen erreicht:[12]

$\sim A$	$:\Leftrightarrow$	A **gilt nicht**.
$A \Rightarrow B$	$:\Leftrightarrow$	**Wenn** A gilt **dann** gilt auch B.
$A \Leftarrow B$	$:\Leftrightarrow$	A gilt **sofern** B gilt.
$A \Leftrightarrow B$	$:\Leftrightarrow$	A gilt **genau dann wenn** B gilt.
$A \,\&\, B$	$:\Leftrightarrow$	A **und** B.
$A \parallel B$	$:\Leftrightarrow$	A **oder** B.

Offensichtlich sind das alles ebenfalls Aussagen, jetzt aber teilweise formalisiert. (c) lässt sich dann ausdrücken als „‚Ich habe ein rotes Auto‘ & ‚das kann 200 km/h schnell fahren.‘“. $\langle\langle A \Leftarrow B\rangle\rangle$ ist nur eine andere Schreibweise für $\langle\langle B \Rightarrow A\rangle\rangle$. – Ein Symbol für „nicht“ wird hier nicht gebraucht.

Wir nennen & und $\parallel$ **Metaoperationen** und $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ und $\Leftrightarrow$ **Metarelationen**[13]. Die damit gebildeten Aussagen können natürlich auch geklammert werden, um die Reihenfolge der Auswertung eindeutig zu machen. Für den Fall fehlender Klammern sind ihre Prioritäten in der Tabelle 2.3 auf Seite 22 angegeben.

Um Verwechslungen mit den Junktoren zu vermeiden, verwenden wir für die metasprachlichen Operationen „und“ und „oder“ die Symbole $\langle\&\rangle$ und $\langle\parallel\rangle$. A und B können als Operanden von $\langle\Leftrightarrow\rangle$, $\langle\&\rangle$ und $\langle\parallel\rangle$ vertauscht werden, ohne das Ergebnis zu ändern.[14] Wird in einer (Teil-)Aussage

[9] synonym: **Unteraussage**

[10] alternativ: **zusammengesetzt** — wir unterscheiden allerdings die beiden Begriffe. Aus zerlegbar folgt zusammengesetzt, aber nicht immer umgekehrt.

[11] synonym: **unzerlegbar**

[12] Damit es nicht zu Verwechslungen führt, verwenden wir für die metasprachliche Negation nicht das logische Symbol $\langle\neg\rangle$. Wegen (2.1) Seite 20 ist die Definition von $\langle\Leftarrow\rangle$ überflüssig, wird wegen der angegebenen Sprechweise aber dennoch angegeben.

[13] Man könnte Metaoperationen und Metarelationen auch als **Metajunktoren** bezeichnen. Zur Unterscheidung von Operationen und Relationen vergleiche aber auch die Fußnote 33 auf Seite 20.

[14] D. h. die Operationen $\langle\Leftrightarrow\rangle$, $\langle\&\rangle$ und $\langle\parallel\rangle$ sind *kommutativ*.

nur eine der Operationen & oder || verwendet, können die Klammern dort weggelassen und die Operationen in beliebiger Reihenfolge ausgewertet werden, wiederum ohne das Ergebnis zu ändern.[15)] Zusammengefasst ist die Reihenfolge der Operationen und der Auswertung dort beliebig.

2.1.3. Mit Gleichheit verwandte Relationen

2.1.3.1. Vergleichbar

Zwei Objekte A und B sind **vergleichbar**, wenn beide von derselben Objektart sind, d. h. wenn z. B. jeweils beide Mengen, Zeichenfolgen, Zahlen, usw. sind. Dabei muss bei Formeln zwischen der Formel an sich und dem Ergebnis der Formel unterschieden werden. Siehe Beispiel (a).

Intuitiv scheint klar zu sein, was damit gemeint ist. Wenn aber entschieden werden muss, ob z. B. (a) „1+1“ gleich „2“ oder (b) „1+1“ gleich „1 + 1“ ist, muss man erst entscheiden, von welcher Objektart die beiden zu vergleichenden Ausdrücke sind, d. h. *wie* verglichen wird. Wenn sie als jeweiliges Ergebnis der beiden Formeln, verglichen werden, dann ist (a) richtig. Wenn sie als Formeln, d. h. als Zeichenfolgen, verglichen werden, ist (a) falsch. Wenn die Ausdrücke in (b) als Zeichenfolgen verglichen werden, dann ist (b) richtig. Wenn sie als Zeichenketten verglichen werden, ist (b) falsch.

Die folgende Tabelle fasst dass zusammen:

A	B	Objektart	A gleich B
$1+1$	2	Objekt	richtig
$\langle\langle 1+1 \rangle\rangle$	$\langle\langle 2 \rangle\rangle$	Formel	falsch
$\langle\langle 1+1 \rangle\rangle$	$\langle\langle 1\ +\ 1 \rangle\rangle$	Zeichenfolge	richtig
”`1+1`”	”`1 + 1`”	Zeichenkette	falsch

2.1.3.2. Vergleiche

A und B seien Objekte. Dann definieren wir:

$=$ **Gleichheit** $\langle\langle A = B \rangle\rangle$ heißt, dass A und B in den interessierenden Eigenschaften für $=$ übereinstimmen.[16)] Sprechweisen: „A ist *dasselbe* wie B“ oder „A ist *identisch* zu B“ — Inwieweit die Begriffe *Gleichheit* und *Identität* korrelieren, wird hier nicht erörtert.[17)]

$\neq$ **Ungleichheit** $\langle\langle A \neq B \rangle\rangle$ heißt, dass A und B in mindestens einer interessierenden Eigenschaft für $=$ nicht übereinstimmen. Sprechweisen: „A ist *nicht dasselbe* wie B“ (aber vielleicht das gleiche; siehe $\Leftrightarrow$) oder „A ist *nicht identisch* zu B“.

$\equiv$ **Äquivalenz** $\langle\langle A \equiv B \rangle\rangle$ heißt, dass A und B in den interessierenden Eigenschaften für $\equiv$ übereinstimmen. Sprechweisen: „A ist *das gleiche* wie B“ (aber nicht unbedingt dasselbe; siehe $=$) oder „A ist *so wie* B“. — Es kann auch verschiedene Äquivalenzen geben, für die dann verschiedene Bezeichnungen verwendet werden.

$\not\equiv$ **Kontravalenz** $\langle\langle A \not\equiv B \rangle\rangle$ heißt, dass A und B in mindestens einer interessierenden Eigenschaft für $\not\equiv$ nicht übereinstimmen. Sprechweisen: „A ist *nicht das gleiche* wie B“ oder „A ist *nicht so wie* B“.

---

15) D. h. die Operationen & und || sind auch *assoziativ*. Bei den den logischen Operationen $\wedge$ und $\vee$ müssen Kommutativität und Assoziativität durch Axiome gefordert werden. Die Kommutativität von $\Leftrightarrow$ kann abgeleitet werden.

16) Z. B. sind zwei Junktoren üblicherweise dann gleich, wenn sie stets denselben *Wahrheitswert* liefern. Ihre Bezeichnungen oder Symbole können dabei durchaus verschieden sein, interessieren bei der Feststellung der Gleichheit aber nicht. Z. B. bezeichnen $\langle \& \rangle$ und $\langle | \rangle$ dieselbe Operation, haben aber verschiedene Priorität. — siehe Tabelle 2.3 auf Seite 22

17) siehe [37]

$=$, $\neq$, $\equiv$ und $\not\equiv$ bezeichnen wir als **Gleichheitsrelationen**. Gleichheit und Äquivalenz sind **Äquivalenzrelationen**, d. h. sie sind *reflexiv* ($a \sim a$), *transitiv* ((($a \sim b$) & ($b \sim c$)) $\Rightarrow$ ($a \sim c$)) und *symmetrisch* (($a \sim b$) $\Rightarrow$ ($b \sim a$)) – jeweils für alle zulässigen Objekte a, b und c.

Jede interessierende Eigenschaft für $\equiv$ oder eine andere Äquivalenz muss auch eine für $=$ sein. Daraus folgt insbesondere, dass mit $(A = B)$ auch $(A \equiv B)$ und mit $(A \not\equiv B)$ auch $(A \neq B)$ gilt.

2.1.3.3. Definitionen

Seien A und B Aussagen bzw. Objekte[18].

$:\Leftrightarrow$ **Metadefinition** $\langle\langle A :\Leftrightarrow B\rangle\rangle$ heißt, dass die Aussage A *definitionsgemäß gleich* der Aussage B ist. Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B. „*A steht für B*“; A und B können sich gegenseitig ersetzten.

$:=$ **Definition** $\langle\langle A := B\rangle\rangle$ heißt, dass das Objekt A *definitionsgemäß gleich* dem Objekt B ist. Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B. „*A steht für B*“; A und B können sich gegenseitig ersetzten.[19]

Man beachte, dass $:\Leftrightarrow$ und $:=$ verschiedene Sprachebenen sind.

2.2. Notationen

Damit definieren wir für Elemente a und Mengen A und B[20]

$\mathbb{N}$	$:=$	die Menge der **natürlichen Zahlen** ohne 0
$\mathbb{N}_0$	$:=$	die Menge der **natürlichen Zahlen** (einschließlich 0)
$a \in A$	$:\Leftrightarrow$	a ist **Element aus** A
$A \subset B$	$:\Leftrightarrow$	A ist **echte Teilmenge von** B
$A \subseteq B$	$:\Leftrightarrow$	A ist **Teilmenge von** B

$\in$, $\subset$ und $\subseteq$ sind Relationen, genauer **Mengenrelationen**. Gemäß (2.1) Seite 20 sind $\ni$, $\supset$ und $\supseteq$ die Umkehrrelationen dazu (Sprechweisen: … *enthält als Element* … und *ist [echte] Obermenge von*). Es gelten entsprechende Gleichungen wie (2.3) und (2.4) Seite 20. Schließlich sind $\notin$, $\not\subset$, $\not\subseteq$, $\not\ni$, $\not\supset$ und $\not\supseteq$ gemäß (2.2) Seite 20 noch die zugehörigen Negationen.

Wenn wir von einer **natürlichen Zahl** sprechen, meinen wir immer ein Element aus $\mathbb{N}_0$.

2.2.1. Bezeichnungen

Symbole umfassen neben speziellen Symbolen auch Buchstaben, Ziffern und Sonderzeichen. Symbole, für die es kein eigenes typographisches Zeichen gibt, können auch durch Aufeinanderfolge mehrerer typographischer Zeichen, i. Alg. lateinische Buchstaben, dargestellt werden. Wir nennen sie dann **zusammengesetzte Symbole**, im Gegensatz zu den **einfachen Symbolen**. Charakteristisch für ein Symbol ist, dass es ohne Bedeutungsverlust nicht zerlegt werden kann. Ein zusammengesetztes Symbol ist i. Alg. zerlegbar, kann aber auch als atomar, d. h. unzerlegbar, definiert werden, wie z. B. sin als Symbol für die Sinusfunktion. Symbole werden ⟨so⟩ quotiert;

[18] Die Anforderungen an A und B sind intuitiv klar. Insbesondere darf B nicht von einem bisher undefinierten Teil von A abhängig sein.

[19] Nach den Definitionen von $:\Leftrightarrow$ und $:=$ sind zwei Ausdrücke P und Q schon dann gleich, wenn nach der Ersetzung aller Vorkommen von A durch B sowohl in P als auch in Q die resultierenden Ausdrücke $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ gleich sind.

[20] In der Literatur wird ⟨$\subset$⟩ oft in der Bedeutung von ⟨$\subseteq$⟩ verwendet. Wir verwenden ⟨$\subset$⟩ jedoch nur, wenn wir explizit Ungleichheit verlangen.

zerlegbare können aber auch wie Zeichenfolgen quotiert werden. — Die Quotierung ist kein Bestandteil des Symbols!

Wird für bestimmte Objekte ein Symbol verwendet, so nennen wir dies ein **Objektsymbol**. Ist das Objekt eine Funktion, Operation, Relation usw., so nennen wir das Symbol ein **Funktionssymbol**, **Operationssymbol**, **Relationssymbol** usw.

Zeichenketten sind Folgen von einfachen Symbolen, in denen im Prinzip auch Leerstellen und andere nicht druckbare Zeichen zulässig sind.[21] Damit Leerstellen in Zeichenketten leicht bestimmt und sogar gezählt werden können, werden Zeichenketten stets “`in dieser`” Schriftart und Quotierung dargestellt. — Die Quotierung ist kein Bestandteil der Zeichenkette!

Zeichenfolgen sind ähnlich wie Zeichenketten, außer das sie als Bausteine neben einfachen auch zusammengesetzte, aber atomare Symbole enthalten können und Leerzeichen und andere Zwischenraumzeichen nicht zählen. Letztere dienen nur der optischen Trennung der Symbole und der besseren Lesbarkeit. Zeichenfolgen werden stets ⟪in dieser⟫ Quotierung dargestellt. — Die Quotierung ist kein Bestandteil der Zeichenfolge!

Formeln sind in diesem Dokument immer nach vorgegebenen Regeln aufgebaute Zeichenfolgen[22]. Daher werden sie wie Zeichenfolgen quotiert. — Die Quotierung ist kein Bestandteil der Zeichenfolge!

Man kann eine Formel auch dadurch charakterisieren, dass sie ein Element einer vorgegebenen Menge $\mathcal{L}$ von Zeichenfolgen ist.[23] Das ist dann so ziemlich die einfachste Regel.

Wenn eine Zeichenfolge nicht korrekt nach den vorgegebenen Regeln aufgebaut ist bzw. kein Element der vorgegebenen Menge $\mathcal{L}$ ist, werden wir sie *nicht* als Formel bezeichnen, auch nicht als „fehlerhafte Formel“ oder ähnlich. Sie ist dann einfach keine Formel.

Objekte sind z. B. Symbole, Zeichenketten, Zeichenfolgen und Formeln, oder auch Aussagen, Mengen, Zahlen, usw. — ganz allgemein reale oder gedachte Dinge an sich. Eine Formel, die nicht quotiert ist, steht für den Wert dieser Formel, der dann wieder ein Objekt ist. Entsprechend steht ein Symbol, das nicht quotiert ist, für das dadurch bezeichnete Objekt. Z. B. bezeichnet das Symbol $\langle\mathbb{N}\rangle$ die Menge $\mathbb{N}$der natürlichen Zahlen ohne 0.

2.2.2. Quotierung

Zur Verdeutlichung der soeben definierten Quotierungen ein Beispiel:[24]

sin	Objekt	die Sinusfunktion
⟨sin⟩	Symbol (Bezeichnung)	für das Objekt
⟪sin⟫	Zeichenfolge (Formel)	aus dem zusammengesetzten, atomaren Symbol ⟨sin⟩
⟪*sin*⟫	Zeichenfolge (Formel)	aus den einfachen Symbolen $\langle s\rangle$, $\langle i\rangle$ und $\langle n\rangle$
“`sin`”	Zeichenkette	aus den einfachen Symbolen ⟨`s`⟩, ⟨`i`⟩ und ⟨`n`⟩

Die Bezeichnung eines Objekts kann auch aus mehreren Symbolen bestehen, d. h. einer Zeichenfolge oder sogar einer ganzen Formel; z. B. ist die Bezeichnung für das indizierte Objekt a_i gleich ⟪a_i⟫.

[21] Da beim Ausdruck optisch nicht entschieden werden kann, ob ein Zwischenraum (white space) aus einem Tabulator oder evtl. mehreren Leerzeichen besteht, verwenden wir nur einzelne Leerzeichen als Zwischenraumzeichen und vermeiden Zeilenumbrüche.

[22] Es kann verschiedene Arten von Formeln geben, z. B. aussagenlogische, prädikatenlogische und solche, die ein Taschenrechner auswerten kann.

[23] Die Formel wird dann auch **Wort** der **Sprache** $\mathcal{L}$ genannt - besonders, wenn die Elemente aus $\mathcal{L}$ Zeichenketten statt Zeichenfolgen sind. Wir bleiben der Klarheit willen bei „Formel“.

[24] Was atomare und was zerlegbare Symbole sind, muss jeweils definiert werden, bzw. ergibt sich aus dem Zusammenhang.

2.2.3. Weitere Bezeichnungen

Folge

Tupel Ein n-**Tupel** ist eine endliche Folge $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

- n, die **Länge**, d. h. die Anzahl der **Komponenten** aus $\vec{a}$, ist eine natürliche Zahl.

  $\mathrm{len}\ \vec{a} \coloneqq \mathrm{len}(\vec{a}) \coloneqq n$
- Die a_i für $1 \leqslant i \leqslant n$ sind Elemente meist vorgegebener Mengen.
- $\mathrm{set}\ \vec{a} \coloneqq \mathrm{set}(\vec{a}) \coloneqq$ die Menge aller Komponenten a_i aus $\vec{a}$.

Für $n = 0$ ist $\vec{a} = ()$, das **leere Tupel** oder 0-**Tupel**.

Wo immer $\vec{a}$ und a_i mit $i \in \mathbb{N}_0$ gemeinsam vorkommen, ist a_i die i-te Komponente aus $\vec{a}$.

Relation Eine n-**stellige Relation**[25] R ist ein (1+n)-Tupel $(G, A_1, \ldots, A_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

- n, die **relationale Stelligkeit**, ist eine natürliche Zahl.

  $\mathrm{stel_r}\ R \coloneqq \mathrm{stel_r}(R) \coloneqq n$
- Die A_i für $1 \leqslant i \leqslant n$ sind Mengen, die **Trägermengen** (carrier) von R.

  $\mathrm{car}_i R \coloneqq \mathrm{car}_i(R) \coloneqq A_i$
- G, der **Graph** von R, ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A_1 \times \ldots \times A_n$.

  $\mathrm{graph}\, R \coloneqq \mathrm{graph}(R) \coloneqq G$ (oft einfach mit R bezeichnet)
- $R(a_1, \ldots, a_n) :\Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in G$

Für $n = 0$ ist $G \subseteq \{()\}$[26], d. h. $R()$ ist entweder *wahr* (true) oder *falsch* (false).
Für $n = 1$ ist $G \subseteq A_1$, d. h. R kann als Teilmenge von A_1 aufgefasst werden.
Für $n = 2$ heißt die Relation **binär** und man schreibt $\langle\!\langle xRy \rangle\!\rangle$ statt $\langle\!\langle R(x, y) \rangle\!\rangle$ bzw. $\langle\!\langle (x, y) \in R \rangle\!\rangle$.

Ist $R = (G, M, \ldots, M)$, so heißt R eine n-stellige Relation **auf**[27] M.

Ist $|G|$ endlich, so nennen wir auch R **endlich**.

Umkehrrelation Die **Umkehrrelation** einer binären Relation (G, A, B) ist die Relation (G', B, A) mit $G' \coloneqq \{(b, a) \mid (a, b) \in G\}$. Üblicherweise wird das zugehörige Relationssymbol gespiegelt.

Funktion Eine n-**stellige Funktion**[28] ist ein (1+n+1)-Tupel $f = (G, A_1, \ldots, A_n, B)$ mit folgenden Eigenschaften:

- n, die **Stelligkeit**[29], ist eine natürliche Zahl.

  $\mathrm{stel_f}\ f \coloneqq \mathrm{stel_f}(f) \coloneqq n$
- f ist eine (n+1)-stellige Relation.
- Zu jedem n-Tupel $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a_1, \ldots, a_n, b) \in G$, den **Funktionswert** von $\vec{a}$.

  $f\vec{a} \coloneqq fa_1 \ldots a_n \coloneqq f(\vec{a}) \coloneqq f(a_1, \ldots, a_n) \coloneqq b$ [30]

---

25) siehe [51]
26) Das kartesische Produkt enthält nur noch das 0-Tupel ().
27) alternativ: **in**
28) siehe [35]
29) Die Werte der Stelligkeit als Relation und als Funktion sind verschieden, d. h. es gilt stets: $\mathrm{stel_r}(f) = \mathrm{stel_f}(f) + 1$.
30) $f(a_1, \ldots, a_n)$ und $f(a_1, \ldots, a_n, b)$ sind wohl zu unterscheiden. Ersteres ist ein Funktionsaufruf mit einem Funktionswert, letzteres eine Relation mit einem Wahrheitswert.

- $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ ist der **Definitionsbereich** (domain) von f.

  $\operatorname{dom} f :\!= \operatorname{dom}(f) :\!= A_1 \times \ldots \times A_n$

- B ist der **Zielbereich** (target) von f

  $\operatorname{tar} f :\!= \operatorname{tar}(f)$

Für $n = 0$ ist $G = ((), b)$ für ein $b \in B$ und somit $f() = b$. f kann damit auch als Konstante b aufgefasst werden.[31)]

Man sagt: f ist eine n-stellige Funktion von $A_1 \times \ldots \times A_n$ **nach**[32)] B (Schreibweise: $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to B$) oder, im Fall $n = 1$, f ist eine Funktion von A nach B (Schreibweise: $f : A \to B$). Mit $A :\!= A_1 \times \ldots \times A_n$ kann für $n > 0$ jede Funktion als 1-stellig aufgefasst werden.

Operationen in oder auf einer Menge M sind n-stellige Funktionen $M^n \to M$. Für eine **binäre**, d. h. 2-stellige Operation $\circledast$ schreibt man i. Alg. ⟪$x \circledast y$⟫ statt ⟪$\circledast(x, y)$⟫. Wenn nicht anders angegeben, sind Operationen stets binär. 0-stellige Operationen können wieder als Konstante aufgefasst werden.

Um Missverständnisse zu vermeiden, werden wir den Begriff „Operator" nicht verwenden.

Junktoren sind aussagenlogische Relationen und Operationen.[33)]

2.2.4. Relationen und Operationen

Als Beispielsymbol für unäre Operationen wird $\langle \ominus \rangle$ und für binäre Operationen $\langle \circledast \rangle$ verwendet. Beispielsymbole für binäre Relationen sind $\langle \prec \rangle$ und $\langle \preceq \rangle$, für ihre Umkehrrelationen $\langle \succ \rangle$ bzw. $\langle \succeq \rangle$ sowie für ihre **Negationen** $\langle \nprec \rangle$ bzw. $\langle \npreceq \rangle$.[34)] Wenn nichts anderes gesagt wird, gelte mit diesen Symbolen bei gegebenem $\langle \prec \rangle$ stets:

$$(A \succ B) \quad :\Leftrightarrow \quad (B \prec A) \qquad \text{, die **Umkehrrelation** von } \prec \tag{2.1}$$
$$(A \nprec B) \quad :\Leftrightarrow \quad \sim (A \prec B) \qquad \text{, die **Negation** von } \prec \tag{2.2}$$

Dabei ist $\langle \succ \rangle$ ist die waagerechte Spiegelung von $\langle \prec \rangle$ und statt des senkrechten kann auch ein schräger Strich genommen werden.

Ist $\langle \succ \rangle$, $\langle \preceq \rangle$ oder $\langle \succeq \rangle$, statt $\langle \prec \rangle$ gegeben, so müssen die Symbole entsprechend ausgetauscht werden. Entsprechend für die nächsten beiden Definitionen.

Je nachdem ob $\prec$ oder $\preceq$ gegeben ist gelte ferner:

$$(A \preceq B) \quad :\Leftrightarrow \quad ((A \prec B) \parallel (A = B)) \tag{2.3}$$
$$(A \prec B) \quad :\Leftrightarrow \quad ((A \preceq B) \,\&\, (A \neq B)) \tag{2.4}$$

---

31) Bei der Schreibweise ohne Klammern steht da statt ⟪$f()$⟫ nur noch ⟪f⟫ und statt ⟪$f() = b$⟫, insgesamt also nur noch ⟪$f = b$⟫.

32) alternativ: **in**

33) Ein n-stelliger Junktor J sei eine Operation und somit eine Funktion. Wegen $M = \{\text{true}, \text{false}\}$ kann er auch als eine n-stellige Relation J' aufgefasst werden: $J' :\!= \{\vec{a} \in M^n \mid J(\vec{a}) = \text{true}\}$.
Umgekehrt kann eine n-stellige aussagenlogische Relation J' mittels: $J''(\vec{a}) :\!= \text{true}$ für $\vec{a} \in J'$, false sonst, für $\vec{a} \in M^n$, als n-stellige Operation aufgefasst werden.
Falls $J(\vec{a}) = \text{true}$ ist $\vec{a} \in J'$ und somit $J''(\vec{a}) = \text{true}$. Für $J(\vec{a}) = \text{false}$ ist $\vec{a} \notin J'$ und somit $J''(\vec{a}) = \text{false}$. Also ist $J = J''$ und so können die n-stelligen aussagenlogischen Relationen und Operationen einander eineindeutig zugeordnet werden.
Daher sind in der Aussagenlogik Relationen und Operationen nicht von vornherein unterscheidbar. Wegen der Verabredungen in Unterabschnitt 2.2.4 muss für die verwendeten Junktoren daher jeweils wohl definiert sein, ob sie als Relation und Operation zu verstehen sind.

34) Die Relationen brauchen keine Ordnungsrelationen sein, auch wenn die angegebenen Symbole dies nahe legen. Wenn eine der Relationen $\prec, \preceq, \succ$ oder $\succeq$ definiert ist, sind wegen (2.1), (2.3) und (2.4) auch die anderen drei Relationen definiert sowie wegen (2.2) auch $\nprec$, $\npreceq$, $\nsucc$ und $\nsucceq$. Der senkrechte Strich bei den Negationen kann auch schräg sein, wie z. B. bei $\neq$.

Man beachte, dass, wenn man $\langle :\Leftrightarrow \rangle$ durch $\langle \Leftrightarrow \rangle$ ersetzt, weder (2.3) aus (2.4) folgt noch umgekehrt. (2.3) und (2.4) folgen aber dann auseinander, wenn aus $\langle \prec \rangle$ die Ungleichheit bzw. aus der Gleichheit $\langle \preceq \rangle$ folgt. Beispiele dazu sind in der Tabelle 2.2 angegeben.

	$A,\ A$	$A,\ B$	$B,\ A$	$B,\ B$	
$=$	$A = A$			$B = B$	
$\prec$		$A \prec B$			Es gilt (2.3)
$\preceq$	$A \preceq A$	$A \preceq B$		$B \preceq B$	und (2.4)
$\prec$		$A \prec B$		$B \prec B$	Es gilt (2.3)
$\preceq$	$A \preceq A$	$A \preceq B$		$B \preceq B$	aber nicht (2.4)
$\prec$		$A \prec B$			Es gilt (2.4)
$\preceq$	$A \preceq A$	$A \preceq B$			aber nicht (2.3)

Tabelle 2.2.: Beispiele für $\prec$ und $\preceq$

Wird eine binäre Relation $\prec$ zusammen mit einer binären Operation $\circledast$ oder einer weiteren binären Relation $\approx$ verwendet wird, treffen wir folgende Vereinbarung:[35)]

$A \circledast B \prec C$	steht für	$A \circledast B$	&	$B \prec C$
$A \prec B \circledast C$	steht für	$A \prec B$	&	$B \circledast C$
$A \prec B \approx C$	steht für	$A \prec B$	&	$B \approx C$

Besondere Vereinbarungen für die unäre Operation $\langle \ominus \rangle$ treffen wir nicht.

Für den Fall fehlender Klammern sind die Prioritäten in der Tabelle 2.3 auf der nächsten Seite angegeben. Damit wären dann alle Klammern in diesem Unterabschnitt 2.2.4 überflüssig.

2.2.5. Prioritäten

Die Tabelle 2.3 auf der nächsten Seite listet zur Vermeidung von Klammern die Prioritäten der in diesem Dokument verwendeten Operationen, Relationen, Junktoren und Definitionen in absteigender Folge von höherer zu niedrigerer Priorität, d. h. von starker zu schwacher Bindung auf.[36)] Das Weglassen redundanter Klammern wird in diesem Kapitel 2 nicht weiter thematisiert.[37)] Zur besseren Verständlichkeit werden aber gelegentlich auch redundante Klammern verwendet, insbesondere wenn Prioritäten unklar oder in der Literatur auch anders definiert sind. Die Prioritäten der Junktoren wurden aus [1] Kapitel 1.1 Seite 5 entnommen und ergänzt und die der Metaoperationen daran angeglichen.

Für Operationen derselben Priorität wählen wir in diesem Dokument Rechtsklammerung[38)].

35) wird auch in der Literatur verwendet, z. B. z. B. [1], Notationen Seite xxi

36) Priorität 1 ist höher und bindet damit stärker als Priorität 2, usw.

37) Gesetzt den Fall, dass ASBA die Prämissen und Konklusionen eines mathematischen Satzes richtig und die Beweisschritte, z. B. durch fehlerhafte Interpretation einer Formel, falsch einliest, ansonsten aber richtig arbeitet. Dann kann man folgende Fälle unterscheiden:
— Ein falscher Satz kann dadurch nicht als richtig bewertet werden.
— Ein richtiger Satz wird wahrscheinlich auch bei eigentlich richtigem Beweis als nicht bewiesen gelten, was natürlich unbefriedigend ist.
— In äußerst unwahrscheinlichen Fällen kann dabei auch ein eigentlich falscher Beweis in einen richtigen verwandelt werden, was zwar schön ist, aber leider steht in der Dokumentation dann ein falscher Beweis.
In keinem Fall wird durch diesen Fehler die Menge der richtigen Sätze durch einen falschen Satz „verunreinigt".

38) Die Symbole unärer Operationen stehen in diesem Dokument stets links *vor* dem Operanden, so dass es für sie nur Rechtsklammerung geben kann. Zur Rechtsklammerung bei binären Operationen ein Zitat aus [1] Kapitel 1.1 Seite 5: „Diese hat gegenüber Linksklammerung Vorteile bei der Niederschrift von Tautologien in $\rightarrow$, [...]". Die meisten Autoren bevorzugen Linksklammerung, was natürlicher erscheint. Dann sollte man aber für die Potenz doch noch Rechtsklammerung wählen, sonst ist $\left\langle\!\left\langle a^{x^y} = (a^x)^y = a^{(x*y)} \right\rangle\!\right\rangle$ und nicht wie wahrscheinlich erwünscht $\left\langle\!\left\langle a^{(x^y)} \right\rangle\!\right\rangle$.

Klammern	( ) ⟨ ⟩ ⟪ ⟫ “ ”
Operationen haben unterschiedliche Priorität.	
Unäre Operationen 1) 2)	$\ominus$ $\neg$ $\sim$
Binäre Operationen für Mengen	$\times$ $\cup$ $\cap$
Binäre Operationen 1)	$\circledast$
Binäre Junktoren 2)	$\wedge$ $\uparrow$ $\vee$ $\dot\vee$ $\downarrow$ $\leftarrow$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$
Binäre Relationen haben gleiche Priorität.	
Binäre Relationen für Mengen 3)	$\in$ $\ni$ $\subset$ $\subseteq$ $\supset$ $\supseteq$
Binäre Relationen 1)	$\prec$ $\nprec$ $\preceq$ $\npreceq$ $\succ$ $\succeq$
Gleichheitsrelation 4)	$=$ $\neq$ $\equiv$ $\not\equiv$
Ableitungsrelation 5)	$\vdash$
Ersetzung 5)	$\leftrightarrows$ $\leftarrowtail$
Sonstige binäre Verknüpfungen haben unterschiedliche Priorität.	
Definition 6)	$\coloneqq$
Binäre Metaoperationen 7) 8)	& $\Vert$ $\vert$ $\Leftarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Rightarrow$
Metadefinition 6)	$:\Leftrightarrow$
Natürliche Sprache	
Innerhalb natürlicher Sprache deren Strukturelemente, z. B. Satzzeichen 9)	. , ; usw.

1 siehe Unterabschnitt 2.2.4 auf Seite 20
2 siehe Tabelle 2.4 auf Seite 29
3 siehe Unterabschnitt 2.2.1 auf Seite 17
4 siehe Paragraph 2.1.3.2 auf Seite 16
5 siehe Unterabschnitt 3.1.1 auf Seite 34
6 siehe Paragraph 2.1.3.3 auf Seite 17
7 siehe Unterabschnitt 2.1.2 auf Seite 15
8 ⟨|⟩ wird nur bei den Schlussregeln (siehe Unterabschnitt 2.3.3 auf Seite 25) verwendet. Zwar bezeichnen ⟨&⟩ und ⟨|⟩ dieselbe Operation, aber je nach verwendetem Symbol hat sie eine unterschiedliche Priorität.
9 Innerhalb von Formeln können Satzzeichen eine andere Bedeutung und Priorität haben.

Tabelle 2.3.: Prioritäten in abnehmender Reihenfolge

2.3. Beweise in ASBA

Die Regeln zur Formulierung und Prüfung der Beweise müssen in ASBA fest codiert werden. Sie sind quasi die Axiome von ASBA und sollten daher möglichst wenig voraussetzen. In ASBA wird dazu ein *Genzen-Kalkül*[39)] verwendet. Die Definition von *Schlussregel* und *Beweis* ist in diesem Dokument ASBA-spezifisch, um später eine leichtere Umsetzung in ein Programm zu erreichen. Insbesondere müssen alle abzuspeichernden Mengen endlich sein. Dies berücksichtigen wir in den Beispielen, fordern zunächst aber nicht notwendig Beschränktheit. Zuerst brauchen wir aber noch ein paar Definitionen.

2.3.1. Definitionen und Verabredungen

Zu $\langle\text{len}\rangle$ und $\langle\text{set}\rangle$ Vergleiche die Definition von *n-Tupel* im Unterabschnitt 2.2.3 auf Seite 19.

$$
\begin{array}{lcll}
|M| & := & \text{Kardinalität von } M & \text{, die \textbf{Anzahl der Elemente} aus } M \\
M^n & := & M \times \ldots \times M \quad \text{, für } n \in \mathbb{N}_0 & \text{, das \textbf{kartesische Produkt} aus } n \text{ Mengen } M \\
M^0 & = & \{()\} & \text{, wobei () das \textbf{0-Tupel} ist} \\
\mathfrak{T}(M) & := & \{\vec{a} \in M^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} & \text{, die Menge der \textbf{Tupel über} } M \text{ (\textbf{Tupelmenge})} \\
(A,B)^< & := & A & \text{, die \textbf{linke Seite} eines geordneten Paares.} \quad (2.5) \\
(A,B)^> & := & B & \text{, die \textbf{rechte Seite} eines geordneten Paares.} \quad (2.6) \\
\mathfrak{P}(M) & := & \{A \mid A \subseteq M\} & \text{, die \textbf{Potenzmenge} der Menge } M \quad (2.7) \\
\mathfrak{P}_e(M) & := & \{A \subseteq M \mid |A| \in \mathbb{N}_0\} & \text{, die \textbf{endlichen Teilmengen} von } M \\
\mathfrak{R}(M) & := & \{R \mid R \subseteq M \times M\} & \text{, die Menge der \textbf{binären Relationen} in } M \quad (2.8) \\
\mathfrak{R}_e(M) & := & \{R \subseteq M \times M \mid |R| \in \mathbb{N}_0\} & \text{, die \textbf{endlichen binären Relationen} in } M \\
\vdash_R & := & R & \text{, für Relationen } R \in \mathfrak{R}(\mathfrak{P}(\mathcal{L})) \quad (2.9)
\end{array}
$$

Offensichtlich gilt für Mengen M und N:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathfrak{P}_e(M) \subseteq \mathfrak{P}(M) & , & \mathfrak{R}_e(M) \subseteq \mathfrak{R}(M) & (2.10) \\
\mathfrak{R}(M) = \mathfrak{P}(M \times M) = \mathfrak{P}(M^2) & , & \mathfrak{R}_e(M) = \mathfrak{P}_e(M \times M) = \mathfrak{P}_e(M^2) & (2.11) \\
\mathfrak{P}(M) \subset \mathfrak{P}(N) & \Leftrightarrow & \mathfrak{P}_e(M) \subset \mathfrak{P}_e(N) \quad \Leftrightarrow \quad M \subset N & \\
\mathfrak{R}(M) \subset \mathfrak{R}(N) & \Leftrightarrow & \mathfrak{R}_e(M) \subset \mathfrak{R}_e(N) \quad \Leftrightarrow \quad M \subset N & \\
\vec{a} \in \mathfrak{T}(M^2) & \Leftrightarrow & \text{set}(\vec{a}) \in \mathfrak{R}_e(M) & (2.12)
\end{array}
$$

2.3.2. Formeln und Ableitungen

Im Folgenden sei $\mathcal{L}$ stets eine gegebene Menge von Formeln, z. B. alle korrekten Formeln der Aussagenlogik oder der Prädikatenlogik. Für die folgenden Betrachtungen ist aber nur nötig, dass die Elemente aus $\mathcal{L}$ Zeichenfolgen sind. Die Teilmengen von $\mathcal{L}$ nennen wir **Formelmengen[]**. Es sind genau die Elemente aus $\mathfrak{P}(\mathcal{L})$.

Bei einem Beweis werden aus einer Formelmenge Γ von Axiomen und schon bewiesenen Formeln mittels zulässiger [40)] Ableitungen die Formeln einer Formelmenge Δ abgeleitet; Schreibweise: $\langle\!\langle\Gamma \vdash \Delta\rangle\!\rangle$.

Für Teilmengen Γ und Δ von $\mathcal{L}$ sei also:

39) siehe [1] Kapitel 1.4 und [52, 54]

40) Was *zulässig* heißt, muss im entsprechenden Kontext jeweils definiert sein. Üblicherweise sind das bestimmte Ableitungsregeln und Ersetzungen.

- $\Gamma \vdash \Delta$:⇔ Γ **ableitbar** Δ; oder auch Γ **beweisbar** Δ.
- $\Gamma \vdash \Delta$ nennen wir auch eine **Ableitung in** $\mathcal{L}$. Damit ist (Γ, Δ) ein Element einer binären Relation $\vdash$ in $\mathfrak{P}(\mathcal{L})$, einer sogenannten **Ableitungsrelation**.
- Wenn wir von einer Ableitung **a** sprechen, meinen wir immer ein Element einer Ableitungsrelation, d. h. ein geordnetes Paar, z. B. $(\Gamma, \Delta) \in \mathfrak{P}(\mathcal{L}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{L})$, dargestellt als $\Gamma \vdash \Delta$.
- Um möglicherweise verschiedene Ableitungsrelationen unterscheiden zu können, indizieren wir $\langle\vdash\rangle$ ggf. mit der zugrundeliegenden Relation R, d. h. wir schreiben $\langle\vdash_R\rangle$ und sprechen dann von R-**ableitbar**, R-**beweisbar** und R-**Ableitung**.

Zur Vereinfachung der Darstellung und besseren Lesbarkeit treffen wir noch folgende Vereinbarungen für die beiden Seiten von $\langle\!\langle \Gamma \vdash \Delta \rangle\!\rangle$ (natürlich nur, wenn dies nicht zu Verwechslungen führt):

- Eine Aufzählung von Formelmengen[] und einzelnen Formeln steht für die Vereinigung der Formelmengen[] mit der Menge der einzeln angegebenen Formeln. Z. B. steht $\langle\!\langle \Gamma, \alpha \vdash \beta \rangle\!\rangle$ für $\langle\!\langle (\Gamma \cup \{\alpha\}) \vdash \{\beta\} \rangle\!\rangle$.
- Diese Aufzählungen können auch leer sein und stehen dann für die leere Menge. Z. B. steht $\langle\!\langle \vdash \alpha \to (\beta \to \alpha) \rangle\!\rangle$ für $\langle\!\langle \varnothing \vdash \{\alpha \to (\beta \to \alpha)\} \rangle\!\rangle$.
- Ist die Aufzählung links vom Relationssymbol $\langle\vdash\rangle$ leer, kann auch das Relationssymbol wegfallen. Im letzten Beispiel also einfach $\langle\!\langle \{\alpha \to (\beta \to \alpha)\} \rangle\!\rangle$. Das entspricht dann einem **Axiom**.

Im Folgenden halten wir uns bei der Verwendung von Buchstaben so weit wie möglich an folgende Vereinbarungen:[41)]

griechisch, klein:	$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	Formel	$\in \mathcal{L}$
griechisch, groß:	$\Gamma, \Delta, \Theta, \ldots$	Formelmenge	$\in \mathfrak{P}(\mathcal{L})$
lateinisch, fett, klein:	$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$	Ableitung	$\in \mathfrak{P}(\mathcal{L})^2$
lateinisch, fett, groß:	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	Ableitungsrelation	$\in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathcal{L})^2) = \mathfrak{R}(\mathfrak{P}(\mathcal{L}))$

Damit definieren wir folgende Aussagen:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Ableitungen aus } \mathbf{A} \text{ lassen sich die aus } \mathbf{B} \text{ ableiten.} \tag{2.13}$$

$$\frac{\vec{\mathbf{a}}}{\vec{\mathbf{b}}} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Komponenten aus } \vec{\mathbf{a}} \text{ lassen sich die aus } \vec{\mathbf{b}} \text{ ableiten.} \tag{2.14}$$

$$\frac{\mathbf{a}_1 \mid \ldots \mid \mathbf{a}_n}{\mathbf{b}_1 \mid \ldots \mid \mathbf{b}_m} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Mit den Ableitungen } \mathbf{a}_i \text{ lassen sich die } \mathbf{b}_j \text{ ableiten.} \tag{2.15}$$

wobei in der letzten Definition $1 \leqslant i \leqslant n$ und $1 \leqslant j \leqslant m$ sei und die $\mathbf{a}_i$ und die $\mathbf{b}_j$ dabei jeweils beliebig permutiert werden können. $\langle|\rangle$ und Bruchstrich stehen für die Metaoperationen $\langle\&\rangle$ und $\langle\Rightarrow\rangle$.[42)] Wir nennen alle drei Formen **Schlussregeln**[43)]. Die Elemente aus A bzw. die Komponenten a_i nennen wir die **Prämissen** und die Elemente aus B bzw. die Komponenten b_j die **Konklusionen**[44)] der Schlussregel. Offensichtlich gilt:

$$\frac{a_1 \mid \ldots \mid a_n}{b_1 \mid \ldots \mid b_m} \Leftrightarrow \frac{\vec{a}}{\vec{b}} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{set}(\vec{a})}{\operatorname{set}(\vec{b})} \tag{2.16}$$

Wir nennen eine Schlussregel auch einen **formalen Satz** und nennen sie **beschränkt**, wenn sie nur endlich viele Prämissen und Konklusionen hat. Die Schlussregeln nach (2.14) und (2.15) sind per se

41) Die letzte Gleichung ergibt sich aus (2.11) auf Seite 23.
42) Der Bruchstrich hat die übliche Priorität, | die schwächste. Man beachte, dass Zähler und Nenner auch leer sein können, d. h. n und m gleich 0 sein dürfen. In der Praxis liegen sie bei kleinen Werten, typischerweise 0, 1 oder 2.
43) Genau genommen nur um die Darstellung einer Schlussregel. Die Exakte Definition erfolgt im Unterabschnitt 2.3.3 auf der nächsten Seite.
44) synonym: **Folgerungen**

beschränkt. Die nach (2.13) genau dann, wenn **A** und **B** endliche Mengen sind, d. h. wenn sie Elemente aus

Die Mengen der Prämissen und Konklusionen dürfen auch leer sein. Dies führt zu den folgenden Spezialfällen:

> Eine Schlussregel $\frac{A}{\varnothing}$ ohne Konklusionen ist immer gültig.
>
> Ein Menge B von Ableitungen, die als Axiome dienen sollen, kann als Schlussregel $\frac{\varnothing}{B}$ ohne Prämissen repräsentiert werden.

2.3.3. Schlussregeln

Wir betrachten zuerst noch die Menge der binären Relationen[45] in $\mathfrak{P}(\mathcal{L})$. Sei also R eine solche binäre Relation und $A \in R$. Dann gilt wegen (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) und (2.9) auf Seite 23:

$$\begin{array}{llll} A \in R \in \mathfrak{R}(\mathfrak{P}(\mathcal{L})) & & & \\ A = (A^<, A^>) & \text{und es gilt} & A^<, A^> \subseteq \mathcal{L} & \\ A^< \vdash_R A^> & \text{oder einfach} & A^< \vdash A^> & \text{ist eine } R\text{-Ableitung} \\ A^< \; R\text{-ableitbar} \; A^> & \text{oder einfach} & A^< \; \text{ableitbar} \; A^> & \end{array}$$

Nach diesen Vorbereitungen fassen wir noch mal zusammen:
Ein geordnetes Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{K}) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathcal{L})^2)^2 = \mathfrak{R}(\mathfrak{P}(\mathcal{L}))^2$ heißt eine **Schlussregel für** $\mathcal{L}$, geschrieben $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$; und es gilt:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{P} \in \mathfrak{R}(\mathfrak{P}(\mathcal{L})) & \text{, die } \textbf{Prämissen} & \text{, eine Menge von } \mathcal{P}\textbf{-Ableitungen}. \\ \mathcal{K} \in \mathfrak{R}(\mathfrak{P}(\mathcal{L})) & \text{, die } \textbf{Konklusionen} & \text{, eine Menge von } \mathcal{K}\textbf{-Ableitungen}. \\ \mathbf{a} \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow & \mathbf{a} = (\Gamma, \Delta) \;\; \& \;\; \Gamma, \Delta \in \mathfrak{P}(\mathcal{L}) & \text{, Schreibweise: } \Gamma \vdash_{\mathcal{P}} \Delta \\ \mathbf{a} \in \mathcal{K} \quad \Rightarrow & \mathbf{a} = (\Gamma, \Delta) \;\; \& \;\; \Gamma, \Delta \in \mathfrak{P}(\mathcal{L}) & \text{, Schreibweise: } \Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \Delta \end{array}$$

mit Γ und Δ jeweils passend.

***** Fehlende Verweise: Ableitungsmenge, $\neq$, true, $\vdash$, $\vdash_R$. *****

Die Schlussregel entspricht der Aussage:

> *Mit den Prämissen aus $\mathcal{P}$ lassen sich alle Konklusionen aus $\mathcal{K}$ ableiten*[46].

Die Schlussregel heißt **allgemeingueltig**, wenn aus den Prämissen alle Konklusionen abgleitet werden können. In diesem Fall kann sie zur zulässigen Transformation von weiteren Formeln dienen.

Die Mengen der Prämissen und Konklusionen sowie die beiden Seiten einer Ableitung dürfen auch leer sein. Dies führt zu den folgenden semantischen Spezialfällen:

- Eine Ableitung $(A, \varnothing)$ ist trivial allgemeingültig. Daher können solche Prämissen und Konklusionen ohne Probleme weggelassen werden.
- Ein Menge B von Formeln, die Axiome sein sollen, kann durch eine Prämisse $(\varnothing, B)$ repräsentiert werden.
- Ein Menge B von Formeln, die als allgemeingültig zu beweisen sind, kann durch eine Konklusion $(\varnothing, B)$ repräsentiert werden.

[45] siehe Unterabschnitt 2.2.3 auf Seite 19
[46] mittels noch zu definierender *zulässiger Transformationen*

Wenn eine Schlussregel $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$ beschränkt ist, sind $\mathcal{P}$ und $\mathcal{K}$ endliche Mengen und es gibt wegen (2.12) auf Seite 23 zwei Tupel $\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{k}} \in \mathfrak{T}(\mathfrak{P}(\mathcal{L})^2)$, so dass gilt: [47)]

$$\begin{array}{llllllll} \mathcal{P} & = & \mathrm{set}(\vec{\mathbf{p}}) & , \mathcal{K} & = & \mathrm{set}(\vec{\mathbf{k}}) & & \\ N & \geqslant & |\mathcal{P}| & , M & \geqslant & |\mathcal{K}| & , \text{mit } N, M \in \mathbb{N}_0 & \\ \vec{\mathbf{p}} & = & \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N\} & , \vec{\mathbf{k}} & = & \{\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_M\} & & \\ \mathbf{p}_n & = & (\mathbf{p}_n^<, \mathbf{p}_n^>) & , \mathbf{k}_m & = & (\mathbf{k}_m^<, \mathbf{k}_m^>) & , \text{für } 1 \leqslant n \leqslant N, 1 \leqslant m \leqslant M & \\ \mathbf{p}_n^< & \vdash_{\mathcal{P}} & \mathbf{p}_n^> & , \mathbf{k}_m^< & \vdash_{\mathcal{K}} & \mathbf{k}_m^> & , \text{für } 1 \leqslant n \leqslant N, 1 \leqslant m \leqslant M & \end{array} \tag{2.17}$$

also

$$\begin{array}{lll} \vec{\mathbf{p}} & = & \{(\mathbf{p}_n^<, \mathbf{p}_n^>) \mid 1 \leqslant n \leqslant N\} \\ \vec{\mathbf{k}} & = & \{(\mathbf{k}_m^<, \mathbf{k}_m^>) \mid 1 \leqslant m \leqslant M\} \end{array}$$

und wir nennen auch das Paar $(\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{k}})$ Schlussregel. Diese ist per se beschränkt und ein Element aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{P}(\mathcal{L})^2)^2$. Nun haben wir alternative Schreibweisen für beschränkte Schlussregeln:[48)]

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{set}(\vec{\mathbf{p}})}{\mathrm{set}(\vec{\mathbf{k}})} \Leftrightarrow \frac{\vec{\mathbf{p}}}{\vec{\mathbf{k}}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{p}_1^< \vdash_{\mathcal{P}} \mathbf{p}_1^> \mid \ldots \mid \mathbf{p}_N^< \vdash_{\mathcal{P}} \mathbf{p}_N^>}{\mathbf{k}_1^< \vdash_{\mathcal{K}} \mathbf{k}_1^> \mid \ldots \mid \mathbf{k}_M^< \vdash_{\mathcal{K}} \mathbf{k}_M^>} \text{ , \textbf{Schlussregel} oder \textbf{formaler Satz}} \tag{FS}$$

2.3.4. Beweise

Für einen **Beweis** in ASBA ist stets gegeben:[49)]

$$\begin{array}{llll} \mathcal{L} & & & \text{, eine Menge von Formeln, die zugrundeliegende \textbf{Sprache}.} \\ \mathcal{E} & \subseteq & \{E \mid E : \mathcal{L} \to \mathcal{L}\} & \text{, eine Menge von Funktionen, die \textbf{Ersetzungen}.} \\ \mathcal{C} & \in & \mathfrak{R}(\mathfrak{R}(\mathfrak{P}(\mathcal{L}))) & \text{, eine Menge von \textbf{Schlussregeln}.} \\ \mathcal{E} & \in & \mathfrak{R}(\mathfrak{P}(\mathcal{L})) & \text{, eine Menge von Ableitungen, die \textbf{Ergebnisse}.} \end{array}$$

Die *Ersetzungen* sorgen z. B. dafür, dass aus einer allgemeingültigen Formel wie $\langle\!\langle \alpha \to (\beta \to \alpha) \rangle\!\rangle$ z. B. die allgemeingültige Formel $\langle\!\langle \gamma \to (\delta \to \gamma) \rangle\!\rangle$ abgeleitet werden kann. Die *Schlussregeln* geben erlaubte Schlussfolgerungen aus gegebenen Elementen an und umfassen auch die Prämissen eines Satzes. Die *Ergebnisse* schließlich sind das, was mittels eines Beweises aus den gegebenen Prämissen $\mathcal{L}$, $\mathcal{E}$ und $\mathcal{C}$ gefolgert werden soll.

Im Fall von beschränkten Schlussregeln können statt $\mathcal{C}$ und $\mathcal{E}$ auch

$$\begin{array}{llll} \vec{\mathcal{C}} & \in & \mathfrak{T}(\mathfrak{T}(\mathfrak{P}(\mathcal{L})^2)^2) & \text{, ein Tupel aus \textbf{Schlussregeln}.} \\ \vec{\mathbf{e}} & \in & \mathfrak{T}(\mathfrak{P}(\mathcal{L})^2) & \text{, ein Tupel aus \textbf{Ableitungen}, die \textbf{Ergebnisse}.} \end{array}$$

gegeben sein. Mit

$$\begin{array}{l} \mathcal{C} := \{(\mathrm{set}(\vec{\mathbf{p}}), \mathrm{set}(\vec{\mathbf{k}})) \mid (\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{k}}) \in \mathrm{set}(\vec{\mathcal{C}})\} \\ \mathcal{E} := \mathrm{set}(\vec{\mathbf{e}}) \end{array}$$

ergibt sich wegen (2.10) und (2.12) auf Seite 23 wieder die erste Form.

47) Statt $\geqslant$ könnte in (2.17) auch $=$ genommen werden. Dann müssten die $\mathbf{p}_n$ und die $\mathbf{k}_m$ jeweils paarweise verschieden sein, was wir nicht voraussetzen wollen.

48) Nach (2.13), (2.14) und (2.15) auf Seite 24 sind die „Brüche“ Aussagen, und keine Paare mehr. Die Äquivalenz der Aussagen steht schon in (2.16) auf Seite 24

49) ASBA selbst kann nur endliche Mengen aBspeichern. Für ASBAmuss daher einschränkend $\mathcal{C} \in \mathfrak{R}_e(\mathfrak{R}_e(\mathfrak{P}_e(\mathcal{L})))$ und $\mathcal{E} \in \mathfrak{R}_e(\mathfrak{P}_e(\mathcal{L}))$ sein.

2.3.5. Beispiel für einen Beweis

> > > Nacharbeiten < < <

> > > Hier weitermachen < < <

Zur Veranschaulichung ein Beispiel:[50)]

$$
\begin{array}{lrl}
E_{\alpha,\beta}(\delta) & := & \text{das } \delta\text{, bei dem alle Vorkommen von } \alpha \text{ durch } \beta \text{ ersetzt wurden} \\
\mathcal{L} & := & \text{die Menge aller Formeln der aussagenlogischen Sprache} \\
\mathbf{p}_1 & := & (A, \{\alpha\}) \\
\mathbf{p}_2 & := & (B, \{\alpha \to \beta\}) \\
\mathbf{p}_3 & := & (A \cup B, \{\beta\}) \\
\mathcal{E} & := & \{E_{\alpha,\delta}, E_{\beta,B}, E_{\beta,B\to\delta}, E_{\gamma,\delta}\} \\
\mathcal{C} & := & \ldots \\
\chi_1 & := & \alpha \to (\beta \to \alpha) \\
\chi_2 & := & (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \\
\mathcal{X} & := & \{\chi_1, \chi_2\} \\
\vdash_{\mathcal{K}} & := & \ldots
\end{array}
$$

2.3.6. Beweisschritte

Ein Beweis[51)] in ASBA besteht aus

einer Schlussregel $\dfrac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$

einer Folge $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_K)$ von *Beweisschritten* b_k, die **Beweisschrittfolge**

einer Folge $\mathcal{T} = (T_1, T_2, ..., T_K)$ von *Transformationen* T_k, die **Transformationsfolge**

Dabei ist K ein Element aus $\mathbb{N}_0$, $0 \leqslant k \leqslant K$, die **Beweisschritte** b_k sind Schlussregeln und die Transformationen T_k werden später definiert. Wir definieren noch:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathcal{B}_k & := & \{b_1, \ldots, b_k\} & \text{, für } 0 \leqslant k \leqslant K \\
\mathcal{B} & := & \mathcal{B}_K &
\end{array}
$$

und nennen $\mathcal{B}$ die **Beweisschrittmenge** der Beweisschrittfolge $\vec{b}$. Dann ist $\mathcal{B}_0 = \varnothing$ und $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{B}$ für $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant K$. – Wir nennen die Beweisschrittfolge auch eine **Ableitung** aus $\mathcal{K}$ aus $\mathcal{P}$.

Jeder Beweisschritt b_k für $1 \leqslant k \leqslant K$ muss entweder eine Prämisse aus $\mathcal{P}$ oder durch Anwendung einer allgemeingültigen Schlussregel auf eine Teilmenge von $\mathcal{B}_{k-1}$ eine wahre Formel oder eine weitere allgemeingültige Schlussregel sein. Schließlich muss noch

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$$

sein, da jede Konklusion aus $\mathcal{K}$ in der Folge $\vec{b}$ vorkommen und somit Element der Menge $\mathcal{B}$ sein muss.

==

Bevor die Schlussregeln weiter behandelt werden, werden noch Elemente der *Aussagenlogik* und der *Prädikatenlogik* behandelt. Wir stützen uns dabei weitgehend auf [1], ohne das jedes Mal anzugeben.

50) siehe [36]

51) siehe [1] Kapitel 1.6 und 3.6

2.4. Aussagenlogik

2.4.1. Konstante und Operationen

Die Tabelle 2.4 auf der nächsten Seite[52)] definiert für die zweiwertige Logik Konstante und Junktoren über die Wahrheitswerte ihrer Anwendung. So ergeben sich, abhängig von den Wahrheitswerten der Operanden A und B,[53)] die in der Tabelle angegebenen Wahrheitswerte für die Operationen. Die mit 0, 1 und 2 benannten Spalten werden jeweils nur für die 0-, 1- und 2-stelligen Junktoren, d. h. für die Konstanten, die unären und die binären Junktoren ausgefüllt. Dabei werden die Konstanten als 0-stellige Junktoren angesehen. Hat der Inhalt einer Zelle keine Relevanz, steht dort ein Minuszeichen, ist kein Wert bekannt, so bleibt sie leer.

Für einige Junktorsymbole[54)], Namen und Sprechweisen sind auch Alternativen angegeben. Die durchgestrichenen (d. h. negierten) Symbole sind ungebräuchlich und nur aus formalen Gründen aufgeführt. Wenn für eine bestimmte Kombination von Wahrheitswerten mehr als eine Zeile angegeben ist, so können die zugehörigen Junktoren zwar formal verschieden sein, liefern in der zweiwertigen Aussagenlogik jedoch dieselben Ergebnisse.

Die zur Einsparung von Klammern definierten Prioritäten sind in der Tabelle 2.3 auf Seite 22 angegeben.[55)]

2.4.2. Formalisierung

Da sie die Grundlage — quasi das Fundament — des mathematischen Inhalts von ASBA sind, müssen die Axiome, Sätze, Beweise, usw. der Aussagenlogik (und später der Prädikatenlogik) in streng formaler Form vorliegen.[56)] Da Computerprogramme mit der *Polnischen Notation*[57)] besser umgehen können und Klammern dort überflüssig sind, werden viele Formeln auch parallel in der Polnischen Notation angegeben. Dies wird auf Wunsch auch bei Ausgaben von ASBA so gehandhabt.

2.4.2.1. Bausteine der aussagenlogischen Sprache

Zur Einteilung der Junktoren werden die folgenden Mengen definiert:

$$\mathcal{J}_\mathrm{c} \coloneqq \{\top, \bot\}$$, Menge der **aussagenlogischen Konstanten**

$$\mathcal{J}_\mathrm{u} \coloneqq \{\neg\}$$, Menge der **unären Junktoren**

$$\mathcal{J}_\mathrm{b} \coloneqq \{\wedge, \vee, \dot\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\}$$, Menge der **binären Junktoren**

Um damit Formeln zu bilden, werden noch Variable gebraucht:

$$\mathcal{Q} \coloneqq \{\mathbf{q}_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$, Menge der **aussagenlogischen Variablen**

52) Die Tabelle basiert auf den Wahrheitstafeln in [40] Kapitel 2.2 und [1] Kapitel 1.1 Seite 3.
53) A und B können hier beliebige Aussagen sein — auch Formeln —, die jeweils genau einen Wahrheitswert repräsentieren.
54) Symbole, die für Junktoren verwendet werden.
55) Zur Erinnerung: Es gilt Rechtsklammerung. siehe Unterabschnitt 2.2.5 auf Seite 21
56) Die Formalisierung stützt sich auf [32]; siehe auch [22, 25].
57) Bei der **Polnischen Notation** stehen die Operanden bzw. Argumente von Relationen und Funktionen stets rechts von den Relations- und Funktionssymbolen. Dadurch kann auf Gliederungszeichen wie Klammern und Kommata verzichtet werden. Noch einfacher für Computer ist die **umgekehrte Polnische Notation**, bei der die Operanden und Argumente links von den Symbolen stehen.

A	-	W	F	W	W	F	F	-	Aussage A	-
B	-	-	-	W	F	W	F	-	Aussage B	-
Junktor[1]	**0**[2]	**1**		**2**				**Name**[3]	**Sprechweise**	**Prio**[4]
$\top$	W	-	-	-	-	-	-	Verum	***wahr***	-
$\bot$	F	-	-	-	-	-	-	Falsum	***falsch***	-
	-	W	W	-	-	-	-			-
$(\ldots)$	-	W	F	-	-	-	-	Klammerung	A **ist geklammert**	-[5]
$\neg$	-	F	W	-	-	-	-	Negation	**Nicht** A	1[6]
	-	F	F	-	-	-	-			-
	-	-	-	W	W	W	W	Tautologie		-
$\vee$	-	-	-	W	W	W	F	Disjunktion; Adjunktion; Alternative	A **oder** B	3
$\leftarrow\ \Leftarrow\ \subset$	-	-	-	W	W	F	W	Replikation; Konversion; konverse Implikation	A **folgt aus** B	4
$\rfloor$	-	-	-	W	W	F	F	Präpendenz	Identität von A	-
$\rightarrow\ \Rightarrow\ \supset$	-	-	-	W	F	W	W	Implikation; Subjunktion; Konditional	**Aus** A **folgt** B; Wenn A dann B; A nur dann wenn B	4
$\lfloor$	-	-	-	W	F	W	F	Postpendenz	Identität von B	-
$\leftrightarrow\ \Leftrightarrow$	-	-	-	W	F	F	W	Äquivalenz; Bijunktion; Bikonditional	A **genau dann wenn** B; A dann und nur dann wenn B	5
$\wedge\ \&\ \cdot$	-	-	-	W	F	F	F	Konjunktion	A **und** B; Sowohl A als auch B	2
$\uparrow\ \barwedge\ \mid$	-	-	-	F	W	W	W	NAND; Unverträglichkeit; Sheffer-Funktion	**Nicht zugleich** A **und** B	2
$\dot\vee\ \veebar\ +\ \oplus$	-	-	-	F	W	W	F	XOR; Antivalenz; ausschließende Disjunktion	**Entweder** A **oder** B	3
$\nleftrightarrow\ \nLeftrightarrow\ \not\equiv$	-	-	-	"	"	"	"	Kontravalenz		-
$\lceil$	-	-	-	F	W	F	W	Postnonpendenz	Negation von B	-
$\nrightarrow\ \nRightarrow\ \not\supset$	-	-	-	F	W	F	F	Postsektion		-
$\rceil$	-	-	-	F	F	W	W	Pränonpendenz	Negation von A	-
$\nleftarrow\ \nLeftarrow\ \not\subset$	-	-	-	F	F	W	F	Präsektion		-
$\downarrow\ \bar\vee$	-	-	-	F	F	F	W	NOR; Nihilation; Peirce-Funktion	**Weder** A **noch** B	3
	-	-	-	F	F	F	F	Kontradiktion		-

Um vollständig zu sein, d. h. alle 22 möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten für höchstens zwei Variable zu berücksichtigen, enthält die Tabelle auch viele ungebräuchliche Symbole und Operationen. Junktoren ohne Angabe einer Priorität sind in diesem Dokument nicht weiter von Interesse. — Im Folgenden werden von den in der Tabelle aufgeführten Junktoren nur noch $\bot$, $\top$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$, $\uparrow$, $\downarrow$ und $\dot\vee$ verwendet.

[1] Die Junktoren $\langle\subset\rangle$, $\langle\supset\rangle$, $\langle\not\subset\rangle$ und $\langle nsupset\rangle$ haben hier nicht die Bedeutung der entsprechenden Operationen der Mengenlehre und dürfen nicht damit verwechselt werden; entsprechendes gilt für $\langle+\rangle$ und $\langle\cdot\rangle$ mit Addition und Multiplikation.
[2] 0-stellige Junktoren sind Konstante, hier *Wahrheitswerte*.
[3] Ist eine Zelle in dieser Spalte leer, so ist die zugehörige Zeile nur vorhanden, um alle binären Junktoren aufzuführen.
[4] Je kleiner die Zahl, je höher die Priorität.
[5] Klammerung ist genau genommen keine Operation und wird nicht nur bei logischen, sondern auch bei anderen Ausdrücken verwendet. Ihre Priorität - sofern man überhaupt davon sprechen kann - kann nur höher als die aller Junktoren sein.
[6] Die Priorität der unären Operationen muss höher sein als die aller mehrwertigen, also auch der binären Operationen. Wenn die Symbole aller unären Operationen auf derselben Seite des Operanden stehen, brauchen sie eigentlich keine Priorität, da die Auswertung nur von innen (dem Operanden) nach außen erfolgen kann. Nur wenn es sowohl links-, als auch rechtsseitige unäre Operationen gibt, muss man für diese Prioritäten definieren.

Tabelle 2.4.: Definition von aussagenlogisches Symbolen.

Die Mengen $\mathcal{J}_c$, $\mathcal{J}_u$, $\mathcal{J}_b$ und $\mathcal{Q}$ müssen paarweise disjunkt sein. – Damit können die folgende Mengen definiert werden:

$$\begin{array}{lcll}
\mathcal{J} & \coloneqq & \mathcal{J}_c \cup \mathcal{J}_u \cup \mathcal{J}_b & \text{, Menge der } \textbf{Junktorsymbole} \\
\mathcal{A} & \coloneqq & \mathcal{Q} \cup \mathcal{J} & \text{, Alphabet der aussagenlogischen Sprache für } \mathcal{J} \\
\mathcal{J}_x & \subseteq & \mathcal{J} & \text{, eine Teilmenge von } \mathcal{J} \text{ für eine Indexvariable } x \\
\mathcal{A}_x & \coloneqq & \mathcal{Q} \cup \mathcal{J}_x & \text{, Alphabet der aussagenlogischen Sprache für } \mathcal{J}_x
\end{array}$$

Für Elemente aus $\mathcal{Q}$ verwenden wir normalerweise die kleinen, lateinischen Buchstaben a, b, c, usw.

2.4.2.2. Aussagenlogische Formeln

Neben dem Alphabet $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}_x$ werden noch Klammern als Gliederungszeichen verwendet. Damit können nun rekursiv für jede Teilmenge $\mathcal{J}_x$ von $\mathcal{J}$ zwei Mengen von aussagenlogischen Formeln definiert werden, wobei wir für diese Formeln die kleinen, griechischen Buchstaben α, β, γ, usw. verwenden.

$\mathcal{L}_x^A$ sei die Menge der auf folgende Weise definierten **aussagenlogischen Formel** mit **Klammerung** zum Alphabet $\mathcal{A}_x$:

$$\begin{array}{rcrl}
 & & \mathcal{Q} \subset \mathcal{L}_x^A & \text{, die Variablen} \\
 & & \mathcal{J}_x \cap \mathcal{J}_c \subset \mathcal{L}_x^A & \text{, die Konstanten} \\
\alpha \in \mathcal{L}_x^A & \Rightarrow & (\ominus\alpha) \in \mathcal{L}_x^A & \text{, für } \ominus \in \mathcal{J}_u \cap \mathcal{J}_x \qquad (2.18) \\
\alpha, \beta \in \mathcal{L}_x^A & \Rightarrow & (\alpha \circledast \beta) \in \mathcal{L}_x^A & \text{, für } \circledast \in \mathcal{J}_b \cap \mathcal{J}_x \qquad (2.19)
\end{array}$$

Nur die auf diese Weise konstruierten Formeln sind Elemente aus $\mathcal{L}_x^A$. – Für $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}$ sei noch $\mathcal{L}^A \coloneqq \mathcal{L}_x^A$.

$\mathcal{L}_x^{Ap}$ sei die Menge der auf folgende Weise definierten **aussagenlogischen Formeln** in **Polnischer Notation**:

$$\begin{array}{rcrl}
 & & \mathcal{Q} \subset \mathcal{L}_x^{Ap} & \text{, die Variablen} \\
 & & \mathcal{J}_x \cap \mathcal{J}_c \subset \mathcal{L}_x^{Ap} & \text{, die Konstanten} \\
\alpha \in \mathcal{L}_x^{Ap} & \Rightarrow & \ominus\alpha \in \mathcal{L}_x^{Ap} & \text{, für } \ominus \in \mathcal{J}_u \cap \mathcal{J}_x \qquad (2.20) \\
\alpha, \beta \in \mathcal{L}_x^{Ap} & \Rightarrow & \circledast\alpha\beta \in \mathcal{L}_x^{Ap} & \text{, für } \circledast \in \mathcal{J}_b \cap \mathcal{J}_x \qquad (2.21)
\end{array}$$

Nur die auf diese Weise konstruierten Formeln sind Elemente aus $\mathcal{L}_x^{Ap}$. – Für $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}$ sei noch $\mathcal{L}^{Ap} \coloneqq \mathcal{L}_x^{Ap}$.

Wie man leicht sieht, gilt

$$\mathcal{J}_x \subset \mathcal{J}_y \subseteq \mathcal{J} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}_x \subset \mathcal{A}_y \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{L}_x^A \subset \mathcal{L}^A{}_y \subseteq \mathcal{L}^A \\ \mathcal{L}_x^{Ap} \subset \mathcal{L}^{Ap}{}_y \subseteq \mathcal{L}^{Ap} \end{cases}$$

und weiterhin gibt es eine bijektive Abbildung von $\mathcal{L}^A$ nach $\mathcal{L}^{Ap}$. Auf einen Beweis verzichten wir. Durch Anwendung der Klammerregeln von Paragraph 2.4.2.1 auf Seite 28 lassen sich in der Regel noch viele Klammern der Formeln aus $\mathcal{L}_x^A$ einsparen. Die Formeln aus $\mathcal{L}_x^{Ap}$ sind frei von Klammern. Die Namen der Junktoren finden sich in der Tabelle 2.4 auf der vorherigen Seite.

Die Formeln, die nach einer der Regeln (2.18), (2.19), (2.20) oder (2.21) gebildet wurden, sind offensichtlich zerlegbar, die anderen, d. h. Variablen und Konstanten (aus $\mathcal{Q}$ bzw. $\mathcal{J}_c$), sind nicht zerlegbar. Letztere bezeichnet man auch als **atomare Formeln**.

2.4.3. Definition von Junktoren durch andere

Im folgenden gelte für zwei aussagenlogische Formeln α und β:

$\alpha = \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha$ und β stimmen als Zeichenkette überein.

$\alpha \Leftrightarrow \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha$ und β können mit Hilfe erlaubter Ersetzungen und geltender Axiome — siehe Unterabschnitt 2.4.4 auf der nächsten Seite — ineinander überführt werden.

Es werden verschiedene Teilmengen von $\mathcal{J}$ eingeführt, die jeweils ausreichen um alle anderen Elemente aus $\mathcal{J}$ zu definieren:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\text{bool}} &:= \{\neg, \wedge, \vee\} \qquad (\textbf{Boolesche Signatur})\\
\mathcal{J}_{\text{and}} &:= \{\neg, \wedge\}\\
\mathcal{J}_{\text{or}} &:= \{\neg, \vee\}\\
\mathcal{J}_{\text{imp}} &:= \{\neg, \rightarrow\}\\
\mathcal{J}_{\text{rep}} &:= \{\neg, \leftarrow\}\\
\mathcal{J}_{\text{nand}} &:= \{\uparrow\}\\
\mathcal{J}_{\text{nor}} &:= \{\downarrow\}
\end{aligned}
$$

Solche Teilmengen heißen logische Signatur.

Im Folgenden stehen jeweils links die Formeln in üblicher Schreibweise vollständig geklammert und rechts in Polnischer Notation (ohne Klammern). Ferner seien α und β beliebige, nicht notwendig verschiedene Formeln aus der passenden Menge $\mathcal{L}_x^{\mathrm{A}}$ bzgl. der um die mit Hilfe der Definitionen erweiterten Formelmenge.

Ausgehend von den Junktoren aus der Booleschen Signatur $\mathcal{J}_{\text{bool}}$ werden die restlichen Junktoren aus $\mathcal{J}$ definiert. Die Definitionen sind in zwei Gruppen eingeteilt, und zwar die mit den Junktoren aus $\mathcal{J}_{\text{and}}$:

$$
\begin{aligned}
(\alpha \rightarrow \beta) &:= (\neg(\alpha \wedge (\neg\beta))) & \rightarrow \alpha\beta &:= \neg \wedge \alpha\neg\beta && (2.22)\\
(\alpha \leftarrow \beta) &:= (\neg(\beta \wedge (\neg\alpha))) & \leftarrow \beta\alpha &:= \neg \wedge \beta\neg\alpha && (2.23)\\
(\alpha \leftrightarrow \beta) &:= ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftarrow \beta)) & \leftrightarrow \alpha\beta &:= \wedge \rightarrow \alpha\beta \leftarrow \alpha\beta &&\\
\bot &:= (\mathbf{q}_0 \wedge (\neg\mathbf{q}_0)) & \bot &:= \wedge \mathbf{q}_0 \neg \mathbf{q}_0 &&\\
(\alpha \uparrow \beta) &:= (\neg(\alpha \wedge \beta)) & \uparrow \alpha\beta &:= \neg \wedge \alpha\beta && (2.24)
\end{aligned}
$$

und die mit den Junktoren aus $\mathcal{J}_{\text{or}}$:

$$
\begin{aligned}
(\alpha \downarrow \beta) &:= (\neg(\alpha \vee \beta)) & \downarrow \alpha\beta &:= \neg \vee \alpha\beta && (2.25)\\
(\alpha \dot\vee \beta) &:= ((\alpha \vee \beta) \wedge (\neg(\alpha \wedge \beta))) & \dot\vee \alpha\beta &:= \wedge \vee \alpha\beta \neg \wedge \alpha\beta &&\\
\top &:= (\mathbf{q}_0 \vee (\neg\mathbf{q}_0)) & \top &:= \vee \mathbf{q}_0 \neg \mathbf{q}_0 &&
\end{aligned}
$$

Ist $\langle\vee\rangle$ oder $\langle\wedge\rangle$ nicht vorgegeben, d. h. wird von den Elementen aus $\mathcal{J}_{\text{and}}$ bzgl. $\mathcal{J}_{\text{or}}$ statt von denen aus $\mathcal{J}_{\text{bool}}$ ausgegangen, so muss man den fehlenden Junktor mittels der passenden der beiden folgenden Definitionen einführen:

$$
\begin{aligned}
(\alpha \vee \beta) &:= (\neg((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))) & \vee\alpha\beta &:= \neg \wedge \neg\alpha\neg\beta\\
(\alpha \wedge \beta) &:= (\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))) & \wedge\alpha\beta &:= \neg \vee \neg\alpha\neg\beta
\end{aligned}
$$

Nun sind wieder alle Junktoren definiert.

Entsprechend wird bei Vorgabe von $\mathcal{J}_{\text{imp}}$ bzgl. $\mathcal{J}_{\text{rep}}$ die passende der beiden folgenden Definitionen ausgewählt:

$$\begin{aligned} (\alpha \vee \beta) &\coloneqq ((\neg\alpha) \rightarrow \beta) & \vee\alpha\beta &\coloneqq \rightarrow \neg\alpha\beta \\ (\alpha \wedge \beta) &\coloneqq (\neg((\neg\beta) \leftarrow \alpha)) & \wedge\alpha\beta &\coloneqq \neg \leftarrow \neg\beta\alpha \end{aligned}$$

woraufhin dann (2.22) bzgl. (2.23) als Gleichung nachzuweisen ist. Da aus (2.23) durch Vertauschung der Variablen unmittelbar

$$(\alpha \leftarrow \beta) \Leftrightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \qquad \leftarrow \alpha\beta \Leftrightarrow \rightarrow \beta\alpha$$

folgt, vermindert sich der Aufwand dazu erheblich.

Bei Vorgabe von $\mathcal{J}_{\text{nand}}$ bzgl. $\mathcal{J}_{\text{nor}}$ schließlich werden die passenden Definition aus

$$\begin{aligned} (\neg\alpha) &\coloneqq (\alpha \downarrow \alpha) & \neg\alpha &\coloneqq \downarrow \alpha\alpha \\ (\neg\alpha) &\coloneqq (\alpha \uparrow \alpha) & \neg\alpha &\coloneqq \uparrow \alpha\alpha \end{aligned}$$

und, da $\langle\neg\rangle$ jetzt definiert ist, aus

$$\begin{aligned} (\alpha \vee \beta) &\coloneqq (\neg(\alpha \downarrow \beta)) & \vee\alpha\beta &\coloneqq \neg \downarrow \alpha\beta \\ (\alpha \wedge \beta) &\coloneqq (\neg(\alpha \uparrow \beta)) & \wedge\alpha\beta &\coloneqq \neg \uparrow \alpha\beta \end{aligned} \tag{2.26}$$

ausgewählt und es ist (2.24) bzgl. (2.25) als Gleichung nachzuweisen.

Abschließend ist noch nachzuweisen, dass mit Hilfe der jeweils passenden der Definitionen (2.22) bis (2.26), ausgehend vom jeweils passenden $\mathcal{L}^{\text{A}}_{x}$, genau die gesamte Formelmenge $\mathcal{L}^{\text{A}}$ erzeugt werden kann.

2.4.4. Aussagenlogisches Axiomensysteme

Ausgehend von der logischen Signatur $\mathcal{J}_{\text{and}} = \{\neg, \wedge\}$ und der Definition 2.22 auf der vorherigen Seite von $\langle\rightarrow\rangle$ werden die folgenden vier logischen Axiome definiert:

$$\begin{aligned} &(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) && \rightarrow\rightarrow \alpha \rightarrow \beta\gamma \rightarrow\rightarrow \alpha\beta \rightarrow \alpha\gamma \\ &\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta && \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \wedge \alpha\beta \\ &\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha\,; \quad \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta && \rightarrow \wedge\alpha\beta\alpha\,; \quad \rightarrow \wedge\alpha\beta\beta \\ &(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha) && \rightarrow\rightarrow \alpha\neg\beta \rightarrow \beta\neg\alpha \end{aligned}$$

> > > Aussagenlogik weiter bearbeiten. < < <

Siehe **Aussagenlogik** im Glossar.

Wikipedia[31] schreibt dazu:

> Die **Aussagenlogik** ist ein Teilgebiet der Logik, das sich mit Aussagen und deren Verknüpfung durch Junktoren befasst, ausgehend von strukturlosen Elementaraussagen (Atomen), denen ein Wahrheitswert zugeordnet wird. In der *klassischen Aussagenlogik* wird jeder Aussage genau einer der zwei Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ zugeordnet. Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage lässt sich ohne zusätzliche Informationen aus den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen bestimmen.

2.5. Prädikatenlogik

> > > Prädikatenlogik bearbeiten. < < <

Siehe **Prädikatenlogik** im Glossar.

Wikipedia[48] schreibt dazu:

> Die **Prädikatenlogiken** (auch **Quantorenlogiken**) bilden eine Familie logischer Systeme, die es erlauben, einen weiten und in der Praxis vieler Wissenschaften und deren Anwendungen wichtigen Bereich von Argumenten zu formalisieren und auf ihre Gültigkeit zu überprüfen. Auf Grund dieser Eigenschaft spielt die Prädikatenlogik eine große Rolle in der Logik sowie in Mathematik, Informatik, Linguistik und Philosophie.
>
> [. . .]

2.6. Mengenlehre

> > > Mengenlehre bearbeiten. < < <

Siehe **Mengenlehre** im Glossar.

Wikipedia[47] schreibt dazu:

> Die **Mengenlehre** ist ein grundlegendes Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Untersuchung von Mengen, also von Zusammenfassungen von Objekten, beschäftigt. Die gesamte Mathematik, wie sie heute üblicherweise gelehrt wird, ist in der Sprache der Mengenlehre formuliert und baut auf den Axiomen der Mengenlehre auf. Die meisten mathematischen Objekte, die in Teilbereichen wie Algebra, Analysis, Geometrie, Stochastik oder Topologie behandelt werden, um nur einige wenige zu nennen, lassen sich als Mengen definieren. Gemessen daran ist die Mengenlehre eine recht junge Wissenschaft; erst nach der Überwindung der Grundlagenkrise der Mathematik im frühen 20. Jahrhundert konnte die Mengenlehre ihren heutigen, zentralen und grundlegenden Platz in der Mathematik einnehmen.

3. Ideen

3.1. Schlussregeln

In diesem Abschnitt geht es um zulässige Transformationen, d. h. allgemeingültige Schlussregeln. Dazu gehören zunächst die Basisregeln. Dann aber auch alle aus den Basisregeln und den bis dahin allgemeingültigen Schlussregeln korrekt abgeleiteten neuen Schlussregeln. Die Schlussregeln haben die Form eines Formalen Satzes.

3.1.1. Basisregeln

Gemäß [1] Kapitel 1.4 *Ein vollständiger aussagenlogischer Kalkül* werden sechs Basisregeln definiert. Zuvor werden aber noch einige Definitionen gebraucht. Dazu seien n, m, k und l natürliche Zahlen (auch 0), α, α_i, β und β_j Formeln X, X_i, Y und Y_j Mengen von Formeln und

$$X \quad :\equiv \quad X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$$
$$Y \quad :\equiv \quad Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$$

X und Y können auch die leere Menge sein. Damit wird definiert:

$\alpha \vdash \beta$:⇔ β ist mittels schrittweiser Anwendung *zulässiger Transformationen* (siehe weiter unten) aus α ableitbar. Sprechweise: Aus α ist β **ableitbar** oder **beweisbar**; kurz: „α *ableitbar* β" bzw. „α *beweisbar* β" — Es kann auch $\langle\alpha\rangle$ durch $\langle X\rangle$ und/oder $\langle\beta\rangle$ durch $\langle Y\rangle$ ersetzt werden.

$\vdash \beta$:⇔ $\varnothing \vdash \beta$ ($\langle\vdash\rangle$ kann dann auch ganz entfallen)

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \quad \vdash \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$:⇔ $X \vdash Y$

Eine **zulässige Transformation** ist die Anwendung einer *Ersetzung*[1)] (siehe unten), einer *Basisregel* (siehe unten) oder einer davon abgeleiteten sonstigen *Schlussregel*, z. B. aus Unterabschnitt 2.3.3 auf Seite 25. Bei den Schlussregeln und der Ersetzung $\langle\leftarrow\!\!\!\prec\rangle$ soll das Komma stärker binden als $\langle\vdash\rangle$, $\langle\leftarrow\!\!\!\prec\rangle$ und $\langle|\rangle$, wobei $\langle|\rangle$ für „und" bzw. $\langle\&\rangle$[2)] steht und schwächer bindet als $\langle\vdash\rangle$ und $\langle\leftarrow\!\!\!\prec\rangle$.[3)]

Zur der Auswahl der Basisregeln, der Formulierung und der Bezeichnungen wird auf [1, 54] zurückgegriffen. Wie in [54] steht ⟨E⟩ für „-Einführung" und ⟨B⟩ für „-Beseitigung" (oder „-Elimination") von Junktoren.[4)]

Im Folgenden seien α und β Formeln und X und Y Mengen von Formeln. Für die sechs Basisregeln werden dann nur noch die Junktoren $\langle\neg\rangle$ und $\langle\wedge\rangle$ benötigt. Bei den weiteren Schlussregeln wird noch $\langle\rightarrow\rangle$ gemäß der Definition 2.22 auf Seite 31 verwendet.

---

1) siehe Unterabschnitt 3.1.2 auf der nächsten Seite

2) siehe Unterabschnitt 2.1.2 auf Seite 15

3) siehe Fußnote 3 von Tabelle 2.3 auf Seite 22

4) In der Monotonieregel wird hier, anders als in [1], ⟪X, Y⟫ statt ⟪Y , für $Y \supseteq X$⟫ genommen. Das ist gleichwertig, vermeidet aber den Zusatz ⟪ , für $Y \supseteq X$⟫. Außerdem werden bei den Bezeichnungen ⟪($\wedge$1)⟫ und ⟪($\wedge$2)⟫ gemäß [54] durch ⟪($\wedge$E)⟫ bzw. ⟪($\wedge$B)⟫ ersetzt.

$$\frac{}{\alpha \vdash \alpha} \qquad \text{(**Anfangsregel**)} \tag{(AR)}$$

$$\frac{X \vdash \alpha}{X, Y \vdash \alpha} \qquad \text{(**Monotonieregel**)} \tag{(MR)}$$

$$\frac{X \vdash \alpha, \neg\alpha}{X \vdash \beta} \qquad \text{(Einführung/Beseitigung der Negation Teil 1)} \tag{($\neg$1)}$$

$$\frac{X, \alpha \vdash \beta \mid X, \neg\alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta} \qquad \text{(Einführung/Beseitigung der Negation Teil 2)} \tag{($\neg$2)}$$

$$\frac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta} \qquad \text{(Einführung der Konjunktion)} \tag{($\wedge$E)}$$

$$\frac{X \vdash \alpha \wedge \beta}{X \vdash \alpha, \beta} \qquad \text{(Beseitigung der Konjunktion)} \tag{($\wedge$B)}$$

In einer Schlussregel werden die Formeln[5)] über dem Querstrich als **Prämissen** und die unter dem Querstrich als **Konklusionen** der Regel bezeichnet. Eine Schlussregel steht für die Aussage, dass mit ihren Prämissen auch auch ihre Konklusionen gelten. – Im Gegensatz zu den weiteren Schlussregeln werden die oben aufgelisteten Basisregeln nicht weiter hinterfragt, d. h. sie gelten quasi als Axiome.

3.1.2. Identitätsregeln

Die zulässigen Transformationen, d. h. die Anwendung der Schlussregeln, erfordern zulässige Ersetzungen. Damit wird dem Gleichheits- oder Identitätszeichen $\langle = \rangle$ mittels Einführungs- und Beseitigungsregel eine Bedeutung verliehen.[6)] Dazu seien α, β und γ vergleichbare[7)]Formeln.

Zunächst wird definiert:

$\gamma(\alpha \leftarrow\!\!\!\!\leftarrow \beta) \quad :=$ Die Formel, die man erhält, wenn in γ alle oder nur einige Vorkommen von α durch β ersetzt werden. — Gegebenenfalls muss noch die Auswahl der Ersetzungen angegeben werden, andernfalls werden alle Vorkommen ersetzt. Letzteres heißt dann **vollständige** Ersetzung.

$\gamma(\alpha \leftrightarrows \beta) \quad :=$ Die Formel, die man erhält, wenn in γ alle α und β miteinander vertauscht werden. Dazu ist es nötig, das α und β voneinander unabhängig sind, vorzugsweise zwei verschiedene Variable.

$\langle\!\langle \alpha \leftarrow\!\!\!\!\leftarrow \beta \rangle\!\rangle$ heißt **Ersetzung** und $\langle\!\langle \alpha \leftrightarrows \beta \rangle\!\rangle$ **Vertauschung** oder kurz **Tausch**. – Sei noch $S = (s_1, s_2, \ldots)$ eine endliche Folge von Ersetzungen, die auch Vertauschungen enthalten und auch leer sein kann.

Dann wird definiert:

$$\begin{aligned} \gamma(S) &:= \gamma(s_1)(s_2)\ldots && (3.1) \\ \gamma(\varnothing) &= \gamma && \text{(nur zur Verdeutlichung)} \\ \gamma(s_1, s_2, \ldots) &:= \gamma(S) \end{aligned}$$

5) hier: Aussagen in einer formalen Form.
6) siehe [54]
7) siehe Ende von Unterabschnitt 2.1.2 auf Seite 15

Die Vertauschung ist eine spezielle Form der Ersetzung. Wenn x und y zwei verschiedene Variable, die in α, β und γ nicht vorkommen, gilt:

$$\gamma(\alpha \leftrightarrows \beta) = \gamma(\alpha \leftarrowtail x, \beta \leftarrowtail y, y \leftarrowtail \alpha, x \leftarrowtail \beta)$$

Sei zusätzlich noch s eine Ersetzung. Folgende Sprechweisen werden verwendet:

$\gamma(\alpha \leftarrowtail \beta)$: In γ wird α **(vollständig) durch** β **substituiert**.

$\gamma(\alpha \leftrightarrows \beta)$: In γ werden α und β **vertauscht**.

$\gamma(s)$: s wird auf γ **angewendet**.

$\gamma(S)$: Die Ersetzungen aus S werden in der angegebenen Reihenfolge auf γ angewendet.

$\gamma(S)$: S wird auf γ angewendet.

Bei obiger Definition der Ersetzung bleibt noch offen, unter welchen Prämissen sie angewendet werden darf. Das soll hier nicht untersucht werden. In diesem Abschnitt genügt es, das nur Vertauschung und vollständige Ersetzung verwendet werden. In diesen Fällen sind beliebige Ersetzungen von Variablen durch Formeln erlaubt.

Ist γ wie oben und S eine Menge von Ersetzungen.

Nun können die beiden Identitätsregeln definiert werden:

$$\frac{}{\alpha = \alpha} \quad \text{(Einführung der Identität)} \qquad ((= \mathrm{E}))$$

$$\frac{\alpha = \beta \mid \gamma}{\gamma(\alpha \leftarrowtail \beta)} \quad \text{(Beseitigung der Identität)} \qquad ((= \mathrm{B}))$$

Die Identitätsregeln werden hier eingeführt, um die Ersetzung zu rechtfertigen. Wie die Basisregeln gelten sie als Axiome, würden also eigentlich dazu gehören. Da sie aber nicht weiter verwendet werden, werden sie hier nicht zu den Basisregeln gezählt.

3.1.3. Weitere Schlussregeln

In [1] werden aus den Basisregeln mittels zulässiger Transformationen weitere Schlussregeln abgeleitet.[8)] Man vergleiche auch mit [54].

8) In [1] werden die Identitätsregeln zwar weder aufgeführt noch angewandt, ohne Ersetzung geht es aber nicht.

$$\frac{X, \neg\alpha \vdash \alpha}{X \vdash \alpha}$$ (Beseitigung der Negation; Indirekter Beweis) $((\neg 3))$

$$\frac{X, \neg\alpha \vdash \beta, \neg\beta}{X \vdash \alpha}$$ (Reductio ad absurdum) $((\neg 4))$

$$\frac{X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}$$ (Einführung der Implikation) $((\rightarrow \mathrm{E}))$

$$\frac{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}{X, \alpha \vdash \beta}$$ (Beseitigung der Implikation) $((\rightarrow \mathrm{B}))$

$$\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$$ (**Schnittregel**) ((SR))

$$\frac{X \vdash \alpha \mid \alpha \rightarrow \beta}{X \vdash \beta}$$ (**Abtrennungsregel** — *Modus ponens*) ((TR))

Dabei werden zum Beweis der Schlussregeln in [1] folgende Basisregeln verwendet:

Schlussregel	:	verwendete Basisregeln
$(\neg 3)$	:	(AR), (MR), $(\neg 2)$
$(\neg 4)$	:	(AR), (MR), $(\neg 1)$, $(\neg 2)$
$(\rightarrow \mathrm{E})$	:	(AR), (MR), $(\neg 1)$, $(\neg 2)$, $(\wedge \mathrm{E})$
$(\rightarrow \mathrm{B})$	:	(AR), (MR), $(\neg 1)$, $(\neg 2)$, $(\wedge \mathrm{B})$
(SR)	:	(AR), (MR), $(\neg 1)$, $(\neg 2)$
(TR)	:	(AR), (MR), $(\neg 1)$, $(\neg 2)$, $(\wedge \mathrm{E})$

3.1.4. Beispiel einer Ableitung

Als Beispiel wird hier die Schnittregel aus den Basisregeln abgeleitet.[9] Dazu wird verabredet, dass in der Tabelle 3.1 auf Seite 39 der Inhalt der Zelle in der Zeile i und der Spalte (X_n) mit X_i bezeichnet wird. Zur kürzeren Darstellung wird statt auf die vollständigen Spaltenüberschriften nur auf die dort notierten (X_n) verwiesen. Dass in der Spalte (n) stets die Zeilennummer steht, wird im folgenden nicht mehr extra erwähnt.

[9] Die Form der Tabelle ist angelehnt an [54] Kapitel 2.2.4 *Eine Beispielableitung*.

Für die ausgefüllten Felder wird nun definiert:[10)]

$$R_i :\equiv \begin{cases} \text{“}\mathtt{Prämisse}\text{”} = \text{Die Aussage } A_i \text{ ist eine Prämisse.} \\ \text{“}\mathtt{Konklusion}\text{”} = \text{Die Aussage } A_i \text{ ist eine Konklusion.} \\ \text{“}\mathtt{Annahme}\text{”} = \text{Die Aussage } A_i \text{ wird vorübergehend als zutreffend angenommen.} \\ j = \text{Verweis auf die Schlussregel } \overline{R}_j \text{ für ein } j < i. \\ \text{Verweis (ohne Klammern) auf eine allgemeingültige Schlussregel.} \end{cases}$$

$S_i :\equiv$ Die Folge von den anzuwendenden Ersetzungen.

$\overline{R}_i :\equiv$ Das Ergebnis der in der angegebenen Reihenfolge angewendeten Ersetzungen aus S_i auf die Schlussregel R_i

$Z_i :\equiv$ Die Indizes j (mit $j < i$) als Verweise auf eine oder mehrere Aussagen A_j, welche zusammen genau die Prämissen der Schnittregel $\overline{R}_i$ erfüllen.

$A_i :\equiv$ Konklusion(en) der Schlussregel $\overline{R}_i$ —
auch in Form der Indizes von einem oder mehreren von Aj (mit $j < i$).
In der Ergebniszeile kann hier auch die bewiesene Aussage als Schlussregel stehen.

$D_i :\equiv$ die Indizes der A_j, von denen A_i abhängig ist.

Bis zur Zeile i hat man die folgende Schlussregel bewiesen:

$$\frac{A_{i_1} \mid A_{i_2} \ldots}{A_i} \quad \text{, für alle } i_j \in D_i$$

Sei nun

$$\Gamma_i :\equiv \begin{cases} \text{leer} & \text{für } R_i = \text{“}\mathtt{Prämisse}\text{”} \\ \text{leer} & \text{für } R_i = \text{“}\mathtt{Konklusion}\text{”} \\ \text{leer} & \text{für } R_i = \text{“}\mathtt{Annahme}\text{”} \\ \overline{R}_j & \text{für } R_i = j \quad \text{(eine \textbf{interne} Schlussregel)} \\ \text{die Schlussregel} & \text{für } R_i = \text{Verweis auf eine \textbf{externe} Schlussregel} \end{cases}$$

Damit gilt für die Einträge in einer Zeile i:

- Wenn Γ_i nicht leer ist, ist R_i eine Schlussregel mit $R_i = \Gamma_i(S_i)$[11)].
- Wenn A_i nicht leer ist, ist $R_i = \dfrac{A_{z_1} \mid A_{z_2} \mid \ldots}{A_i}$ (alle $z_j \in Z_i$).
- Wenn A_i nicht leer ist, ist bis jetzt die Schlussregel $\dfrac{A_{d_1} \mid A_{d_2} \mid \ldots}{A_i}$ (alle $d_j \in D_i$) schon bewiesen.

S_i, Z_i und D_i dürfen dabei auch leer sein.

Die Erzeugung einer Tabelle analog zu 3.1 auf der nächsten Seite wird im folgenden beschrieben. Zellen, für die kein Inhalt angegeben wird, bleiben leer. Rückwärts-Referenzen auf schon ausgefüllte Zellinhalte sind jederzeit möglich. Das Eintragen der Zeilennummer i wird nicht extra erwähnt. – Die Tabelle und die Beschreibung sind so ausführlich, damit man daraus leicht ein Computerprogramm erstellen kann.

[10)] Eigentlich müsste man für jede Ersetzung aus S_i eine eigene Zeile vorsehen. Um die Tabellen für die Beweise kürzer zu halten, werden aufeinanderfolgende Ersetzungen zusammengefasst.
[11)] siehe Definition (3.1) von Unterabschnitt 3.1.2 auf Seite 35

Zeile (n)	Regel (R_n)	Substitutionen (S_n)	erzeugte Regel ($\overline{R}_n$)	angewendet auf ... (Z_n)	Aussage (A_n)	Abhängigkeiten (D_n)
1	Voraussetzung				$X \vdash \alpha$	1
2	Voraussetzung				$X, \alpha \vdash \beta$	2
3	Folgerung				$X \vdash \beta$	3
4	(MR)		$\dfrac{X \vdash \alpha}{X, Y \vdash \alpha}$			
5	4	$Y \longleftarrow \neg\alpha$	$\dfrac{X \vdash \alpha}{X, \neg\alpha \vdash \alpha}$	1	$X, \neg\alpha \vdash \alpha$	1
6	(AR)		$\dfrac{}{\alpha \vdash \alpha}$			
7	6	$\alpha \longleftarrow \neg\alpha$	$\dfrac{}{\neg\alpha \vdash \neg\alpha}$		$\neg\alpha \vdash \neg\alpha$	
8	4	$\alpha \longleftarrow \neg\alpha$ $X \longleftarrow \neg\alpha$ $Y \longleftarrow X$	$\dfrac{\neg\alpha \vdash \neg\alpha}{X, \neg\alpha \vdash \neg\alpha}$	7	$X, \neg\alpha \vdash \neg\alpha$	
9	($\neg$1)		$\dfrac{X \vdash \alpha, \neg\alpha}{X \vdash \beta}$			
10	9	$X \longleftarrow X, \neg\alpha$	$\dfrac{X, \neg\alpha \vdash \alpha, \neg\alpha}{X, \neg\alpha \vdash \beta}$	5, 8	$X, \neg\alpha \vdash \beta$	1
11	($\neg$2)		$\dfrac{X, \alpha \vdash \beta \mid X, \neg\alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$	2, 10	3	1, 2
12	(AR), (MR), ($\neg$1), ($\neg$2)		$\dfrac{A_1 \mid A_2}{A_3}$		$\dfrac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$	

Tabelle 3.1.: Ableitung der Schnittregel aus den Basisregeln

1. Am Anfang der Tabelle werden zuerst Prämissen, dann zu beweisende Konklusionen und schließlich Annahmen aufgeführt.[12)] Jede der drei Gruppen kann auch leer sein und es ist auch möglich, die Zeilen an anderen Stellen der Tabelle anzugeben, spätestens aber, wenn darauf verwiesen wird. Für jede Prämisse, Konklusion und Annahme gibt es eine Zeile:
   a) $R_i =$ "`Prämisse`", "`Konklusion`" oder "`Annahme`".
   b) $A_i =$ Die aktuelle Prämisse, Konklusion oder Annahme.
   c) $D_i = i$ (ein Verweis auf A_i).
2. In den nächsten Zeilen werden die Beweisschritte aufgeführt, für jeden Schritt eine Zeile.

   Zunächst kann R_i kann auf zwei Arten erzeugt werden:
   a) i. $R_i =$ Verweis auf eine allgemeingültige Schlussregel.
      ii. $\overline{R}_i =$ Die Schlussregel, auf die verwiesen wird.

   oder
   a) i. $R_i = j$, wenn die schon bewiesene Schlussregel $\overline{R}_j$ (mit $j < i$) angewendet werden soll.

12) Die Angabe ist dann erforderlich, wenn darauf verwiesen wird. Durch die Auflistung hat man aber einen vollständigen Überblick über die Prämissen und Konklusionen eines Beweises und die Zwischenannahmen. Auf jede nötige Prämisse und jede verwendete Zwischenannahme wird in der Spalte (Z_n) mindestens einmal verwiesen, so dass sie auch aufgeführt werden müssen. Die Angabe der Konklusionen erleichtert die Erstellung einer *Ergebniszeile* (siehe Punkt 3).

ii. S_i = Die auf die Schlussregel R_i anzuwendende Ersetzung.

iii. $\overline{R}_i$ = Das Ergebnis der Ersetzung S_i auf die Schlussregel R_i.

Man beachte, dass die Schlussregel $\overline{R}_i$, stets allgemeingültig ist, da sie ausschließlich aus allgemeingültigen Schlussregeln mittels Ersetzungen abgeleitet worden ist. Daher gibt es auch keine Beschränkung weiterer Ersetzungen durch irgendwelche Abhängigkeiten.

Nun kann die Zeile beendet werden, oder es geht weiter mit:

b) Z_n = Die Indizes aller A_j (mit $j < i$), die eine Prämisse der Schlussregel $\overline{R}_i$ sind, möglichst in der verwendeten Reihenfolge. — Für jedes angegebene j werden noch die Abhängigkeiten D_j den Abhängigkeiten D_i hinzugefügt.

c) A_i = Konklusion(en) der Schlussregel $\overline{R}_i$. — Wenn diese Konklusionen schon als Aussagen A_j (mit $j < i$) vorhanden sind, können auch einfach deren Indizes eingetragen werden. Damit werden die Zusammenhänge und der Abschluss des Beweises besser ersichtlich.

d) D_i = Die Verweise wurden schon in (2b) eingetragen.[13)]

Der Beweis muss so lange fortgeführt werden, bis alle Konklusionen als Aussagen in der Spalte (A_n) erschienen und dort jeweils nur von den gegebenen Prämissen abhängig sind.

3. In einer **Ergebniszeile**, die dann die letzte ist, kann noch die bewiesene Behauptung in Form einer Schlussregel formuliert und in einer passenden Spalte notiert werden. Zusätzlich können dort auch noch alle verwendeten Schlussregeln gesammelt werden. Dies kann z. B. folgendermaßen geschehen:

   a) (R_n) = Verweise auf alle verwendeten externen Schlussregeln.

   b) $(\overline{R}_n)$ = Die bewiesene Behauptung als Schlussregeln, wobei alle A_i, die Prämissen sind, als Prämisse und alle A_j, die Konklusionen sind, als Konklusion eingesetzt werden. Das ergibt dann:

$$\frac{A_{i_1} \mid A_{i_2} \mid \ldots}{A_{j_1} \mid A_{j_2} \mid \ldots}$$

   c) $(A_n) = \overline{R}_i$, wobei die Prämissen und Konklusionen aufgelöst werden.

   d) (D_n) = Die Vereinigung aller Abhängigkeiten der Konklusionen, vermindert um die Prämissen. — Wenn das Feld dabei nicht leer bleibt, ist der Beweis missglückt!

Ein weiteres Beispiel in der Tabelle 3.2 auf der nächsten Seite soll verdeutlichen, wie Abhängigkeiten von Zwischenannahmen wieder beseitigt werden können.[14)]

> > > Beispielableitung der Kontraposition vervollständigen < < <

13) Wenn D_n leer ist, dann ist A_n allgemeingültig.
14) siehe [54], Kapitel 2.2.4 *Eine Beispielableitung*

Zeile (n)	**Regel** (R_n)	**Substitu-tionen** (S_n)	**erzeugte Regel** ($\overline{R}_n$)	**angewendet auf ...** (Z_n)	**Aussage** (A_n)	**Abhängig-keiten** (D_n)
1	Folge-rung				$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	1
2	An-nahme				$\alpha \rightarrow \beta$	2
3	An-nahme				$\neg\beta$	3
4	An-nahme				α	4
5	$\rightarrow$ B		$\dfrac{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}{X, \alpha \vdash \beta}$			
6	-1	$X \longleftarrow \varnothing$	$\dfrac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha \vdash \beta}$	2	$\alpha \vdash \beta$	2
7	SR		$\dfrac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$			
8	-1	$X \longleftarrow \varnothing$	$\dfrac{\alpha \mid \alpha \vdash \beta}{\beta}$	4, 6	β	4, 6
9′	($\wedge$E)		$\dfrac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta}$			
10′	-1	$X \longleftarrow \varnothing$	$\dfrac{\alpha \mid \beta}{\alpha \wedge \beta}$			
11′	-1	$\alpha \leftrightarrows \beta$ $\alpha \longleftarrow \neg\beta$	$\dfrac{\beta \mid \neg\beta}{\beta \wedge \neg\beta}$	8, 3	$\beta \wedge \neg\beta$	
9	($\neg$1)		$\dfrac{X \vdash \alpha, \neg\alpha}{X \vdash \beta}$			
10	-1	$X \longleftarrow \varnothing$	$\dfrac{\alpha \mid \neg\alpha}{\beta}$			
11	-1	$\alpha \leftrightarrows \beta$ $\alpha \longleftarrow \neg\alpha$	$\dfrac{\beta \mid \neg\beta}{\neg\alpha}$	8, 3	$\neg\alpha$	2, 3, 4
12	$\rightarrow$ E		$\dfrac{X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}$			
13	-1	$X \longleftarrow \varnothing$	$\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\alpha \rightarrow \beta}$			
14	-1	$\alpha \leftrightarrows \beta$ $\alpha \longleftarrow \neg\alpha$ $\beta \longleftarrow \neg\beta$	$\dfrac{\neg\beta \vdash \neg\alpha}{\neg\beta \rightarrow \neg\alpha}$	3, 11, ???	$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	2, 3, 4, ???
15	$\rightarrow$ E+1	$\alpha \longleftarrow \gamma$ $\beta \longleftarrow \delta$ $\gamma \longleftarrow \alpha \rightarrow \beta$ $\delta \longleftarrow \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	$\dfrac{\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha}{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)}$	2, 14	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	2, 3, 4, ???
16	$\rightarrow$ E, $\rightarrow$ B, SR		$\overline{A_1}$		$\overline{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)}$	

Tabelle 3.2.: Ableitung der Kontraposition aus allgemeingültigen Schlussregeln

4. Design

Dieses Projekt soll Open Source sein. Daher gilt für die Dokumente die *GNU Free Documentation License (FDL)* und für die Software die *GNU Affero General Public License (APGL)*. Die *GNU General Public License (GPL)* reicht für die Software nicht aus, da das Programm auch mittels eines Servers betrieben werden kann und soll. Damit das Projekt gegebenenfalls durch verschiedene Entwickler gleichzeitig bearbeitet werden kann und wegen des Konfigurationsmanagements wurde es als ein GitHub Projekt erstellt (siehe [21]).

Wenn die Lizenzen nicht mitgeliefert wurden, können sie unter `http://www.gnu.org/licenses/` gefunden werden.

4.1. Anforderungen

Die Anforderungen ergeben sich zunächst aus den Zielen im Abschnitt 1.3 auf Seite 7. Die beiden Ziele 1 *Daten* und 15 *Lizenz* sind für die Entwicklung von ASBA von sekundärer Bedeutung und werden daher in diesem Abschnitt nicht übernommen. Die anderen Ziele werden noch verfeinert.

> > > Ziele aus Abschnitt "Ziele" in Anforderungen umwandeln. < < <

1. **Form**: Die Daten liegt in formaler, geprüfter Form vor. — siehe Ziel 2 auf Seite 7
2. **Eingaben**: Die Eingabe von Daten erfolgt in einer formalen Syntax unter Verwendung der üblichen mathematischen Schreibweise. Folgende Daten können eingegeben werden:
   a) Axiome
   b) Sätze
   c) Beweise
   d) Fachbegriffe
   e) Teilgebiete
   f) Ausgabeschemata

   Dabei sind alle Begriffe nur innerhalb eines Teilgebiets und seiner untergeordneten Teilgebiete gültig, solange sie nicht umdefiniert werden. Das oberste Teilgebiet ist die ganze Mathematik. — siehe Ziel 3 auf Seite 7
3. **Prüfung**: Vorhandene Beweise können automatisch geprüft werden. — siehe Ziel 4 auf Seite 7
4. **Ausgaben**: Die Ausgabe kann in einer eindeutigen, formalen Syntax gemäß vorhandener Ausgabeschemata erfolgen. — siehe Ziel 5 auf Seite 7
5. **Auswertungen**: Zusätzlich zur Ausgabe der Daten sind verschiedene Auswertungen möglich. Insbesondere kann zu jedem Beweis angegeben werden, wie lang er ist und welche Axiome und Sätze[1] er benötigt. — siehe Ziel 6 auf Seite 7

[1] Sätze, die quasi als Axiome verwendet werden.

6. **Anpassbarkeit**: Fachbegriffe und die Darstellung bei der Ausgabe können mit Hilfe von — gegebenenfalls unbenannten — untergeordneten Teilgebieten angepasst werden. — siehe Ziel 7 auf Seite 7
7. **Individualität**: Axiome und Sätze können für jeden Beweis individuell vorausgesetzt werden. Dabei sind fachgebietsspezifische Fachbegriffe erlaubt. — siehe Ziel 8 auf Seite 7)
8. **Internet**: Die Daten können auf mehrere Dateien verteilt sein. Ein Teil davon — oder sogar alle — können im Internet liegen. — siehe Ziel 9 auf Seite 8
9. **Kommunikation**: Die Kommunikation mit ASBA kann mit den Fachbegriffen der einzelnen Teilgebiete erfolgen. — siehe Ziel 10 auf Seite 8
10. **Zugriff**: Der Zugriff auf ASBA kann lokal und über das Internet erfolgen. — siehe Ziel 11 auf Seite 8
11. **Unabhängigkeit**: ASBA kann offline und online arbeiten. — siehe Ziel 12 auf Seite 8
12. **Rekursion**: Es kann rekursiv über alle verwendeten Dateien — auch solchen, die im Internet liegen — ausgewertet werden. — siehe Ziel 13 auf Seite 8
13. **Bedienbarkeit**: ASBA ist einfach zu bedienen. — siehe Ziel 14 auf Seite 8
14. **Zwischenspeicher**: Wichtige Auswertungen können an vorhandenen Dateien angehängt oder separat in eigenen Dateien gespeichert werden. — siehe Ziel 16 auf Seite 8
15. **Beweisunterstützung**: ASBA hilft bei der Erstellung von Beweisen. — siehe Ziel 17 auf Seite 8

4.2. Axiome

> > > Axiome auswählen und definieren. < < <

4.3. Beweise

> > > Schlussregeln auswählen und Beweise definieren. < < <

4.4. Datenstruktur

> > > Datenstruktur abstrakt und in XML definieren. < < <

4.5. Bausteine

> > > Bausteine? definieren. < < <

A. Anhang

A.1. Werkzeuge

Da dies ein Open Source Projekt sein soll, müssen alle Werkzeuge, die zum Ablauf der Software erforderlich sind, ebenfalls Open Source sein. Für die reine Entwicklung sollte das auch gelten, muss es aber nicht.

Werkzeuge zur Übersetzung der Quelldateien

1. Ein Übersetzer für LaTeX Quellcode (*.tex). — Verwendet wird *MiKTeX*.
2. Ein Übersetzer für C++ Quellcode (*.c, *.cpp, *.h, *.hpp). — Verwendet wird *Visual Studio Community 2017*.

Nicht unbedingt nötig, aber sinnvoll:

3. Ein Dokumentationssystem für in C++ Quellcode und darin enthaltene Doxygen Kommentare (*.c, *.cpp, *.h, *.hpp). — Verwendet wird *Doxygen* mit Konfigurationsdatei „Doxyfile“.
4. Ein Konfigurationsmanagementsystem zur Verwaltung der Quelldateien. — Verwendet wird *GitHub*.

Werkzeuge für die Entwicklung

5. *GitHub* als Online Konfigurationsmanagementsystem zur Zusammenarbeit verschiedener Entwickler. → `https://github.com/` — Lizenz siehe [8]
6. GitHub benötigt *Git* als Konfigurationsmanagementsystem. → `https://git-scm.com/` — Lizenz siehe [8]
7. *MiKTeX* für Dokumentation und Ausgaben in LaTeX. → `https://miktex.org/` — Lizenz siehe [12]
8. angedacht: *Visual Studio Community 2017*[1)] (*VS*) als Entwicklungsumgebung für C++. → `https://www.visualstudio.com/downloads/` — Lizenz siehe [11]
9. angedacht: In *Visual Studio Community 2015* integrierte Datenbank für Ausgabeschemata, Sätze, Beweise, Fachbegriffe und Teilgebiete. — Lizenz siehe [11]
10. angedacht: *RapidXml* für Ein- und Ausgabe in XML. → `http://rapidxml.sourceforge.net/index.htm` — Lizenz siehe [4] oder wahlweise [14] [2)]
11. angedacht: *Doxygen* als Dokumentationssystem für C++. → `http://www.stack.nl/~dimitri/doxygen/` — Lizenz siehe [8]

1) Visual Studio Community ist zwar nicht Open Source, darf aber zur Entwicklung von Open Source Software unentgeltlich verwendet werden.

2) RapidXml stellt eine C++ Header-Datei zur Verfügung. Wenn diese im Quellcode eines Programms enthalten ist, gilt das ganze Programm als Open Source. Wenn diese Header-Datei nur in einer Bibliothek innerhalb eines Projekts verwendet wird, so gilt nur diese Bibliothek als Open Source.

12. angedacht: Doxygen benötigt *Ghostscript* als Interpreter für Postscript und PDF. → http://ghostscript.com/ — Lizenz siehe [6]
13. angedacht: Doxygen benötigt *Graphviz* mit *Dot* zur Erzeugung und Visualisierung von Graphen. → http://www.graphviz.org/Home.php — Lizenz siehe [5]

Werkzeuge zur Bearbeitung der Quelldateien

14. *TEXstudio* als Editor für LATEX. → http://www.texstudio.org/ — Lizenz siehe [8]
TEXstudio benötigt einen Interpreter für Perl:
15. *Strawberry Perl* als Interpreter für Perl. → http://strawberryperl.com/ — Lizenz: Various OSI-compatible Open Source licenses, or given to the public domain
16. *Notepad++* als Text-Editor. → https://notepad-plus-plus.org/ — Lizenz siehe [7]
17. *WinMerge* zum Vergleich von Dateien und Verzeichnissen. → http://winmerge.org/ — Lizenz siehe [7]

Im Projekt *qedeq* verwendete Werkzeuge

- *Java* als Programmiersprache und Laufzeitumgebung. → https://www.java.com/de/download/win10.jsp — Lizenz siehe [15]
- *Apache Ant* als Java Bibliothek und Kommandozeilen-Werkzeug um Java Programme zu erzeugen. → http://ant.apache.org/ — Lizenz siehe [3]
- *Checkstyle* zur statischen Code-Analyse für Java. → http://checkstyle.sourceforge.net/ — Lizenz siehe [9]
- *Clover*[3)] als Testwerkzeug zur Analyse der Code-Abdeckung. → https://www.atlassian.com/software/clover/ — Lizenz siehe [10]
- *Eclipse IDE for Java Developers* als Entwicklungsumgebung für Java. → http://www.eclipse.org/downloads/packages/eclipse-ide-java-developers/neon1a/ — Lizenz siehe [16]
- *JUnit* zur Erzeugung von wiederholbaren Tests. → http://junit.org/junit4/ — Lizenz siehe [5]
- *Xerces2* als XML-Parser in Java. → http://xerces.apache.org/xerces2-j/ — Lizenzen siehe [3, 13, 17, 18]

3) Clover ist proprietäre Software, aber auf Anfrage frei für 30 Tage. Danach ist eine einmalige Lizenzgebühr fällig.

A.2. Die Struktur ausgewählter Begriffe

natürliche Sprache	formale Metasprache	Aussagenlogik	Prädikatenlogik
	Metasprache	**Objektsprache**	
natürliche Sprache	**formale Metasprache**	**Aussagenlogik**	**Prädikatenlogik**
	Symbole		
	Metasymbol	Objektsymbol	
	Beispielsymbole		
unäre Operation	$\ominus$		
binäre Operation	$\circledast$		
binäre Relationen	$<$ $\leq$ $>$ $\geq$ $\nprec$ $\npreceq$ $\nsucc$ $\nsucceq$		
	Wahrheitswerte		
wahr *falsch*	true false	$\top$ $\bot$	
	Operation Relation Umkehrrelation Negation		
	Metaoperation Metarelation	Junktor	
nicht	$\sim$	$\neg$	
und oder dann	$\&$ $\Vert$ $\Rightarrow$	$\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$	
dann wenn wenn	$\Leftrightarrow$ $\Leftarrow$	$\leftrightarrow$ $\leftarrow$	
und[1] entweder oder	$\vert$	$\dot{\vee}$	
nicht und nicht oder		$\uparrow$ $\downarrow$	
gleich ungleich	$=$ $\neq$	$=$ $\neq$	
definitionsgemäß gleich	$:\Leftrightarrow$		
definitionsgemäß gleich	$:=$		
Quantoren	$\forall$ $\exists$ $\dot{\exists}$		$\bigwedge$ $\bigvee$ $\dot{\bigvee}$
Ersetzung Vertauschung	$\leftarrowtail$ $\leftrightarrows$		
Ableitungsrelationen:	$\vdash$ $\vdash_R$ $\vdash_{\mathcal{P}}$ $\vdash_{\mathcal{K}}$ $\vdash_{\mathcal{E}}$		
Elementrelationen:	$\in$ $\ni$ $\notin$ $\not\ni$		
Mengenrelationen:	$\subset$ $\subseteq$ $\not\subset$ $\not\subseteq$ $\supset$ $\supseteq$ $\not\supset$ $\not\supseteq$		
Komponentenrelationen:	$\sqin$ $\sqni$ $\not\sqin$ $\not\sqni$		
Folgenrelationen:	$\sqsubset$ $\sqsubseteq$ $\not\sqsubset$ $\not\sqsubseteq$ $\sqsupset$ $\sqsupseteq$ $\not\sqsupset$ $\not\sqsupseteq$		
	unär / **binär**		
Mengenoperationen	$\mathfrak{P}$ $\mathfrak{P}_e$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{R}_e$ / $\cap$ $\cup$ $\setminus$ $\times$		
unäre Operationen auf:	**Relationen** / **Funktionen**		
	stel_r / stel_f		
Definitions- Zielbereich	dom tar		
Quell- Wertebereich	src ran		
Trägermenge	car car_i		
Graph	graph		
unäre Operationen auf:	Folgen Tupel		
	len set		

Die erste Spalte beschreibt die anderen Spalten. Die **fettgedruckten** Teile, und nur diese, gelten als Überschriften.
[1] nur in Schlussregeln

Tabelle A.1.: Die Struktur ausgewählter Begriffe und zugehörige Symbole

A.3. Offene Aufgaben

1. TODOs bearbeiten.
2. Eingabeprogramm erstellen (liest XML).
3. Prüfprogramm erstellen.
4. Ausgabeprogramm erstellen (schreibt XML).
5. Formelausgabe erstellen (erzeugt LaTeX aus XML).
6. Axiome sammeln und eingeben.
7. Sätze sammeln und eingeben.
8. Beweise sammeln und eingeben.
9. Fachbegriffe und Symbole sammeln und eingeben.
10. Teilgebiete sammeln und eingeben.
11. Ausgabeschemata sammeln und eingeben.

B. Verzeichnisse

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Wolfgang Rautenberg, *Einführung in die Mathematische Logik*: Ein Lehrbuch, 3. Auflage, Vieweg+Teubner 2008 5, 12, 13, 21, 23, 27, 28, 34, 36, 37

[2] Norbert Schwarz, „unveränderte" PDF-Fassung der 3. Auflage von 1991 →*Einführung in TEX*: [1)] http://www.ruhr-uni-bochum.de/www-rz/schwanbs/TeX/ — 06.02.2002

[3] *Apache License*, Version 2.0 [2)] → http://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0 — 01.2004 45

[4] *Boost Software License* 1.0 → http://www.boost.org/users/license.html — 17.08.2003 44

[5] *Eclipse Public License* Version 1.0 → http://www.eclipse.org/org/documents/epl-v10.php — 09.03.2017 45

[6] *GNU Affero General Public License* → http://www.gnu.org/licenses/agpl — 19.11.2007 45

[7] *GNU General Public License* → http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-1.0 — 02.1989 45

[8] *GNU General Public License*, Version 2 → http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-2.0 — 06.1991 44, 45

[9] *GNU Lesser General Public License*, Version 2.1 → http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/lgpl-2.1 — 02.1999 45

[10] Lizenz für *Clover* → https://www.atlassian.com/software/clover — 2017 45

[11] Lizenz für *Microsoft Visual Studio Express 2015* → https://www.visualstudio.com/de/license-terms/mt171551/ — 2017 44

[12] Lizenz für *MikTeX* → https://miktex.org/kb/copying — 13.04.2017 44

[13] Lizenz für *SAX* → http://www.saxproject.org/copying.html — 05.05.2000 45

[14] *MIT License* → https://opensource.org/licenses/MIT/ — 09.03.2017 44

[15] *Oracle Binary Code License Agreement* → http://java.com/license — 02.04.2013 45

[16] *OSI Certified Open Source Software* → https://opensource.org/pressreleases/certified-open-source.php — 16.06.1999 45

[17] *W3C Document License* → http://www.w3.org/Consortium/Legal/2015/doc-license — 01.02.2015 45

[18] *W3C Software Notice and License* → http://www.w3.org/Consortium/Legal/2002/copyright-software-20021231.html — 13.05.2015 45

[19] *Hilbert II — Introduction* → http://www.qedeq.org/ — 20.01.2014 4, 5

[20] *Formal Correct Mathematical Knowledge*: GitHub Repository vom Projekt Hilbert II → https://github.com/m-31/qedeq/ — 18.03.2017 5

1) Das Datum hinter dem Link gibt — je nachdem welches bekannt ist — das Datum der letzten Änderung, den Stand der Seite oder das Datum, an dem die Seite angeschaut wurde an. Sind mehrere Daten vorhanden, wird das erste vorhandene in der angegebenen Reihenfolge genommen. — Dies gilt für alle hier aufgelisteten Seiten im Internet.
2) Der Pfeil (→) verweist stets auf einen Link zu einer Seite im Internet.

[21] *ASBA — Axiome, Sätze, Beweise und Auswertungen*. Projekt zur maschinellen Überprüfung von mathematischen Beweisen und deren Ausgabe in lesbarer Form: GitHub Repository vom Projekt ASBA — in Bearbeitung → https://github.com/Dr-Winfried/ASBA 42

[22] Meyling, Michael: *Anfangsgründe der mathematischen Logik* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_logic_v1_de.pdf — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung) 28

[23] Meyling, Michael: *Formale Prädikatenlogik* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_formal_logic_v1_de.pdf — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)

[24] Meyling, Michael: *Axiomatische Mengenlehre* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_set_theory_v1_de.pdf — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)

[25] Meyling, Michael: *Elements of Mathematical Logic* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_logic_v1_en.pdf — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung) 28

[26] Meyling, Michael: *Formal Predicate Calculus* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_formal_logic_v1_en.pdf — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)

[27] Meyling, Michael: *Axiomatic Set Theory* → http://www.qedeq.org/current/doc/math/qedeq_set_theory_v1_en.pdf — 24. Mai 2013 (in Bearbeitung)

[28] Wikipedia Hauptseite → https://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Hauptseite — 07.11.2017 77

[29] Wikipedia: *Ableitung (Logik)* → https://de.wikipedia.org/wiki/Ableitung_(Logik) — 20.02.2018 63

[30] Wikipedia: *Aussage (Logik)* → https://de.wikipedia.org/wiki/Aussage_(Logik) — 11.03.2018 14, 64

[31] Wikipedia: *Aussagenlogik* → https://de.wikipedia.org/wiki/Aussagenlogik — 18.01.2018 32, 64

[32] Wikipedia: *Aussagenlogik* Kapitel 4 *Formaler Zugang* → https://de.wikipedia.org/wiki/Aussagenlogik#Formaler_Zugang — 18.01.2018 28

[33] Wikipedia: *Element (Mathematik)* → https://de.wikipedia.org/wiki/Element_(Mathematik) — 09.01.2016 65

[34] Wikipedia: *Funktion (Mathematik)* → https://de.wikipedia.org/wiki/Funktion_(Mathematik) — 12.03.2018 67

[35] Wikipedia: *Funktion (Mathematik)* Kapitel 2.1 *Mengentheoretische Definition* → https://de.wikipedia.org/wiki/Funktion_(Mathematik)#Mengentheoretische_Definition — 27.01.2018 19

[36] Wikipedia: *Hilbert-Kalkül* Kapitel 1.4 *Modus (ponendo) ponens* → https://de.wikipedia.org/wiki/Hilbert-Kalk%C3%BCl#Modus_(ponendo)_ponens — 18.06.16 27

[37] Wikipedia: *Identität (Logik)* Kapitel 2.3 *Identität in der Informatik* → https://de.wikipedia.org/wiki/Identit%C3%A4t_(Logik)#Identit.C3.A4t_in_der_Informatik — 18.05.2017 16

[38] Wikipedia: *Intuitionismus*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Intuitionismus_(Logik_und_Mathematik) —
17.01.2018

[39] Wikipedia: *Junktor* → https://de.wikipedia.org/wiki/Junktor — 18.03.2017 67

[40] Wikipedia: *Junktor* Kapitel 2.2 *Mögliche Junktoren*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Junktor#M.C3.B6gliche_Junktoren — 21.10.2017 28

[41] Wikipedia: *Kalkül* → https://de.wikipedia.org/wiki/Kalk%C3%BCl — 26.02.2017 11

[42] Wikipedia: *Kartesisches Produkt* → https://de.wikipedia.org/wiki/Kartesisches_Produkt —
21.02.2018 72

[43] Wikipedia: *Konstante (Logik)* → https://de.wikipedia.org/wiki/Konstante_(Logik) —
20.01.2016 68

[44] Wikipedia: *Logik* → https://de.wikipedia.org/wiki/Logik — 28.01.2018 68

[45] Wikipedia: *Mathematische Logik* → https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematische_Logik —
21.03.2018 69

[46] Wikipedia: *Menge* → https://de.wikipedia.org/wiki/Menge_(Mathematik) — 07.03.2018 69

[47] Wikipedia: *Mengenlehre* → https://de.wikipedia.org/wiki/Mengenlehre — 17.01.2018 33, 70

[48] Wikipedia: *Prädikatenlogik* → https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik —
01.03.2018 33, 72

[49] Wikipedia: *Prädikatenlogik erster Stufe*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik_erster_Stufe — 26.11.2017

[50] Wikipedia: *Relation (Mathematik)*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Relation_(Mathematik) — 16.03.2018 73

[51] Wikipedia: *Relation (Mathematik)* Kapitel 1.1 *Mehrstellige Relation*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Relation_(Mathematik)#Mehrstellige_Relation —
27.01.2018 19

[52] Wikipedia: *Schlussregel* → https://de.wikipedia.org/wiki/Schlussregel — 29.03.2015 12,
23, 73

[53] Wikipedia: *Signatur (Modelltheorie)*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Signatur_(Modelltheorie) — 04.03.2018 74

[54] Wikipedia: *Systeme natürlichen Schließens*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Systeme_nat%C3%BCrlichen_Schlie%C3%9Fens —
25.10.2017 12, 23, 34, 35, 36, 37, 40

[55] Wikipedia: *Tupel* → https://de.wikipedia.org/wiki/Tupel — 17.12.2017 75

[56] Wikipedia: *Variable (Mathematik)*
→ https://de.wikipedia.org/wiki/Variable_(Mathematik) — 08.03.2018 76

[57] Wikipedia: *Wahrheitswert* → https://de.wikipedia.org/wiki/Wahrheitswert — 03.07.2017
14, 77

Index

Die Einordnung von einem Substantiv mit Adjektiven erfolgt stets unter dem Substantiv. Ist das Substantiv und ggf. ein oder mehrere Adjektive schon vorher aufgelistet worden, werden diese Worte durch je ein „—“ ersetzt.

A | B | C | D | E | F | G | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Z

Symbolverzeichnis

Mit Seitenzahlen **in dieser** Schriftart wird auf die Definition oder sonstige wichtige Stellen verwiesen.

[3] alternativ: **dasselbe wie** oder **identisch zu**
[4] alternativ: **nicht gleich** oder **nicht dasselbe wie**
[5] alternativ: **so wie** oder **ähnlich**
[6] alternativ: **nicht so wie** oder **nicht ähnlich**
[7] alternativ: **dasselbe wie** oder **identisch zu**

$|$ Eine binäre Metaoperation[8]: A **und** B 16, 22, **24**, 26, 34–41, 46, , 70, *siehe* & & $\wedge$

$\vdash$ Ableitungsrelation: A **ableitbar**[9] B 22, 23, **24**, 25, 26, **34**, 35, 37, 39, 41, 46, , 63

$\vdash_R$ Die Darstellung einer Relation $R \in \mathfrak{R}(\mathfrak{P}(\mathcal{L}))$ als Ableitungsrelation. **23**, **24**, 25, 46, , 63

$\longleftarrow$ Ersetzung: ... **substituiert durch** ... 22, 34, **35**, 36, 39, 41, 46,

$\leftrightarrows$ Vertauschung: ... **vertauscht mit** ... 22, **35**, 36, 41, 46, , 77

Elementrelationen Im Folgenden sei x ein Element und M eine Menge in den metasprachlichen Ausdrücken $x \circledast M$ bzw. $M \circledast x$.

$\in$ Eine Elementrelation: x ist **Element aus**[10] M; die grundlegende Relation der Mengenlehre. **17**, 22, 46, , 57, 58, 60, 61, 66, 73, 74

$\ni$ Eine Elementrelation: M **enthält** x; die Umkehrrelation von $\in$. **17**, 22, 46, , 57, 66

$\notin$ Eine Elementrelation: x ist **kein Element aus** M; die Negation von $\in$. **17**, 46, , 57, 66

$\not\ni$ Eine Elementrelation: M **enthält** x **nicht**; die Negation von $\ni$; gleichzeitig die Umkehrrelation von $\notin$ **17**, 46, , 66

Mengenrelationen und -operationen [11] Im Folgenden seien M und N Mengen in den metasprachlichen Ausdrücken $M \circledast N$.

$\subset$ Eine Mengenrelation: M ist **echte Teilmenge von** N; es kann *keine* Gleichheit bestehen. Ursprünglich wurde $\subset$ im Sinne von $\subseteq$ verwendet. 4, **17**, 22, 23, 30, 46, , 57

$\subseteq$ Eine Mengenrelation: M ist **Teilmenge von** N; es *kann* Gleichheit bestehen. **17**, 19, 22, 23, 25–27, 30, 46, , 57, 61–63, 73

$\not\subset$ Eine Mengenrelation: M ist **keine echte Teilmenge von** N; es *kann* aber Gleichheit bestehen. Die Negation von $\subset$. **17**, 46, , 57

$\not\subseteq$ Eine Mengenrelation: M ist **keine Teilmenge von** N; es kann auch *keine* Gleichheit bestehen. Die Negation von $\subseteq$. **17**, 46, , 57

$\supset$ Eine Mengenrelation: M ist **echte Obermenge von** N; es kann *keine* Gleichheit bestehen. Die Umkehrrelation von $\subset$. Ursprünglich wurde $\supset$ im Sinne von $\supseteq$ verwendet. **17**, 22, 46, , 57

$\supseteq$ Eine Mengenrelation: M ist **Obermenge von** N; es *kann* Gleichheit bestehen. Die Umkehrrelation von $\subseteq$. **17**, 22, 34, 46, , 57

$\not\supset$ Eine Mengenrelation: M ist **keine echte Obermenge von** N; es *kann* aber Gleichheit bestehen. Die Negation von $\supset$; gleichzeitig die Umkehrrelation von $\not\subset$. **17**, 46,

$\not\supseteq$ Eine Mengenrelation: M ist **keine Obermenge von** N; es kann auch *keine* Gleichheit bestehen. Die Negation von $\supseteq$; gleichzeitig die Umkehrrelation von $\not\subseteq$. **17**, 46,

$\cap$ Eine Mengenoperation: **Durchschnitt** von M und N. $M \cap N :== \{x \mid (x \in M) \,\&\, (x \in N)\}$ 22, 30, 46, , 57

$\cup$ Eine Mengenoperation: **Vereinigung** von M und N. $M \cup N :== \{x \mid (x \in M) \parallel (x \in N)\}$ 22, 24, 27, 30, 34, 46, , 57

$\setminus$ Eine Mengenoperation: **Differenz** von M und N. $M \setminus N :== \{x \mid (x \in M) \,\&\, (x \notin N)\}$ 46, , 57, 71

[8] nur für Schlussregeln
[9] synonym: beweisbar
[10] alternativ: **von**; „a aus A“ kann hier nur heißen: Element a aus der Menge A, „a von A“ könnte z. B. auch „Komponente von“ meinen.
[11] In diesem Dokument Metarelationen und -operationen.

$\times$ Eine Mengenoperation: **kartesisches Produkt**[12]) von M und N.
$M \times N :\equiv \{(x,y) \mid (x \in M) \;\&\; (y \in N)\}$ 19, 20, 22–24, 46, , 58, 60–62, 67, 71–73

Komponentenrelationen Im Folgenden sei x eine Komponente und F eine Folge in den metasprachlichen Ausdrücken $x \circledast F$ bzw. $F \circledast x$.

$\sqsubseteq$ Eine Komponentenrelation: x ist **Komponente aus**[13]) F; die grundlegende Relation der Mengenlehre. 46, , 58, 61, 68

$\sqsupseteq$ Eine Komponentenrelation: F **enthält** x nicht als Komponente; die Umkehrrelation von $\sqsubseteq$. 46, , 58, 68

$\not\sqsubseteq$ Eine Komponentenrelation: x ist **keine Komponente aus** F; die Negation von $\sqsubseteq$. 46, , 58, 68

$\not\sqsupseteq$ Eine Komponentenrelation: F **enthält** x **nicht** als Komponente; die Negation von $\sqsupseteq$; gleichzeitig die Umkehrrelation von $\not\sqsubseteq$ 46, , 68

Folgenrelationen Im Folgenden seien F und G Folgen in den metasprachlichen Ausdrücken $F \circledast G$.

$\sqsubset$ Eine Folgenrelation: F ist **echte Teilfolge von** G; es kann *keine* Gleichheit bestehen. 46, , 58

$\sqsubseteq$ Eine Folgenrelation: F ist **Teilfolge von** G; es *kann* Gleichheit bestehen. 46, , 58

$\not\sqsubset$ Eine Folgenrelation: F ist **keine echte Teilfolge von** G; es *kann* aber Gleichheit bestehen. Die Negation von $\sqsubset$. 46,

$\not\sqsubseteq$ Eine Folgenrelation: F ist **keine Teilfolge von** G; es kann auch *keine* Gleichheit bestehen. Die Negation von $\sqsubseteq$. 46,

$\sqsupset$ Eine Folgenrelation: F ist **echte Oberfolge von** G; es kann *keine* Gleichheit bestehen. Die Umkehrrelation von $\sqsubset$. 46, , 58

$\sqsupseteq$ Eine Folgenrelation: F ist **Oberfolge von** G; es *kann* Gleichheit bestehen. Die Umkehrrelation von $\sqsubseteq$. 46, , 58

$\not\sqsupset$ Eine Folgenrelation: F ist **keine echte Oberfolge von** G; es *kann* aber Gleichheit bestehen. Die Negation von $\sqsupset$; gleichzeitig die Umkehrrelation von $\not\sqsubset$. 46,

$\not\sqsupseteq$ Eine Folgenrelation: F ist **keine Oberfolge von** G; es kann auch *keine* Gleichheit bestehen. Die Negation von $\sqsupseteq$; gleichzeitig die Umkehrrelation von $\not\sqsubseteq$. 46,

Junktoren [14]) Im Folgenden seien A und B logische Aussagen in den logischen Ausdrücken $\ominus A$ bzw. $A \circledast B$.

$\perp$ Ein 0-stelliger Junktor, d. h. eine aussagenlogische Konstante mit dem Wahrheitswert *falsch*. 14, 28, **29**, **31**, 46, , 77, *siehe* false

$\top$ Ein 0-stelliger Junktor, d. h. eine aussagenlogische Konstante mit dem Wahrheitswert *wahr*. 14, 28, **29**, **31**, 46, , 77, *siehe* true

$\neg$ Ein unärer Junktor: **nicht** A. 15, 22, 28, **29**, 31, 32, 34, 35, 37, 39, 41, 46, , 59, 68, 74, *siehe* $\sim$

$\wedge$ Ein binärer Junktor: A **und** B. 16, 22, 28, **29**, 31, 32, 34, 35, 41, 46, , 59, 68, 71, 74, *siehe* $\uparrow$ & &

$\vee$ Ein binärer Junktor: A **oder** B. 16, 22, 28, **29**, 31, 32, 46, , 59, 71, 74, *siehe* $\downarrow$, $\dot\vee$ & $\|$

$\rightarrow$ Ein binärer Junktor: wenn A **dann** B. 21, 22, 24, 26–28, **29**, **31**, 32, 34, 37, 41, 46, , 59, 68, 72, *siehe* $\Rightarrow$

$\leftarrow$ Ein binärer Junktor: A **wenn** B. 22, 28, **29**, **31**, 32, 46, , 72, *siehe* $\Leftarrow$

[12]) synonym: Mengenprodukt
[13]) alternativ: **von**; „a aus A“ kann hier nur heißen: Element a aus der Menge A, „a von A“ könnte z. B. auch „Komponente von“ meinen.
[14]) In diesem Dokument aussagenlogische Konstante, -Relationen und -Operationen, d. h. Objektkonstante, -relationen und -operation seeen.

[15] alternativ: **sowohl als auch**
[16] alternativ: **weder noch**

$\mathcal{A}$ Das Alphabet der aussagenlogischen Sprache. **30**, , 60

$\mathcal{A}_x$ Eine Teilmenge des Alphabets $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Sprache. **30**,

b Ein Beweisschritt. 27,

$\mathcal{B}$ Eine Menge von Beweisschritten. 27,

$\vec{b}$ Ein Tupel von Beweisschritten. 27,

C Eine Schlussregel. 26,

$\mathcal{C}$ Eine Menge von Schlussregeln. 26, 27, , 74

car Für eine Relation[17] $R = (G, A_1, \ldots, A_n)$ ist $\text{car}(R) \coloneqq A_1 \times \ldots \times A_n$ und $\text{car}_i(R) \coloneqq A_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$. 19, 46, , 60, *siehe* Trägermenge

dom Für eine Funktion $f : A \to B$ ist $\text{dom}(f) \coloneqq A$, der Definitionsbereich von f. 20, 46, , 60, 65, 73

E Ein Ersetzung. 26, 27, , *siehe* $\mathcal{E}$

$\square_e$ Eine Operation mittels eines Index:

$$X_e \coloneqq \begin{cases} \{M \in X \mid |M| \in \mathbb{N}_0\} & \text{, für eine Menge } X \text{ von Mengen} \\ \{R \in X \mid |R_g| \in \mathbb{N}_0\} & \text{, für eine Menge } X \text{ von Relationen} \\ \{F \in X \mid \text{len}(F) \in \mathbb{N}_0\} & \text{, für eine Menge } X \text{ von Folgen} \end{cases}$$

, 60

$\mathcal{E}$ Eine Menge von Ersetzungen. 26, 27, , 66, *siehe* E

$\mathfrak{F}$ $\mathfrak{F}(M) \coloneqq \{F \mid F \text{ ist Folge über } M\}$. , 60, *siehe* $\mathfrak{F}_e$

$\mathfrak{F}_e$ $\mathfrak{F}(M) \coloneqq \{F \in \mathfrak{F}(M) \mid \text{len}(F) \in \mathbb{N}_0\}$. , *siehe* $\mathfrak{F}$ &

false Der metasprachliche Wahrheitswert *falsch* als Symbol. 14, 19, 20, 46, , 77, *siehe* $\perp$ & true

$\square_g$ Eine Operation mittels eines Index: $X_g \coloneqq \text{graph}(X)$ für Funktionen und Relationen X. , 60

graph Für eine Relation $R = (G, A_1, \ldots, A_n)$ ist $\text{graph}(R) \coloneqq G$.
Für eine Funktion $f : A \to B$ ist $\text{graph}(f) \coloneqq \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$. 19, 46, , 60, *siehe* Graph

$\mathcal{J}$ Die Menge der Junktorsymbole. **30**, 31, 32, , 60, 74, *siehe* Junktor

$\mathcal{J}_b$ Die Menge der binären Junktoren. **28**, 30,

$\mathcal{J}_c$ Die Menge der aussagenlogischen Konstanten. **28**, 30, , 68

$\mathcal{J}_u$ Die Menge der unären Junktoren. **28**, 30,

$\mathcal{J}_x$ Eine Teilmenge der Menge $\mathcal{J}$ der Junktorsymbole. **30**,

k Eine Konklusion. 26, , 68, 74

$\mathcal{K}$ Eine Menge von Konklusionen. 25–27, , 68, 72, 74

$\vdash_{\mathcal{K}}$ Eine Relation (aufgefasst als Menge) von Konklusionen. 27, 46, , 68

[17] Funktionen sind spezielle Relationen. Für eine Funktion $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to B$ gilt demnach:
$\text{car}(f) \coloneqq A_1 \times \ldots \times A_n \times B$; $\text{car}_i(f) \coloneqq A_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$; $\text{car}_{n+1}(f) \coloneqq B$

$\mathrm{stel_r}$ $\mathrm{stel_r}(R) :\equiv n$ für $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$. 19, 46, , 62, *siehe* Stelligkeit & Relation

$\mathfrak{T}$ Eine Mengenoperation: $\mathfrak{T}(M)$ ist die Menge aller Tupel von M. **23**, 26, , 62, 76, *siehe* Tupelmenge

T Eine Transformation. 27,

$\mathcal{T}$ Eine Menge von Transformationen. 27,

tar $\mathrm{tar}(f) :\equiv B$ für $f : A \to B$. 20, 46, , 62, *siehe* Zielbereich & Funktion

true Der metasprachliche Wahrheitswert *wahr* als Symbol. 14, 19, 20, 25, 46, , 77, *siehe* $\top$ & false

X Ein Axiom.

$\mathcal{X}$ Eine Menge von Axiomen. 27,

Glossar

Die Einordnung von einem Substantiv mit Adjektiven erfolgt stets unter dem Substantiv. Ist das Substantiv und ggf. ein oder mehrere Adjektive schon vorher aufgelistet worden, werden diese Worte durch je ein „—“ ersetzt.

Mit Seitenzahlen **in dieser** Schriftart wird auf die Definition oder sonstige wichtige Stellen verwiesen.

Vielfach ist hier der erste Abschnitt[18)] aus dem entsprechenden Wikipedia-Artikel zitiert, manchmal gekürzt und immer ohne die originalen Fußnoten und ohne Verweise auf andere Wikipedia-Artikel. Letztere werden allerdings noch, wie im Original, in blau angegeben.

A | B | D | E | F | G | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | Z

A

Abbildung Synonym zu Funktion.

ableitbar Wenn sich eine Formel β aus einer anderen Formel α mittels zulässiger Transformationen ableiten lässt, heißt β **ableitbar** aus α. Sprechweise: α **ableitbar**[19)] β. Eine oder beide Formeln α bzw. β dürfen dabei durch Formelmengen[] ersetzt werden. **24**, 25, **34**, , 57, 63, 65, *siehe* Ableitungsrelation

Ableitung Wikipedia[29] schreibt dazu:

> Eine **Ableitung**, **Herleitung**, oder Deduktion ist in der Logik die Gewinnung von Aussagen aus anderen Aussagen. Dabei werden Schlussregeln auf Prämissen angewandt, um zu Konklusionen zu gelangen. Welche Schlussregeln dabei erlaubt sind, wird durch das verwendete Kalkül bestimmt.
>
> Die Ableitung ist zusammen mit der semantischen Konklusion einer der zwei logischen Methoden, um auf die Konklusion zu kommen.

Eine Aussage $A \vdash B$ bzw. allgemeiner $A \vdash_R B$ mit $A, B \subseteq \mathcal{L}$. Dies entspricht einem Element (A, B) einer Ableitungsrelation $\vdash$ bzw. $\vdash_R$(d. h. $(A, B) \in R$. Die semantische Aussage ist die, das die Formeln aus B aus den Formeln aus A abgeleitet werden können. 23, **24**, 25, **26**, **27**, 37, 39, 41, 48, , 63, 66, 68, 72, *siehe* Ableitungsmenge, Ableitungsrelation, Aussage, Konklusion, Logik, Prämisse & Schlussregel

Ableitungsmenge Eine Menge von Ableitungen, letztlich nichts anderes als eine Ableitungsrelation. 25, , 66, 68, 72

Ableitungsrelation Eine binäre Relation $\vdash$ aus $\mathfrak{P}(\mathcal{L})^2$. Für $R \in \mathfrak{P}(\mathcal{L})^2$ auch mit $\vdash_R$ bezeichnet. 22, **24**, 46, , 57, 63, *siehe* Ableitung

Abtrennungsregel Eine Schlussregel. **37**, , 59, *siehe* (TR)

Äquivalenz Eine Gleichheitsrelation: Zwei Objekte A und B sind äquivalent[20)], $A \equiv B$, wenn sie in den interessierenden Eigenschaften für $\equiv$ übereinstimmen. **16**, 17, 29, , *siehe* $\equiv$

Äquivalenzrelation Eine Äquivalenzrelation ist eine binäre Relation auf einer Menge M mit folgenden Eigenschaften (dabei sei $\sim$ die Äquivalenzrelation):

reflexiv	:	$a \sim a$
transitiv	:	$((a \sim b) \,\&\, (b \sim c)) \Rightarrow (a \sim c)$
symmetrisch	:	$(a \sim b) \Rightarrow (b \sim a)$

18) Der Teil zwischen Überschrift und Inhaltsverzeichnis.
19) synonym: beweisbar
20) alternativ: **ähnlich**

jeweils für alle Elemente a, b und c aus M. **17**,

Alphabet >>> **Beschreibung fehlt noch** <<< 30, , 60

Anfangsregel Die Schlussregel (AR) um anfangen zu können. **35**, , 59

ASBA ist ein Akronym für „**A**xiome, **S**ätze, **B**eweise und **A**uswertungen". Es bezeichnet das in diesem Dokument beschriebene Programmsystem, das zu eingegebenen Axiomen, Sätzen und Beweisen letztere prüft, Auswertungen generiert und unter Zuhilfenahme gegebener Ausgabeschemata eine Ausgabe im LaTeX-Format in mathematisch üblicher Schreibweise mit Formeln erstellt. 1, 4, **5**, 6–8, 10–13, 21, 23, 25–28, 42, 43, 48, , 78

atomar Das Attribut atomar kann auf Aussagen, Formeln und Symbole angewendet werden. Atomar sind solche, die keine echten Teilobjekte gleicher Objektart enthalten. **15**, 17, 18, 30, , 64, 66, **74**, 76, 78, *siehe* zerlegbar

Ausgabeschema Ein Schema, mit dem bestimmte mathematische Objekte ausgegeben werden sollen. 1, 7, 10, **11**, 42, 44, 47, , 64

Aussage Wikipedia[30] schreibt dazu:

> Eine **Aussage** im Sinn der aristotelischen Logik ist ein sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist zu *fragen*, ob es wahr oder falsch ist (so genanntes Aristotelisches Zweiwertigkeitsprinzip). Es ist nicht erforderlich, *sagen* zu können, ob das Gebilde wahr oder falsch ist. Es genügt, dass die Frage nach Wahrheit („Zutreffen") oder Falschheit („Nicht-Zutreffen") sinnvoll ist, – was zum Beispiel bei Fragesätzen, Ausrufen und Wünschen nicht der Fall ist. Aussagen sind somit Sätze, die Sachverhalte beschreiben und denen man einen Wahrheitswert zuordnen kann.

Das entscheidende Kriterium ist, dass man einer Aussage zumindest im Prinzip einen Wahrheitswert zuordnen kann, ggf. nach Ersetzung von Parametern durch konkrete Argumente. Dies gilt natürlich auch, wenn metasprachliche Symbole verwendet werden, weswegen sie in Aussagen verwendet werden können. Da man logischen Ausdrücken und Relationen mit Argumenten ebenfalls einen Wahrheitswert zuordnen kann[21)], können wir sie ebenfalls als Aussagen behandeln. Es handelt sich dann um logische, im Gegensatz zu metasprachlichen Aussagen. 11–13, **14**, 15, 17, 18, 25, 26, 28, 29, 35, 38–41, , 56, 59, 63–65, 68, 70, 71, 73, 74, 78

—, logische Die **logischen** Aussagen sind … , 58, 64

—, metasprachliche Die **metasprachlichen** Aussagen sind … , 64

Aussagenlogik Wikipedia[31] schreibt dazu:

> Die **Aussagenlogik** ist ein Teilgebiet der Logik, das sich mit Aussagen und deren Verknüpfung durch Junktoren befasst, ausgehend von strukturlosen Elementaraussagen (Atomen), denen ein Wahrheitswert zugeordnet wird. In der *klassischen Aussagenlogik* wird jeder Aussage genau einer der zwei Wahrheitswerte „wahr" und „falsch" zugeordnet. Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage lässt sich ohne zusätzliche Informationen aus den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen bestimmen.

23, 27–29, 31, **32**, 46, , 72, *siehe* Aussage, Junktor, Logik, Prädikatenlogik & Wahrheitswert

Auswertung >>> **Beschreibung fehlt noch** <<< 11,

Axiom Eine Formel, die unbewiesen als wahr angesehen wird. 1, 4–7, 9, 10, **11**, 12, 13, 16, 23, **24**, 25, 28, 31, 32, 35, 36, 42, 43, 47, , 62, 64, 66, 75, *siehe* X & $\mathcal{X}$

Axiomensystem Eine Menge von Axiomen. 32,

B

21) Zumindest prinzipiell nach Ersetzung von Variablen durch konkrete Wahrheitswerte.

Basisregel Eine Schlussregel, die nicht mehr auf andere zurückgeführt wird. Obwohl das auch auf die Identitätsregeln zutrifft, werden diese hier aber nicht dazu gezählt. 34–37, 39, 48, , 67, 74

Baustein **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** 12, 28,

Beispielsymbol **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 56, *siehe* Symbol

beschränkt Eine Schlussregel heißt beschränkt, wenn sie nur endlich viele Prämissen und Konklusionen hat. **24**, 26, , 65

Beweis Eine zulässige Ableitung von Konklusionen aus gegebenen Prämissen. 1, 4–10, **11**, 12, 13, 21, 23, 25, **26**, 27, 28, 30, 37–40, 42–44, 47, , 59, 64, 66, 68, 72

beweisbar Synonym zu ableitbar. **24**, **34**, , 57, 63

Beweisschritt Eine Vorschrift, wie aus vorgegebenen Aussagen (den Prämissen) weitere (die Konklusionen) folgen. 4, 11, 13, 21, **27**, 39, , 60, 65, *siehe* b, $\mathcal{B}$ & $\vec{b}$

Beweisschrittfolge Eine Folge von Beweisschritten. **27**, , 65

Beweisschrittmenge Eine Menge von Beweisschritten, insbesondere die Menge der Glieder einer Beweisschrittfolge. **27**,

binär Eine Operation, Funktion oder Relation heißt binär, wenn ihre Stelligkeit gleich 2 ist. 19–25, 28, 29, 46, , 56, 57, 61, 63, 71, 72, 76, *siehe* unär

D

Darstellung **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** 5, 7, 9, 14, 24, 43, 48, , 57, 65, 73, 78

—, interne **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** 12,

—, logische **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** 12,

Darstellungsweise Die Art der Darstellung mathematischer Objekte. , 75

Definition Eine Definition mit Hilfe des Symbols $\langle :\equiv \rangle$. $\langle\!\langle A :\equiv B \rangle\!\rangle$ steht für „A ist **definitionsgemäß gleich** B“ für Objekte A und B. Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B. **17**, 21, 22, 31, 34, , 56, 66, 70, *siehe* Metadefinition

Definitionsbereich Für eine Funktion $f : A \to B$ ist $\mathrm{dom}(f)A$ ihr Definitionsbereich (domain). **20**, 46, , 60, 65, 67, 73, *siehe* dom, Quellbereich & Funktion

Differenz Eine Mengenoperation: **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 57

Dummy **> > > Beschreibung fehlt noch < < <**

—, dummy **> > > Beschreibung fehlt noch < < <**

Durchschnitt Eine Mengenoperation: **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 57

E

echt Attribut für ??? **15**,

Eigenschaft, interessierende Solche Eigenschaften von Objekten, die im aktuellen Zusammenhang von Interesse sind, z. B. einen bestimmten Wert zu haben, Element einer bestimmten Menge zu sein, ein bestimmtes Objekt zu bezeichnen, usw. 16, 17, , 63, 67, 68, 76

Element Wikipedia[33] schreibt dazu:

> Ein **Element** in der Mathematik ist immer im Rahmen der Mengenlehre oder Klassenlogik zu verstehen. Die grundlegende Relation, wenn x ein Element ist und M eine Menge oder Klasse ist, lautet:

„x ist Element von M“ oder mit Hilfe des Elementzeichens „x ∈ M“.

Die Mengendefinition von Georg Cantor beschreibt anschaulich, was unter einem Element im Zusammenhang mit einer Menge zu verstehen ist:

> „Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Diese anschauliche Mengenauffassung der naiven Mengenlehre erwies sich als nicht widerspruchsfrei. Heute wird daher eine axiomatische Mengenlehre benutzt, meist die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, teilweise auch eine allgemeinere Klassenlogik.

, 57, 61, 66, 70, 76, *siehe* Element, Menge, Mengenlehre & Relation

Elementoperation **>>> Beschreibung fehlt noch <<<**

Elementrelation Eine Elementrelation ist eine Relation zwischen einem Element und einer Menge: ∈, ∋, ∉und ∌ 46, , 57, *siehe* Komponentenrelation

Ergebnis Eine Ableitung: Ein Ergebnis eines Beweises. **26**, , 61, 66, *siehe* **e**, $\mathcal{E}$ & $\vdash_{\mathcal{E}}$

Ergebnismenge Eine Ableitungsmenge: Die Menge $\mathcal{E}$ der Ergebnisse eines Beweises.

Ersetzung Eine Funktion zur Transformation einer Formel mittels Ersetzung in eine gleichwertige. Die Ersetzung heißt zulässig, wenn sie vorgegebene Regeln erfüllt. 22, **26**, 31, 34, **35**, 36, 38, 40, 46, , 57, 60, 66, 67, 77, 78

Ersetzungsmenge Eine Menge von Ersetzungen, meistens mit $\mathcal{E}$ bezeichnet.

F

Fachbegriff Ein Name für einen mathematischen Begriff. **5**, 6–8, **11**, 42–44, 47, , 75

falsch Ein metasprachlicher Wahrheitswert in Textform. 14, 19, 29, 46, , 58, 60, 77, *siehe* *wahr*, false & ⊥

Folge Ein Folge[22] $\vec{a}$ ist eine Aneinanderreihung von **Komponenten** $a_i, i \in \mathbb{N}_0$, geschrieben $(a_1, a_2, \ldots)$. Sind alle Komponenten Elemente einer Menge M, so heißt $\vec{a}$ ein Folge **auf** M. Bricht die Folge ab, d. h. gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, so heißt die Folge **endlich** von der **Länge** n. Ist die Länge $n = 0$, so sprechen wir von der **leeren Folge** und bezeichnen sie mit ⟪()⟫. Eine endliche Folge der Länge n heißt auch n-**Tupel** und die leere Folge demnach 0-**Tupel**. 12, 19, 46, , 58, 60, 61, 66, 68, 76, 78, *siehe* len, leere Folge & Tupel

—, leere Eine Folge heißt **leer**, wenn ihre Länge 0 ist, d. h. wenn sie keine Komponenten besitzt. , 66, *siehe* len, Folge & Tupel

Folgenrelation **>>> Beschreibung fehlt noch <<<** 46, , 58

Folgerung Synonym zu Konklusion. **24**,

Folgerungsmenge Synonym zu Konklusionsmenge.

Formationsregel **>>> Beschreibung fehlt noch <<<** 12,

Formel Unter einer Formel verstehen wir stets eine mathematische Formel. Diese kann aus einem einzigen Symbol bestehen (atomare Formel), andererseits aber auch mehrdimensional sein, lässt sich dann aber mittels geeigneter Definitionen immer eindeutig als eine Zeichenfolge schreiben. 1, 4, 10, 12–14, 16, 18, 21–28, 30, 31, 34–36, , 59, 61, 63, 64, 66, 67, 70–72, 74, 75, 77, 78

—, allgemeingültige Eine Formel heißt **allgemeingültig**, wenn sie aus den Axiomen und allgemeingültigen Schlussregeln abgeleitet werden kann. 26,

[22] alternativ: **Sequenz**

—, aussagenlogische Eine Formel heißt **aussagenlogisch**, wenn sie ein Element von $\mathcal{L}^{A}$ ist. 18, **30**, 31, , 61

Formelmenge Eine Menge von Formeln, oft mit $\mathcal{L}$ bezeichnet. Man nennt $\mathcal{L}$ auch eine Sprache und ihre Elemente Wörter, insbesondere dann, wenn es eindeutige Regeln zur Konstruktion von $\mathcal{L}$ gibt. Wir bevorzugen „Formel" und „Formelmenge". 12, **23**, 24, 31, 32, , 61, 63, 67, 74

Funktion Wikipedia[34] schreibt dazu:

> In der Mathematik ist eine **Funktion** (lateinisch *functio*) oder **Abbildung** eine Beziehung (Relation) zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (Funktionsargument, unabhängige Variable, x-Wert) genau ein Element der anderen Menge (Funktionswert, abhängige Variable, y-Wert) zuordnet. Der Funktionsbegriff wird in der Literatur unterschiedlich definiert, jedoch geht man generell von der Vorstellung aus, dass Funktionen mathematischen Objekten mathematische Objekte zuordnen, zum Beispiel jeder reellen Zahl deren Quadrat. Das Konzept der Funktion oder Abbildung nimmt in der modernen Mathematik eine zentrale Stellung ein; es enthält als Spezialfälle unter anderem parametrische Kurven, Skalar- und Vektorfelder, Transformationen, Operationen, Operatoren und vieles mehr.

Eine n**-stellige Funktion** f von einer Menge $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, dem Definitionsbereich, in eine Menge B, den Zielbereich, ist eine (n+1)-stellige Relation $(G, A_1, \ldots, A_n, B)$ derart, dass es für jedes $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ genau ein $b \in B$ gibt mit $(a_1, \ldots, a_n, b) \in f$. Dieses b wird auch mit $\langle\!\langle f(a_1, \ldots, a_n) \rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle f a_1 \ldots a_n \rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle f(\vec{a}) \rangle\!\rangle$ oder $\langle\!\langle f\vec{a} \rangle\!\rangle$ bezeichnet.
Schreibweise: $\langle\!\langle f : A \to B \rangle\!\rangle$ bzw. $\langle\!\langle f : A_1 \times \ldots \times A_n \to B \rangle\!\rangle$ **19**, 20, 26, 28, 46, , 60–63, 65–67, 71–74, 76–78, *siehe* Abbildung, Element, Menge, Objekt & Relation

Funktionssymbol Ein Symbol für eine Funktion. , 71

Funktionswert einer Funktion. **19**,

G

Gleichheit Eine Gleichheitsrelation: Zwei Objekte A und B sind **gleich** (dasselbe; identisch), $A = B$, wenn sie in den interessierenden Eigenschaften für $=$ übereinstimmen. **16**, 17, , 57–59, 67

Gleichheitsrelation Eine mit Gleichheit verwandte Relation: $=$, $\neq$, $\equiv$ und $\not\equiv$. **17**, 22, , 63, 67, 68, 76

Gliederungszeichen **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 71

Graph einer Funktion oder Relation. **19**, 46, , *siehe* graph

I

Identitätsregel Eigentlich eine Basisregel zur Identität. Da die Identitätsregeln nur zur Rechtfertigung der Ersetzung verwendet werden, werden sie hier nicht zu den Basisregeln gezählt. 35, 36, , 65, 67

J

Junktor Wikipedia[39] schreibt dazu:

> Ein **Junktor** (von lat. *iungere* „verknüpfen, verbinden") ist eine logische Verknüpfung zwischen Aussagen innerhalb der Aussagenlogik, also ein logischer Operator. Junktoren werden auch Konnektive, Konnektoren, Satzoperatoren, Satzverknüpfer, Satzverknüpfungen, Aussagenverknüpfer, logische Bindewörter, Verknüpfungszeichen oder Funktoren genannt und als logische Partikel klassifiziert.

> Sprachlich wird zwischen der jeweiligen Verknüpfung selbst (zum Beispiel der Konjunktion) und dem sie bezeichnenden Wort beziehungsweise Sprachzeichen (zum Beispiel dem Wort „und“ beziehungsweise dem Zeichen „$\wedge$“) oft nicht unterschieden.
>
> [...]

Ein Junktor ist eine aussagenlogische Operation oder -Relation. Da die Werte einer aussagenlogischen Operation Wahrheitswerte sind, kann man einen Junktor auch stets als Relation verstehen. 15, 16, 20–22, 28–31, 34, 46, , 58, 68, *siehe* Metajunktor

—, binärer **>>> Beschreibung fehlt noch <<<** **28**, , 58–60

—, unärer **>>> Beschreibung fehlt noch <<<** **28**, , 58, 60

Junktorsymbol Ein Symbol für einen Junktor. 28, **30**, , 60

K

Klammerung **>>> Beschreibung fehlt noch <<<** **30**, , 61

Komponente Die Komponenten einer Folge $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)$ sind die a_i. a_i heißt die ***i*-te Komponente** von $\vec{a}$. , 58, 61, 66, 68, *siehe* Folge & Tupel

Komponentenmenge $\text{set}(\vec{a}) \coloneqq \{a \mid a \sqsubseteq \vec{a}\}$ ist die Komponentenmenge einer Folge bzw. eines Tupels $\vec{a}$.

Komponentenrelation Eine Komponentenrelation ist eine Relation zwischen einer (möglichen) Komponente und einer Folge: $\sqsubseteq$, $\sqsupseteq$, $\not\sqsubseteq$und $\not\sqsupseteq$ 46, , 58, *siehe* Elementrelation

Konklusion Eine Ableitung: Die Konklusionen einer Schlussregel $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$ bzw. $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$ sind die Elemente aus $\mathcal{K}$ bzw. $\vdash_{\mathcal{K}}$. Die Konklusionen werden normalerweise mit $\mathbf{k}_i$ bezeichnet. 11, 12, 21, **24**, **25**, 27, **35**, 38–40, , 60, 65, 66, 68, 73, 74, *siehe* Schlussregel

Konklusionsmenge Eine Ableitungsmenge: Die Menge $\mathcal{K}$ der Konklusionen einer Schlussregel bzw. eines Beweises. , 66

Konstante Wikipedia[43] schreibt dazu:

> Allgemein ist eine **Konstante** (von lateinisch *constans* „feststehend“) ein Zeichen beziehungsweise ein Sprachausdruck mit einer „genau bestimmte[n] Bedeutung, die im Laufe der Überlegungen unverändert bleibt“[1]. Die Konstante ist damit ein Gegenbegriff zur Variablen.

, 68, 71, *siehe* Symbol & Variable

—, aussagenlogische Eine Konstante heißt **aussagenlogisch**, wenn sie ein Element von $\mathcal{J}_c$ ist. **28**, , 58, 60

Kontraposition Die allgemeingültige Aussage: $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$. 41, 48,

Kontravalenz Eine Gleichheitsrelation: Zwei Objekte A und B sind **nicht äquivalent** (nicht ähnlich), $A \not\equiv B$, wenn sie in mindestens einer interessierenden Eigenschaft für $\equiv$ nicht übereinstimmen. **16**, 29,

L

Logik Wikipedia[44] schreibt dazu:

Mit **Logik** (von altgriechisch

[...],denkende Kunst', ,Vorgehensweise') oder auch **Folgerichtigkeit** wird im Allgemeinen das vernünftige Schlussfolgern und im Besonderen dessen Lehre – die **Schlussfolgerungslehre** oder auch **Denklehre** – bezeichnet. In der Logik wird die Struktur von Argumenten im Hinblick auf ihre Gültigkeit untersucht, unabhängig vom Inhalt der Aussagen. Bereits in diesem Sinne spricht man auch von „formaler" Logik. Traditionell ist die Logik ein Teil der Philosophie. Ursprünglich hat sich die traditionelle Logik in Nachbarschaft zur Rhetorik entwickelt. Seit dem 20. Jahrhundert versteht man unter Logik überwiegend symbolische Logik, die auch als grundlegende Strukturwissenschaft, z. B. innerhalb der Mathematik und der theoretischen Informatik, behandelt wird.

Die moderne symbolische Logik verwendet statt der natürlichen Sprache eine künstliche Sprache (Ein Satz wie *Der Apfel ist rot* wird z. B. in der Prädikatenlogik als $f(a)$ formalisiert, wobei a für *Der Apfel* und f für *ist rot* steht) und verwendet streng definierte Schlussregeln. Ein einfaches Beispiel für ein solches formales System ist die Aussagenlogik (dabei werden sogenannte atomare Aussagen durch Buchstaben ersetzt). Die symbolische Logik nennt man auch mathematische Logik oder formale Logik im engeren Sinn.

5, , 77, *siehe* atomar, Aussage, Aussagenlogik, Prädikatenlogik & Schlussregel

—, mathematische Wikipedia[45] schreibt dazu:

Die **mathematische Logik**, auch **symbolische Logik**, (alternativer Sprachgebrauch auch *Logistik*), ist ein Teilgebiet der Mathematik, insbesondere als Methode der Metamathematik und eine Anwendung der modernen formalen Logik. Oft wird sie wiederum in die Teilgebiete Modelltheorie, Beweistheorie, Mengenlehre und Rekursionstheorie aufgeteilt. Forschung im Bereich der mathematischen Logik hat zum Studium der Grundlagen der Mathematik beigetragen und wurde auch durch dieses motiviert. Infolgedessen wurde sie auch unter dem Begriff *Metamathematik* bekannt.

Ein Aspekt der Untersuchungen der mathematischen Logik ist das Studium der Ausdrucksstärke von formalen Logiken und formalen Beweissystemen. Eine Möglichkeit, die Komplexität solcher Systeme zu messen, besteht darin, festzustellen, was damit bewiesen oder definiert werden kann.

Früher wurde die mathematische Logik auch *symbolische Logik* (als Gegensatz zur philosophischen Logik) genannt, wobei jener Name mittlerweile nur noch für gewisse Aspekte der Beweistheorie verwendet wird.

, *siehe* Mengenlehre & Teilgebiet

M

Menge Wikipedia[46] schreibt dazu:

Eine **Menge** ist ein Verbund, eine Zusammenfassung von einzelnen Elementen. Die *Menge* ist eines der wichtigsten und grundlegenden Konzepte der Mathematik, mit ihrer Betrachtung beschäftigt sich die Mengenlehre.

Bei der Beschreibung einer Menge geht es ausschließlich um die Frage, welche Elemente in ihr enthalten sind. Es wird nicht danach gefragt, ob ein Element mehrmals enthalten ist oder ob es eine Reihenfolge unter den Elementen gibt. Eine Menge muss kein Element enthalten – es gibt genau eine Menge ohne Elemente, die „leere Menge". In der Mathematik sind die Elemente einer Menge häufig Zahlen, Punkte eines Raumes oder ihrerseits Mengen. Das Konzept ist jedoch auf beliebige Objekte anwendbar: z. B. in der Statistik auf Stichproben, in der Medizin auf Patientenakten, am Marktstand auf eine Tüte mit Früchten.

> Ist die Reihenfolge der Elemente von Bedeutung, dann spricht man von einer endlichen oder unendlichen Folge, wenn sich die Folgenglieder mit den natürlichen Zahlen aufzählen lassen (das erste, das zweite, usw.). Endliche Folgen heißen auch Tupel. In einem Tupel oder einer Folge können Elemente auch mehrfach vorkommen. Ein Gebilde, das wie eine Menge Elemente enthält, wobei es zusätzlich auf die Anzahl der Exemplare jedes Elements ankommt, jedoch nicht auf die Reihenfolge, heißt Multimenge.

12, 13, 17–21, 23–28, 30, 31, 36, , 57, 60–68, 70–76, *siehe* Element, Folge, leere Menge, Mengenlehre & Tupel

—, leere $\emptyset$, die **leere Menge**, ist die einzige Menge ohne Elemente. Sie wird auch mit ⟪{}⟫ bezeichnet. 24, 34, , 61

Mengenlehre Wikipedia[47] schreibt dazu:

> Die **Mengenlehre** ist ein grundlegendes Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Untersuchung von Mengen, also von Zusammenfassungen von Objekten, beschäftigt. Die gesamte Mathematik, wie sie heute üblicherweise gelehrt wird, ist in der Sprache der Mengenlehre formuliert und baut auf den Axiomen der Mengenlehre auf. Die meisten mathematischen Objekte, die in Teilbereichen wie Algebra, Analysis, Geometrie, Stochastik oder Topologie behandelt werden, um nur einige wenige zu nennen, lassen sich als Mengen definieren. Gemessen daran ist die Mengenlehre eine recht junge Wissenschaft; erst nach der Überwindung der Grundlagenkrise der Mathematik im frühen 20. Jahrhundert konnte die Mengenlehre ihren heutigen, zentralen und grundlegenden Platz in der Mathematik einnehmen.

5, 29, **33**, , 57, 58, 72, *siehe* Axiom, Objekt, Menge & Teilgebiet

Mengenoperation **>>> Beschreibung fehlt noch <<<** 46, , 57, 58, 62, 65, 76

Mengenprodukt Synonym zu kartesisches Produkt. , 58

Mengenrelation **>>> Beschreibung fehlt noch <<<** **17**, 46, , 57

Metadefinition Eine Definition in Metasprache mit Hilfe des Symbols für die Metadefinition ⟨:⇔⟩. ⟪$A :\Leftrightarrow B$⟫ steht für „A ist **definitionsgemäß äquivalent zu** B“ für Aussagen A und B. Gewissermaßen ist A nur eine andere Schreibweise für B. **17**, 22, , 56, 70, *siehe* Definition

Metaformel Eine Formel der formalen Metasprache. 14, , 70

Metajunktor **>>> Beschreibung fehlt noch <<<** , *siehe* Junktor

Metaoperation Eine Operation der Metasprache: &, ‖ oder |. **15**, 21, 22, 24, 46, , 56, 57, *siehe* Objektoperation

Metarelation Eine Relation der Metasprache: ⇒, ⇐ oder ⇔. **15**, 46, , 56, 57, *siehe* Objektrelation

Metasprache Eine Sprache, in der Aussagen über Elemente einer anderen Sprache getroffen werden können. In diesem Dokument ist dies immer die normale Umgangssprache. **13**, 14, 15, 46, , 70, 71, 77, *siehe* Objektsprache

—, formale Eine Metasprache, deren Ausdrucksmittel Formeln sind. In diesem Dokument gehören die meisten Formeln dazu und werden daher als Metaformeln bezeichnet. Die Definition der Bedeutung der Metaformeln ist mehr beschreibend und nicht so exakt wie bei den Formeln der Mathematik, den hier sogenannten Objektformeln. 4, 14, 46, , 70, 77

Metasymbol Ein Symbol der formalen Metasprache. 14, 46, , *siehe* Objektsymbol

Metavariable Eine Variable der formalen Metasprache.

Monotonieregel Eine Schlussregel. 34, **35**, , 59, *siehe* (MR)

N

Negation Die **Negation** (zu) einer binären Relation (G, A, B) ist die Relation (H, A, B) mit $H = (A \times B) \setminus G\}$. Üblicherweise wird das zugehörige Relationssymbol mit einem schrägen oder vertikalen Strich durchgestrichen. — Die Negation der Negation einer Relation ist wieder die ursprüngliche Relation. Die Negation der Umkehrrelation einer Relation ist gleich der Umkehrrelation ihrer Negation. 17, **20**, 46, , , 56–58, 76

Notation, Polnische Bei der Polnischen Notation stehen die Argumente von Relationen und Funktionen stets rechts von den Relations- und Funktionssymbolen. Dadurch kann auf Gliederungszeichen wie Klammern und Kommata verzichtet werden. Noch einfacher für Computer ist die **umgekehrte** Polnische Notation, bei der die Argumente immer links stehen. **28**, **30**, , , 61

O

Oberaussage Eine Aussage A ist genau dann eine **Oberaussage** einer Aussage B, wenn B eine Teilaussage von A ist.

—, echte Eine Aussage A ist genau dann eine **echte Oberaussage** einer Aussage B, wenn B eine echte Teilaussage von A ist.

Oberfolge Eine Formel A ist genau dann eine **Oberfolge** einer Formel B, wenn B eine Teilfolge von A ist. , 58

—, echte Eine Formel A ist genau dann eine **echte Oberfolge** einer Formel B, wenn B eine echte Teilfolge von A ist. , 58

Oberformel Eine Formel A ist genau dann eine **Oberformel** einer Formel B, wenn B eine Teilformel von A ist.

—, echte Eine Formel A ist genau dann eine **echte Oberformel** einer Formel B, wenn B eine echte Teilformel von A ist.

Obermenge Eine Menge A ist genau dann eine **Obermenge** einer Menge B, wenn B eine Teilmenge von A ist. 17, , 57, 71

—, echte Eine Menge A ist genau dann eine **echte Obermenge** einer Menge B, wenn B eine echte Teilmenge von A ist. , 57, 71

Oberobjekt Eine Objekt A ist genau dann ein **Oberobjekt** eines Objekts B, wenn B ein Teilobjekt von A ist.

—, echtes Eine Objekt A ist genau dann ein **echtes Oberobjekt** eines Objekts B, wenn B ein echtes Teilobjekt von A ist.

Obersymbol Eine Symbol A ist genau dann ein **Obersymbol** eines Symbols B, wenn B ein Teilsymbol von A ist.

—, echtes Eine Symbol A ist genau dann ein **echtes Obersymbol** eines Symbols B, wenn B ein echtes Teilsymbol von A ist.

Objekt Symbole, Formeln und Aussagen sowie Mengen, Zeichenfolgen, Zahlen; ganz allgemein reale oder gedachte Dinge an sich. 16–18, , 64, 65, 71, 77

—, metasprachliches Ein Objekt der Metasprache.

Objektart **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** 16, , 64, 77

Objektformel Eine Formel der Objektsprache. 14, , 70

Objektkonstante Eine Konstante der Objektsprache. , 58

Objektoperation Eine Operation der Objektsprache: $\wedge$, $\vee$. , 58

Objektrelation Eine Relation der Objektsprache: $\rightarrow$, $\leftarrow$ oder $\leftrightarrow$. , 58, *siehe* Metarelation

Objektsprache Je nach der aktuellen (mathematischen) Umgebung die Formeln der Aussagenlogik, der Prädikatenlogik, der Mengenlehre oder eines anderen Teilgebiets. **13**, 14, 46, , 71, 72, 77

Objektsymbol Ein Symbol der Objektsprache. 14, 18, 46, , *siehe* Metasymbol

Operation Eine Operation ist eine — meistens binäre, d. h. zweiwertige — Funktion $M^n \rightarrow M$. Für eine binäreOperation $\circledast : M \times M \rightarrow M$ schreibt man meistens $x \circledast y$ statt $\circledast(x, y)$. 15, 16, 20–22, 28, 29, 46, , 56, 60, 61, 65, 68, 70–72, 76

—, aussagenlogische Die **aussagenlogischen** Operationen sind ... 20, , 58, 68

Operationssymbol Ein Symbol für eine Operation.

Ordnungsrelation Eine Ordnungsrelation ist ein binäre Relation auf einer Menge M mit der folgenden Eigenschaft (dabei sei $\preceq$ die Ordnungsrelation):

$$\textbf{transitiv} \ : \qquad ((a \preceq b) \ \& \ (b \preceq c)) \Rightarrow (a \preceq c)$$

jeweils für alle Elemente a, b und c aus M.

P

Paar, geordnetes **>>> Beschreibung fehlt noch <<<**

Potenzmenge Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge ihrer Teilmengen. **23**, , 61, 72

Prädikat Ein Element der Prädikatenlogik. — Z. B. kann man eine Gruppe als ein zweistelliges Prädikat Gruppe$(G, +)$ definieren, in dem G eine Menge und $+$ eine Operation, d. h. eine binäre (zweistellige) Funktion $+ : G \times G \rightarrow G$ ist, so dass die Gruppenaxiome erfüllt sind. , 72, 74

Prädikatenlogik Wikipedia[48] schreibt dazu:

> Die **Prädikatenlogiken** (auch **Quantorenlogiken**) bilden eine Familie logischer Systeme, die es erlauben, einen weiten und in der Praxis vieler Wissenschaften und deren Anwendungen wichtigen Bereich von Argumenten zu formalisieren und auf ihre Gültigkeit zu überprüfen. Auf Grund dieser Eigenschaft spielt die Prädikatenlogik eine große Rolle in der Logik sowie in Mathematik, Informatik, Linguistik und Philosophie.
>
> [...]

23, 27, 28, **33**, 46, , 72, *siehe* Aussagenlogik & Logik

Prämisse Eine Ableitung: Die Prämissen einer Schlussregel $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$ bzw. $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$ sind die Elemente aus $\mathcal{P}$ bzw. $\vdash_{\mathcal{P}}$. Die Prämissen werden normalerweise mit $\mathbf{p}_i$ bezeichnet. 11, 12, 21, **24**, **25**, 27, **35**, 36, 38–40, , 61, 65, 72–74, 77, *siehe* Schlussregel

Prämissenmenge Eine Ableitungsmenge: Die Menge $\mathcal{P}$ der Prämissen einer Schlussregel bzw. eines Beweises.

Produkt, kartesisches Wikipedia[42] schreibt dazu:

> Das **kartesische Produkt** oder **Mengenprodukt** ist in der Mengenlehre eine grundlegende Konstruktion, aus gegebenen Mengen eine neue Menge zu erzeugen. [...] Das kartesische Produkt zweier Mengen ist die Menge aller geordneten Paare von Elementen der beiden Mengen, wobei die erste Komponente ein Element der ersten Menge und die zweite Komponente ein Element der zweiten Menge ist. Allgemeiner besteht das kartesische Produkt mehrerer Mengen aus der Menge aller Tupel von Elementen der Mengen, wobei die Reihenfolge der Mengen und damit der entsprechenden Elemente fest vorgegeben ist. Die Ergebnismenge des kartesischen Produkts wird auch **Produktmenge**, **Kreuzmenge** oder **Verbindungsmenge** genannt. [...]

, 58, 61, 70

Q

Quantor **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** 46,

—, logischer **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 59

—, metasprachlicher **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 59

Quellbereich Für die Funktion[23] $f : A \to B$ ist die Menge $\mathrm{src}(f) := \{a \in A \mid f(a) \text{ existiert}\}$ ihr Quellbereich (source). 46, , 73, *siehe* Definitionsbereich

R

Relation Wikipedia[50] schreibt dazu:

> Eine **Relation** (lateinisch *relatio* „Beziehung", „Verhältnis") ist allgemein eine Beziehung, die zwischen Dingen bestehen kann. Relationen im Sinne der Mathematik sind ausschließlich diejenigen Beziehungen, bei denen stets klar ist, ob sie bestehen oder nicht; Objekte können also nicht „bis zu einem gewissen Grade" in einer Relation zueinander stehen. Damit ist eine einfache mengentheoretische Definition des Begriffs möglich: Eine Relation R ist eine Menge von n-Tupeln. In der Relation R zueinander stehende Dinge bilden n-Tupel, die Element von R sind.
>
> Wird nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben, versteht man unter einer Relation gemeinhin eine zweistellige oder binäre Relation. Bei einer solchen Beziehung bilden dann jeweils zwei Elemente a und b ein geordnetes Paar (a, b). Stammen dabei a und b aus verschiedenen Grundmengen A und B, so heißt die Relation *heterogen* oder „Relation *zwischen* den Mengen A und B." Stimmen die Grundmengen überein ($A = B$), dann heißt die Relation *homogen* oder „Relation *in* bzw. *auf* der Menge A."
>
> Wichtige Spezialfälle, zum Beispiel Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen, sind Relationen *auf* einer Menge.
>
> Heute sehen manche Autoren den Begriff Relation nicht unbedingt als auf Mengen beschränkt an, sondern lassen jede aus geordneten Paaren bestehende Klasse als Relation gelten.

Eine n-**stellige** Relation R ist ein $(1+n)$-Tupel $(G, A_1, \ldots, A_n)$ mit $G \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$). 15–17, 19–24, 28, 46, , 56–58, 60, 61, 63–65, 67, 68, 70–76, *siehe* Äquivalenzrelation & Ordnungsrelation

—, aussagenlogische Die **aussagenlogischen** Relationen sind ... 20, , 58, 68

Relationssymbol Ein Symbol für eine Relation. , 71, 76

S

Satz Eine mathematische Aussage, dass bestimmte Konklusionen aus gegebenen Prämissen abgeleitet werden können. 1, 4–7, 10, **11**, 12, 13, 28, 34, 42–44, 47, 64, 73, 75

—, formaler Formale Darstellung eines mathematischen Satzes. **24**, **26**, , 59, *siehe* (FS)

Schlussregel Wikipedia[52] schreibt dazu:

[23] Der Quellbereich $\mathrm{src}(f)$ unterscheidet sich nur bei **partiellen** Funktionen vom Definitionsbereich $\mathrm{dom}(f)$, d. h. solchen Funktionen, für die $f(a)$ nicht für alle $a \in A$ definiert ist.

> Eine **Schlussregel** (oder *Inferenzregel*) bezeichnet eine Transformationsregel (Umformungsregel) in einem Kalkül der formalen Logik, d. h. eine syntaktische Regel, nach der es erlaubt ist, von bestehenden Ausdrücken einer formalen Sprache zu neuen Ausdrücken überzugehen. Dieser regelgeleitete Übergang stellt eine Schlussfolgerung dar.

Eine Schlussregel $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{K}}$ entspricht der Aussage:

> Wenn alle Prämissen $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ zutreffen, dann auch alle Konklusionen $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$.

Wenn diese Aussage zutrifft, kann die Schlussregel zur zulässigen Transformation von Formeln dienen. 22, 23, **24–26**, 27, 34–41, 43, , 59, 60, 63–65, 68, 70, 72, 74, 75, *siehe* C & $\mathcal{C}$

—, allgemeingültige Eine Schlussregel heißt **allgemeingültig**, wenn sie aus den Basisregeln und schon bekannten allgemeingültigen Schlussregeln abgeleitet werden kann. 27, 34, 38–41, 48, , 66, 74

Schlussregelmenge Eine Menge von Schlussregeln, meistens mit $\mathcal{C}$ bezeichnet. , *siehe* $\mathcal{C}$

Schnittregel Eine allgemeingültige Schlussregel. **37**, 38, 39, 48, , 59, *siehe* (SR)

Signatur Wikipedia[53] schreibt dazu:

> In der mathematischen Logik besteht eine **Signatur** aus der Menge der Symbole, die in der betrachteten Sprache zu den üblichen, rein logischen Symbolen hinzukommt, und einer Abbildung, die jedem Symbol der Signatur eine Stelligkeit eindeutig zuordnet. Während die logischen Symbole wie $\forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$ stets als „für alle“, „es gibt ein“, „und“, „oder“, „folgt“, „äquivalent zu“ bzw. „nicht“ interpretiert werden, können durch die semantische Interpretation der Symbole der Signatur verschiedene Strukturen (insbesondere Modelle von Aussagen der Logik) unterschieden werden. Die Signatur ist der spezifische Teil einer elementaren Sprache.
>
> Beispielsweise lässt sich die gesamte Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre in der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe und dem einzigen Symbol $\in$(neben den rein logischen Symbolen) formulieren; in diesem Fall ist die Symbolmenge der Signatur gleich $\{\in\}$.

, 74, *siehe* Abbildung, Logik, Prädikatenlogik, Sprache, Stelligkeit & Symbol

—, Boolesche Die logische Signatur $\{\neg, \wedge, \vee\}$. **31**,

—, logische Abweichend von der Definition von Signatur in Wikipedia ist eine **logische Signatur** eine Teilmenge von $\mathcal{J}$, ausreichend um damit und mit $\mathcal{Q}$ und Klammerung alle anderen Elemente aus $\mathcal{J}$ zu definieren. 31, 32, , 74

Sprache — Siehe Formelmenge. 14, **18**, **26**, , 61, 67, 70, 77

—, aussagenlogische **>>> Beschreibung fehlt noch <<<** 27, 28, 30, , 60

Sprachebene **>>> Beschreibung fehlt noch <<<** 13,

n-stellig Eine Funktion, Relation oder ein Prädikat mit der Stelligkeit $n \in \mathbb{N}_0$ nennt man **n-stellig**. , 58, 67, 72, 73, *siehe* stel_f & stel_r

Stelligkeit einer Funktion, Relation oder eines Prädikats. **19**, , 65, 74, 76, *siehe* stel_f & stel_r

Symbol Ein **einfaches** Symbol ist ein druckbares typographisches Zeichen, das als Einheit angesehen wird. Ein **zusammengesetztes** Symbol besteht aus mehreren einfachen Symbolen. Wird ein Symbol, das kann auch ein zusammengesetztes Symbol sein, stets als Einheit angesehen, nennen wir es **atomar**[24)], andernfalls **zerlegbar**. Im Einzelfall muss für ein Symbol definiert werden, ob es zerlegt werden kann oder nicht. Ein *einfaches* Symbol ist offensichtlich immer atomar. 5, 13, 16–18, 29, 46, , 60, 62, 64, 66–68, 70–75, 78, *siehe* Beispielsymbol, Metasymbol & Objektsymbol

24) alternativ: **unzerlegbar**

—, aussagenlogisches Die **aussagenlogischen** Symbole sind … 29, 48,

—, metasprachliches **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 64

—, zusammengesetztes **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** 17,

T

Teilaussage **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** **15**, , 71, 76

—, echte **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** 15, , 71, 78

Teilfolge **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 58, 71

—, echte **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 58, 71, 78

Teilformel **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 71, 76

—, echte **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 71, 78

Teilgebiet Ein Teil der Mathematik mit einer zugehörigen Basis aus Axiomen, Sätzen, Fachbegriffen und Darstellungsweisen. **5**, 6–8, **11**, 42–44, 47, , 72

Teilmenge **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** 4, 17, 19, 23, 27, 30, 31, , 57, 60, 61, 71, 72, 74, 76

—, echte **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** 4, 17, , 57, 71

Teilobjekt **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 64, 71, 76

—, echtes **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 71

Teilsymbol **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 71, 76

—, echtes **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 71, 78

Trägermenge einer Relation. **19**, 46, , *siehe* car

Transformation Eine Umformung oder Erzeugung einer Formel aus einer vorgegebenen Menge von Formeln, d. h. die Anwendung einer Schlussregel. 12, 27, 36, , 62, 63, 66, 74, 75, 78, *siehe* T, $\mathcal{T}$ & zulässige Transformation

—, zulässige Eine Transformation heißt **zulässig**, wenn sie Element einer vorgegebenen Menge von Transformationen oder eine daraus zulässigerweise abgeleitete Transformation ist. 25, **34**, 35,

Transformationsfolge Eine Folge von Transformationen. **27**, , *siehe* T, $\mathcal{T}$ & Transformation

Transformationsregel **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** 12,

Tupel Wikipedia[55] schreibt dazu:

> **Tupel** (abgetrennt von mittellat. *quintuplus* ‚fünffach', *septuplus* ‚siebenfach', *centuplus* ‚hundertfach' etc.) sind in der Mathematik neben Mengen eine wichtige Art und Weise, mathematische Objekte zusammenzufassen. Ein Tupel besteht aus einer Liste endlich vieler, nicht notwendigerweise voneinander verschiedener Objekte. Dabei spielt, im Gegensatz zu Mengen, die Reihenfolge der Objekte eine Rolle. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Tupel formal als Mengen darzustellen. Tupel finden in vielen Bereichen der Mathematik Verwendung, zum Beispiel als Koordinaten von Punkten oder als Vektoren in mehrdimensionalen Vektorräumen.
>
> Von Tupeln unabhängig von ihrer Länge ist selten die Rede. Vielmehr verwendet man das Wort n-**Tupel** und die im nächsten Abschnitt genannten Spezialfälle davon dann, wenn sich aus dem Zusammenhang die Länge als feste Zahl oder als benannte Konstante wie n ergibt. Betrachtet man dagegen viele endliche Folgen unterschiedlicher Längen von Elementen einer Grundmenge, spricht man von endlichen Folgen oder definiert einen neuen Begriff, der oft mit „Kette" zusammengesetzt ist, z. B. Zeichenkette, Additionskette.

[...]

Ein n-Tupel[25] $\vec{a}$ ist eine endliche Folge[26] $(a_1, \ldots, a_n)$ **von** seinen **Komponenten** a_i. Sind alle Komponenten Elemente derselben Menge M, so heißt $\vec{a}$ ein n-Tupel **auf** M. 19, **23**, 26, 46, , 60–62, 66, 68, 73, 76, *siehe* Folge, Komponente, Menge, Objekt, Zeichenfolge & Zeichenkette

Tupelmenge Die Tupelmenge $\mathfrak{T}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller n-Tupel aus M^n für alle $n \in \mathbb{N}_0$. **23**, , 76

U

Umkehrrelation Die Umkehrrelation von einer binären Relation (G, A, B) ist die Relation (H, B, A) mit $H = \{(b, a) \mid (a, b) \in G\}$. Üblicherweise wird das zugehörige Relationssymbol gespiegelt. — Die Umkehrrelation der Umkehrrelation einer Relation ist wieder die ursprüngliche Relation. Die Umkehrrelation der Negation einer Relation ist gleich der Negation ihrer Umkehrrelation. 17, **19**, **20**, 46, , 56–58, 71, 76

unär Eine Operation, Funktion oder Relation heißt **unär**, wenn ihre Stelligkeit gleich 1 ist. 20, 21, 28, 29, 46, , 56, *siehe* binär

Ungleichheit Eine Gleichheitsrelation: Zwei Objekte A und B sind **nicht gleich**[27] $A \neq B$, wenn sie in mindestens einer interessierenden Eigenschaft für $=$ nicht übereinstimmen. **16**, 17, , 59

Unteraussage Synonym zu Teilaussage. **15**,

Unterformel Synonym zu Teilformel.

Untermenge Synonym zu Teilmenge.

Unterobjekt Synonym zu Teilobjekt.

Untersymbol Synonym zu Teilsymbol.

unzerlegbar Synonym zu atomar. **15**, 17,

V

Variable Wikipedia[56] schreibt dazu:

> Eine **Variable** ist ein Name für eine Leerstelle in einem logischen oder mathematischen Ausdruck.[1] Der Begriff leitet sich vom lateinischen Adjektiv *variabilis* (veränderlich) ab. Gleichwertig werden auch die Begriffe *Platzhalter* oder *Veränderliche* benutzt. Als „Variable" dienten früher Wörter oder Symbole, heute verwendet man zur mathematischen Notation in der Regel Buchstaben als Zeichen. Wird anstelle der Variablen ein konkretes Objekt eingesetzt, so ist darauf zu achten, dass überall dort, wo die Variable auftritt, auch dasselbe Objekt benutzt wird.
>
> [...]

, 59, 64, 70, 76, *siehe* Konstante

—, aussagenlogische Die **aussagenlogischen** Variablen sind die Elemente von $\mathcal{Q}$. 28, , 61, 76

—, logische Die **logischen** Variablen entsprechen den aussagenlogischen. , 59

—, metasprachliche Die **metasprachlichen** Variablen sind die Elemente von , 59

Vereinigung Eine Mengenoperation: **> > > Beschreibung fehlt noch < < <** , 57

[25] alternativ: **Vektor**
[26] alternativ: **Sequenz**
[27] alternativ: **nicht dasselbe** oder **nicht identisch**

vergleichbar Zwei Objekte A und B sind vergleichbar, wenn beide von derselben Objektart sind, d. h. wenn beide z. B. jeweils Mengen, Zeichenfolgen, Zahlen, usw. sind. Dabei muss bei Formeln zwischen der Formel an sich und ihrem *Wert* oder *Ergebnis* unterschieden werden. **16**, 35, , 77

Vertauschung Die **Vertauschung** von zwei unabhängigen Teil-Formeln (α und β) in einer anderen Formel (γ)
— Formal: $\gamma(\alpha \leftrightarrows \beta)$. Die Vertauschung ist eine spezielle Form der Ersetzung. 32, 35, 36, 46, , 57

Voraussetzung Synonym zu Prämisse.

W

wahr Ein metasprachlicher Wahrheitswert in Textform. 14, 19, 29, 46, , 58, 62, 77, *siehe falsch*, true & $\top$

Wahrheitswert Wikipedia[57] schreibt dazu:

> Ein **Wahrheitswert** ist in Logik und Mathematik ein *logischer Wert*, den eine Aussage in Bezug auf Wahrheit annehmen kann.
>
> In der zweiwertigen klassischen Logik kann eine Aussage nur entweder *wahr* oder *falsch* sein, die Menge der Wahrheitswerte $\{W, F\}$ hat so zwei Elemente. In mehrwertigen Logiken enthält die Wahrheitswertemenge mehr als zwei Elemente, z. B. in einer dreiwertigen Logik oder einer Fuzzy-Logik, die damit zu den nichtklassischen zählen. Hier wird dann auch neben Wahrheitswerten von *Quasiwahrheitswerten*, *Pseudowahrheitswerten* oder *Geltungswerten* gesprochen.
>
> Die Abbildung der Menge von Aussagen einer (meist formalen) Sprache auf die Wahrheitswertemenge wird Wahrheitswertzuordnung genannt und ist eine aussagenlogisch spezifische Bewertungsfunktion. In der klassischen Logik kann auch explizit die Klasse aller wahren Aussagen beziehungsweise die Klasse aller falschen Aussagen definiert werden. Die Abbildung von Wahrheitswerten der (atomaren) Teilaussagen einer zusammengesetzten Aussage auf die Wahrheitswertemenge heißt Wahrheitswertefunktion oder Wahrheitsfunktion. Die Wertetabelle dieser Funktion im mathematischen Sinn wird auch als Wahrheitstafel bezeichnet und häufig dazu verwendet, die Bedeutung wahrheitsfunktionaler Junktoren anzugeben.

Wir verwenden nur die beiden **Wahrheitswerte** der zweiwertigen klassischen Logik, die wir (in der Metasprache) mit $\langle$*wahr*$\rangle$ und $\langle$*falsch*$\rangle$ bezeichnen. In der formalen Metasprache hingegen verwenden wir $\langle$true$\rangle$ und $\langle$false$\rangle$ und in der Objektsprache $\langle\top\rangle$ und $\langle\bot\rangle$. In der Literatur findet man auch einfach $\langle 1\rangle$ und $\langle 0\rangle$. **14**, 16, 28, 29, 46, 48, , 58, 64, 68, *siehe* atomar, Aussage, Element, Junktor, Teilaussage & Logik

—, aussagenlogischer Es gib die beiden aussagenlogischen Wahrheitswerte $\top$ und $\bot$.

—, metasprachlicher Es gib die beiden metasprachlichen Wahrheitswerte in Textform (*wahr*, *falsch*) und in der formalen Metasprache (true, false). , 60, 62, 66, 77

Wertebereich einer Funktion. 46, , *siehe* ran, Zielbereich & Funktion

Wikipedia Wikipedia[28] schreibt dazu:

> Wikipedia ist ein Projekt zum Aufbau einer [Internet-]Enzyklopädie aus freien Inhalten.

14, 32, 33, , 63–65, 67–70, 72–77

Wort Synonym: Formel — Ein Element einer Sprache. **18**, , 67, *siehe* Formelmenge

Z

Zahl, natürliche **>>> Beschreibung fehlt noch <<<** , 61

Zeichenfolge Eine Folge von atomaren Symbolen, wobei Leerstellen und sonstiger Zwischenraum nicht zählen und nur zur besseren Darstellung dienen. Dabei sind als spezielle Symbole auch Zeichenketten erlaubt, solange die Zerlegung eindeutig bleibt. Z. B. kann ⟨sin⟩ als ein einzelnes Symbol — für die Sinusfunktion — aufgefasst werden, aber auch als Folge von den Buchstaben ⟨s⟩, ⟨i⟩ und ⟨n⟩. Formeln werden immer als Zeichenfolgen aufgefasst. 12, 16, 18, 23, , 66, 71, 77, 78, *siehe* Zeichenkette

Zeichenkette Eine Folge von (typographischen) Zeichen, auch Leerstellen und sonstigem Zwischenraum. 16, 18, 31, , 78, *siehe* Zeichenfolge

zerlegbar Eine Aussage, Formel, Folge oder Symbol, die eine echte Teilaussage, -folge, -formel bzw.. -symbol enthalten, heißt **zerlegbar**. **15**, 17, 18, 30, , **74**, *siehe* atomar

Ziel Ein **Ziel** ist in diesem Dokument eine Anforderungen an ASBA. 7, 8,

Zielbereich einer Funktion. **20**, 46, , 67, *siehe* tar, Wertebereich & Funktion

zulässig Eine Eigenschaft von Formel, Transformation und Ersetzung. 35, 36, , 63, 66, 74, *siehe* Formel, Transformation & Ersetzung