Examen de seconde session : RNC

25 mars 2021

Durée : 2h. Les documents papier sont autorisés. Tout support électronique est interdit, y compris les montres connectées et les calcultatrices.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traîtés dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 (8 pts)

On considère les données suivantes pour un problème de classification (classes +1/-1) en dimension 2 :

$$x^1 = (0,1) \text{ et } y^1 = -1$$

$$x^2 = (0,3) \text{ et } y^2 = 1$$

$$x^3 = (2,2) \text{ et } y^3 = 1$$

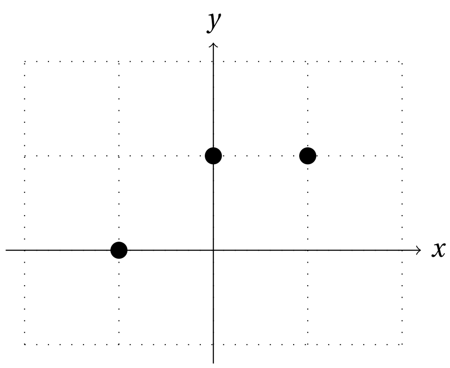
1) Donnez les matrices X et Y des données permettant d'effectuer l'algorithme du perceptron, afin de séparer ces données par une droite affine (donc ne passant pas forcément par l'origine).

2) Effectuez l'algorithme du perceptron, en partant du vecteur de poids initial $w = (011)$ (la première dimension correspond ici au biais affine). Donnez brièvement les étapes du calcul .

3) Faites un graphique des résultats obtenus en faisant figurer les points et la séparation obtenue.

Exercice 2 (12 pts)

On dispose des données suivantes qui ont été représentées sur un graphique, sur lequel la grille représente les unités (il s'agit bien évidemment d'un exemple non réaliste uniquement destiné à avoir des calculs simples). Toutes les valeurs sont entières.



On désire prédire y en fonction de x c'est pourquoi on va faire une regression linéaire sur ces trois points.

1) Ecrivez les matrices X et Y qui permettent de faire la régression linéaire.

2) Posez et effectuez le calcul de l'équation normale (donnez les détails) et montrez qu'on arrive au résultat matriciel :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

On rappelle que l'inverse d'une matrice (2,2) est donné par la formule

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

3) En déduire l'équation de la droite de regression et tracez la précisément.

4) Posez le calcul numérique qui donne l'erreur moyenne quadratique de la regression effectuée sur ces données. On ne demande pas de faire le calcul mais juste de le poser.

5) On décide de faire le calcul différement, par une descente de gradient. On oublie donc les résultats précédents et on repart de X,Y.

a) Le vecteur $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ étant fixé, écrivez la formule qui donne l'erreur quadratique moyenne $EQM(\mathbf{a})$ obtenue sur les données si la droite de regression est donnée par $\mathbf{a}$.

b) En déduire le le gradient de l'erreur quadratique totale sur ces données, par rapport au vecteur $\mathbf{a}$.

c) On initialise le vecteur $\mathbf{a}$ avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$. Effectuez un pas de descente de gradient avec le taux d'apprentissage $\alpha = 0.1$ et calculez le nouveau vecteur $\mathbf{a}$.

6) Si l'on voulait faire une descente de gradient stochastique, qu'est-ce qui changerait ?