Musterlösung der IBA / IBAIT Mathematik-Klausur vom 08.01.2021

Diese Lösung bildet die Lösung einer einzelnen Klausurvariante ab. Es wird hier nur ein Rechenweg dargestellt. Andere Rechenwege sind möglich. Eventuelle Fehler in den unten angegebenen Lösungen stellen keinen Anspruch auf Reklamation dar.

Aufgabe: *(6 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{2 - e^{-kx}}{3 + e^{-kx}} \quad , \ k > 0$$

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

Lösung:

$$y = \frac{2 - e^{-kx}}{3 + e^{-kx}} \quad \Leftrightarrow \quad y * \left(3 + e^{-kx}\right) = 2 - e^{-kx} \quad \Leftrightarrow \quad 3y + y * e^{-kx} = 2 - e^{-kx}$$

$$\Leftrightarrow \quad y * e^{-kx} + e^{-kx} = 2 - 3y \quad \Leftrightarrow \quad e^{-kx} * (y + 1) = 2 - 3y$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-kx} = \frac{2 - 3y}{y + 1}, \qquad sofern \ y \neq -1;$$

$$\Rightarrow \quad -kx = \ln\left(\frac{2 - 3y}{y + 1}\right) \ , \ sofern \ \frac{2 - 3y}{y + 1} > 0\,; \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{k} * \ln\left(\frac{2 - 3y}{y + 1}\right)$$

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{k} * \ln\left(\frac{2 - 3y}{y + 1}\right)$$

Aufgabe: *(6 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = [\ ln(x^a - e^x)\ ]^a * e^{a^2+1} \ , a > 0$$

auf ihrem Definitionsbereich. Ermitteln Sie die erste Ableitung.

Lösung:

$$f'(x) = a * [\ ln(x^a - e^x)\ ]^{a-1} * \frac{1}{x^a - e^x} * (a * x^{a-1} - e^x) * e^{a^2+1}$$

$$= a * e^{a^2+1} * [\ ln(x^a - e^x)\ ]^{a-1} * \frac{a x^{a-1} - e^x}{x^a - e^x}$$

Aufgabe: *(8 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^{kx} - x - 1 \ , k > 0$$

Untersuchen Sie die Funktion auf mögliche Extrempunkte.

Lösung:

Bilden der ersten Ableitung

$f'(x) = k * e^{kx} - 1 = 0$

Nullsetzen der ersten Ableitung und auflösen nach x

$$\Longrightarrow \quad k * e^{kx} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{kx} = \frac{1}{k} \quad \Longrightarrow \quad kx = \ln\left(\frac{1}{k}\right) \ \Leftrightarrow x = \frac{1}{k} * \ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

Bilden der zweiten Ableitung

$f''(x) = k^2 * e^{kx}$

Einsetzen des Kandidaten x in die zweite Ableitung

$$f''\left(\frac{1}{k} * \ln\left(\frac{1}{k}\right)\right) = k^2 * e^{k*\frac{1}{k}*\ln\left(\frac{1}{k}\right)} = k^2 * e^{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} = k^2 * \frac{1}{k} = k > 0$$

Damit liegt an der Stelle $x = \frac{1}{k} * \ln\left(\frac{1}{k}\right)$ ein relatives Minimum vor.

Berechnen des Funktionswertes

$$f\left(\frac{1}{k} * \ln\left(\frac{1}{k}\right)\right) = e^{k*\frac{1}{k}*\ln\left(\frac{1}{k}\right)} - \frac{1}{k} * \ln\left(\frac{1}{k}\right) - 1 \ = e^{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} - \frac{1}{k} * \ln\left(\frac{1}{k}\right) - 1 = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} * \ln\left(\frac{1}{k}\right) - 1$$

Damit liegt in dem Punkt $\left(\frac{1}{k} * \ln\left(\frac{1}{k}\right) \middle| \frac{1}{k} - \frac{1}{k} * \ln\left(\frac{1}{k}\right) - 1\right)$ ein relatives Minimum vor.

Aufgabe: *(12 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = ax * \sqrt{16 - a^2x^2} \ \ , \ \ a > 0$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion. Berechnen Sie die Fläche, die von der Funktion f und der x-Achse vollständig eingeschlossen wird. Geben Sie hierzu eine ausführliche Rechnung an.

Lösung:

Es muss gelten $16 - a^2x^2 \geq 0$

$$Setze \ \ 16 - a^2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (4 - ax) * (4 + ax) = 0 \quad \Longrightarrow x = \frac{4}{a} \ oder \ x = -\frac{4}{a}$$

Damit ergibt sich für den Definitionsbereich $\boldsymbol{D} = [-\frac{4}{a}; \frac{4}{a}]$

Bestimmen der Nullstellen von $f(x)$

$$ax * \sqrt{16 - a^2x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0 \;\; oder\; 16 - a^2x^2 = 0$$

Nullstellen: $x_1 = 0$; $\;\; x_2 = -\frac{4}{a}$; $x_3 = \frac{4}{a}$

Berechnung der Fläche

$$\left| \int_{-\frac{4}{a}}^{0} ax * (16 - a^2x^2)^{1/2}\, dx \right| + \left| \int_{0}^{\frac{4}{a}} ax * (16 - a^2x^2)^{1/2}\, dx \right|$$

Innere Funktion $g(x) = 16 - a^2x^2 \quad \Longrightarrow \quad innere\ Ableitung\ g'(x) = -2a^2x$

$$= \left| \int_{-\frac{4}{a}}^{0} \frac{-2a}{-2a} * ax * (16 - a^2x^2)^{1/2}\, dx \right| + \left| \int_{0}^{\frac{4}{a}} \frac{-2a}{-2a} * ax * (16 - a^2x^2)^{1/2}\, dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{-2a} * \int_{-\frac{4}{a}}^{0} -2a^2x * (16 - a^2x^2)^{1/2}\, dx \right| + \left| \frac{1}{-2a} * \int_{0}^{\frac{4}{a}} ax * (16 - a^2x^2)^{1/2}\, dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{-2a} * [\frac{2}{3} * (\, 16 - a^2x^2\,)^{3/2}\ ]_{-\frac{4}{a}}^{0} \right| + \left| \frac{1}{-2a} * [\frac{2}{3} * (\, 16 - a^2x^2\,)^{3/2}\ ]_{0}^{\frac{4}{a}} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{-2a} * \left(\frac{2}{3} * 16^{3/2} - \frac{2}{3} * \left(16 - a^2 \left(-\frac{4}{a} \right)^2 \right)^{3/2} \right) \right|$$

$$+ \left| \frac{1}{-2a} * \left(\frac{2}{3} * \left(16 - a^2 \left(\frac{4}{a} \right)^2 \right)^{3/2} - \frac{2}{3} * 16^{3/2} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{-2a} * \left(\frac{2}{3} * 16^{3/2} - \frac{2}{3} * (\, 16 - 16\,)^{3/2} \right) \right| + \left| \frac{1}{-2a} * \left(\frac{2}{3} * (\, 16 - 16\,)^{3/2} - \frac{2}{3} * 16^{3/2} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{-2a} * (\frac{2}{3} * 64 - \frac{2}{3} * 0 \right| + \left| \frac{1}{-2a} * (\frac{2}{3} * 0 - \frac{2}{3} * 64 \right| = \left| \frac{1}{-2a} * \frac{2}{3} * 64 \right| + \left| \frac{1}{-2a} * (-\frac{2}{3}) * 64 \right|$$

$$= \left| -\frac{64}{3a} \right| + \left| +\frac{64}{3a} \right| = \frac{128}{3a}$$

Aufgabe: *(6 Punkte)*

Gegeben seien die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und ihr Produkt $f(x) * g(x)$.

Zeigen Sie das gilt:

$$EL_{f*g;\, x} = EL_{f;x} + EL_{g;x}$$

Lösung:

Es gilt: $EL_{f;x} = \frac{f'(x)}{f(x)} * x$ und $EL_{g;x} = \frac{g'(x)}{g(x)} * x$ („Im Zähler steht die Ableitung des Nenners.“)

Damit

$$EL_{f*g;\,x} = \frac{(f*g)' \; * x}{(f*g)} = \frac{[\; f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x) \;] \; * x}{f(x) * g(x)} \quad ,wegen\ Produktregel$$

$$= \frac{f'(x) * g(x) * x + f(x) * g'(x) * x}{f(x) * g(x)}$$

$$= \frac{f'(x) * g(x) * x}{f(x) * g(x)} + \frac{f(x) * g'(x) * x}{f(x) * g(x)} \quad , \qquad k\ddot{u}rzen:$$

$$= \frac{f'(x) * x}{f(x)} + \frac{g'(x) * x}{g(x)} = EL_{f;x} + EL_{g;x}$$

Aufgabe: *(4 Punkte)*

Eine Funktion $y = f(x)$ sei auf einem Intervall elastisch.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche sind falsch?

a) Wenn sich x um eine Einheit ändert, so ändert sich y um mehr als eine Einheit.
b) Wenn sich x um ein Prozent ändert, so ändert sich y um mehr als ein Prozent.
c) y ändert sich relativ stärker als x.
d) Je größer x wird, desto größer wird auch y.

Lösung:

Richtig: b) und c), falsch: a) und d)

Aufgabe: *(7 Punkte)*

Gegeben sei die Nachfragefunktion $\quad x(p) = e^{-ap^2} \quad ,a > 0$

a) Geben Sie den ökonomischen Definitionsbereich der Funktion an.
b) Berechnen Sie die Preiselastizität der Nachfrage für einen Preis von 10 Geldeinheiten. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
c) Berechnen Sie den Preis oder das Preisintervall, bei dem bzw. auf dem die Nachfrage proportional elastisch ist.

Lösung:

a) $\boldsymbol{D}_{\ddot{o}ko} = [0;\ \infty)$

b) Gesucht $EL_{x;p}$

Bilden der ersten Ableitung von $x'(p)$:

$x'(p) = -2ap * e^{-ap^2}$

Bilden der Elastizitätsfunktion

$$EL_{x;p} = \frac{-2ap * e^{-ap^2} \ * p}{e^{-ap^2}} = -2ap^2$$

Einsetzen des Preises $p = 10$ in die Elastizitätsfunktion

$EL_{x;10} = -2a * 10^2 = -200a \ (< 0)$

Wenn der Preis ausgehend von $p = 10$ Geldeinheiten um 1% erhöht wird, verringert sich die Nachfrage $200a\%$.

c) $EL_{x;p}$ ist proportional elastisch $:\Leftrightarrow \ EL_{x;p} = 1$ oder $EL_{x;p} = -1$

1.Fall: $EL_{x;p} = -1$

Setzen der Elastizitätsfunktion gleich -1 und Auflösen nach p

$$EL_{x;p} = -2ap^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = \frac{1}{2a} \quad \Longrightarrow \quad p_1 = \sqrt{\frac{1}{2a}} \text{ oder } p_2 = -\sqrt{\frac{1}{2a}}$$

Die zweite Lösung ist ökonomisch nicht sinnvoll, da es ein negativer Preis wäre. Damit liegt der gesuchte Preis bei $p = \sqrt{\frac{1}{2a}}$.

2.Fall: $EL_{x;p} = +1$ (Da mit dem ersten Fall die Lösung schon bestimmt wurde, braucht dieses nicht gerechnet zu werden.)

Setzen der Elastizitätsfunktion gleich +1 und Auflösen nach p

$$EL_{x;p} = -2ap^2 = +1 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = -\frac{1}{2a} \quad \Longrightarrow \quad p = \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

Hier müsste aus einer negativen Diskriminante die Wurzel gezogen werden, ist nicht definiert.

Aufgabe: *(10 Punkte)*

Für eine gegebene Produktionsmenge ergibt sich abhängig von den beiden Produktionsfaktoren r_1 und r_2 folgende Kostenfunktion:

$$K(r_1, r_2) = \ r_1^3 - 6r_1^2 + 4r_2^2 - 32r_2 + 120$$

Minimieren Sie die Kosten.

Lösung:

Bilden der partiellen Ableitungen erster Ordnung und Nullsetzen der Ableitungen

$K_{r_1}\ (r_1, r_2) = 3 * r_1^2 - 12r_1 = 0$

$K_{r_2}\ (r_1, r_2) = 8r_2 - 32 = 0$

Die erste Gleichung auflösen nach r_1 liefert:

$3 * r_1^2 - 12r_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 * (3r_1 - 12) = 0 \Longrightarrow \quad r_1 = 0 \;\; oder\; r_1 = 4$

Aus der zweiten Gleichung folgt $r_2 = 4$

Damit gibt es zwei Kandidaten $(r_1|r_2) = (0|4)$ und $(r_1|r_2) = (4|4)$

Bilden der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$K_{r_1;\, r_1}(r_1, r_2) = 6r_1 - 12 \quad ; \quad K_{r_2;\, r_2}(r_1, r_2) = 8 \quad ; \quad K_{r_1;\, r_2}(r_1, r_2) = K_{r_2;\, r_1}(r_1, r_2) = 0$

Überprüfen der Kandidaten auf Extrema

Für $(r_1|r_2) = (0|4)$:

$K_{r_1;\, r_1}(0;\, 4) * K_{r_2;\, r_2}(0; 4) = (6 * 0 - 12) * 8 = -96 \; < \; K_{r_1;\, r_2}^2(0; 4) = 0^2 = 0$

Damit liegt hier ein Sattelpunkt vor. Der Funktionswert lautet:

$K(0;\, 4) = 0^3 - 6 * 0^2 + 4 * 4^2 - 32 * 4 + 120 = 56$

Für $(r_1|r_2) = (4|4)$:

$K_{r_1;\, r_1}(4;\, 4) * K_{r_2;\, r_2}(4; 4) = (6 * 4 - 12) * 8 = 96 > \; K_{r_1;\, r_2}^2(4; 4) = 0^2 = 0$

Damit liegt an dieser Stelle ein Extremum vor. Da $K_{r_1;\, r_1}(4;\, 4) = 12 > 0$ gilt, handelt es sich um ein relatives Minimum. Der Funktionswert lautet:

$K(4;\, 4) = \; 4^3 - 6 * 4^2 + 4 * 4^2 - 32 * 4 + 120 = 24$

Aufgabe: *(12 Punkte)*

Eine Firma stellt zwei verschiedene Typen von Schreibtischen her: den Typ Standard und den Typ höhenverstellbarer Schreibtisch. Dazu benötigt sie jeweils 3 Maschinen:

	Standardausführung	höhenverstellbarer Tisch	Kapazität in Stunden
Maschine 1	2 Stunden pro Stück	1 Stunde pro Stück	200 Stunden
Maschine 2	1 Stunde pro Stück	1 Stunde pro Stück	120 Stunden
Maschine 3	1 Stunde pro Stück	3 Stunden pro Stück	240 Stunden
Gewinn	2.000 Geldeinheiten pro Stück	3.000 Geldeinheiten pro Stück	

Um einen Schreibtisch vom Typ Standard herzustellen, benötigt man 4 Stunden (zwei Stunden in Maschine 1, eine Stunde in Maschine 2 und eine Stunde in Maschine 3). Analog für den Typ höhenverstellbarer Schreibtisch. Mit der Standardausführung macht die Firma einen Gewinn von 2.000 Geldeinheiten pro Stück, für die verstellbare Variante einen Gewinn von 3.000 Geldeinheiten pro Stück.

Wie hoch müssen die Produktionsmengen der beiden Schreibtischvarianten jeweils sein, damit der Gewinn maximal wird? Berechnen Sie die Lösung. Formulieren Sie dazu das lineare Optimierungsproblem.

Lösung:

Sei x_1 die zu produzierende Menge an Schreibtischen vom Typ Standard und x_2 die herzustellende Menge an Schreibtischen vom Typ Höhenverstellbar mit $x_1, x_2 \geq 0$

Zielfunktion $Z = 2.000x_1 + 3.000x_2$ Gewinnmaximierung

Restriktionen

$2x_1 + 1x_2 \leq 200$
$1x_1 + 1x_2 \leq 120$
$1x_1 + 3x_2 \leq 240$

Einführung der Schlupfvariablen $x_3, x_4, x_5 \geq 0$

$2x_1 + 1x_2 + x_3 = 200$
$1x_1 + 1x_2 + x_4 = 120$
$1x_1 + 3x_2 + x_5 = 240$

Tableau mit Schlupfvariablen; Berechnung der jeweiligen Pivotelemente; Durchführung der Berechnungen:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\vec{b}$
2	1	1	0	0	200
1	1	0	1	0	120
1	3	0	0	1	240
-2.000	-3.000	0	0	0	0
2	1	1	0	0	200
1	1	0	1	0	120
$^1/_3$	1	0	0	$^1/_3$	80
-2.000	-3.000	0	0	0	0
$^5/_3$	0	1	0	$-^1/_3$	120
$^2/_3$	0	0	1	$-^1/_3$	40
$^1/_3$	1	0	0	$^1/_3$	80
-1.000	0	0	0	1.000	240.000

$^5/_3$	0	1	0	$-^1/_3$	120
1	0	0	$^3/_2$	$-^1/_2$	60
$^1/_3$	1	0	0	$^1/_3$	80
-1.000	0	0	0	1.000	240.000
0	0	1	$-^5/_2$	$^1/_2$	20
1	0	0	$^3/_2$	$-^1/_2$	60
0	1	0	$-^1/_2$	$^1/_2$	60
0	0	0	1.500	500	300.000

Lösungsvektor: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\ ) = (60,60,20,0,0)$ Werden je 60 Stück von beiden Schreibtischarten hergestellt, wird der Gewinn maximal.

Aufgabe: *(8 Punkte)*

Gegeben sei die Kostenfunktion

$$K(x) = x^3 - 13x^2 + 66x + 72$$

Ermitteln Sie das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze. Was bedeutet diese kurzfristige Preisuntergrenze?

Lösung:

Das Betriebsminimum ist das Minimum der variablen Stückkosten.

$\Longrightarrow\ K_{var}(x) = x^3 - 13x^2 + 66x \quad \Longrightarrow \quad k_{var}(x) = x^2 - 13x + 66$

Bilden der ersten Ableitung und Nullsetzen

$k'_{var}\ (x) = 2x - 13 = 0 \ \ \Longrightarrow x = 6,5$

Überprüfen mittels zweiter Ableitung

$k''_{var}\ (x) = 2 \quad \Longrightarrow\ k''_{var}\ (6.5) = 2 > 0$ $\ \Longrightarrow$ es liegt ein relatives Minimum vor.

Berechnen der kurzfristigen Preisuntergrenze

$k_{var}(6,5) = 6,5^2 - 13 * 6,5 + 66 = 23,75$

Die kurzfristige Preisuntergrenze ist ein Preis, mit dem die variablen Kosten, nicht aber die fixen Kosten gedeckt werden können. Damit sollte ein Produkt nur für kurze Zeit zu diesem Preis angeboten werden, dieser Preis kann als Lockangebot dienen.

Aufgabe: *(8 Punkte)*

Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$x(r) = \sqrt{8r - 100}$$

Der Preis des Inputfaktors betrage 20 Geldeinheiten pro Mengeneinheit, der Preis des Outputs betrage 65 Geldeinheiten pro Mengeneinheit.

Ermitteln Sie die Gesamtkostenfunktion. Ermitteln Sie das Gewinnmaximum.

Lösung:

Gesuchte Kostenfunktion: $K(x) = p_r(x) * r(x) + K_{fix}(x)$

Bilden der Umkehrfunktion $r(x)$

$$x = \sqrt{8r - 100} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 8r - 100 \quad \Longrightarrow \quad r(x) = \frac{1}{8}x^2 + 12{,}5$$

Aufstellen der Kostenfunktion

$$K(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 + 12{,}5\right) * 20 = 2{,}5x^2 + 250$$

Bilden der Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$

$$G(x) = 65x - (2{,}5x^2 + 250) = -2{,}5x^2 + 65x - 250$$

Bilden der ersten Ableitung und Nullsetzen

$$G'(x) = -5x + 65 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 13$$

Bilden der zweiten Ableitung und Einsetzen von $x = 13$

$G''(x) = -5 \quad \Longrightarrow \quad G''(13) = -5 < 0$ Damit liegt an der Stelle $x = 13$ ein relatives Maximum vor.

Berechnen des Funktionswertes

$$G(13) = -2{,}5 * 13^2 + 65 * 13 - 250 = 172{,}5$$

Aufgabe: *(7 Punkte)*

Herr Mustermann nimmt bei seiner Bank ein Annuitätendarlehen auf. Die Kreditsumme beträgt 100.000€. Die Bank verlangt dafür einen Zinssatz von 5% nominal p.a. Herr Mustermann möchte jährlich eine Tilgung von 4% leisten. Die Laufzeit des Kreditvertrages beträgt 10 Jahre. Erstellen Sie einen monatlichen Kontenplan für die ersten drei Monate.

Lösung:

Berechnen der monatlichen Annuität $Annuität = 100.000 * \frac{0,05+0,04}{12} = 750€$

Kreditsumme	100.000,00				
Zinssatz	0,05				
Tilgungssatz	0,04				
Annuität	750,00				
Monat	Monatsanfang	Monatsende	Annuität	Zinsen	Tilgung
1	100.000,00	99.666,67	750,00	416,67	333,33
2	99.666,67	99.331,95	750,00	415,28	334,72
3	99.331,95	98.995,83	750,00	413,88	336,12

Aufgabe: *(6 Punkte)*

Ein geschiedener Vater hat sich bei der Geburt seines Kindes verpflichtet, für sein bei der Mutter lebendes Kind Unterhalt von jährlich 12.000 € zu zahlen. Die Zahlungen erfolgen jeweils zum Jahresende (nachschüssig). Die letzte Zahlung erfolgt, wenn das Kind volljährig wird. Mit welchem Betrag könnte der Vater die Zahlungsreihe heute (zur Geburt des Kindes) einmalig zahlen, wenn ein Zinssatz von 5% nominal dauerhaft angenommen werden kann?

Lösung:

Berechnung des Endguthabens bei nachschüssiger gleichmäßiger Rente (Das Anfangsguthaben K_0 beträgt Null.)

$$K_{18} = 12 * \frac{1,05^{18} - 1}{0,05} = 337.588,62€$$

Berechnung des Barwerts von K_{18}

$$K_0 = \frac{337.588,62}{1,05^{18}} = 140.275,04€$$

Der Vater könnte heute einen Betrag von 140.275,04€ zahlen.