行列式定义

1 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

2 三阶行列式：展开式六项，三个正项，三个负项

3 n阶行列式：行取自然排列，列取排列所有可能，不同行不同列取n个元素相乘，符号由列标排列逆序数的奇偶决定。（第一种定义）

4 

下三角　上三角　对角形

主对角线元素相乘

5 

山寨上三角　山寨下三角　山寨对角形

次对角线元素相乘

符号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

行列式性质

6 $D^T = D$

7 交换两行（列），行列式变号

8 两行(列)元素相等，$D=0$

9 某一行（列）有公因子k，k外提一次．所有行（列）有公因子k，k外提n次．

10 两行(列)元素成比例，$D=0$

11 某一行(列)元素全为0，$D=0$

那一行拆开 其余行不变

12 某一行元素全是两数和，拆成两行列式和

13 某一行乘以一个数加到另一行，D不变

克莱姆法则

18 n个方程n个未知数的方程组，系数行列式$D \neq 0$，有惟一解：$x_i = \frac{D_i}{D}$

19 n个方程n个未知数的齐次方程组，如系数行列式$D \neq 0$，只有零解．

行列式展开

14 $D=$某一行（列）元素与其代数余子式乘积之和

15 异乘变零：一行(列)元素与其他行(列)的代数余子式乘积之和为0

16 拉普拉斯定理：任取k行(列)，由这k行(列)元素组成的所有k阶子式与其代数余子式乘积之和$=D$

范德蒙德

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & .. & 1 \\ x_1 & x_2 & .. & x_n \\ .. & .. & .. & .. \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & .. & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

17

矩阵的运算

20 矩阵加（减）法：同型矩阵，对应元素相加（减）

21 矩阵数乘：kA，用k乘A的每个元素．

22 矩阵提公因子：每个元素都有公因子，提一次

23 AB相乘条件：A的列数=B的行数．

24 $C=AB$，结果矩阵形状：C的行数=A的行数 C的列数=B的列数．

25 乘法不满足
- $(AB)^2 \neq A^2B^2$
- $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
- AB一般不等于BA
- $AB = AC$，且$A \neq 0$，推不出$B=C$
- $AB=0$，推不出$A=0$或$B=0$

26 次幂：$A^k = AA \cdots A$（k个相乘）

27 $A^m \times A^n = A^{m+n}, (A^m)^n = A^{mn}$　$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$

28 转置：(1) $(A^T)^T = A$　(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$　(3) $(kA)^T = kA^T$　(4) $(AB)^T = B^TA^T$

逆矩阵

32 逆矩阵：$AB = BA = E$

33 求A^{-1}：(1) $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，伴随矩阵法．(2) $(A \vdots E) \to (E \vdots A^{-1})$，初等变换法．

34 $(A^{-1})^{-1} = A, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

35 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

36 $|A^{-1}| = |A|^{-1}, (A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$

29 对称矩阵 $\leftrightarrow A^T = A$，反对称矩阵 $\leftrightarrow A^T = -A$

30 $|A^T| = |A|, |kA| = k^n|A|$　$|AB| = |A||B|$

31 分块矩阵求转置，两步走．

初等矩阵初等变换

37 三种初等行变换，三种初等列变换

38 等价：AB是同型矩阵，A经初等变换得到B

39 等价：AB同型，存在可逆$P,Q,PAQ=B$

40 初等矩阵均可逆，其逆矩阵也是初等矩阵，转置矩阵也是初等矩阵

41 初等矩阵左乘A，相当于对A做初等行变换　初等矩阵右乘A，相当于对A做初等列变换

矩阵的秩

42 $r(A)$:非零子式的最高阶数

43 零矩阵的秩为0

44 $0 \le r(A) \le \min\{$行数，列数$\}$

45 $r(A) = r \Leftrightarrow$ 有一个r阶非零子式，所有$r+1$阶子式均为零．

46 初等变换(行,列)不改变矩阵的秩

47 求$r(A)$，将A化为阶梯型，数非零行的行数

48 $r(A) = r(A^T)$

49 P,Q可逆,$r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$

向量的线性组合

50 $k\alpha = 0 \Leftrightarrow k = 0$或$\alpha = 0$

51 零向量可由任意向量组表示

52 向量组中的一个向量，可由该向量组表示

53 任意向量可由单位向量组表示

54 向量组等价：两向量组可相互表示

线性相关 线性无关

55 线性相关：存在不全是0的$k_1,\cdots,k_n$,使$k\alpha_1 + \cdots + k\alpha_n = 0$

56 线性无关:$k\alpha_1 + \cdots + k\alpha_n = 0$成立，$k_1,\cdots,k_n$全取0

线性相关无关的性质

57 向量组中两个向量分量成比例，向量组线性相关

58 一个零向量线性相关，一个非零向量线性无关

59 含零向量的向量组必线性相关

60 部分组线性相关，则整体组线性相关　整体组线性无关，则部分组线性无关

61 向量组线性无关，则接长组线性无关　向量组线性相关，则截短组线性相关

62 n个n维向量线性无关 $\Leftrightarrow D \neq 0$　n个n维向量线性相关 $\Leftrightarrow D = 0$

线性相关无关的定理

63 向量线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少一个向量是其余向量的线性组合．

64 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$惟一线性表示．

65 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，可由$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表示，则$s \le t$．

66 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表示，且$s > t$，则$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关．

67 向量个数>向量维数，向量组线性相关．

68 $n+1$个n维向量必线性相关．

69 等价的线性无关的向量组，含相同个数的向量．

伴随矩阵

78 A^*定义：按行求，按列放

79 $AA^* = A^*A = |A|E$

80 $|A^*| = |A|^{n-1}$

81 $r(A^*) = \begin{cases} n, 当r(A) = n \\ 1, 当r(A) = n-1 \\ 0, 当r(A) < n-1 \end{cases}$

方阵A可逆充要条件

82 $|A| \neq 0$

83 A满秩

84 A的标准形是E

85 $A = E_1E_2\cdots E_s, E_i$是初等矩阵

86 A的所有特征值不为0

87 $r(A) = n$

88 A的行秩$=A$的列秩$=r(A)=n$

89 A的行（列）向量组无关

90 A的非零子式最高阶数为 n

91 $AX=0$只有零解　$AX=B$有唯一解

极大线性无关组

70 线性无关组定义．

71 线性无关向量组的极大无关组是本身．

72 向量组与其极大无关组等价．

73 向量组的不同极大无关组含向量个数相同．

74 向量组的秩:极大无关组含向量的个数．

75 $0 \le r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s) \le \min\{$向量个数，向量维数$\}$

76 A的行秩$=A$的列秩$=r(A)$

77 $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$

$AX=B$有解判定

92 $r(A)=r(\bar{A})=n$,有惟一解.

93 $r(A)=r(\bar{A})<n$,有无穷解.

94 $r(A)\neq r(\bar{A})$,无解.

$AX=O$齐次方程组

95 齐次方程组一定有解，至少有零解.

96 齐次方程组仅有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$

97 齐次方程组有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$

98 齐次方程组,方程个数$<$未知数个数,有非零解.

99 齐次方程组,方程个数$=$未知数个数,
有非零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式=0. 仅有零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式$\neq 0$.

$AX=O$解的结构

100 $AX=O$的两个解相加，仍然是解.

101 η是$AX=O$的解,则$c\eta$也是解.

102 $AX=O$的解的线性组合，仍然是解.

103 基础解系：$\eta_1,\cdots,\eta_s$是解. 满足：
1) $\eta_1,\cdots,\eta_s$线性无关;
2)任意解可由$\eta_1,\cdots,\eta_s$表示.

104 $AB=O$,则$r(A)+r(B)\leq n$.

$AX=B$解的结构

105 $AX=B\rightarrow AX=O$(导出组).

106 $AX=B$的两个解相减是$AX=O$的解.

107 $AX=B$的一个解和$AX=O$的一个解相加,是$AX=B$的一个解.

108 $AX=B$通解：1)$AX=B$的一特解;
2)$AX=O$的基础解系;
特解+基础解系的线性组合.

特征值特征向量

109 $A\alpha=\lambda\alpha$,特征值可以是0,特征向量是非零向量.

110 $|\lambda E-A|=0$，求特征值.
$(\lambda E-A)X=0$的非零解, 求特征向量.

111 A和A^T有相同的特征值.

112 $\sum\lambda_i=\sum a_{ii},\lambda_1\cdots\lambda_n=|A|$.

113 矩阵的迹$tr(A)=\sum a_{ii}$

114 不同特征值对应的特征向量线性无关.

115 k重特征值的线性无关的特征向量个数$\leq k$个

相似矩阵

121 A,B同阶方,存在可逆$P,P^{-1}AP=B$

122 反身性,对称性,传递性

$A□B\rightarrow$

- A,B有相同特征值. 123
- $|A|=|B|$ 124
- $tr(A)=tr(B)$ 125
- A,B同时可逆，或同时不可逆. 126
- A,B若可逆,$A^{-1}\sim B^{-1}$ 127
- $A^m\sim B^m$. 128

内积

133 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$,若$\alpha,\beta$是列向量

134 内积是一个数.

135 $(\alpha,\alpha)\geq 0,(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$
$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha),(k\alpha,\beta)=k(\beta,\alpha)$

136 $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha),(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$
$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

137 长度$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 单位化$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 134

138 $\|\alpha\|\geq 0,\|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=0$.

139 $\|k\alpha\|=|k|□\|\alpha\|,|(\alpha,\beta)|\leq\|\alpha\|□\|\beta\|$

140 $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$

141 $(\alpha,\beta)=0$,正交, $\alpha\perp\beta$.

142 正交向量组：不含零向量，两两正交.

143 标准正交向量组：正交向量组，每个向量都是单位向量.

144 施密特正交化.

λ是方阵A的特征值 $\rightarrow$

116 $k\lambda$是kA的特征值

117 λ^k是A^k的特征值

118 求A的多项式的特值：A替换成λ，E替换成1

119 λ^{-1}是A^{-1}的特值

120 $\frac{1}{\lambda}|A|$是A^*的特值

对角化

129 A相似于对角形 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

130 A有n个互异特征值,可对角化.

131 技巧：不管单根；每个k重特征根，都有k个特征向量，则可对角化.

132 特征向量做列构成P，特征值做主对角线构成Λ,特征值和特征向量位置对应.

正交

145 A方阵,$A^TA=E$,A为正交矩阵.

146 A正交,$|A|=1$或-1,$A^{-1}=A^T$.

147 A正交,A^{-1}和A^T也正交. A,B正交,AB也正交.

148 A正交,$(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)$

149 A正交 $\Leftrightarrow$ 列(行)向量组是标准正交向量组.

正交相似

150 实对称矩阵A的不同特值的特量必正交.

151 正交相似：A,B同阶方,存在正交$P,P^{-1}AP=B$.

152 A实对称,存在正交$Q,Q^{-1}AQ=\Lambda$.

153 Q:正交单位化后的特量作列
Λ:特值作为主对角线元素.

二次型

二次型$\rightarrow$矩阵： 154
1)平方项系数作主对角线；
2)交叉项系数除以2，放两对称位置.

矩阵$\rightarrow$二次型： 155
1)主对角线做平方项系数；
2)主对角线右上角元素乘2，做交叉项系数.

156 二次型的矩阵对称.

157 $X=CY$,线性替换.

合同

158 合同：A,B是n方,存在可逆$C,C^TAC=B$.

159 反身性，对称性，传递性.

160
$A□B\rightarrow r(A)=r(B)$
$A□B\rightarrow A$对称 $\Leftrightarrow B$对称
$A□B\rightarrow A,B$可逆,$A^{-1}□B^{-1}$
$A□B\rightarrow A^T□B^T$

化标准形

161 标准形：只有平方项，没有交叉项.
(平方项变量的下标可以不连)

162 化标准形： 标准形不唯一 163
1)配方法;
2)初等变换法:$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{只对}A\text{做相应行}]{\text{对}A,E\text{做列}}\begin{pmatrix}\Lambda\\C\end{pmatrix}$
3)正交替换法:正交$Q,Q^TAQ=\Lambda$.

169 正定二次型经非退化替换仍化为正定二次型.

170 二次型正定 $\Leftrightarrow$ 标准形每个变量的系数>0.

171 二次型正定 $\Leftrightarrow$ 正惯性指数为n.

172 A正定,$|A|>0$.

173 A正定 $\Leftrightarrow$ A的特征值都>0.

174 A正定 $\Leftrightarrow$ A各阶顺序主子式>0.

175 A正定$\rightarrow$1)A^{-1}正定,2)A^*正定,
3)A^k正定,4)A主对角线元素都>0

176 A正定,B(半)正定$\rightarrow A+B$正定.

规范形

164 规范形：只有平方项，系数是1，-1，0，变量的下标连着.

165 规范形是唯一的.

166 正惯性指数：规范形的正项个数.
负惯性指数：规范形的负项个数.
符号差：正惯性指数$-$负惯性指数.

167 $A□B\Leftrightarrow$ 有相同的秩和正惯性指数

定　性

168
二次型X^TAX,任意$X\neq 0$
1)$X^TAX>0$,正定
2)$X^TAX<0$,负定
3)$X^TAX\geq 0$,半正定
4)$X^TAX\leq 0$,半负定