

Diffusion anisotrope dans les images et détection de contours

Oscar CLIVIO et Rémy KOSKAS

24 mai 2017

Introduction

- Objectif : détecter les bords dans une image.

Introduction

- Objectif : détecter les bords dans une image.
- Appliquer une équation de diffusion.

Introduction

- Objectif : détecter les bords dans une image.
- Appliquer une équation de diffusion.
- D'où provient une telle idée ?

Plan

- 1 Defaults et leçons du filtre gaussien
- 2 Processus de diffusion en physique
- 3 De l'intérêt de l'inhomogénéité : le filtre de Perona-Malik
- 4 Résultats numériques
- 5 Et aussi...

Le filtre gaussien

- Filtre gaussien sur une image

Le filtre gaussien

- Filtre gaussien sur une image → floutée.

Le filtre gaussien

- Filtre gaussien sur une image → floutée.
- Pourquoi ? Elimination des hautes fréquences (bords).

Le filtre gaussien

- Filtre gaussien sur une image → floutée.
- Pourquoi ? Elimination des hautes fréquences (bords).
- Objectif : éliminer basses fréquences et conserver les hautes.

Le filtre gaussien

- Filtre gaussien sur une image → floutée.
- Pourquoi ? Elimination des hautes fréquences (bords).
- Objectif : éliminer basses fréquences et conserver les hautes.
- On doit modifier le filtre gaussien ; comment ?

Le filtre gaussien

- Filtre gaussien sur une image → floutée.
- Pourquoi ? Elimination des hautes fréquences (bords).
- Objectif : éliminer basses fréquences et conserver les hautes.
- On doit modifier le filtre gaussien ; comment ?
- Le filtre gaussien correspond à une solution de l'équation de la chaleur (f image de départ) :

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+$$

Le filtre gaussien

- Filtre gaussien sur une image → floutée.
- Pourquoi ? Elimination des hautes fréquences (bords).
- Objectif : éliminer basses fréquences et conserver les hautes.
- On doit modifier le filtre gaussien ; comment ?
- Le filtre gaussien correspond à une solution de l'équation de la chaleur (f image de départ) :

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) &\Leftrightarrow u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{8t}\right) f(\mathbf{y}) d^2\mathbf{y} \\ \mathbf{n} \cdot \nabla u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{1}$$

Le filtre gaussien

- Filtre gaussien sur une image → floutée.
- Pourquoi ? Elimination des hautes fréquences (bords).
- Objectif : éliminer basses fréquences et conserver les hautes.
- On doit modifier le filtre gaussien ; comment ?
- Le filtre gaussien correspond à une solution de l'équation de la chaleur (f image de départ) :

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) &\Leftrightarrow u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{8t}\right) f(\mathbf{y}) d^2\mathbf{y} \\ \mathbf{n} \cdot \nabla u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{1}$$

- Ecart-type ($\sqrt{2t}$) augmente progressivement.

Le filtre gaussien

- Filtre gaussien sur une image → floutée.
- Pourquoi ? Elimination des hautes fréquences (bords).
- Objectif : éliminer basses fréquences et conserver les hautes.
- On doit modifier le filtre gaussien ; comment ?
- Le filtre gaussien correspond à une solution de l'équation de la chaleur (f image de départ) :

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) &\Leftrightarrow u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{8t}\right) f(\mathbf{y}) d^2\mathbf{y} \\ \mathbf{n} \cdot \nabla u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{1}$$

- Ecart-type ($\sqrt{2t}$) augmente progressivement.
- Comment modifier l'équation de la chaleur pour préserver les contours ?

Équations de diffusion en Physique

- Système de particules immergées dans un fluide, concentration u .

Equations de diffusion en Physique

- Système de particules immergées dans un fluide, concentration u .
- Courant de particules \mathbf{j} proportionnel à ∇u

Equations de diffusion en Physique

- Système de particules immergées dans un fluide, concentration u .
- Courant de particules \mathbf{j} proportionnel à ∇u
- d_{ij} la propension pour une particule venant de la direction j à diffuser dans la direction i

Équations de diffusion en Physique

- Système de particules immergées dans un fluide, concentration u .
- Courant de particules \mathbf{j} proportionnel à ∇u
- d_{ij} la propension pour une particule venant de la direction j à diffuser dans la direction $i \rightarrow D = (d_{ij})_{ij}$

$$\partial_t u - \operatorname{div}(D \nabla u) = 0 \quad (2)$$

Équations de diffusion en Physique

- Système de particules immergées dans un fluide, concentration u .
- Courant de particules \mathbf{j} proportionnel à ∇u
- d_{ij} la propension pour une particule venant de la direction j à diffuser dans la direction $i \rightarrow D = (d_{ij})_{ij}$

$$\partial_t u - \operatorname{div}(D \nabla u) = 0 \quad (2)$$

- D constante \rightarrow diffusion homogène, $D \propto \mathbb{I}_2 \rightarrow$ diffusion isotrope.

Équations de diffusion en Physique

- Système de particules immergées dans un fluide, concentration u .
- Courant de particules \mathbf{j} proportionnel à ∇u
- d_{ij} la propension pour une particule venant de la direction j à diffuser dans la direction $i \rightarrow D = (d_{ij})_{ij}$

$$\partial_t u - \operatorname{div}(D \nabla u) = 0 \quad (2)$$

- D constante \rightarrow diffusion homogène, $D \propto \mathbb{I}_2 \rightarrow$ diffusion isotrope.
- Analogie entre diffusion et détection de contour dans une image.

Équations de diffusion en Physique

- Système de particules immergées dans un fluide, concentration u .
- Courant de particules \mathbf{j} proportionnel à ∇u
- d_{ij} la propension pour une particule venant de la direction j à diffuser dans la direction $i \rightarrow D = (d_{ij})_{ij}$

$$\partial_t u - \operatorname{div}(D \nabla u) = 0 \quad (2)$$

- D constante \rightarrow diffusion homogène, $D \propto \mathbb{I}_2 \rightarrow$ diffusion isotrope.
- Analogie entre diffusion et détection de contour dans une image.
- D faible sur contours, fort sinon.

Le filtre de Perona-Malik

- $D(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbb{I}_2$ avec $g(\mathbf{x}) = c(||u(\mathbf{x})||)$

Le filtre de Perona-Malik

- $D(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbb{I}_2$ avec $g(\mathbf{x}) = c(||u(\mathbf{x})||)$
- c doit décroître rapidement en $||\nabla u||$.

Le filtre de Perona-Malik

- $D(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbb{I}_2$ avec $g(\mathbf{x}) = c(||u(\mathbf{x})||)$
- c doit décroître rapidement en $||\nabla u||$.
- $c(||\nabla u||) = e^{-(||\nabla I||/K)^2} \rightarrow$ filtre exponentiel

Le filtre de Perona-Malik

- $D(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbb{I}_2$ avec $g(\mathbf{x}) = c(||u(\mathbf{x})||)$
- c doit décroître rapidement en $||\nabla u||$.
- $c(||\nabla u||) = e^{-(||\nabla I||/K)^2} \rightarrow$ filtre exponentiel
- $c(||\nabla u||) = \frac{1}{1 + \left(\frac{||\nabla u||}{K}\right)^2} \rightarrow$ filtre quadratique

Le filtre de Perona-Malik

- $D(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbb{I}_2$ avec $g(\mathbf{x}) = c(||u(\mathbf{x})||)$
- c doit décroître rapidement en $||\nabla u||$.
- $c(||\nabla u||) = e^{-(||\nabla I||/K)^2} \rightarrow$ filtre exponentiel
- $c(||\nabla u||) = \frac{1}{1 + \left(\frac{||\nabla u||}{K}\right)^2} \rightarrow$ filtre quadratique
- K : paramètre de contraste

L'image sur laquelle nous travaillons



Comparaison entre versions exponentielle et isotrope homogène (filtre gaussien)



FIGURE – Diffusions exponentielle et isotrope homogène, $t = 200, 400, 600$, $K = 0.01$

Comparaison entre versions exponentielle et isotrope homogène



FIGURE – Diffusions exponentielle et isotrope homogène, $t = 200, 400, 600$, $K = 0.01$

Comparaison entre versions quadratique et isotrope homogène



FIGURE – Diffusions quadratique et isotrope homogène, $t = 200, 400, 600$, $K = 0.01$

Comparaison entre versions quadratique et isotrope homogène

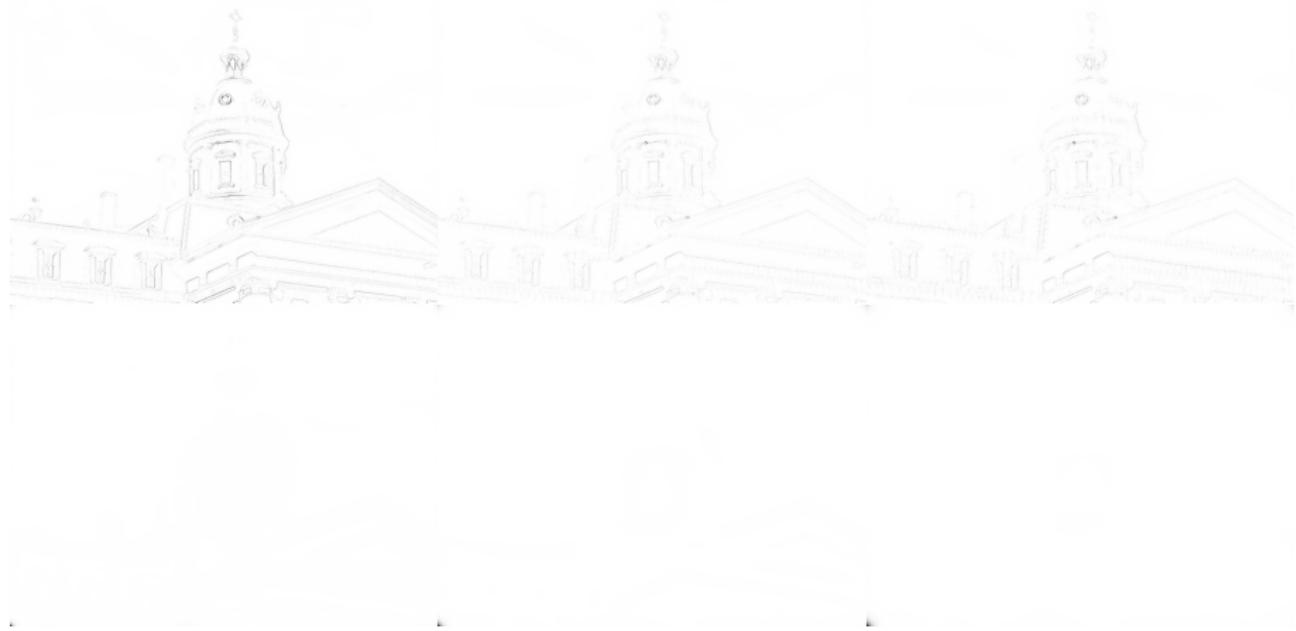


FIGURE – Diffusions quadratique et isotrope homogène, $t = 200, 400, 600$, $K = 0.01$

Le filtre exponentiel floute moins que le filtre quadratique



FIGURE – Diffusions exponentielle et quadratique, $t = 200, 400, 600$, $K = 0.01$

Le filtre exponentiel floute moins que le filtre quadratique



FIGURE – Diffusions exponentielle et quadratique, $t = 200, 400, 600$, $K = 0.01$

Plus K est grand, plus le filtre floute



FIGURE – Diffusion exponentielle, $K = 0.01$ et $K = 0.04$, $t = 200, 400, 600$

Plus K est grand, plus le filtre floute



FIGURE – Diffusion exponentielle, $K = 0.01$ et $K = 0.04$, $t = 200, 400, 600$

Lien avec le filtre bilatéral

- Discrétisation de l'équation de diffusion (Euler-explicite)

Lien avec le filtre bilatéral

- Discrétisation de l'équation de diffusion (Euler-explicite)
Perona et Malik discrétisent leur équation ainsi :

Lien avec le filtre bilatéral

- Discrétisation de l'équation de diffusion (Euler-explicite)
Perona et Malik discrétisent leur équation ainsi :

$$I_p^{t+1} = I_p^t + \frac{\lambda}{|\eta_p|} \sum_{s \in \eta_p} g(I_p^t - I_s^t)(I_p^t - I_s^t) \quad (3)$$

Lien avec le filtre bilatéral

- Discrétisation de l'équation de diffusion (Euler-explicite)
Perona et Malik discrétisent leur équation ainsi :

$$I_p^{t+1} = I_p^t + \frac{\lambda}{|\eta_p|} \sum_{s \in \eta_p} g(I_p^t - I_s^t)(I_p^t - I_s^t) \quad (3)$$

Et cela ressemble fichtrement à une descente de gradient...

Lien avec le filtre bilateral

- Discrétisation du filtre bilatéral
en posant,

$$w(i, j, k, l) = e^{(-\frac{(i-k)^2 + (j-l)^2}{2\sigma_d^2} - \frac{\|I(i,j) - I(k,l)\|^2}{2\sigma_r^2})} \quad (4)$$

alors

$$I_{Denoised}(i, j) = \frac{\sum_{k,l} I(k, l) \cdot w(i, j, k, l)}{\sum_{k,l} w(i, j, k, l)} \quad (5)$$

Lien avec le filtre bilateral

- Discrétisation du filtre bilatéral en posant,

$$w(i, j, k, l) = e^{\left(-\frac{(i-k)^2 + (j-l)^2}{2\sigma_d^2} - \frac{\|I(i,j) - I(k,l)\|^2}{2\sigma_r^2} \right)} \quad (4)$$

alors

$$I_{Denoised}(i, j) = \frac{\sum_{k,l} I(k, l) \cdot w(i, j, k, l)}{\sum_{k,l} w(i, j, k, l)} \quad (5)$$

Autrement dit,

$$I'_q = \frac{\sum_p G_{\sigma_1}(\|p - q\|) G_{\sigma_2}(\|I_p - I_q\|) I_p}{\sum_p G_{\sigma_1}(\|p - q\|) G_{\sigma_2}(\|I_p - I_q\|)} \quad (6)$$

Lien avec le filtre bilateral

- Discrétisation du filtre bilatéral en posant,

$$w(i, j, k, l) = e^{\left(-\frac{(i-k)^2 + (j-l)^2}{2\sigma_d^2} - \frac{\|I(i,j) - I(k,l)\|^2}{2\sigma_r^2} \right)} \quad (4)$$

alors

$$I_{Denoised}(i, j) = \frac{\sum_{k,l} I(k, l) \cdot w(i, j, k, l)}{\sum_{k,l} w(i, j, k, l)} \quad (5)$$

Autrement dit,

$$I_q^{t+1} = \frac{\sum_p G_{\sigma_1}(\|p - q\|) G_{\sigma_2}(\|I_p^t - I_q^t\|) I_p^t}{\sum_p G_{\sigma_1}(\|p - q\|) G_{\sigma_2}(\|I_p^t - I_q^t\|)} \quad (6)$$

Lien avec le filtre bilateral

- Discrétisation du filtre bilatéral
en posant,

$$w(i, j, k, l) = e^{\left(-\frac{(i-k)^2 + (j-l)^2}{2\sigma_d^2} - \frac{\|I(i,j) - I(k,l)\|^2}{2\sigma_r^2} \right)} \quad (4)$$

alors

$$I_{Denoised}(i, j) = \frac{\sum_{k,l} I(k, l) \cdot w(i, j, k, l)}{\sum_{k,l} w(i, j, k, l)} \quad (5)$$

Autrement dit,

$$I_q^{t+1} = I_q + \frac{\sum_p G_{\sigma_1}(\|p - q\|)G_{\sigma_2}(\|I_p^t - I_q^t\|)(I_p^t - I_q^t)}{N_t} \quad (6)$$

avec $N_t = \sum_p G_{\sigma_1}(\|p - q\|)G_{\sigma_2}(\|I_p^t - I_q^t\|)$

Bilan

Bilateral

Bilan

Bilateral

$$I_q^{t+1} = I_q + \frac{\sum_p G_{\sigma_1}(|p - q|)G_{\sigma_2}(|I_p^t - I_q^t|)(I_p^t - I_q^t)}{N_t} \quad (7)$$

avec $N_t = \sum_p G_{\sigma_1}(|p - q|)G_{\sigma_2}(|I_p^t - I_q^t|)$ Perona-Malik

Bilan

Bilateral

$$I_q^{t+1} = I_q + \frac{\sum_p G_{\sigma_1}(|p - q|)G_{\sigma_2}(|I_p^t - I_q^t|)(I_p^t - I_q^t)}{N_t} \quad (7)$$

avec $N_t = \sum_p G_{\sigma_1}(|p - q|)G_{\sigma_2}(|I_p^t - I_q^t|)$ Perona-Malik

$$I_p^{t+1} = I_p^t + \frac{\lambda}{|\eta_p|} \sum_{s \in \eta_p} g(I_p^t - I_s^t)(I_p^t - I_s^t) \quad (8)$$

Conclusion :

Forte analogie :

Bilan

Bilateral

$$I_q^{t+1} = I_q + \frac{\sum_p G_{\sigma_1}(|p - q|)G_{\sigma_2}(|I_p^t - I_q^t|)(I_p^t - I_q^t)}{N_t} \quad (7)$$

avec $N_t = \sum_p G_{\sigma_1}(|p - q|)G_{\sigma_2}(|I_p^t - I_q^t|)$ Perona-Malik

$$I_p^{t+1} = I_p^t + \frac{\lambda}{|\eta_p|} \sum_{s \in \eta_p} g(I_p^t - I_s^t)(I_p^t - I_s^t) \quad (8)$$

Conclusion :

Forte analogie : descente de gradient

Bilan

Bilateral

$$I_q^{t+1} = I_q + \frac{\sum_p G_{\sigma_1}(\|p - q\|)G_{\sigma_2}(\|I_p^t - I_q^t\|)(I_p^t - I_q^t)}{N_t} \quad (7)$$

avec $N_t = \sum_p G_{\sigma_1}(\|p - q\|)G_{\sigma_2}(\|I_p^t - I_q^t\|)$ Perona-Malik

$$I_p^{t+1} = I_p^t + \frac{\lambda}{|\eta_p|} \sum_{s \in \eta_p} g(I_p^t - I_s^t)(I_p^t - I_s^t) \quad (8)$$

Conclusion :

Forte analogie : descente de gradient sauf que...

... les noyaux sont différents : $(\|x\| \cdot c(\|\nabla u(x)\|))$ au lieu de $c(\|\nabla u(x)\|)$

Bilan

Bilateral

$$I_q^{t+1} = I_q + \frac{\sum_p G_{\sigma_1}(\|p - q\|)G_{\sigma_2}(\|I_p^t - I_q^t\|)(I_p^t - I_q^t)}{N_t} \quad (7)$$

avec $N_t = \sum_p G_{\sigma_1}(\|p - q\|)G_{\sigma_2}(\|I_p^t - I_q^t\|)$ Perona-Malik

$$I_p^{t+1} = I_p^t + \frac{\lambda}{|\eta_p|} \sum_{s \in \eta_p} g(I_p^t - I_s^t)(I_p^t - I_s^t) \quad (8)$$

Conclusion :

Forte analogie : descente de gradient sauf que...

... les noyaux sont différents : $(\|x\| \cdot c(\|\nabla u(x)\|))$ au lieu de $c(\|\nabla u(x)\|)$
et les pas de descente ne sont pas de même nature