



Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных технологий и моделирования

Дьяченко Роман Романович

**Малоранговый метод Монте-Карло для моделирования процессов
агрегации в открытых систем с несколькими источниками.**

Исследование эффекта смерти конечных систем.

КУРСОВАЯ РАБОТА

Научный руководитель:

к.ф.-м.н.

Матвеев С. А.

Москва, 2023

1 Введение

Не так давно появились новые методы быстрого решения обыкновенных дифференциальных уравнений Смолуховского (ОДУ) [3]. Они основаны на малоранговой аппроксимации ядра коагуляции C , которая позволяет уменьшить сложность каждого временного шага с $O(N^2)$ до $O(NR \log N)$, где R - ранг матрицы $C \in R^{N \times N}$, а N - это число уравнений. Значение N соответствует максимальному размеру кластеров в системе.

Однако не все уравнения могут быть решены таким образом. Хотя все популярные ядра (баллистические, броуновское и т.д.) имеют малый ранг, проблемы возникают, когда происходит гелеобразование, после чего решение ОДУ не существует. Более того, условие сохранения массы на значительном отрезке времени может потребовать очень больших значений N , чтобы иметь конечную систему, которая аппроксимирует бесконечную систему. Наконец, с течением времени обычно требуется соответствующим образом менять временной шаг, поскольку эволюция системы сильно влияет на скорость изменения концентраций.

В то время как вышеупомянутые проблемы могут быть решены с помощью специальных подходов, существует другой простой способ их обойти. А именно, вместо решения ОДУ можно выполнить моделирование методом Монте-Карло с некоторым очень большим конечным числом частиц [1] [6]; в этом случае матрица C определяет вероятности столкновения для частиц соответствующего размера. Тогда условие сохранения массы всегда выполняется, что позволяет изучать гелеобразование, а временной шаг автоматически определяется временем между столкновениями. К сожалению, известные методы [5] Монте-Карло требуют слишком много времени для выбора сталкивающихся частиц.

Здесь мы используем модификацию метода Монте-Карло [8], которая позволяет использовать свойство малого ранга ядра коагуляции для уменьшения требуемого количества операций до значения $O(R \log N)$. Более того, этот подход не требует, чтобы само ядро было малоранговым или имело хорошую малоранговую аппроксимацию, вместо этого достаточно ограничить его сверху некоторым малоранговым ядром \tilde{C} .

В этой работе мы адаптируем этот алгоритм для открытой системы с несколькими источниками, демонстрируем его сходимость на примере известных теоретических решений и демонстрируем схожесть полученных решений с результатами полученными методами решения ОДУ [7].

2 Постановка задачи

Мы рассматриваем модель агрегации [4] хорошо перемешанных частиц с двумя источниками: мономерами ($k = 1$) и частицами массой k ($k = I_s > 1$) и полным поглощением для частиц, превышающих максимальную массу ($k = N_{lim}$). Таким образом, уравнение Смолуховского приобретает вид:

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} C_{j,k-j} n_j n_{k-j} - n_k \sum_{j=1}^{\infty} C_{k,j} n_j + P_k - R_k \quad (1)$$

где $C_{k,j}$ - ядро агрегации (слияния) двух частиц, содержащих k и j мономеров в себе. Первый член в (1) описывает скорость образования частиц с массой k , второй член описывает скорость истощения наночастиц из-за столкновений. Слагаемое $P_k \geq 0$ представляет внешний источник (образование частиц), а член R_k представляет удаление слишком крупных наночастиц из системы.

$$P_k = \begin{cases} p_1, & k = 1 \\ p_k, & k = I_s \\ 0, & k \neq 1, I_s \end{cases} \quad (2)$$

$$R_k = \begin{cases} 0, & k \leq N_{lim} \\ \infty, & k > N_{lim} \end{cases}$$

где p_1 - интенсивность внешнего источника для мономеров, а p_k - интенсивность внешнего источника для частиц массой k . Начальными условиями для заполнения кластера являются: $n_k(t = 0) = 0$. Важно отметить, что в модели (1) агрегация кластеров моделируется с детальным разрешением по мономеру. Коэффициенты скорости (или ядра) $C_{i,j}$ являются симметричными и однородными функциями i, j и в большинстве приложений могут быть

представлены как $C_{i,k} = K(T)C_{i,j}$, где $C(T)$ зависит только от температуры, а $C_{i,j}$ является двоичной функцией от i, j . В этой статье мы рассматриваем два распространенных случая столкновения ядер для диффузионного и баллистического подходов и устанавливаем единственный безразмерный температурный член $C(T) = 1$. Эти выражения часто используются при моделировании в астрофизике, динамике аэрозолей, флуктуации, грануляции:

$$\begin{aligned} \text{Diffusion: } C_{i,j} &= i^a j^{-a} + i^{-a} j^a \\ \text{Ballistic: } C_{i,j} &= (i^{1/3} + j^{1/3})^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{i} + \frac{1}{j}}. \end{aligned} \quad (3)$$

3 Структура методов Монте-Карло

Здесь и далее будем обозначать через $N_i, i = \overline{1, N}$ число частиц размера i . Пусть $N_p = \sum_{i=1}^N N_i$ — общее число частиц. Элементы C_{ij} обозначают частоту агрегации частиц размером i и j . Тогда, если произошла агрегация, то вероятность того, что это были частицы i и j , равна

$$P_{ij} = \frac{C_{ij}N_iN_j}{\sum_{i,j} C_{ij}N_iN_j}.$$

Метод Монте-Карло выполняется следующим образом:

1. Инициализируется система с N_i частиц размера i . Устанавливается $t = 0$.
2. Находится интервал Δt до следующего столкновения. Время обновляется на $t := t + \Delta t$.
3. Выбираются размеры в соответствии с вероятностями P_{ij} .
4. Выполняется агрегация:

$$N_i := N_i - 1, \quad N_j := N_j - 1, \quad N_{i+j} := N_{i+j} + 1.$$

5. Пока не достигнут конечный момент времени, возвращаемся к шагу 2.

Простейший способ выбора вероятностей связан с перебором всех N^2 возможных значений P_{ij} , что весьма неэффективно. Представленный далее алгоритм довольно эффективно решает эту проблему в предположении малости ядра агрегации.

4 Малоранговый Монте-Карло метод

Для начала напомним понятие ранга:

Определение 1. Пусть $A \in R^{M \times N}$ — матрица $M \times N$ с вещественными элементами A_{ij} . Минимальное значение R , для которого A может быть выражена как сумма внешних произведений

$$A = \sum_{k=1}^R \vec{u}^k \cdot \vec{v}^k \quad (4)$$

двух наборов векторов

$$\begin{aligned} \vec{u}^k &\in R^M, \quad k = \overline{1, R}, \\ \vec{v}^k &\in R^N, \quad k = \overline{1, R}, \end{aligned}$$

называется рангом матрицы A . Когда $R < \min(M, N)$, выражение (4) называется малоранговым разложением матрицы A .

Пример:

$A_{ij} = C_{ij}N_iN_j$. Тогда для линейного ядра $C_{ij} = i + j$ матрица A имеет ранг не больше $R = 2$ для любого размера, поскольку она может быть выражена как

$$A = \vec{u}^1 \cdot \vec{v}^1 + \vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2$$

или, поэлементно,

$$A_{ij} = iN_i \cdot N_j + N_i \cdot jN_j = u_i^1 v_j^1 + u_i^2 v_j^2$$

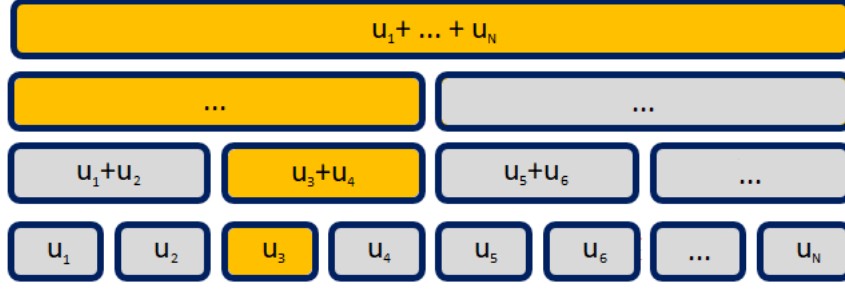


Рис. 1: Дерево отрезков для вектора \vec{u}

с

$$u_i^1 = iN_i, \quad v_j^1 = N_j$$

и

$$u_i^2 = N_i, \quad v_j^2 = jN_j.$$

Причина использовать малоранговое разложение заключается в том, что оно обеспечивает более простой способ выбора размеров частиц. Например, пусть $R = 1$, так что $C_{ij}N_iN_j = u_i \cdot v_j$. Тогда вероятность того, что первая частица имеет размер i , может быть вычислена как

$$p_i = \frac{\frac{\Delta t}{V} \sum_{j=1}^N C_{ij}N_iN_j}{\frac{\Delta t}{V} \sum_{i,j=1}^N C_{ij}N_iN_j} = \frac{\sum_{j=1}^N u_i v_j}{\sum_{i,j=1}^N u_i v_j} = \frac{u_i \sum_{j=1}^N v_j}{\sum_{i=1}^N u_i \sum_{j=1}^N v_j} = \frac{u_i}{\sum_{i=1}^N u_i} \quad (5)$$

и зависит только от компонент вектора \vec{u} . Аналогично,

$$p_j = \frac{v_j}{\sum_{j=1}^N v_j} \quad (6)$$

зависит только от компонент вектора \vec{v} .

Если ранг больше 1, мы можем представить $A_{ij} = C_{ij}N_iN_j$ как сумму ядер ранга (4) и рассматривать их отдельно, как будто мы рассматриваем разные механизмы агрегации. Чтобы определить, какое ядро использовать, мы можем сравнить общие скорости агрегации и выбрать k -й член вида $\vec{u}^k \cdot \vec{v}^k$ с вероятностью:

$$p_k = \frac{\sum_{i,j=1}^N u_i^k v_j^k}{\sum_{k=1}^R \sum_{i,j=1}^N u_i^k v_j^k} = \frac{\sum_{i=1}^N u_i^k \sum_{j=1}^N v_j^k}{\sum_{k=1}^R \left(\sum_{i=1}^N u_i^k \sum_{j=1}^N v_j^k \right)}.$$

На данный момент еще не видно преимуществ в скорости малорангового подхода. Теперь рассмотрим этот подход более подробно.

Задача состоит в том, чтобы ускорить выбор размеров частиц в соответствии с вероятностями p_i и p_j (5), (6). Это можно сделать, используя дерево отрезков (см. Рис. 1) Дерево отрезков - это двоичное дерево, которое содержит частичные суммы элементов массива. Всякий раз, когда мы выбираем случайную величину

$$r := \text{rand}(0, 1] \cdot \sum_{i=1}^N u_i$$

чтобы определить размер первой частицы, мы можем определить размер за $O(\log N)$ шагов, вычитая частичные суммы u_i из r . Кроме того, дерево отрезков может быть обновлено за $O(\log N)$ операций путем обновления частичных сумм от измененного листа дерева к его корню. Поскольку в общем случае требуется обновить R деревьев, общая сложность составляет $O(R \log N)$. Поскольку R подбирается так, чтобы оно не росло с увеличением максимального размера частиц N , асимптотическая сложность ниже, чем $O(N^\alpha)$ для любого $\alpha > 0$.

Ниже представлен псевдокод алгоритма:

Algorithm 1 LowRank Monte-Carlo

```
1: procedure LOWRANK MONTE-CARLO( $N_i, C_{ij}, V, \text{maxtime}$ )
2:    $N_{p0} := \sum_{i=1}^N N_i$  // Задание начального числа частиц  $N_{p0}$ 
3:    $N_p := N_{p0}$  // Задание текущего числа частиц  $N_p$ 
4:   Создание деревьев отрезков  $u_t^k$  и  $v_t^k$  на векторах  $\vec{u}^k$  и  $\vec{v}^k$ 
5:    $\text{curtime} := 0$ 
6:   while  $\text{curtime} < \text{maxtime}$  do
7:     repeat
8:       // Первые элементы деревьев отрезков содержат общую сумму частот столкно-
       вений, которую мы можем использовать для вычисления общей скорости агрегации
9:        $\text{total\_rate} := \sum_{k=1}^R (u_t^k)_1 (v_t^k)_1$ 
10:      // Обновление времени
11:       $r := \text{total\_rate} \cdot \text{rand}(0, 1]$ 
12:       $\text{curtime} := \text{curtime} + \frac{2V}{r}$ 
13:      // Выбор компоненты ранга 1
14:      for  $k := 1$  to  $R$  do
15:        // Первые элементы деревьев отрезков содержат общую сумму, которую мы
        вычитаем из  $r$ 
16:         $r := r - (u_t^k)_1 (v_t^k)_1$ 
17:        if  $r \leq 0$  then
18:          break
19:        end if
20:      end for
21:      Выбор размеров  $i$  и  $j$  с помощью двоичного поиска в деревьях отрезков  $u_t^r$  и  $v_t^r$ 
22:      // Отклонение столкновения с собой
23:      if  $(i = j)$  and  $(N_i \cdot \text{rand}(0, 1] \leq 1)$  then
24:        continue
25:      end if
26:      until  $i$  и  $j$  не выбраны
27:      // Агрегация
28:      if  $i + j > N$  then
29:         $N := 2N$ 
30:      end if
31:       $N_i := N_i - 1$ 
32:       $N_j := N_j - 1$ 
33:       $N_{i+j} := N_{i+j} + 1$ 
34:       $N_p := N_p - 1$ 
35:      if  $N_p \leq N_{p0}/2$  then
36:         $N_p := 2N_p$ 
37:         $V := 2V$ 
38:      end if
39:      Обновление деревьев отрезков
40:    end while
```

5 Адаптация алгоритма для открытой системы

Работа источников происходит независимо от взаимодействия частиц в системе, следовательно можно получить уравнение количества добавленных частиц ко времени t :

$$N_k = p_k \cdot V \cdot t$$

Таким образом, будем вести контроль числа частиц из источника, после каждого шага по времени. Для корректной работы алгоритма необходимо после каждого добавления частиц делать обновление деревьев отрезков. При достижении стационарного состояния на фиксированном объеме происходит процедура удвоения системы необходимая для улучшения точности найденных концентраций. Более детальная последовательность действий представлена в псевдокоде ниже:

Algorithm 2 LowRank Monte-Carlo in open system

```
1: procedure OPEN_MONTE-CARLO( $C_{ij}, V_{max}, p_k, Lim, maxtime$ )
2:    $N_i = 0$  // В момент  $t = 0$  система пуста
3:    $S_i = 0$  // Количество частиц размера  $i$ , попавших в систему к моменту  $t$ 
4:    $S_w = 1$  //  $w = \operatorname{argmax}_k p_k$ 
5:    $N_w = 1$ 
6:    $N := 1$  // Суммарное число частиц в системе
7:    $V = 1$ 
8:    $curtime := \frac{1}{max(p_k) \cdot V}$ 
9:   Создание деревьев отрезков  $u_t^k$  и  $v_t^k$  на векторах  $\vec{u}^k$  и  $\vec{v}^k$ 
10:  while  $curtime < maxtime$  do
11:    repeat
12:       $total\_rate := \sum_{k=1}^R (u_t^k)_1 (v_t^k)_1$ 
13:       $r := total\_rate \cdot \operatorname{rand}(0, 1]$ 
14:       $curtime := curtime + \frac{2V}{r}$ 
15:      // Добавление внешних частиц размера  $k$  в систему (аналогично для других источников)
16:      if  $curtime \cdot p_k \cdot V - S_k \geq 1$  then
17:         $extra = \lfloor curtime \cdot p_k \cdot V - S_k \rfloor$ 
18:         $N_k = N_k + extra$ 
19:         $S_k = S_k + extra$ 
20:        Обновление всех деревьев
21:      end if
22:      // Выбор компоненты ранга 1
23:      for  $k := 1$  to  $R$  do
24:        // Первые элементы деревьев отрезков содержат общую сумму, которую мы
        // вычитаем из  $r$ 
25:         $r := r - (u_t^k)_1 (v_t^k)_1$ 
26:        if  $r \leq 0$  then
27:          break
28:        end if
29:      end for
30:      Выбор размеров  $i$  и  $j$  с помощью двоичного поиска в деревьях отрезков  $u_t^r$  и  $v_t^r$ 
31:      // Отклонение столкновения с собой
32:      if  $(i = j)$  and  $(N_i \cdot \operatorname{rand}(0, 1] \leq 1)$  then
33:        continue
34:      end if
35:      until  $i$  и  $j$  не выбраны
36:      // Агрегация
37:      if  $i + j > Lim$  then
38:         $N_i := N_i - 1$ 
39:         $N_j := N_j - 1$ 
40:      else
41:         $N_i := N_i - 1$ 
42:         $N_j := N_j - 1$ 
43:         $N_{i+j} := N_{i+j} + 1$ 
44:         $N := N - 1$ 
45:      end if
46:      if Масса системы стабилизировалась and  $V < V_{max}$  then
47:         $N := 2N$ 
48:         $V := 2V$ 
49:      end if
50:      Обновление деревьев отрезков
51:    end while
```

6 Численные эксперименты

Используя разработанный малоранговый метод Монте-Карло, я повторяю результаты экспериментов статьи [7]

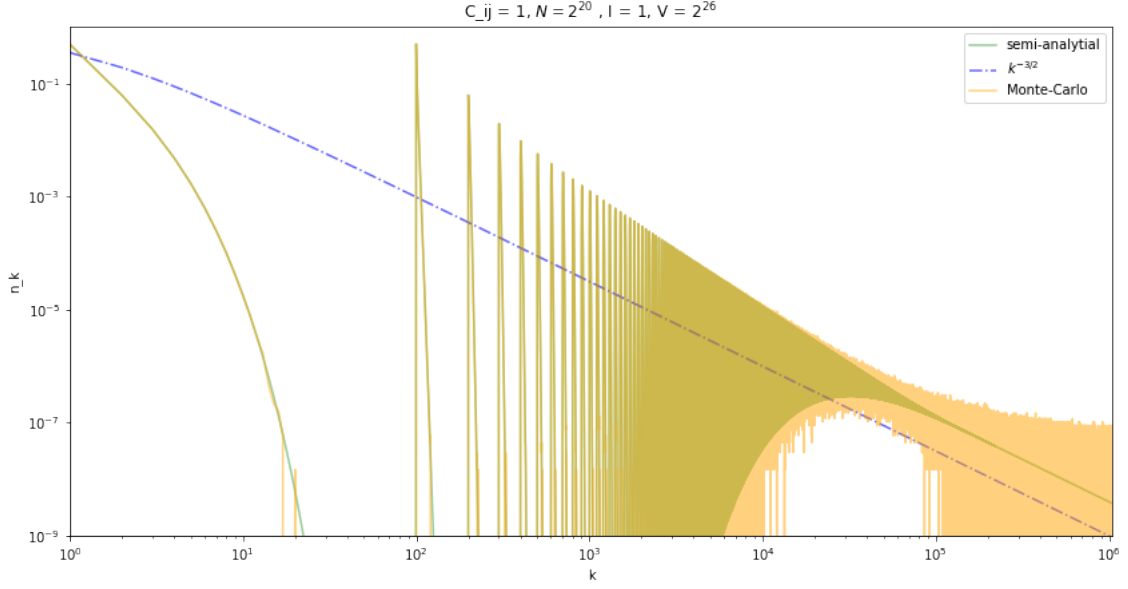


Рис. 2: Сравнение численного стационарного решения уравнений. (1) с полуаналитической оценкой из уравнений (7), (8), для исходных параметров начальных кластеров $I_s = 100$, $p_{I_s} = 1$ и постоянного ядра $C_{i,j} = 1$ с $N_{lim} = 2^{20}$. Асимптотическое правило $n_k \propto k^{-3/2}$ может быть достигнуто только для очень больших размеров кластеров. Сравнение стационарных численных решений уравнений.

6.1 Единичное ядро

В статье было получено полуаналитическое решение для системы с двумя источниками и константным ядром $C_{ij} = 1$ для концентраций частиц размера $\geq k$:

$$n_k = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{k-i}}{2N_{tot}} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{k-i}}{2\sqrt{2}(p_k + 1)}. \quad (7)$$

и аналитическое решение для частиц $< k$:

$$n_k = c_k \cdot 2^{-k+\frac{1}{2}} \cdot (1 + p_k)^{-k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(k - \frac{1}{2})}{\Gamma(k + 1)} \cdot (1 + p_k)^{-k+\frac{1}{2}} \approx \quad (8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} k^{-3/2} (1 + p_k)^{-k+\frac{1}{2}}.$$

В любом случае, для $k \gg p_s$ асимптотическое решение должно сходиться к начальному степенному закону

$$n_k \propto k^{-3/2},$$

На Рис. 2. представлен результат работы алгоритма после 10^9 коагуляций. Кроме того, наблюдаемая сходимость подтверждается ошибкой в Таблице 1. Однако для получения лучшей точности необходимо увеличение объёма системы до $V \approx 10^9 = 2^{30}$, что требует большего количества вычислений до сходимости.

Таблица 1: Измерения точности метода Монте-Карло для задачи с постоянным ядром, $N = 2^{20}$ уравнений в сравнении с аналитическими выражениями для формально бесконечной системы.

k	I	Relative error of n_k
1	1	$2.3 \cdot 10^{-5}$
2	1	$1.1 \cdot 10^{-4}$
7	1	$2.6 \cdot 10^{-3}$
1	0.1	$3.2 \cdot 10^{-5}$
2	0.1	$4.1 \cdot 10^{-4}$
7	0.1	$7.2 \cdot 10^{-3}$

6.2 Диффузионное ядро

Для системы с двумя источниками и диффузионным ядром не известны теоретические решения, однако разработанный метод Монте-Карло повторил численный результат, полученный методом Андерсона. Моделирование было проведено до 10^9 коагуляций и изображены на Рис. 3. и Рис. 4.

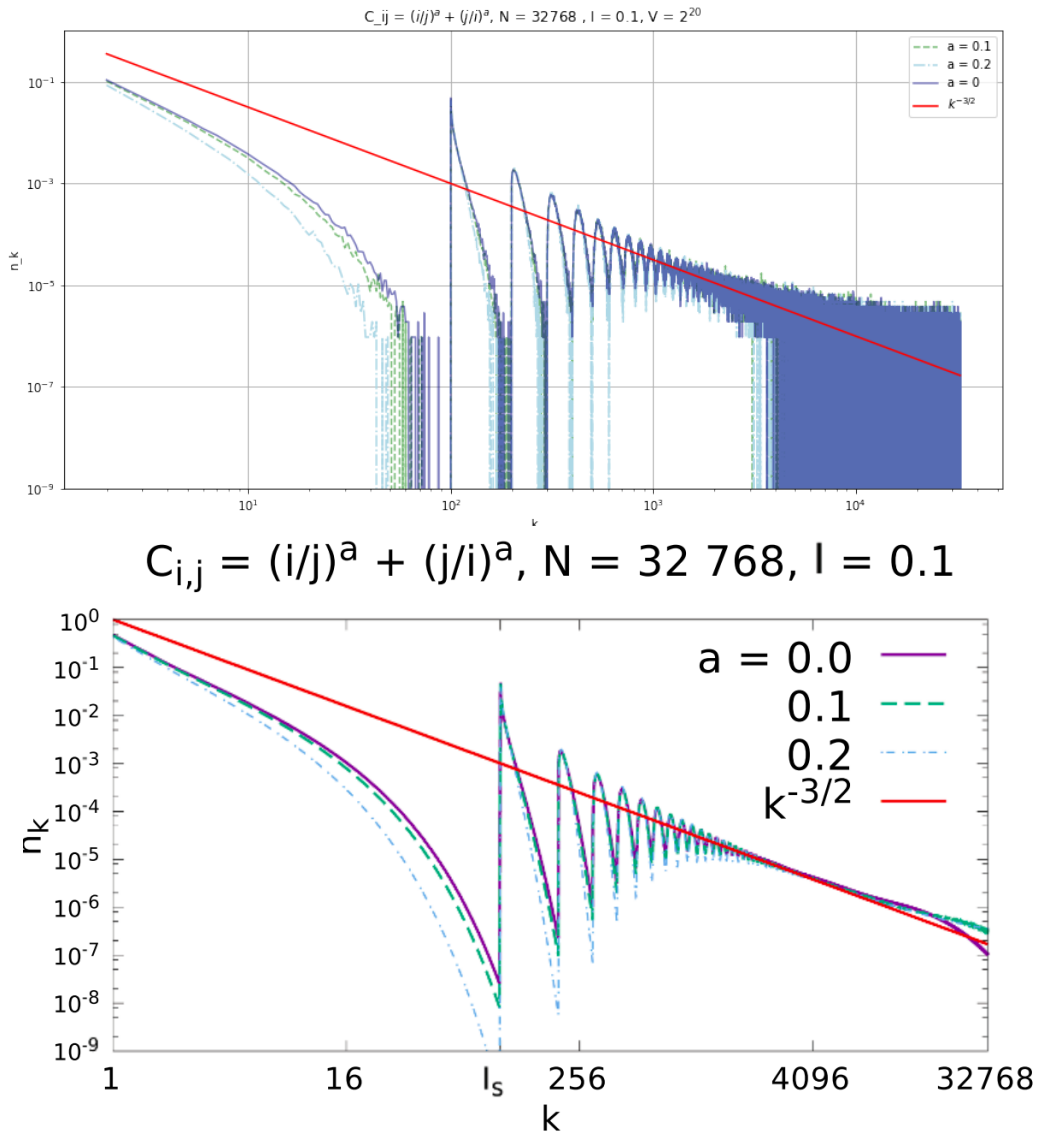


Рис. 3: Численные решение для системы размера $N_{lim} = 32768$ с диффузионным ядром $a = 0.1$ и источниками частиц с $I_s = 100$, $p_{I_s} = 0.1$.

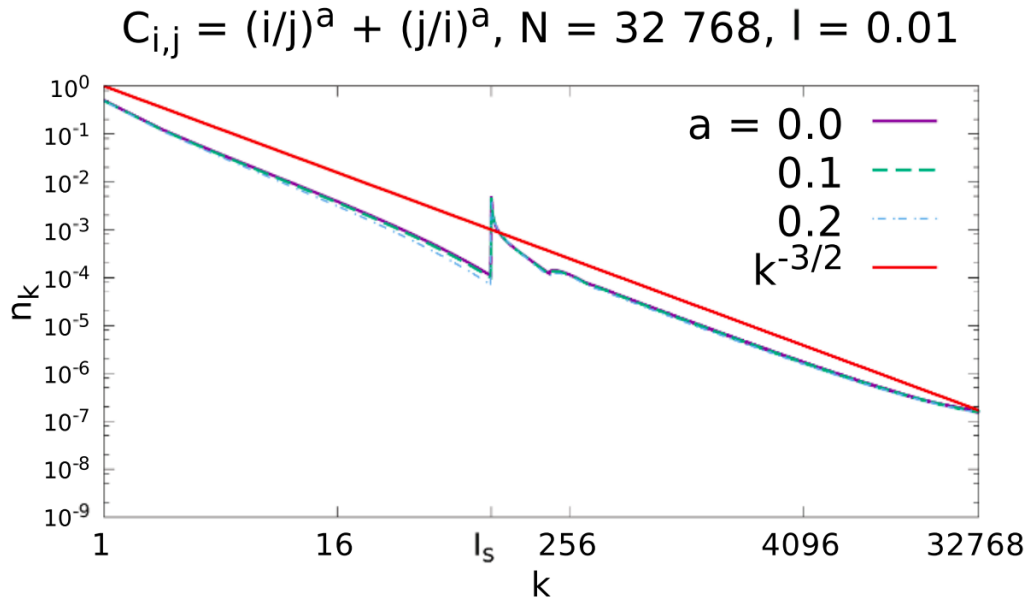
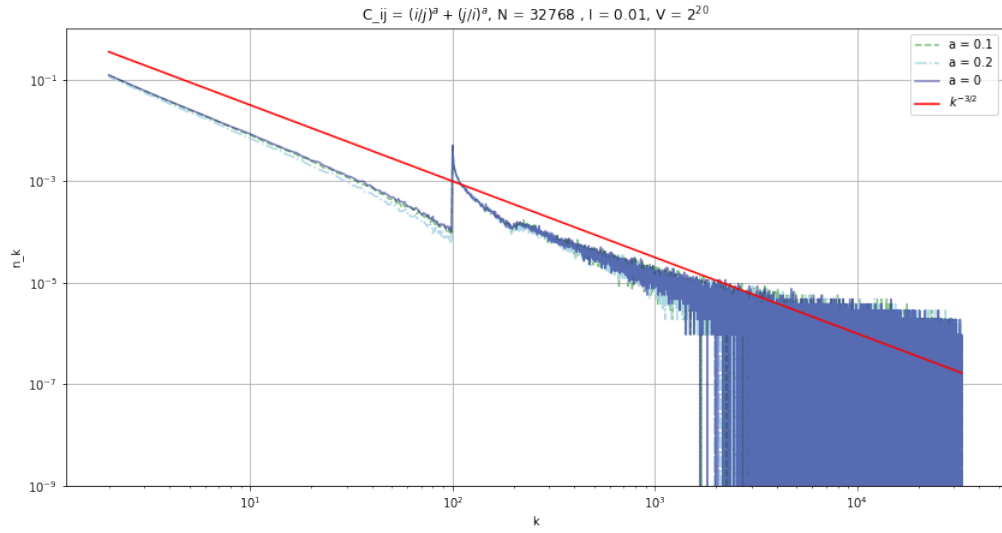


Рис. 4: Численные решение для системы размера $N_{lim} = 32768$ с диффузионным ядром $a = 0.01$ и источниками частиц с $I_s = 100$, $p_{I_s} = 0.1$.

7 Исследование эффекта смерти конечных систем

Математическая модель, описываемая системой дифференциальных уравнений рассматривает задачу в предельном переходе по количеству частиц. Однако решая задачу моделирования каких либо процессов, важно учитывать, достаточно ли частиц в вашей системе для предельного перехода к решениям дифференциальных уравнений. Результаты Монте-Карло моделирования на конечных выборках могут приходить к совершенно другим решениям, связанным с особенностью конечности системы.

Анализируем простую модель, [2] в которой ядро агрегации и фрагментации не зависят от массы частиц, и реакции могут осуществляться только при участии мономеров:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 1 \text{ или } j = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

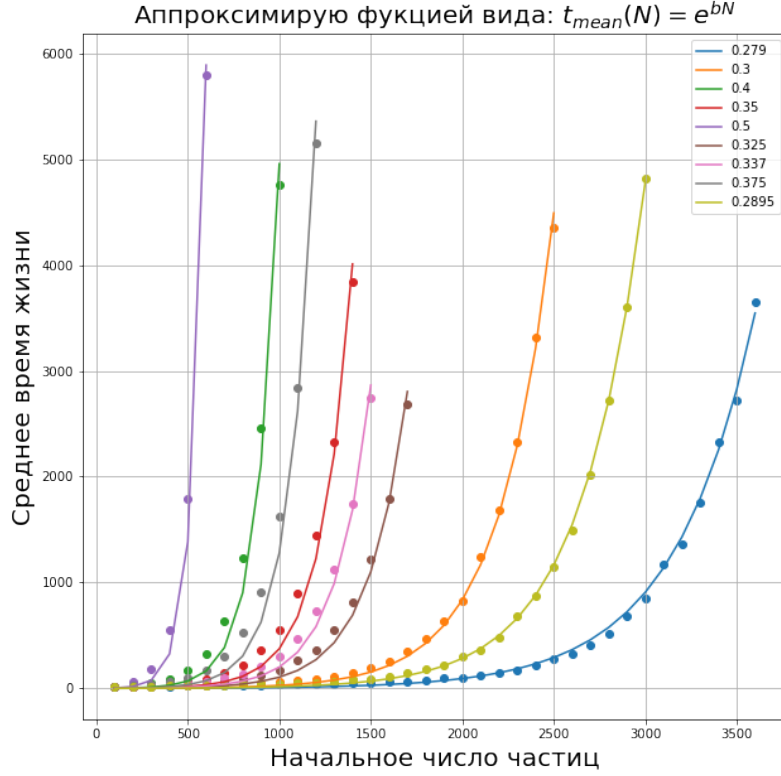


Рис. 5: Поиск зависимости среднего времени жизни системы от разных начальных размеров выборки и параметров фрагментации частиц в виде - e^{bN}

Тогда уравнение баланса для нашей модели выглядит так:

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1^2 - n_1 \sum_{j \geq 1} n_j + \lambda n_1 \sum_{j \geq 2} j n_j$$

$$\frac{dn_s}{dt} = n_1 n_{s-1} - n_1 n_s - \lambda n_1 n_s, \quad s \geq 2$$

$$n_s(0) = \delta_{s1}$$

В результате Монте-Карло моделирования процессов агрегации и фрагментации с монондисперсными начальными условиями были получены следующие результаты для времени жизни системы при разных значениях λ .

7.1 Среднее время жизни систем

Мной была проведена серия экспериментов, в которой измерялось среднее время жизни системы при фиксированных параметрах λ (параметр фрагментации) и N (начальное число мономеров в системе). Полученные данные хорошо укладываются на экспоненциальную зависимость вида (см. Рис. 5, 6) :

$$T_{mean}(N) = e^{bN}$$

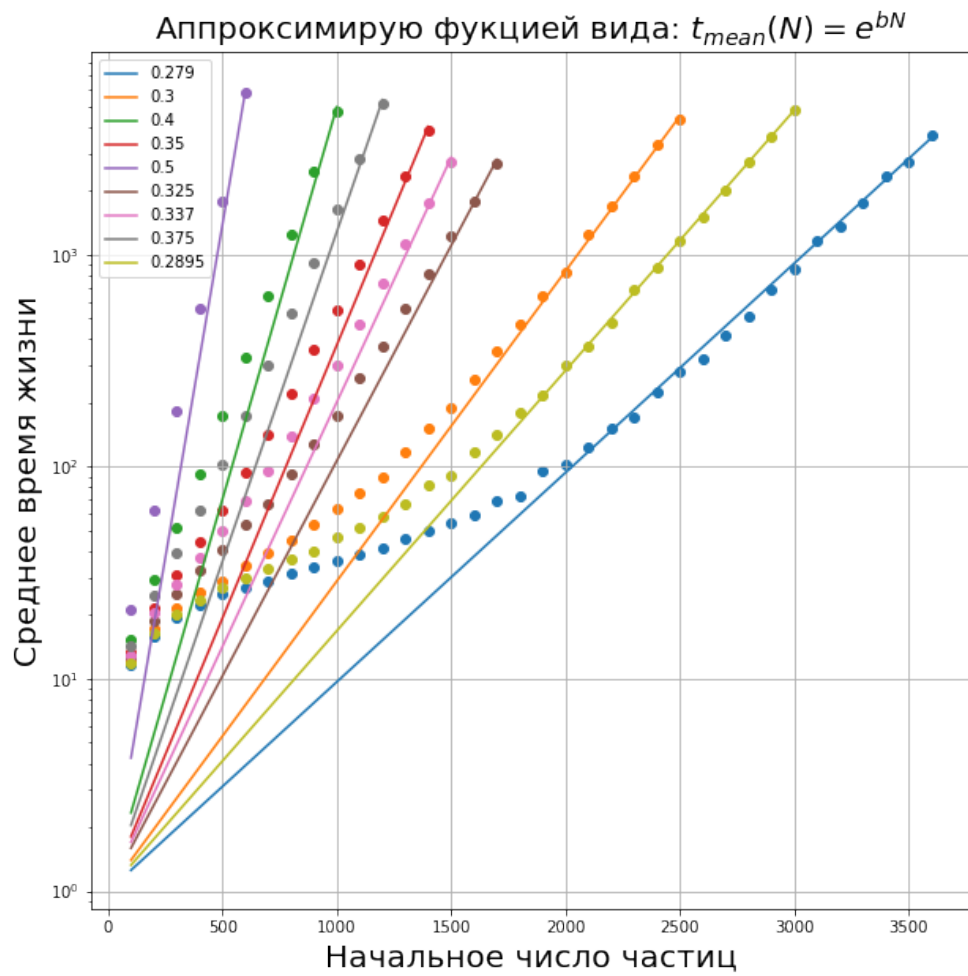


Рис. 6: Поиск зависимости среднего времени жизни системы от разных начальных размеров выборки и параметров фрагментации частиц в виде - e^{bN} . Логарифмический масштаб.

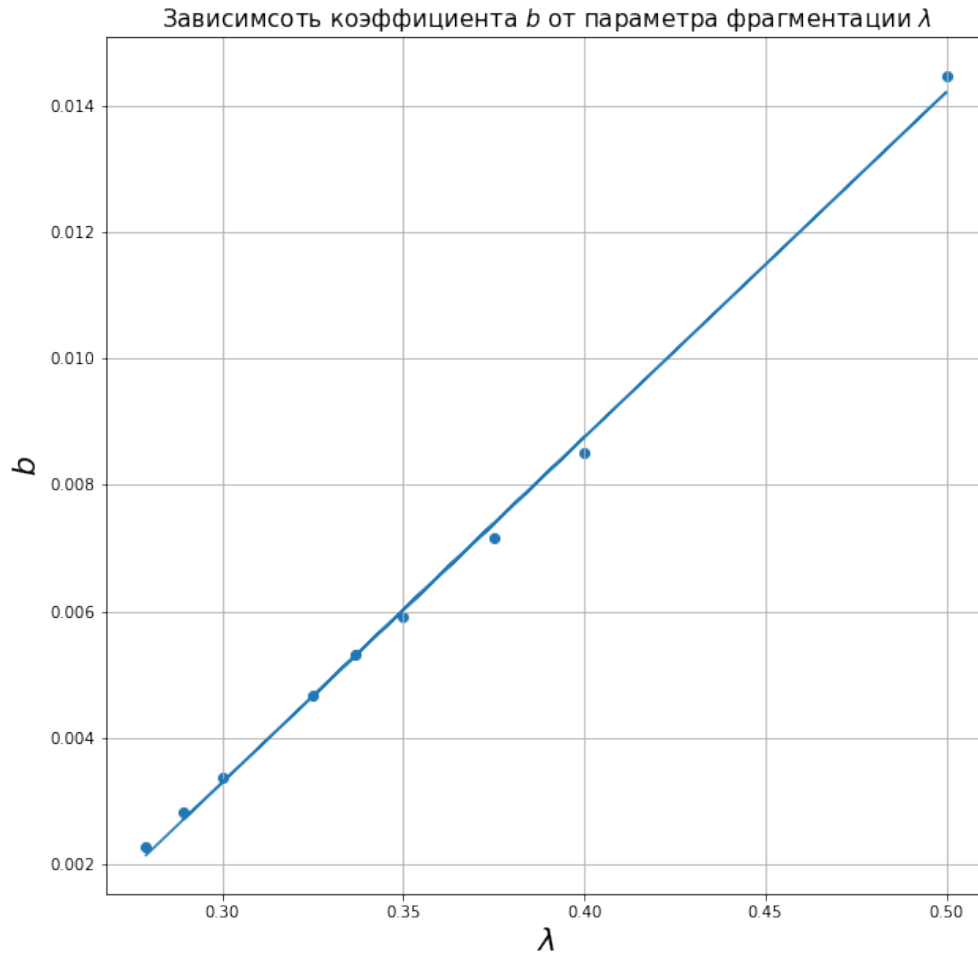


Рис. 7: Зависимость найденного коэффициента аппроксимации от параметра фрагментации системы λ

Кроме того, анализ коэффициента b показал свою линейность по параметру фрагментации λ : $b \propto \lambda$ (см. Рис. 7)

Таким образом, получаем итоговую зависимость среднего времени жизни системы от начального числа мономеров и параметра фрагментации:

$$T_{mean}(N, \lambda) \approx e^{c\lambda N}$$

, где c - некоторая константа

7.2 Средняя концентрация частиц в момент смерти системы

В этой серии экспериментов я получил усреднённое конечное состояние системы в момент смерти при разных N и λ т.е. концентрации частиц, когда мономеры закончились.

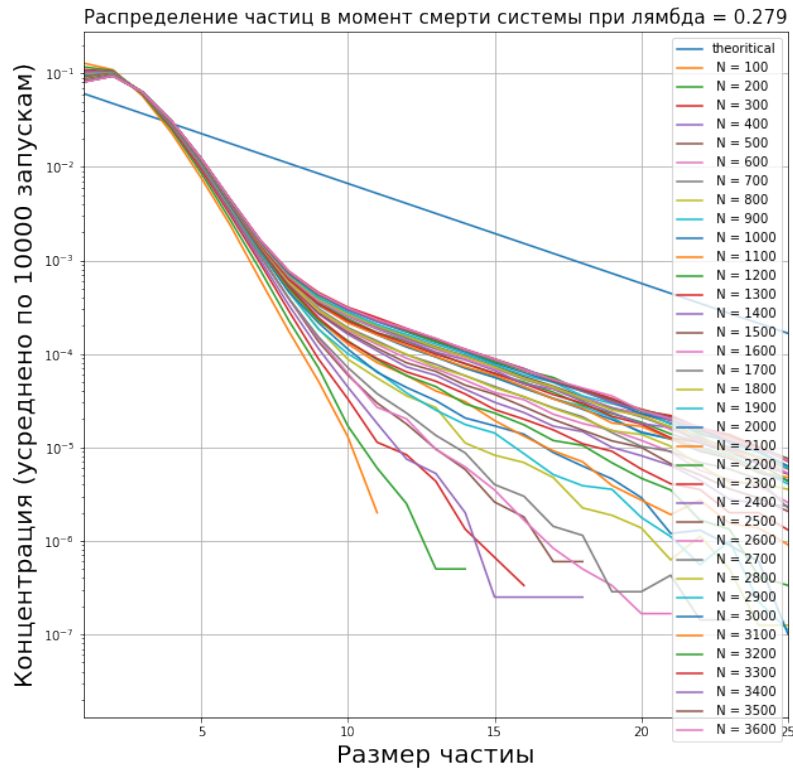


Рис. 8: Средние концентрации частиц в момент смерти системы при различных начальных размерах выборки и параметре фрагментации $\lambda = 0.279$. Данные получены после усреднения 10000 запусков алгоритма.

Таким образом, из графика (см. Рис. 8) явно видно, что решение системы дифференциальных уравнений не совпадает с распределением концентраций частиц в момент смерти системы при начальных выборках менее 3600 частиц. Поэтому при моделировании эффектов агрегации и фрагментации стоит внимательно относиться, к решениям полученным из дифференциальных уравнений.

8 Вывод

Разработанный метод показал хорошее качество на константном и диффузионном ядре. Однако для получения лучшей точности алгоритма ещё предстоит придумать ускорения. Например, реализовать идею фиктивных частиц, которая позволяет описывать работу систем с большим количеством частиц. Кроме того, предстоит разработать более формальные требования для остановки системы и масштабирования её в течение работы. Кроме того, проведены численные эксперименты, указывающие на расхождение модели системы дифференциальных уравнений от моделируемого явления при конечных выборках. Код разработанного алгоритма можно найти на моём Github

Список литературы

- [1] A. Kalinov and A. I. Osinsky , S. A. Matveev , W. Otieno and N. V. Brilliantov. “Direct simulation Monte Carlo for new regimes in aggregation-fragmentation kinetics”. B: (2022).
- [2] P. L. Krapivsky , W. Otieno and N. V. Brilliantov. “Phase transitions in systems with aggregation and shattering”. B: (2017).

- [3] Matveev Sergey A , Smirnov Alexander P and Tyrtysnikov EE. “A fast numerical method for the Cauchy problem for the Smoluchowski equation”. В: *Journal of Computational Physics* 282 (2015), с. 23—32.
- [4] Krapivsky Pavel L , Redner Sidney , Ben-Naim Eli. “A kinetic view of statistical physics”. В: (2010).
- [5] A. Garcia. “A Monte Carlo simulation of coagulation”. В: (1987).
- [6] F. E. , Maisels A. and Fissan H. Kruis. “Direct simulation Monte Carlo method for particle coagulation and aggregation”. В: (2000).
- [7] S. A Matveev , A. A Sorokin , A. P Smirnov and E.E. Tyrtysnikov. “Oscillating stationary distributions of nanoclusters in an open system”. В: (2020).
- [8] АИ Осинский. “Кандидатская диссертация. Кинетика агрегации и фрагментации в неоднородных системах”. В: (2022).