

Современные вычислительные технологии. Задание №3

Роман Дьяченко

Май 2023

1 Постановка задачи

Рассматривается процесс численного решения краевой задачи для уравнения Пуассона в квадратной области. Уравнение имеет вид

$$-\Delta u \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega = (0; 1)^2$$

и дополняется граничными условиями

$$u|_{\partial\Omega} = g(x, y).$$

В общем случае процесс численного решения можно описать так: 1. Строится сетка; 2. Как-либо методом дискретизации (методы конечных разностей, объемов, элементов) исходная задача сводится к системе алгебраических уравнений относительно дискретных неизвестных, расположенных на сетке; 3. Полученная (линейная) система численно решается. В данном задании рассматриваются треугольные сетки (кое-какие знания для их построения в Gmsh у нас уже есть) и метод конечных элементов с кусочно-линейными базисными функциями. Конечноэлементный решатель предоставляется в собранном виде. Целью задания является демонстрация полезности адаптивных сеток. В качестве точного решения используется функция

$$u(x, y) = ((x - y)^2 + 10^{-3})^{-1.5},$$

имеющая особенность у диагонали квадрата.

2 Численное решение и визуализация

2.1 Конечноэлементный решатель

Поставляется в собранном виде (2d_poisson_fem.exe для Windows, 2d_poisson_fem для учебных компьютеров в ИВМ). В решатель зашито точное решение (1). Решатель работает максимально просто: в качестве единственного аргумента командной строки предоставляется путь к файлу `.vtk` с треугольной сеткой в единичном квадрате (построенной в Gmsh). В ходе работы решатель выдает некоторую информацию о числе элементов сетки, времена выполнения разных этапов работы, C -норму ошибки численного решения, диаметр сетки (максимальное расстояние между узлами ячейки).

Выводимый файл `res.vtk` содержит в себе записанные на сетке численное решение (SOLUTION) и точное решение (SOLUTION_EXACT), а также некоторые вспомогательные данные.

2.2 Визуализация в ParaView

До сих пор построенные сетки мы рассматривали только непосредственно при их создании в Gmsh. Но ничего, кроме области и элементов сетки таким образом мы не увидим. А после работы конечноэлементного решателя сохраняется новый `.vtk`-файл, в котором записаны сеточные решения, которые надо отрисовать.

Для визуализации используем ParaView (<https://paraview.org/download>). Вероятно, это самый распространенный визуализатор данных в формате VTK, обладающий огромным количеством функций, из которых мы возьмем простейшие.

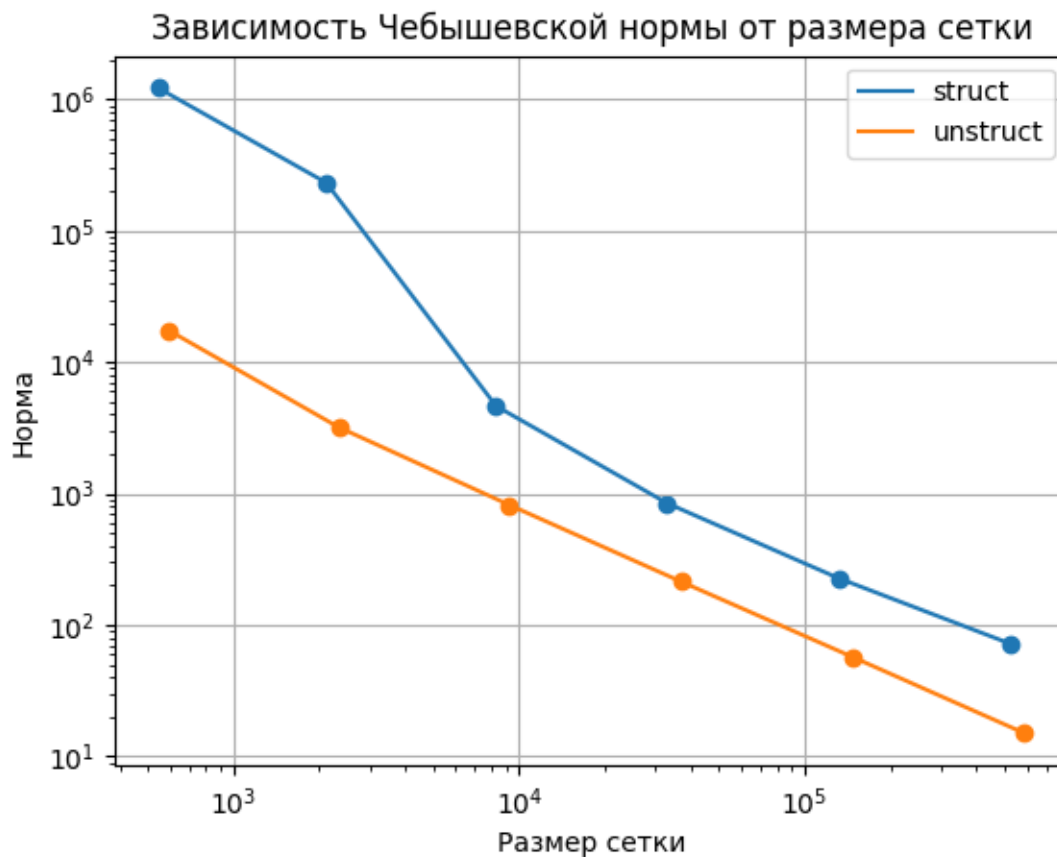


Рис. 1: Зависимость Чебышёвской нормы ошибки приближения от размера сетки

3 Результат работы

Мной был проведён ряд экспериментов по сравнению структурированной и неструктурированной сеток для определения более эффективного с точки зрения точности решения. Неструктурированная сетка показала себя отлично, результаты изображены на Рис. 1.

Отрисованные в ParaView ошибки на сетке находятся в файле `paraview_results.pdf`