

Технологическая практика. Краевая задача Дирихле для стационарного уравнения диффузии.

Роман Дьяченко

Декабрь 2023

1 Предмет изучения

Уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(-D \nabla u) = f \quad (1)$$

Что в него входит?

- u – основная неизвестная (концентрация вещества)
- $D = D^T > 0$ – тензор диффузии
- f – источниковый член

2 Краевая задача Дирихле для стационарного уравнения

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-D \nabla u) = f & \Omega \in R^2, \\ u|_{\partial\Omega} = g_D \end{cases}$$

Наши первые шаги:

- Граничные условия исключительно Дирихле
- Область Ω - единичный квадрат
- Тензор диагональный: $D = \operatorname{diag}\{d_x, d_y\}$

3 Численные эксперименты

Мной была проведена серия экспериментов по измерению качества решения при уменьшении диаметра сетки, используя метод конечных элементов. Результаты экспериментов можно увидеть на Рисунке №1. Тестирование производилось на одном потоке моего ноутбука с процессором CORE i7 (8th Gen).

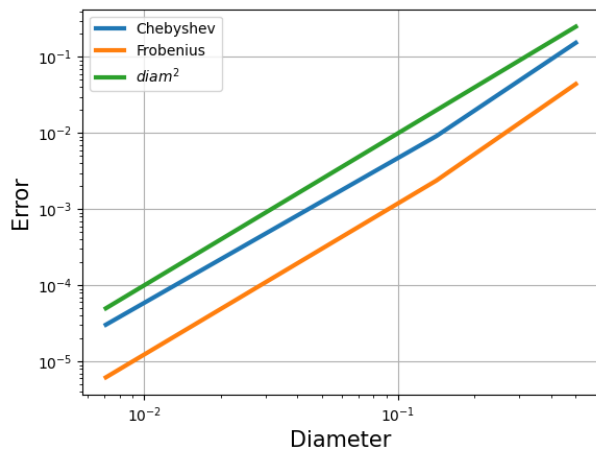
3.1 Эксперимент №1

Численно решалась задача №21 из темы №7 Е.В. Захарова "Уравнения математической физики":

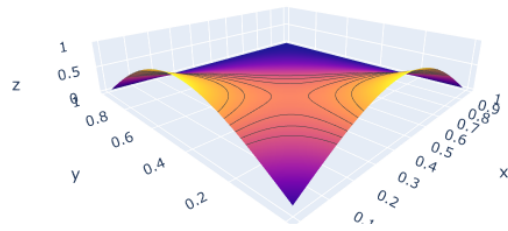
$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < 1, 0 < y < 1; \\ u|_{y=0} = \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1; \\ u|_{x=1} = 0, 0 \leq y \leq 1; \\ u|_{y=1} = 0, 0 \leq x \leq 1; \\ u|_{x=0} = \sin(\pi y), 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

и имеющее точное решение вида (см. Рис.1(b)):

$$u = \frac{\sin(\pi x) \cdot \operatorname{sh}(\pi(1-y))}{\operatorname{sh}(\pi)} + \frac{\sin(\pi y) \cdot \operatorname{sh}(\pi(1-x))}{\operatorname{sh}(\pi)}$$



(a)



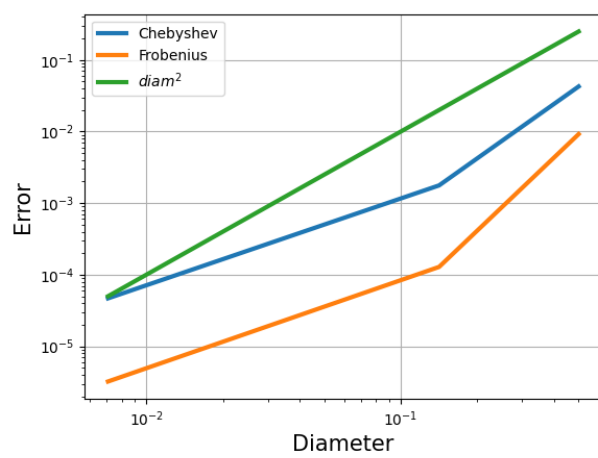
(b)

Рис. 1: (a): Относительные ошибки в эксперименте №1 в Фробениусовой и Чебышёвской нормах при различном количестве узлов сетки (b): График точного решения задачи №1

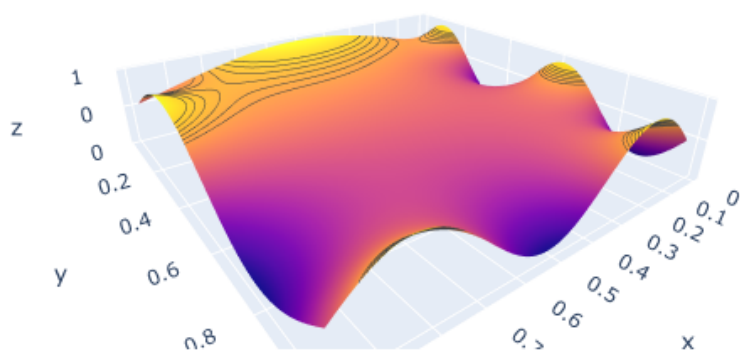
3.2 Эксперимент №2

Численно решалась задача №27 из темы №7 Е.В. Захарова "Уравнения математической физики":

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \sin(5\pi x) \cdot \sin(6\pi y), 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ u|_{y=0} = \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1 \\ u|_{x=1} = \sin(2\pi y), 0 \leq y \leq 1 \\ u|_{y=1} = \sin(3\pi x), 0 \leq x \leq 1 \\ u|_{x=0} = \sin(4\pi y), 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right.$$



(a)



(b)

Рис. 2: (a): Относительные ошибки в эксперименте №2 в Фробениусовой и Чебышёвской нормах при различном количестве узлов сетки (b): График точного решения задачи №2