DELPRØVE 1

Opgave 1 Funktionen f er givet ved

$$f(x) = x^5 - 7x^2.$$

a) Bestem $f'(x)$.

$$f'(x) = 5x^4 - 7 \cdot 2x^1 = 5x^4 - 14x$$

Opgave 2 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3.$$

a) Bestem $f'(x)$.

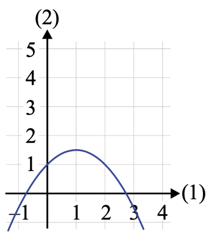
$$f'(x) = 3x^2$$

Opgave 3 Om funktionen f oplyses følgende

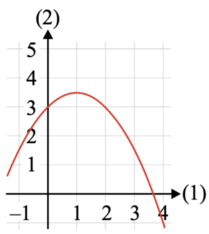
$$f(2) = 3$$
$$f'(2) = -1.$$

Netop én af de nedenstående figurer viser grafen for f.

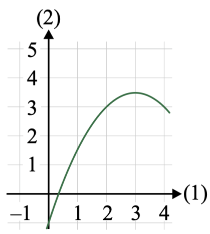
a) Forklar, hvilken af de tre figurer der viser grafen for f, og forklar, hvorfor det ikke kan være de to andre.



Figur 1



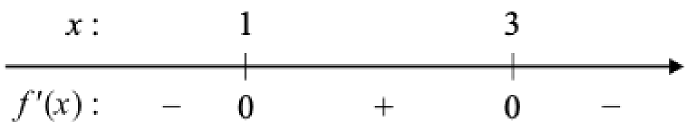
Figur 2



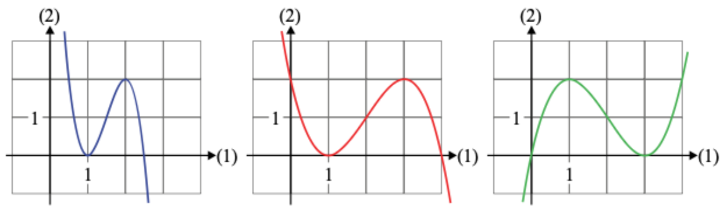
Figur 3

Da hældningen for tangenten i $x = 2$ er negativ, må parablen være faldende her, og det kan derfor ikke være figur 3. Af de sidste to figurer er det kun figur 2 der går gennem punktet $(2, 3)$, hvorfor det må være grafen for f.

Opgave 4 For en differentiabel funktion f er nulpunkter og fortegn for $f'(x)$ angivet på tallinjen nedenfor.



Det oplyses, at netop én af de tre figurer viser grafen for f.



Figur 1 *Figur 2* *Figur 3*

a) Hvilken af de tre figurer viser grafen for f? Begrund svaret.

Kun figur 2 og 3 har vendepunkter i $x = 1$ og $x = 3$, og af disse er det kun figur 2 som er faldende i intervallet $x < 1$, hvorfor denne figur må vise grafen for f.

DELPRØVE 2

Opgave 5 En funktion f har forskriften

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 10x - 3.$$

a) Bestem $f'(x)$, og løs ligningen $f'(x) = 0$.

I det følgende tre opgaver vil jeg finde differentialkvotienten ved hjælp af f'-knappen i Geogebras CAS-vindue. Ligningerne vil blive løst med $x \approx$-knappen. Først de afledte funktion:

$$f'(x) = x^2 - 7x + 10$$

Så til ligningen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^2 - 7x + 10 &= 0 \\ x &= \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases} \end{aligned}$$

b) Bestem monotoniforholdene for f.

Funktionen har altså vendetangenter i $x = 2$ og $x = 5$. Hældningen rundt om disse punkter findes først:

$$f'(1) = 4, \quad f'(3) = -2, \quad f'(6) = 4$$

Herudfra ved vi så at funktionen er voksende i intervallene $[-\infty; 2]$ og $[5; \infty]$, og aftagende i $[2; 5]$.

Opgave 6 Der er givet funktionen

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 1}.$$

a) Bestem $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{-2x(x^3 - 2x^2) + (3x^2 - 4x)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

b) Løs ligningen $f'(x) = 0$, og bestem monotoniforholdene for f.

$$f'(x) = 0$$

$$x = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Funktionen har altså vendetangenter i $x = 0$ og $x = 1$. Hældningen rundt om disse punkter findes først:

$$f'(-1) = 2, \quad f'(0.5) = -0.76, \quad f'(2) = \frac{4}{5}$$

Herudfra ved vi så at funktionen er voksende i intervallene $[-\infty; 0]$ og $[1; \infty]$, og aftagende i $[0; 1]$.

Opgave 7 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 500}{360}.$$

a) Bestem $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2$$

b) Gør ved hjælp af $f'(x)$ rede for, at f er aftagende i intervallet fra $x = 1$ til $x = 2$.

Vi finder først funktionens vendepunkter:

$$f'(x) = 0$$
$$x = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

Funktionen vender altså i $x = 1$ og i $x = 2$, og er altså enten voksende eller aftagende her imellem. Udregner vi hældningen et tilfældigt sted i intervallet:

$$f'(1.5) = -0.09,$$

kan vi se at funktionen rigtig nok er aftagende i intervallet.