Frederiksberg VUC STX

Mat C-B

Differentialregning

Øvelse 1 Bestem de følgende funktionsværdier:

a) $f(x) = 2x + 3, \quad f(4)$

b) $g(x) = -x + 7, \quad g(2)$

c) $h(x) = x^2 - 3x + 2, \quad h(1)$

d) $p(x) = 3x^2 + 2x - 5, \quad p(-1)$

e) $q(x) = (x - 2)(x + 3), \quad q(2)$

f) $r(x) = \sqrt{x^2 + 7}, \quad r(11)$

g) $s(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5}, \quad s(3)$

h) $t(x) = e^{0.5x} - x^2, \quad t(4.2)$

i) $u(x) = \ln(x^2 + 1), \quad u(7)$

j) $v(x) = x^2 + \sqrt{2x + 5}, \quad v(12)$

Øvelse 2 Bestem den afledte funktion $f'(x)$ for hver af de følgende funktioner:

a) $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 7x - 4$

b) $f(x) = -x^6 + 4x^4 - 2x^2 + 9$

c) $f(x) = 5x^7 - 8x^3 + 6$

d) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$

e) $f(x) = -2x^9 + 6x^3 - 7$

f) $f(x) = \sqrt{x} + 3x^2$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 4x^3$

h) $f(x) = e^x + 2x^2$

i) $f(x) = \ln(x) + x^3$

j) $f(x) = x^5 - \dfrac{7}{x} + \sqrt{x}$

Øvelse 3 Løs følgende ligninger.

a) $2x + 5 = 11$

b) $3x - 7 = 2x + 1$

c) $x^2 - 5x + 6 = 0$

d) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

e) $(x - 2)(x + 3) = 0$

f) $x^3 - 2x^2 + x - 5 = 0$

g) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

h) $e^x = 3x$

i) $\ln(x) + x^2 = 4$

j) $\sqrt{x+2} = x - 1$

Øvelse 4 Bestem følgende ved hjælp af differentialregning:

a) Funktionen f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 4x + 7.$$

Bestem tangenthældningen i $x = 2$.

b) Funktionen g er givet ved

$$g(x) = 3x^2 + 2x - 1.$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for g i punktet $(1, g(1))$.

c) Funktionen h er givet ved

$$h(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x.$$

Bestem monotoniforholdene for h.

d) Funktionen p er givet ved

$$p(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Bestem tangenthældningen i $x = 4$.

e) Funktionen q er givet ved

$$q(x) = 6x^8 - x^4 - x^3 + 5.$$

Undersøg, om q har vendetangent i $x = 0$, og afgør om punktet er et ekstremum.

Øvelse 5 Husk følgende begreber

Tangenthældning Hældningen på den rette linje, der rører grafen i ét punkt. Fortæller hvor stejl grafen er netop dér.

Differentialkvotient Den grænseværdi, der definerer den præcise hældning af tangenten i et punkt. Svarer til øjeblikkelig ændringshastighed.

Afledt funktion $f'(x)$ En funktion, der giver tangenthældningen i hvert punkt på grafen for f.

Monotoniforhold Angiver hvor en funktion er voksende, aftagende eller konstant. Afgøres af fortegnet på $f'(x)$.

Ekstremum (maksimum/minimum) Punkter hvor funktionen skifter fra at være voksende til aftagende (maksimum) eller omvendt (minimum). Finder man ofte ved at løse $f'(x) = 0$.

Stationært punkt Et punkt på grafen, hvor den afledte funktion er nul, dvs. steder med vandret vendetangent (inklusiv ekstrema).

Tangentligning En ligning for en tangent i punktet $(x_0, f(x_0))$.

Differentiabel funktion En funktion, der kan differentieres (dvs. har en veldefineret tangent) i det pågældende punkt eller interval.

Kontinuitet Et krav om, at grafen kan tegnes uden "hop" – ofte en forudsætning for differentiabilitet.

Regneregler for differentiation

- Sum- og differensregel: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- Konstantgangeregel: $(k \cdot f)' = k \cdot f'$

Standardafledninger

- $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

Tretrinsreglen Metode til at finde differentialkvotienten uden formel:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$