Aflevering 4

Besvarelse

DELPRØVE 1

Opgave 1 En cirkel har ligningen

$$(x-1)^2+(y-4)^2=9.$$

a) Bestem centrum og radius for cirklen.

Den generelle cirklens ligning for en cirkel med centrum $C(a,b)$ og radius r er givet ved:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Derfor centrum i denne cirkel $C(1,4)$ og radius $r=\sqrt{9}=3$.

b) Undersøg, om punktet $P(5,6)$ ligger på cirklen.

Vi indsætter $P(5,6)$ i cirklens ligning:

$$(5-1)^2+(6-4)^2=4^2+2^2=16+4=20.$$

Da $20\neq 9$, ligger $P(5,6)$ ikke på cirklen.

Opgave 2 Der er givet to punkter $A(1,4)$ og $B(9,10)$.

a) Bestem afstanden $|AB|$ mellem de to punkter.

Afstandsformlen mellem to punkter er:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Her:

$$|AB|=\sqrt{(9-1)^2+(10-4)^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10.$$

Altså er afstanden $|AB|=10$.

Opgave 3 En cirkel har centrum i punktet $C(5,-3)$ og har radius $r=4$.

a) Bestem en ligning for cirklen.

Den generelle form er:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Her $a=5,\ b=-3,\ r=4$, altså

$$(x-5)^2+(y+3)^2=16.$$

DELPRØVE 2

Opgave 4 En cirkel er givet ved ligningen

$$(x-5)^2+(y+1)^2=13.$$

a) Bestem en ligning for tangenten t_1 til cirklen i punktet $P(2,1)$.

Centrum er $C(5,-1)$ og $P(2,1)$ ligger på cirklen: $(2-5)^2+(1+1)^2=9+4=13$. Hældningen på radius $\overline{CP}$ er

$$a_{CP}=\frac{1-(-1)}{2-5}=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}.$$

Tangenten er vinkelret på radius, så

$$a_{t_1}=-\frac{1}{a_{CP}}=\frac{3}{2}.$$

Gennem $P(2,1)$ fås b-værdien:

$$b=y_1-a\cdot x_1=1-\frac{3}{2}\cdot 2=-2$$

Altså $t_1:\ y=\frac{3}{2}x-2$.

Cirklen har en anden tangent t_2, der er parallel med t_1.

b) Bestem en ligning for tangenten t_2.

Parallel med t_1 betyder samme hældning $a=\frac{3}{2}$, så vi søger en linje

$$y=\frac{3}{2}x+c,$$

der er tangent til cirklen. Afstanden fra centrum $C(5,-1)$ til linjen skal være cirklens radius $r=\sqrt{13}$. Brug formlen for afstand til $y=ax+b$:

$$d=\frac{|ax_1+b-y_1|}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Her fås

$$\frac{\left|\frac{3}{2}\cdot 5+c-(-1)\right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+1}}=\sqrt{13}.$$

Løser man denne ligning i Geogebra får man desværre kun den ene løsning, nemlig vores b-værdi fra før:

$$1 \quad \frac{\left|\frac{3}{2}\cdot 5+x+1\right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+1}}=\sqrt{13}$$

NSolve: $\{x=-2\}$

Man kan dog tvinge den anden løsning frem ved at gøre tælleren til minus:

$$1 \quad \frac{-\left(\frac{3}{2}\cdot 5+x-(-1)\right)}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+1}}=\sqrt{13}$$

NSolve: $\{x=-15\}$

Eller løse opgaven grafisk i geogebra. Hældningen er derfor $c=-15$. Ligningen for den paralelle tangent er derfor:

$$t_2:\ y=\frac{3}{2}x-15.$$

Opgave 5 En linje l er givet ved ligningen

$$y=2x+3.$$

Desuden er der givet punktet $P(4,1)$.

a) Benyt en formel til at bestemme afstanden fra punktet P til linjen l.

Brug afstanden til $y=ax+b$:

$$d=\frac{|ax_1+b-y_1|}{\sqrt{a^2+1}},\quad a=2,\ b=3,\ (x_1,y_1)=(4,1).$$

$$d=\frac{|2\cdot 4+3-1|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}\approx 4{,}47.$$

En cirkel har centrum i P og har radius 5.

b) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem cirklen og linjen l.

Cirklen har ligningen $(x-4)^2+(y-1)^2=25$ og linjen $y=2x+3$. Indsæt y i cirklen:

$$(x-4)^2+(2x+3-1)^2=25\ \Rightarrow\ (x-4)^2+(2x+2)^2=25.$$

$$x^2-8x+16+4x^2+8x+4=25\ \Rightarrow\ 5x^2+20=25\ \Rightarrow\ x^2=1.$$

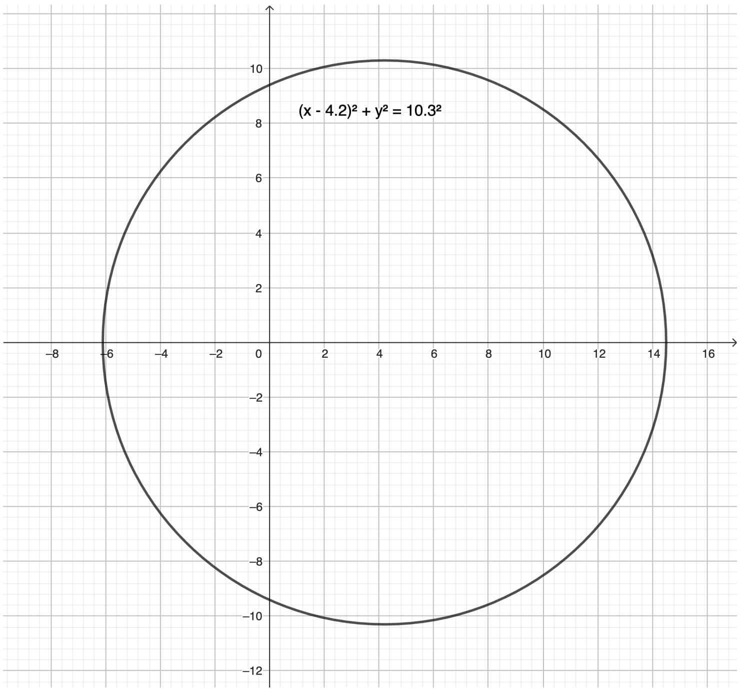
Altså $x=\pm 1$, og dermed $y=2x+3$ giver punkterne

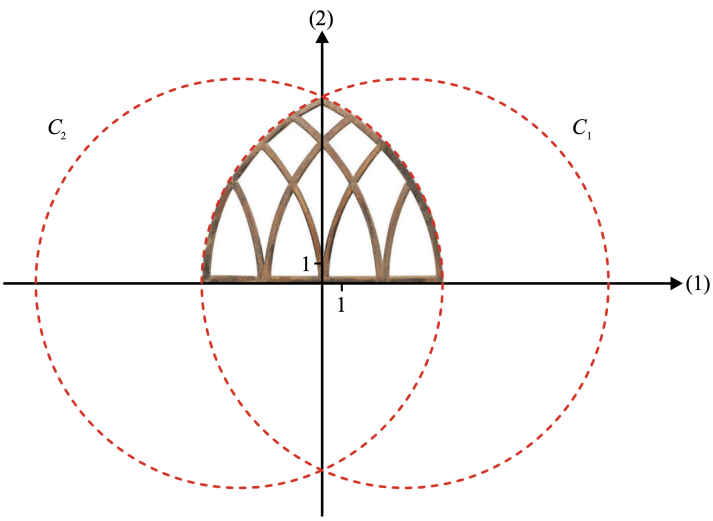
$$(-1,1)\quad \text{og}\quad (1,5).$$

Opgave 6 En cirkel C_1 har centrum i punktet $(4{,}2\ ,0)$ og har radius $10{,}3$.

a) Tegn cirklen C_1 i et koordinatsystem.

Vi indtaster cirklens liging i et algebra-vindue i geogebra og får:





Billedkilde: 1stdibs.com

På figuren ses en vinduesramme, der er lagt ind i et koordinatsystem. Enheden i koordinatsystemet er decimeter.

I en model afgrænses vinduesrammen af førsteaksen samt cirklen C_1 og cirklen C_2.

Det oplyses, at cirklen C_2 har ligningen

$$(x + 4{,}2)^2 + y^2 = 10{,}3^2.$$

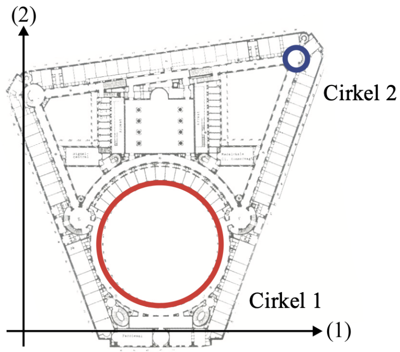
b) Bestem vinduesrammens bredde og højde.

Vi kan få cirklernes skæring med x-aksen med Geogebras skæringsværktøj:

Denne skæring sker i $x = 6.1$, Bredden må derfor $6.1 \cdot 2 = 12.2$ decimeter. Samme skæringsværktøj kan jeg også bruge til at finde cirklernes skæring med hinanden (eller y-aksen). Gør man det får man $y = 9.4$. Højden må derfor være 9.4 decimeter.

Opgave 7

Figur 1



Figur 2

Figur 1 viser Københavns Politigård.

På figur 2 er politigårdens grundplan lagt ind i et koordinatsystem, hvor enheden på begge akser er meter. To af de runde bygningsdele er markeret på figuren.

Den store runde gård kan beskrives med cirkel 1, der har ligningen

$$(x - 54)^2 + (y - 34)^2 = 515{,}29.$$

a) Bestem centrum C_1 og radius r_1 for cirkel 1.

Centrum er $C_1(54, 34)$ og radius $r_1 = \sqrt{515.29} = 22, 7$.

Et rundt trappetårn kan beskrives med cirkel 2, der har centrum $C_2(109, 106)$ og radius $r_2 = 5$.

b) Bestem den mindste distance mellem de to cirkler.

Den mindste distance må kunne fås ved at finde afstanden mellem de centrummer C_1 og C_2 og trække deres radier fra denne afstand.

Afstand mellem to punkter:

$$|C_1C_2| = \sqrt{(109-54)^2+(106-34)^2} \approx 90,6$$

Den mindste afstand:

$$|C_1C_2| - (r_1+r_2) = 90,6-(22,7+5) = 62,9$$