Vækst

1. Gør, for en lineær funktion $f(x) = ax + b$, rede for formlerne til beregning af a og b, når grafen går gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2):

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$b = y_1 - a \cdot x_1$$

   Giv eksempler på lineære funktioner og forklar hvad a og b betyder i de konkrete eksempler.

2. Gør, for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$, rede for formlerne til beregning af a og b når grafen går gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2):

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$
$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

   Giv eksempler på eksponentielle funktioner og forklar hvad a og b betyder i de konkrete eksempler.

3. Gør, for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$, rede for formlen til beregning af fordoblingskonstanten:

$$T_2 = \frac{\log 2}{\log a}$$

   Giv eksempler på eksponentielle funktioner og forklar hvad fordoblings- og halveringskonstanten betyder i de konkrete eksempler.

4. Gør, for en potens funktion $f(x) = b \cdot x^a$, rede for formlerne til beregning af a og b når grafen går gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2):

$$a = \frac{\log \frac{y_2}{y_1}}{\log \frac{x_2}{x_1}}$$
$$b = \frac{y_1}{x_1^a}$$

   Giv eksempler på potenssammenhænge fra videnskaben.

5. Definer lineær vækst, eksponentiel vækst og potensvækst. Bevis for hver af de tre væksttyper hvad der sker med y-værdien når:

   Lineær vækst: x-værdien øges med 1 (Udregn $f(x+1)$)

   Eksponentiel vækst: x-værdien øges med 1 (Udregn $f(x+1)$)

   Potensvækst: x-værdien ganges med k (Udregn $f(x \cdot k)$)

Polynomier

6. Gør, for et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$, rede for formlerne til udregning af polynomiets rødder:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$
og forklar hvordan grafen for andengradspolynomiet afhænger af a og diskriminanten d.

7. Gør, for et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$, rede for formlerne til udregning af polynomiets toppunkt:
$$T = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right),$$
og forklar, hvordan grafen for andengradspolynomiet afhænger af a, b og c.

Geometri

8. Gør, for en ret linje i et koordinatsystem der går gennem punktet (x_0, y_0) og har $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ som normalvektor, rede for ligningen:
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$
og forklar, med et eksempel, sammenhængen mellem denne og forskriften for en lineær funktion.

9. Gør, for en ret linje i et koordinatsystem der går gennem punktet (x_0, y_0) og har $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ som retningsvektor, rede for denne linjes parameterfremstilling:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$
og forklar, med et eksempel, hvordan man kan finde et skæringspunkt mellem to linjer.

10. Gør, for en cirkel i et koordinatsystem med centrum i (x_0, y_0) og radius r, rede for cirklens ligning
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$
og forklar, med et eksempel, hvordan man kan afgøre om en linje er tangent til en cirkel.

11. Gør rede for definitionen af cosinus og sinus, og udled formlerne til beregning af vinkler og sider i retvinklede trekanter:
$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenuse}}$$
$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenuse}}$$

12. Gør rede for formlerne til beregning af areal i vilkårlige trekanter:

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$$
$$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A)$$
$$T = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin(B)$$

og udled på baggrund heraf sinusrelationerne:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Differentialregning

13. Gør, for funktionen $f(x) = x^2$, rede for formlen for dennes afledte i x_0:

$$f'(x_0) = 2 \cdot x_0$$

og forklar hvordan differentialregning kan bruges til at løse et geometrisk optimeringsproblem.

14. Gør, for funktionen $f(x) = g(x) + h(x)$, rede for formlen for dennes afledte i x_0:

$$f'(x_0) = g'(x_0) + h'(x_0)$$

og forklar hvordan differentialregning kan bruges til at løse et geometrisk optimeringsproblem.

Sandsynlighedsregning

15. Gør, for en binomialfordelt stokastisk variabel X, rede for formlen til udregning af sandsynligheden:

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}$$

og forklar hvordan man med en såkaldt binomialtest kan afprøve en statistisk hypotese.

16. Gør, for en binomialfordelt stokastisk variabel X, rede for formlen til udregning af sandsynligheden:

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}$$

og forklar, med et eksempel, hvordan man med et såkaldt konfidensinterval kan undersøge parametre i hele populationer ud fra stikprøver.