DELPRØVE 1

Opgave 1 Bestem skæringspunktet mellem linjerne

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Fra den anden ligning fås $y = x - 1$. Indsættes i den første:

$$2x + (x-1) = 7 \quad \Rightarrow \quad 3x - 1 = 7 \quad \Rightarrow \quad 3x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{3}.$$

$$y = x - 1 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}.$$

Skæringspunktet er altså $\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Opgave 2 I et koordinatsystem er der givet et punkt $P(4,1)$ og en linje l med ligningen

$$y = \frac{3}{4} \cdot x + 2.$$

a) Bestem afstanden fra punktet P til linjen l.

Linjen har formen $y = ax + b$ med $a = \frac{3}{4}$ og $b = 2$. Punktet er $P(4,1)$.

Formlen for afstanden er:

$$\text{dist}(P,l) = \frac{|a \cdot x_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Indsættes værdierne:

$$\text{dist}(P,l) = \frac{\left|\frac{3}{4} \cdot 4 + 2 - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}} = \frac{|3+2-1|}{\sqrt{\frac{9}{16}+1}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{4}{\frac{5}{4}} = \frac{16}{5}.$$

Afstanden er altså $\frac{16}{5} = 3{,}2$.

Opgave 3 Bestem skæringspunktet mellem linjen og parablen

$$y = 2x + 3 \qquad \text{og} \qquad y = x^2 + x + 1.$$

Vi sætter højresiderne lig hinanden:

$$
\begin{aligned}
2x+3 &= x^2+x+1 && \Leftrightarrow \\
x^2-x-2 &= 0 && \Leftrightarrow \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

y-værdien kan vi finde ved at indsætte disse x-værdier i linjens ligning: $y = 2\cdot 2+3 = 7$ og $y = 2\cdot(-1)+3 = 1$. Skæringspunktet findes således i punkterne $(2,7)$ og $(-1,1)$.

Opgave 4 En linje l går igennem punkterne $(-4,2)$ og $(6,-3)$.

a) Bestem en ligning for linjen l.

Topunktsformlen giver os:

$$a = \frac{-3-2}{6-(-4)} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

og

$$b = 2-(-\frac{1}{2})\cdot(-4) = 0$$

I alt altså $y = -\frac{1}{2}x$

Linjen m er givet ved ligningen

$$-3x+4y+18 = 0$$

b) Bestem skæringspunktet mellem de to linjer l og m.

Indsæt y fra l i m:

$$
\begin{aligned}
-3x+4(-\frac{1}{2}x)+18 &= 0 \\
-5x+18 &= 0 \\
5x &= 18 \\
x &= \frac{18}{5}
\end{aligned}
$$

og indsæt denne x-værdi i l: $y = -\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{5} = -\frac{9}{5}$. Skæringspunktet ligger alså i $\left(\frac{18}{5}, -\frac{9}{5}\right)$.

c) Bestem den spidse vinkel mellem l og m.

Vinklen mellem de to linjer kan findes ved at kigge på de to hældninger. Den kan dog ikke findes uden hjælpemidler, beklager fejlen fra min side. Hældningen for linjen l er $a = -\frac{1}{2}$, mens hældningen for m findes ved at isolere y i m:

$$\begin{aligned} -3x + 4y + 18 &= 0 \\ 4y &= 3x - 18 \\ y &= \frac{3}{4}x - \frac{18}{4} \end{aligned}$$

Altså er hældningen for m, $c = \frac{3}{4}$. Vinklen fås så ved at isolere hældningsvinklerne i formlen:

$$\tan(v) = a$$

og trække dem fra hinanden:

$$\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 63,4349488229°$$

DELPRØVE 2

Opgave 5 En parabel har ligningen $y = 2x^2 - 20x + 51$.

a) Benyt en formel til at bestemme koordinatsættet til parablens toppunkt.

En parabels toppunkt har x- og y-koordinaterne:

$$T_x = -\frac{b}{2a} \quad \text{og} \quad T_y = \frac{-d}{4a}$$

Her er $a = 2$, $b = -20$, $c = 51$ og $d = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 51 = -8$. Derfor får vi:

$$T_x = \frac{20}{2 \cdot 2} = 5 \quad \text{og} \quad T_y \frac{-(-8)}{4 \cdot 2} = 1$$

En ret linje har ligningen $y = -0{,}4x + 4{,}6$.

b) Benyt en formel til at bestemme afstanden fra parablens toppunkt til linjen.

Afstanden mellem et punkt og en linje fås ved:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Her har vi $a = -0{,}4,\ b = 4{,}6,\ (x_1, y_1) = (5, 1)$ som vi indsætter i formlen:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|(-0{,}4) \cdot 5 + 4{,}6 - 1|}{\sqrt{(-0{,}4)^2 + 1}} = \frac{1{,}6}{\sqrt{1{,}16}} \approx 1{,}49.$$

Opgave 6 En linje l er givet ved ligningen $y = 3x + 7$.

a) Benyt en formel til at bestemme afstanden fra punktet $P(2, 4)$ til linjen l.

Afstandsformlen for $y = ax + b$:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

med $a = 3,\ b = 7,\ (x_1, y_1) = (2, 4)$:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|3 \cdot 2 + 7 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \frac{9}{\sqrt{10}} \approx 2{,}85.$$