7장 부록

보충 설명: 7.3절 조르단 표준형 (The Jordan Canonical Form)

복소수 고유치를 갖는 선형 시스템

보조정리 7A.1. 복소수 고유치의 경우

실수 정방행렬 $A \in \mathbb{R}^{2r\times 2r}$가 서로 켤레 복소수 관계를 이루는 r쌍의 고유치를 가질 때, 즉 고유치가

$$\lambda_j = a_j + ib_j, \quad \bar{\lambda}_j = a_j - ib_j \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{1}$$

로 주어지면, 각각에 대응하는 복소수 고유벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{u}_j + i\boldsymbol{v}_j, \quad \bar{\boldsymbol{w}}_j = \boldsymbol{u}_j - i\boldsymbol{v}_j \tag{2}$$

이때 다음과 같은 실수 행렬 P를 구성할 수 있다.

$$P = [\boldsymbol{v}_1 \mid \boldsymbol{u}_1 \mid \cdots \mid \boldsymbol{v}_r \mid \boldsymbol{u}_r] \tag{3}$$

이 행렬 P는 가역이며, $P^{-1}AP$는 다음과 같은 2×2 블록 대각 행렬이 된다.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_r \end{bmatrix}, \quad D_j = \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \tag{4}$$

즉, 복소 고유치를 가지는 선형 시스템은 이와 같이 실수 행렬 D_j로 구성된 블록 대각 형태로 대각화된다.

이때, 다음의 선형 미분방정식 시스템

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{5}$$

의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{x}(t) = P \cdot \begin{bmatrix} e^{D_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{D_r t} \end{bmatrix} P^{-1}\boldsymbol{x}_0 \tag{6}$$

여기서 각각의 $e^{D_j t}$는

$$e^{D_j t} = e^{a_j t}\begin{bmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{bmatrix} \tag{7}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이는 실수 계수 선형 시스템에서 복소 고유치가 나타날 때 해의 성분이 감쇠 또는 발산하는 진동 형태임을 보여준다.

> **예제 7A.1. 예제 7-1.3의 복소수 표현**

다음 선형 시스템을 다시 살펴보자.

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{8}$$

행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$의 고유치는 $\lambda = i, -i$이며, 이에 대응하는 복소 고유벡터는

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \tag{9}$$

이다.

이 두 벡터의 실수 성분을 이용하여 보조정리에서 정의한 가역 행렬 P는

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

가 되고, 이 때 시스템의 해는 다음과 같이 계산된다.

$$\boldsymbol{u}(t) = P \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{11}$$

이 연산을 직접 수행하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\boldsymbol{u}(t) = \cos t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \sin t \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} \tag{12}$$

이는 $\boldsymbol{u}(t)$가 단위원을 따라 시계방향으로 회전하는 원운동임을 의미한다. 초기값 (a, b)를 기준으로 $\pi/2$ 라디안씩 회전하는 구조가 시스템의 해에 내재되어 있으며, 이러한 회전 운동은 고유값이 순수 허수 ($\pm i$)일 때 나타나는 전형적인 위상궤적(Phase Portrait)이다.

일반화된 고유벡터 (Generalized Eigenvectors)

정방행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$의 고유치 λ에 대한 중복도(multiplicity)가 $m \leq n$일 때, 다음 조건을 만족하는 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$를 **일반화된 고유벡터(generalized eigenvector)**라 한다:

$$(A - \lambda I)^k \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \quad \text{for some } 1 \leq k \leq m \tag{13}$$

이 경우, $N := A - \lambda I$는 차수 m의 **멱영원(nilpotent matrix)**이 된다. 즉,

$$N^{m-1} \neq 0, \quad \text{but} \quad N^m = 0 \tag{14}$$

이러한 일반화된 고유벡터를 통해 조르단 표준형(Jordan Canonical Form)을 도출할 수 있으며, 이를 통해 해석적으로 어려운 고유치 중복 또는 결합성 부족 문제를 극복할 수 있다.

> **정리 7A.2. 조르단 표준형 (Jordan Canonical Form)**

행렬 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$가 다음과 같은 고유치를 가질 경우:

- 실수 고유치 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 및 이에 대응하는 일반화된 고유벡터 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$
- 켤레 복소수 고유치 $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + ib_{k+1}, \ldots, \lambda_r = a_r + ib_r$ 및 대응 일반화된 고유벡터

$$\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{u}_j + i\boldsymbol{v}_j, \quad \bar{\boldsymbol{w}}_j = \boldsymbol{u}_j - i\boldsymbol{v}_j, \quad j = k+1, \ldots, r \tag{15}$$

이 때 다음과 같이 실수 가역 행렬 P를 구성할 수 있다:

$$P = [\boldsymbol{v}_1 \mid \cdots \mid \boldsymbol{v}_k \mid \boldsymbol{v}_{k+1} \mid \boldsymbol{u}_{k+1} \mid \cdots \mid \boldsymbol{v}_r \mid \boldsymbol{u}_r] \tag{16}$$

이로부터 A는 조르단 표준형 J으로 대각화되며 다음을 만족한다:

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{bmatrix} \tag{17}$$

여기서 각 B_j는 기본 조르단 블록(elementary Jordan block)으로, 실수 또는 복소수 고유치에 따라 다음과 같이 나뉜다.

(i) 실수 고유치 λ에 대한 조르단 블록

실수 고유치 λ의 조르단 블록은 다음과 같은 상삼각 Toeplitz 행렬이다:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m} \tag{18}$$

이 블록에 대한 지수 행렬 e^{Bt}는 다음과 같다:

$$e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

(ii) 복소 고유치 $\lambda = a + ib$에 대한 조르단 블록

이 경우는 $2m \times 2m$ 블록 행렬로 구성되며, 실수 표현을 위해 다음 정의를 사용한다:

$$D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

이때 조르단 블록 $B \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$는 다음과 같다:

$$B = \begin{bmatrix} D & I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & I_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D & I_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & D \end{bmatrix} \tag{21}$$

이때 e^{Bt}는 다음과 같은 형태로 주어진다:

$$e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} R & Rt & \frac{Rt^2}{2!} & \cdots & \frac{Rt^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & R & Rt & \cdots & \frac{Rt^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R & Rt \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & R \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix} \tag{22}$$

조르단 표준형을 활용한 시스템 해법

조르단 표준형을 활용하면 다음 선형 미분 방정식

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{23}$$

에 대해 다음과 같은 해를 얻는다:

$$\boldsymbol{x}(t) = P \begin{bmatrix} e^{B_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{B_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{B_s t} \end{bmatrix} P^{-1} \boldsymbol{x}_0 \tag{24}$$

따름정리 7A.3: 선형 시스템 해의 일반적인 형식

다음 선형 미분 방정식을 고려하자:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{25}$$

이 시스템의 해 $\boldsymbol{x}(t)$의 각 성분 $x_j(t)$은 다음 형식의 함수들의 선형 결합으로 표현된다:

$$t^k e^{\lambda t}, \quad t^l e^{at} \cos(bt), \quad t^l e^{at} \sin(bt), \qquad 0 \le k \le m-1, \;\; 0 \le l \le d-1 \tag{26}$$

여기서

- λ는 행렬 A의 **중복도** m를 가진 실수 고유치,
- $\lambda = a + ib$는 중복도 d를 가진 **복소 고유치**이다.

이 정리는 고유치가 중복되거나 복소수일 때, 해가 단순한 지수함수만이 아니라 시간의 거듭제곱이 곱해진 지수함수 및 삼각함수 형태를 포함하게 됨을 의미한다.

> **예제 7A.2**: 조르단 형식(Jordan Form)과 지수 행렬의 예

(1) 2×2 행렬의 조르단 형식은 다음의 세 가지 경우로 분류된다.

- **(i) 서로 다른 실수 고유치**를 갖는 경우 (대각화 가능):

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} \tag{27}$$

- **(ii) 하나의 실수 고유치** λ를 가지며 **결합성 결핍(non-diagonalizable)**인 경우:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

- **(iii) 켤레 복소 고유치** $\lambda = a \pm ib$를 갖는 경우:

$$B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix} \tag{29}$$

(2) 3×3 행렬의 조르단 형식은 다음과 같은 네 가지 주요 구조로 나타난다.

- 서로 다른 세 고유치:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \tag{30}$$

- 이중 조르단 블록 (두 개의 일반화 고유벡터):

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \tag{31}$$

- 삼중 조르단 블록 (세 개의 일반화 고유벡터):

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \tag{32}$$

- 하나의 실수 고유치와 한 쌍의 복소 고유치:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{at}\cos(bt) & -e^{at}\sin(bt) \\ 0 & e^{at}\sin(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{bmatrix} \tag{33}$$

이러한 형식은 선형 시스템의 해를 구성할 때 어떤 종류의 함수가 등장하는지를 결정하며, 특히 조르단 블록이 클수록 시간 다항식(예: t, t^2)이 곱해진 지수함수가 나타난다.

일반적 특성 (Generic Property)

마지막으로, 실용적 관점에서 **중복 고유치를 갖는 행렬**은 수학적으로는 가능하지만 **실제로는 거의 만나기 어려운 특이한 경우**이다. 수학적으로는 다음과 같은 성질을 가진다:

- 어떤 성질 P가 모든 $n \times n$ 행렬들의 공간 $\mathcal{M}_n$ 내에서 **열려 있고(open)**, **조밀하다(dense)**면, 이 성질은 "거의 모든(almost all)" 행렬에서 성립한다고 말한다.
- 이러한 성질을 **일반적 특성(generic property)**라 부른다.

예를 들어, 행렬의 고유치가 모두 **단순(simplicity)**하고, 고유벡터가 결합 가능한(diagonalizable) 경우는 **일반적 특성**이다. 따라서 실수 문제에서 마주하는 대부분의 선형 시스템은 단순한 고유치를 가지며, 조르단 블록 없이 대각화가 가능하다. 조르단 형태를 실제로 고려하게 되는 경우는 특수한 물리계나 제어계 설계 등에서 매우 정밀한 해석이 요구될 때이다.

각주