.

.

Matematika II

Rešena 5. domača naloga za matematiko II

Napisal : Luka Orlić, 28221084
Tutor : Urša Mati Djuraki

29. september 2024

Kazalo

1 Prva naloga

1.1 Navodila

Naj bosta a ter b poljubni nenegativni realni števili in naj bosta dani matriki:

$$P_3(a,b) = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} \qquad P_5(a,b) = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

(1) Izračunaj lastne vrednosti matrike $P_5(a,b)$. Ali je ta matrika diagonalizabilna?

(2) Ali sta si matriki $P_3(1, 2)$ in $P_3(2, 1)$ podobni? Če sta si, določi obrnljivo matriko Q, za katero je $P_3(2, 1) = QP_3(1, 2)Q^{-1}$.

1.2 Reševanje naloge (1):

$P_3(a, b) \coloneqq P_3 \wedge P_5(a, b) \coloneqq P_5$

$$p_{P_3}(x) = \det(P_3 - \lambda x) = \begin{vmatrix} -x & a & 0 & 0 & 0 \\ b & -x & a & 0 & 0 \\ 0 & b & -x & a & 0 \\ 0 & 0 & b & -x & a \\ 0 & 0 & 0 & b & -x \end{vmatrix} = -x^5 + (4ab)x^3 + (-3a^2b^2)x =$$

$$= -x(ab - x^2)(3ab - x^2) = -x(\sqrt{ab} - x)(\sqrt{ab} + x)(\sqrt{3ab} - x)(\sqrt{3ab} + x) \implies$$

$$x_1 = 0 \wedge x_2 = \sqrt{3ab} \wedge x_3 = -\sqrt{3ab} \wedge x_4 = \sqrt{ab}x_5 = -\sqrt{ab} \implies$$

Ker sta a, $b > 0$ in elementa realnih števil, so vse ničle realne in ker je aritmetična kratnost vseh ničel natanko 1, mora biti geometrijska kratnost tudi 1, torej je matrika diagonalizabilna.

Posebna primera sta če je $a, b = 0$ ali $a = 0, b \in \mathbb{R}^+ \vee a \in \mathbb{R}^+, b = 0$. Če sta oba $a, b = 0$, potem je tehnično diagonalizabilna, če pa je eden neničelen, drugi pa ničelen, potem matrika ni diagonalizabilna, ker je $\text{gkr}(0) = 1 \wedge \text{akr}(0) = 5$.

1.3 Reševanje naloge (2):

$P_1 \coloneqq P_3(1, 2) \wedge P_2 \coloneqq P_3(2, 1)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \implies p_{P_1}(x) = -x^3 + 4x$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \implies p_{P_2}(x) = -x^3 + 4x$$

Ni težko opaziti, da je $(P_1)^t = P_2$, seveda to pomeni, da bi lahko rekli, da sta si ti dve matriki podobni po *O. Taussky, H. Zassenhaus: On the similarity transformation between a matrix and its transpose*, opazimo tudi, da je karakteristični polinom enak, seved pa lahko podobnost pokažemo tako, da najdemo matriko Q. To seveda ni težko z malo razmišljanja, kako matriko transponiramo z elementarnimi vrstičnimi in stolpičnimi operacijami.

Prvo hočemo zamenjati dve vrstici, kar nam levo množenje z matriko $Q = [\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_3]$, potem nam desno množenje z to isto matriko zamenja prvi in tretji stolpec, kar nam pove skripta *J. Mrčun: Matematika 2 za fizike*. Dodatno, ker smo v standardni bazi, ki je ortonirmirana, sledi $Q^{-1} = Q^t = Q$, oziroma:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} P_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$