.

.

Matematika I

Rešena domača naloga 1

Napisal : Luka Orlić, Vpis. Št.: 28221084
Tutor : Urša Mati Djuraki

18. oktober 2023

Kazalo

1 Prva naloga **2**

1.1 Navodila 2

1.2 Reševanje prve naloge 2

2 Druga naloga **5**

2.1 Navodila 5

2.2 Reševanje druge naloge 6

Z oddajo domače naloge potrjujem, da sem domačo nalogo reševal samostojno.

1 Prva naloga

Preden začnemo reševati nalogo, bomo postavili za nas uporabni definiciji razdelitve množic in ekvipolence.

Definicija 1 : Razdelitev ali particija množice A je indeksirana družina nepraznih, paroma disjunktnih množic, katerih unija tvori množico A.

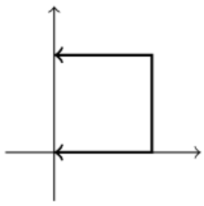
Se pravi $\bigcup_{i \in I}(A_i) = A$, za katero velja:

$$\begin{aligned} & A_i \neq \emptyset\,; \quad \forall A_i \in (A_i)_{i \in I} \\ & A_i \cap A_j = \emptyset\,; \quad i, j \in I \wedge i \neq j \\ & \bigcup_{i \in I}(A_i) = A \end{aligned} \tag{1}$$

Definicija 2 : Množica A je ekvipolentna množici B, če obstaja kakšna bijekcija iz A v B.

1.1 Navodila

(1) Dana je podmnožica $K = \big((0,1) \times \{0,1\}\big) \cup \big(\{1\} \times [0,1]\big)$ ravnine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (glej skico).



Pokaži, da je množica K ekvipolentna intervalu $[0,1)$. (Pri dokazu lahko uporabiš rezultat iz vaj, da sta si intervala $(0,1)$ in $[0,1)$ ekvipolentna - tega torej ni potrebno ponovno dokazovati.)

1.2 Reševanje prve naloge

Imamo torej množico K, za katero velja:

$K = ((0,1) \times \{0,1\}) \cup (\{1\} \times [1,0])$

in moramo pokazati ekvipotenčnost z intervalom $(0,1)$.

Spomnimo se poljubne funkcije $f\colon K \to$ *(0,1)*, s predpisom:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & ; y = 0 \land x \neq 1 \\ \frac{-x+1}{3} & ; y = 1 \land x \neq 1 \\ \frac{y+1}{3} & ; x = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Če lahko dokažemo, da je funkcija f bijekcija, potem smo dokazali ekvipolentnost teh dveh množic. Pred tem, pa naredimo še en splošni dokaz.

Trditev 1 : Naj je $(A_i)_{i\in I}$ particija množice A in naj je $f\colon A \to B$ preslikava za katero velja:

1. $f|A_i$ injekcija za $\forall i \in I$,
2. $(Im(f|A_i))_{i\in I}$ je particija množice B,

potem je $f\colon A \to B$ bijekcija.

Dokaz. Prvo pokažemo, da je *surjekcija*, ker:

$$b \in B = \bigcup_{i\in I}(Im(f|A_i)) \implies \exists i \in I; b \in Im(f|A_i) \implies \exists x \in A_i \subset A; f(x) = b \tag{3}$$

potem pokažemo, da je **injekcija**:

$$f(x) = f(y) \tag{4}$$

1. Prvi primer: $x, y \in A_i \in (A_i)_{i\in I}$

$$f|A_i \text{ je injekcija} \implies \text{če} x = y \implies \text{je injekcija} \tag{5}$$

2. Drugi primer: $x \in A_i \land y \in A_j\,;\; A_i\,,\, A_j \in (A_i)_{i\in I} \land i \neq j$

$$\begin{aligned} f(x) &\neq f(y)\,;\ \text{ker je:} \\ f(x) &\in Im(f|K_i) \\ f(y) &\in Im(f|K_j) \\ Im(f|K_i) \cap Im(f|K_j) \\ &\Rightarrow\!\!\Leftarrow \end{aligned} \tag{6}$$

ker pa je f hkrati injekcija in surjekcija, je potem tudi bijektivna. $\square$

Torej da bi dokazali, da je naša funkcija *f*, bijekcija, je zadosti preveriti, da so zožiteve, skladne s svojimi pogoji od predpisov, funkcije f injekcija, ter da je unija slik zožitev particija kodomene.

Trditev 2 : Funkcija $\mathbf{f} : K \to (0,1)$, kjer je predpis $\mathbf{f}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & ; y = 0 \wedge x \neq 1 \\ \frac{-x+1}{3} & ; y = 1 \wedge x \neq 1 \\ \frac{y+1}{3} & ; x = 1 \end{cases} \tag{7}$$

je bijekcija.

Dokaz. Na domeni funkcije f naredimo particijo na tri množice, zraven so tudi dopisane njihove zožitve:

1. $K_1 = ((0,1) \times \{0\})$

$$\begin{aligned} f|K_1 :&K_1 \to (0,1) \\ f(x,y) &= \frac{x+2}{3} \end{aligned} \tag{8}$$

2. $K_2 = ((0,1) \times \{1\})$

$$\begin{aligned} f|K_2 :&K_2 \to (0,1) \\ f(x,y) &= \frac{-x+1}{3} \end{aligned} \tag{9}$$

3. $K_3 = (\{1\} \times [0,1])$

$$\begin{aligned} f|K_3 :&K_3 \to (0,1) \\ f(x,y) &= \frac{y+1}{3} \end{aligned} \tag{10}$$

Dokaz, da je katera od zožitev injektivna je trivialna, pa vendar bomo to dokazali.

Vsi predpisi so oblike:

$$f(x) = \frac{1}{k} \cdot (x+c)\,;\ k,c \in \mathbb{R} \tag{11}$$

Predpostavimo, da *f(x)* ni injektivna funkcija, sledi:

$$\begin{aligned}
&\exists\, x, y \in \mathbb{R}\,;\, f(x) = f(y) \land x \neq y \\
&\frac{1}{k} \cdot (x + c) = \frac{1}{k} \cdot (y + c) \\
&x = y \\
&\Rightarrow\!\Leftarrow
\end{aligned} \tag{12}$$

torej smo s protislovjem dokazali, da funkcija take oblike bo vedno injektivna, torej so vse tri naše zožitve injektivne.

Sedaj nam še ostane preveriti, da je indeksirana družina množic slik zožitev, pravzares particija intervala $(0, 1)$.

$$\begin{aligned}
&Im(f|K_1) = (\frac{2}{3},\, 1) \\
&Im(f|K_2) = (0,\, \frac{1}{3}) \\
&Im(f|K_3) = [\frac{1}{3},\, \frac{2}{3}]
\end{aligned} \tag{13}$$

Iz tega je jasno vidno, da je res indeksirana družina množic slik zožitev particija kodomene funkcije *f*.

Po **dokazu 1**, lahko rečemo, da je funkcija f bijekcija, a ker med množico K in intervalom $(0, 1)$ obstaja bijekcija ter vemo po navodilih naloge, da sta intervala $(0, 1)$ in $[0, 1)$ ekvipotenta oziroma, da med njima obstaja bijekcija, **lahko povemo, da je množica *K* ekvipotentna intervalu** $[0, 1)$.

□

2 Druga naloga

2.1 Navodila

(2) Določi vsa kompleksna števila z, ki rešijo neenačbo

$$2|z| < |i + z|.$$

Skiciraj množico vseh kompleksnih rešitev te neenačbe.

2.2 Reševanje druge naloge

$$\begin{aligned}&2|z| < |i+z|\\&2\cdot\sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{a^2+(b+1)^2}\\&3a^2+3b^2-2b-1<0\end{aligned} \tag{14}$$

Dobili smo nekaj podobnega krivulji dugega reda, torej nekaj podobnega: $(x+p)^2+(y+q)^2=r^2$. Takšna krivulja drugega reda definira krožnico, ker pa imamo neenačbo, pa imamo pravzaprav podmnožico kroga s krožnico, namreč kroga brez krožnice. Slednja podmnžica ima obliko $(x-p)^2+(y-q)^2<r^2$. Zato probamo zapisati zgornjo neenačo, tako kot je splošna oblika kroga brez krožnice.

$$\begin{aligned}&3a^2+3b^2-2b-1<0\\&a^2+b^2-\frac{2}{3}b-\frac{1}{3}<0\\&a^2+b^2-\frac{2}{3}b+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}<0\\&\\&a^2+(b-\frac{1}{3})^2<\frac{4}{9}\end{aligned} \tag{15}$$

Sedaj je jasno razvidno, da je to krožnica s središčem v točki $C\ (0, \frac{1}{3})$ kar je simbolično $C\ (C_{Re}, C_{Im})$, ter da je radij $r=\frac{2}{3}$. Od tu lahko z lahkoto dobimo največje možne razpone a in b. Te razpone bomo označili z a_{max} in b_{max}:

$$\begin{aligned}&a_{max} \in (C_{Re}-r,\ C_{Re}+r)\\&b_{max} \in (C_{Im}-r,\ C_{Im}+r)\\&\\&a_{max} \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\\&b_{max} \in (-\frac{1}{3}, 1)\end{aligned} \tag{16}$$

Seveda pa nas zanima kako naša izbira spremenljivke a omeji spremenljivko b, in tudi obratno.

2.2.1 Kako a omeji b :

$$
\begin{aligned}
&3a^2 + 3b^2 - 2b - 1 < 0 \\
&\quad \Longrightarrow \ 3b^2 - 2b + (3a^2 - 1) < 0 \\
&\quad \Longrightarrow \ b_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12 \cdot (3a^2 - 1)}}{6} \\
&b_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16 - 36a^2}}{6} \\
&b_{1,2} = \frac{1}{3} \cdot (1 \pm \sqrt{4 - 9a^2})
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$b_1 = \frac{1}{3} \cdot (1 + \sqrt{4 - 9a^2})$$

Za nas relevantni rezultat je b_1, zato tudi ne rabimo zapisati b_2, ker $b_2 < b_1$, ter vemo, da je interval v katerem se lahko nahaja b simetričen okoli 0 in da smo s kvadriranjem korenov v 14 pridelali eno nepravo rešitev, ter da je za $a = \pm\frac{2}{3}$ pravilni rezultat da b_1 in ne b_2.

$$
\begin{aligned}
&b \in (-b_1,\, b_1) \\
&b \in (-\frac{1}{3} \cdot (1 + \sqrt{4 - 9a^2}\,)\ ,\ \frac{1}{3} \cdot (1 + \sqrt{4 - 9a^2}\,)\,;\ a \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})
\end{aligned}
\tag{18}
$$

2.2.2 Kako b omeji a :

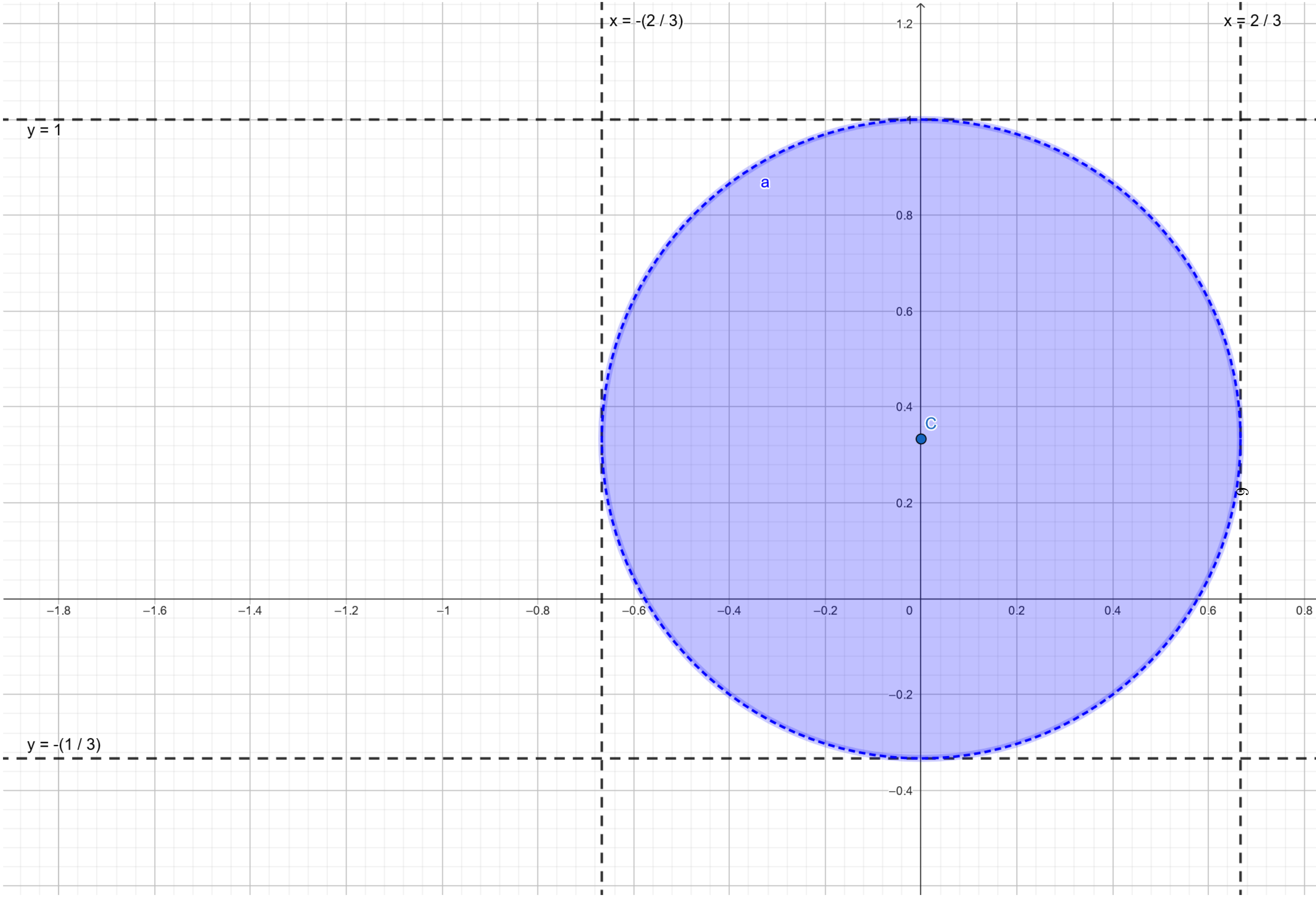
Podobno naredimo sedaj še za primer ko b omejuje a. Vemo, da je $3a^2 \in \mathbb{R}^+$ in recimo da $3b^2 - 2b - 1$ označimo z β. Potem velja:

$$\begin{aligned}
&3a^2 + \beta < 0 \\
&3a^2 < -\beta \\
&a \sqrt{\frac{-\beta}{3}} \\
&-\sqrt{\frac{-\beta}{3}} < a < \sqrt{\frac{-\beta}{3}} \qquad (19) \\
&a \in (-\sqrt{\frac{-\beta}{3}}\ ,\ \sqrt{\frac{-\beta}{3}})
\end{aligned}$$

$$a \in (-\sqrt{\frac{1+2b-3b^2}{3}}\ ,\ \sqrt{\frac{1+2b-3b^2}{3}})\ ;\ b \in (-\frac{1}{3}, 1)$$

Opisali smo obliko množice kompleksnih števil, pokazali kako a omejuje b in obratno, torej nam ostane še skica. Skico smo se odločili narediti s spletnim orodjem geogebra, dosegljiv na `https://www.geogebra.org/?lang=en`.

2.2.3 Skica


x = -(2 / 3)
x = 2 / 3
y = 1
y = -(1 / 3)
a
C
g