.

.

Matematika II

Rešena 4. domača naloga za matematiko II

Napisal : Luka Orlić, 28221084
Tutor : Urša Mati Djuraki

29. september 2024

Kazalo

1 Prva naloga

1.1 Navodila

Naj bosta $\mathcal{E} = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ in $B = [(1,1,1),(0,1,1),(1,0,1)]$ bazi prostora $\mathbb{R}^3$. Nadalje naj bo $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projekcija na ravnino z enačbo $x + y + 2z = 0$ vzdolž premice $x = y = z$ v $\mathbb{R}^3$. Izračunaj prehodni matriki $[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ in $[id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$ ter koordinatni matriki $[P]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ in $[P]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$

1.2 Reševanje naloge

$$
\begin{aligned}
[id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \\
[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = ([id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}})^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Matriko $[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ dobimo iz inverza s pomočjo, bodisi Gauss-Jordanove eliminacije matrike $[id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$ z razširitvjo identitete, bodisi Cramerjevega pravila za računanje inverz matrike.

Za poljubni vektor $v = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ izpeljimo projekcijo.

$$
T_1(0,\ 0,\ 0) \in \Sigma : x + y + 2z = 0
$$

$$
\vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in p : x = y = z
$$

Če sedaj imamo poljubno premico, ki poteka skozi točko, ki ji pridruži vektor v, če začne iz izhodišča:

$$
\vec{r} = \vec{v} + t \cdot \vec{s} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + t \\ y_0 + t \\ z_0 + t \end{bmatrix} \implies
$$

$$
\begin{aligned}
&x + y + 2z = 0 = t + x_0 + t + y_0 + 2t + 2z_0 = 0 \iff t = -\frac{1}{4}(x_0 + y_0 + 2z_0) \\
&x = t + x_0 \land y = t + y_0 \land z = t + z_0
\end{aligned}
$$

Po tem kopitu za vse bazne vektorje $\mathcal{B}$ dobimo:

$$P\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) \longmapsto \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$P\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) \longmapsto \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$P\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) \longmapsto \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}$$

Zavedati se moramo da so rezultati preslikav v bazi $\mathcal{E}$, torej lahko zapišemo naslednjo matriko:

$$[P]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & -3 & 1\\0 & 1 & -3\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$[P]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot [P]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 & -3 & 1\\0 & 1 & -3\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\-1 & 3 & -1\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$[P]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [P]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & -3 & 1\\0 & 1 & -3\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & -3 & -3\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

2 Druga naloga

2.1 Navodila

Preslikava $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je podana s predpisom: $T(X) = ZXZ + ZX$, kjer je $Z = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$. Pokaži, da je preslikava T linearna in nato poišči kakšni bazi jedra in slike preslikave T .

2.2 Reševanje naloge

Homogenost:

$T(\alpha X) = Z(\alpha X)Z + Z(\alpha X) = \alpha(ZXZ) + \alpha(ZX) = \alpha(ZXZ + ZX) = \alpha T(X)$

Aditivnost:

$T(X + Y) = Z(X + Y)Z + Z(X + Y) = (Z(X + Y))Z + ZX + ZY = (ZX + ZY)Z + ZX + ZY =$
$= ZXZ + ZX + ZYZ + ZY = T(X) + T(Y)$

Tako smo dokazali linearnost preslikave T. Vzamemo standardno bazo 2×2 matrik:

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$$

$$T(M_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(M_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = T(M_1)$$

$$T(M_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(M_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T(M_3)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Za kernel dobimo naslednji enačbi:

$$x + y = 0 \land z + w = 0 \implies \begin{bmatrix} x & -x \\ z & -z \end{bmatrix} \implies$$

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$