.

.

Matematika II

Rešena 3. domača naloga za matematiko II

Napisal : Luka Orlić, 28221084
Tutor : Urša Mati Djuraki

29. september 2024

Kazalo

1 Prva naloga

1.1 Navodila

Pokaži, da v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^4$ vektorja (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1) generirata isti podprostor kot vektorja $(2, -1, 3, 3)$, $(0, 1, -1, -1)$.

1.2 Reševanje naloge

Poimenujemo vektorje:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Očitno sta vektorja a_1 in a_2 med sabo linearno neodvisna, to bi lahko pokazali, če bi preverili rank matrike teh dveh vektorjev, isti postopek bi lahko uporabili da preverimo, da sta med sabo vektorja b_1 in b_2 linearno neodvisna.

Praktično je to vidno, ker ima eden od vektorjev vsaj eno koordinato, ki je ničelna, drugi pa ima to isto koordinato neničelno, torej že tako kažeta v različni smeri, in tvorita ravnino.

Sedaj vemo, da oba para vektorjev generirana podprostor $\mathbb{R}^2$, dokazati moramo še, da sta ti dve ravnini isti. Ena metoda, bi bila da damo vse štiri vektorje v matriko in poiščemo rank te matrike. Sicer je pa lažje razvidno, da je vsak od vektrojev b_1 in b_2 linearna kombinacija vektorjev a_1 in a_2. In namreč:

$$b_1 = (-1) \cdot a_1 + (3) \cdot a_2 \tag{6}$$

$$b_2 = (1) \cdot a_1 + (-1) \cdot a_2 \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

2 Druga naloga

2.1 Navodila

Podprostora U in V vektorskega prostora $\mathbb{R}_4[x]$ polinomov stopnje največ 4 sta dana na naslednji način:
$U = \mathrm{Span}\{x^4 + x^2 + 1, -x^4 + x^3 + x^2 - x, -x^4 + 2x^3\}$
$V = \{p \in \mathbb{R}_4[x] \;:\; \frac{dp}{dx}(1) = p(1) = 0\}$
Določi dimenziji podprostorov U in V ter poišči primer baze podprostora $U + V$.

2.2 Reševanje naloge

Prvo si poglejmo matriko vektorjev ogrodja vektorskega prostora U.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \mathrm{rank}(A) = 3 \tag{9}$$

Torej so vsi vektorji med seboj linearno neodvisni.

Poljubni polinom največ stopnje 4:

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \tag{10}$$

$$\frac{dp}{dx}(x) = p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

$$p(1) = a + b + c + d + e = 0 \tag{13}$$

$$p'(1) = 4a + 3b + 2c + d = 0 \tag{14}$$

$$d = -4a - 3b - 2c \wedge e = 3a + 2b + c \tag{15}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ -4a - 3b - 2c \\ 3a + 2b + c \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\dim(U) = 3 \tag{17}$$

$$\dim(V) = 3 \tag{18}$$

$$\text{Matrika vseh vektorjev} \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\implies \dim(U + V) = 4 \tag{21}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \right\} \tag{22}$$