.

.

Matematika I

Povzetek skripte za MAT I ustni izpit

Povzel : Luka Orlić
Originalna avtorja skripte : dr. Mrčun, Janez in dr. Kališnik, Jure

29. september 2024

Kazalo

1 Množice

1.1 Naravna števila

1.1.1 Peanovi aksiomi

(P1) 1 je naravno šteivlo

(P2) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists!\ n+1$, ki ga označimo z n^+

(P3) $\forall n, m \in \mathbb{N}\,;\ n \neq m \implies n^+ \neq m^+$

(P4) 1 ni naslednik nobenega naravnega števila

(P5) če $A \subset \mathbb{N} \wedge 1 \in A \wedge \forall n \in A\ \exists n^+ \in A \implies A = \mathbb{N}$

1.1.2 Lastnosti naravnih števil

Narvan števila so števno neskonča. Naravan števila so navzgor neomejena, navzdol so omejena z 1.

1.2 Realna števila

1.2.1 Definicija

(A1) Asociativnost seštevanja : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ velja $x + (y + z) = (x + y) + z$

(A2) Komutativnost seštevanja : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ velja $x + y = y + x$

(A3) Nevtralni element seštevanja : $\exists 0 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}$ velja $0 + x = x$

(A4) Nadsprotna vrednost seštevanja : $\forall x \in \mathbb{R} \implies \exists - x \in \mathbb{R} | x + (-x) = (-x) + x = 0$

(A5) Asociativnost množenja : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ velja $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(A6) Komutativnost množenja : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ velja $x \cdot y = y \cdot x$

(A7) Nevtralni elemnt množenja : $\exists 1 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}$ velja $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

(A8) Nadsprotna vrednost množenja : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \exists x^{-1} \in \mathbb{R} | x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$

(A9) Velja $0 \neq 1$

(A10) Distributivnost množenja : $\forall x \in \mathbb{R} | x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

(A11) Velja $0 \notin \mathbb{R}^+ \wedge \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid x \in \mathbb{R} \vee -x \in \mathbb{R}$ ampak ne oboje hkrati

(A12) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \mid x + y \in \mathbb{R}^+ \wedge x \cdot y \in \mathbb{R}^+$

(A13) Vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica realnih števil ima najmanjšo zgornjo mejo.

1.2.2 Lastnosti realnih števil

Realna števila so neomejena in neskončno neštevna, velja tudi, da predstavljajo kontinuum.

2 Zveznost

Funkcija $f : U^{odprta} \subset \mathbb{R}^n \to R \wedge a \in U$ je zvezna v točki a, če $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall v \in K(a,\, \delta) \subset U \;\Big|\; f(v) \in K(f(a),\, \epsilon)$ oziroma $\forall v \in U \;\Big|\; |v - a| < \delta \implies |f(v) - f(a)| < \epsilon$

Vektorska funkcija $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad g(g_1,\ g_2,\ g_3,\ ...,\ g_m)$ je zvezna v točki a, če je vsaka funkcija $(g_i)_{i \in [1,\, m] \bigcap \mathbb{N}}$ zvezna v točki a

Funkcija je zvezna, če je zvezna v vsaki točki definicijskega območja.

Seštevanje, odštevanje, množenje s skalarjem, množenje dveh realnih funkcija in kompozicija zveznih funkcij je zvezna.

3 Enakomerna zveznost

4 Taylorjeva formula

4.1 Linearni približek funkcije v okolici točke a

Naj bo $f : (c,\, d) \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in naj bo $a \in (c,\, d)$, takrat velja:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \tag{1}$$

4.2 Taylorjev polinom

Naj bo $n \in \mathbb{N} \bigcap 0 \wedge U^{odprta} \subset \mathbb{R} \wedge f\ : U \to \mathbb{R}$ n-krat odvedljiva funkcija in $a \in U$. Tedaj obstaja natanko en polinom stopnje največ n, za katerega je:

$$T_n f(x; a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \tag{2}$$

Temu polinomu pravimo Taylorjev polinom reda n funkcije f razvit okoli točke a ali pa tudi Taylorjev razvoj reda n funkcije f okoli točke a

4.2.1 Ostanek Taylorjevega polinoma

Ostanek taylorjevega polinoma označimo z R_n in ga znamo zapisati v dveh oblikah:

- Lagrangeva oblika

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \Theta(x - a))}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}\,;\ \Theta \in (0,\, 1) \tag{3}$$

- Chauchyjeva oblika

$$R_n(x) = \frac{(1 - \Theta)^n f^{(n+1)}(a + \Theta(x - a))}{n!}(x - a)^{n+1}\,;\ \Theta \in (0,\, 1) \tag{4}$$

4.3 Taylorjeva vrsta

Naj bo $f : U \to \mathbb{R}$ gladka funkcija, definirana na $U^{odprta} \subset \mathbb{R} \land a \in U$ za vsak $n \in \mathbb{N} \bigcup 0$, je Taylorjev polinom reda n aproskimacija funkcije f z ostankom R_n torej:

$$f(x) = T_n f(x; a) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \mid \forall x \in U \quad (5)$$

Če funkcija f ni polinom, ponavadi ostanek $R_n \neq 0$, lahko pa se zgodi, da pri dani točki $x \in U$ vrednosti $R_n(x)$ konvergirajo proti nič, ko gre n proti neskončno. Če je $\lim_{n\to\infty}(R_n(x)) = 0$ potem velja:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (6)$$

4.3.1 Pogorste Taylorjeve vrste

- Eksponentna vrtsa:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \mid \lim_{n\to\infty}(R_n) = 0 \text{ za vse } x \quad (7)$$

- Sinusna vrtsa:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \mid \lim_{n\to\infty}(R_n) = 0 \text{ za vse } x \quad (8)$$

- Eksponentna vrtsa:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \mid \lim_{n\to\infty}(R_n) = 0 \text{ za vse } x \quad (9)$$

- Logaritemska vrtsa:

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \mid \lim_{n\to\infty}(R_n) = 0 \text{ za } x \in (-1,\, 1] \quad (10)$$

- Binomska vrtsa:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \mid \lim_{n\to\infty}(R_n) = 0 \text{ za } |x| < 1 \quad (11)$$

5 Potenčna vrsta

Potenčna vrsta je poljubna vrsta oblike:

$$\sum a_n(z-a)^n = \sum(a_n(z-a)^n))_{n=0}^{\infty} = a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+...+a_n(z-a)^n+... \tag{12}$$

, kjer so a_1, a_2, a_3, ... konstante, ter je razvita v okolici točke a.

5.1 Konvergenčni radij

Če potenčna vrsta $\sum a_n z^n$ konvergira v neki točki $z_0 \in \mathbb{C}$, potem absolutno konvergira v vsaki točki $z \in \mathbb{C} \big| |z| < |z_0|$.

Konvergenčni radij potenčne vrste $\sum a_n z^n$ je tisti element $R \in [0, \infty]$, za katerega velja:

- V vsaki točki $z \in \mathbb{C}$, za katero je $|z| < R$, vrsta absolutno konvergira,
- V vsaki točki $z \in \mathbb{C}$, za katero je $|z| > R$, vrsta divergira.

5.2 Množenje dveh vrst - Cauchyjev produkt

Če sta številski vrsti $\sum(u_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\sum(v_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergentni, in če vsak ema tudi absolutno konvergira, je tudi njun produkt konvergentna številska vrsta, z radijem, ki je najmanšji od radijev originalnih številskih vrst.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u_n) \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(v_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) \tag{13}$$

5.3 Odvajanje potenčne vrste

$\sum a_n x^n$ je realna potenčna vrsta s konvergenčnim radijem R in središčem $a = 0$. Naj bo $s : (-R, R) \to \mathbb{R}$ vsota te vrste na intervalu $(-R, R)$, torej:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \bigm| \forall x \in (-R, R) \implies$$

- Potenčna vrsta $\sum(na_n x^{n-1})$ ima konvergenčni radij R
- s je odvedljiva
- $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(na_n x^{n-1}) \bigm| \forall x \in (-R, R)$

Torej lahko odvajamo potenčno vrsto.

6 Zaporedje funkcij

6.1 Konvergenca po točkah

Če za $\forall a \in A$ $\exists lim((f_n(a))_{n\in\mathbb{N}})$ rečemo, da funkcijsko zaporedje kovergira po točkah in da je $f(a)$ *limitna funkcija*:

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} [f_n(a)] \tag{14}$$