.

.

Matematika II

Rešena 6. domača naloga za matematiko II

Napisal : Luka Orlić, 28221084
Tutor : Urša Mati Djuraki

29. september 2024

Kazalo

1 Prva naloga **2**

1.1 Navodila 2

1.2 Reševanje Naloge 2

2 Druga naloga **2**

2.1 Navodila 2

2.2 Reševanje Naloge 3

1 Prva naloga

1.1 Navodila

Na prostoru $\mathbb{R}_3[t]$ imamo tak skalarni produkt, da polinomi $1,\ t-1,\ 2t^2+t,\ t^3-2$ v njem sestavljajo ortonormirano bazo. Glede na ta skalarni produkt izračunaj ortogonalno projekcijo polinoma t^3+t+1 na podprostor $\text{Span}\{t-1,\ t^3-2\}$

1.2 Reševanje Naloge

Ravnina je v prostoru definirana s pomočjo vektorjev ki so tudi vekrotji ONB. Torej enostavno razvijemo naš polinom po tej ONB in dobimo:

$$t^3+t+1 = 4B_1 + 1B_2 + 1B_4 \tag{1}$$

Opazimo, da je pravzaprav trivialna pravokotna projekcija na ravnino, kajti ravnina vsebuje B_2 in B_4, ter ima dve normali B_1 in B_3. Na srečo ima naš polinom le komponento ene normale, specifično B_1. Torej je pravokotna projekcija:

$$t^3+t-3 = B_2 + B_4 \tag{2}$$

2 Druga naloga

2.1 Navodila

Dana naj bosta linearno neodvisna vektorja $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, endomorfizem T prostora $\mathbb{R}^3$ pa naj bo dan s prepisom:

$$T\vec{x} = (\vec{a}\times\vec{x})\times\vec{b} \tag{3}$$

Naj bo T^* adjungiran endomorfizem endomorfizma T glede na standardni skalarni produkt. Izrazi vektorja $T^*\vec{x}$ in $(TT^*)\vec{x}$ z vektorji $\vec{a},\ \vec{b}$ in $\vec{x}$.

2.2 Reševanje Naloge

$$< T\vec{x}, \vec{y} >=< \vec{x}, T^*\vec{y} >$$

$$\vec{a}^{|}_1 = \vec{a} \times \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}^{|}_2 = \vec{a} \times \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}^{|}_3 = \vec{a} \times \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{*1} = \vec{a}^{|}_1 \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2b_2 + a_3b_3 \\ -a_2b_1 \\ -a_3b_1 \end{bmatrix}$$

$$T_{*2} = \vec{a}^{|}_2 \times \vec{b} = \begin{bmatrix} -a_1b_2 \\ a_1b_1 + a_3b_3 \\ -a_3b_2 \end{bmatrix}$$

$$T_{*3} = \vec{a}^{|}_3 \times \vec{b} = \begin{bmatrix} -1a_1b_3 \\ -a_2b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 \end{bmatrix} \implies$$

$$[T] = \begin{bmatrix} a_2b_2 + a_3b_3 & -a_1b_2 & -1a_1b_3 \\ -a_2b_1 & a_1b_1 + a_3b_3 & -a_2b_3 \\ -a_3b_1 & -a_3b_2 & a_1b_1 + a_2b_2 \end{bmatrix}$$

$$[T^*] = [T]^t = \begin{bmatrix} a_2b_2 + a_3b_3 & -a_2b_1 & -1a_3b_1 \\ -a_1b_2 & a_1b_1 + a_3b_3 & -a_3b_2 \\ -a_1b_3 & -a_2b_3 & a_1b_1 + a_2b_2 \end{bmatrix}$$

$$T^*\vec{x} = (\vec{b} \times \vec{x}) \times \vec{a}$$

$$TT^*\vec{x} = (\vec{a} \times [\{\vec{b} \times \vec{x}\} \times \vec{a}]) \times \vec{b}$$