.

.

Matematika I

Rešena 3. domača naloga

Napisal : Luka Orlić, Vpis. Št.: 28221084
Tutor : Urša Mati Djuraki

29. september 2024

Kazalo

Z oddajo domače naloge potrjujem, da sem domačo nalogo reševal samostojno.

1 Prva naloga

1.1 Navodila

Zaporedje (a_n) je podano z začetnim členom $a_1 = 4$ in z rekurzivnim predpisom:

$$a_{n+1} = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} \tag{1}$$

za $n \geq 1$. Pokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno in izračunaj njegovo limito.

1.2 Reševanje naloge

Želimo pokazati, da je zaporedje konvergentno. Eden od načinov, da pokažemo da je konvergentno, je če pokažemo, da je hkrati strogo monotono in omejeno.

Prvo bomo pokazali strogo monotonost. Prvo izračunamo a_2, ter dobimo, da je $a_2 < a_1$. Zato hočemo pokazati, da je zaporedje strogo padajoče.

$$\begin{aligned}
&a_n > a_{n+1}\\
&a_n > \frac{5a_n - 3}{a_n + 1}\\
&a_n^2 + a_n > 5a_n - 3\\
&a_n^2 - 4a_n + 3 > 0\\
&(a_n - 1)(a_n - 3) > 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Pokazali smo, da je za vsak $a_n > 3$ vrsta a_n padajoča. Iz tega so tudi razvidna kandadata za limito, če ta obstaja, namreč to sta 3 in 1, če to ni očitno je v dodatku pojasnjeno z enačbo (10). Sedaj hočemo pokazati omejenost. Očitno se nam ponuja, da je spodnja meja 3, zato probamo pokazati:

$$\begin{aligned}
&3 < a_n\\
&6 < 2a_n\\
&-2a_n + 6 < 0\\
&3a_n - 5a_n + 3 + 3 < 0\\
&3a_n + 3 < 5a_n - 3\\
&3(a_n + 1) < 5a_n - 3\\
&3 < \frac{5a_n - 3}{a_n + 1}\\
&3 < a_{n+1}
\end{aligned} \tag{3}$$

Torej smo pokazali, da za vsak $a_n > 3$ je tudi vsaki naslednji člen padajočega zaporedja $a_{n+1} > 3$ torej ker je $a_1 = 4 > 3$ so vsi členi padajočega zaporedja večji od 3 torej je navzdol omejeno z 3 ali morda kakšno večjo vrednostjo. Ker je pa zaporedje strogo padajoče, pa je jasno tudi navzgor omejeno z prvim členom $a_1 = 4$. Torej imamo strogo monotono omejeno zaporedje, torej je zaporedje konvergentno in obstaja limita zaporedja, a sta kandidata za limito 3 in 1, ker smo pa dokazali, da so vsi členi našega zaporedja $a_n > 3$ pomeni, da 1 ne more biti limita zaporedja, ker pa limita mora obstajati pomeni:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = 3 \tag{4}$$

2 Druga naloga

2.1 Navodila

Ugotovi, za katere $a \in (0\,,\ \pi)$ konvergira vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n!\sin(\frac{a}{1})\sin(\frac{a}{2})\sin(\frac{a}{3})\ldots\ \sin(\frac{a}{n+1})\sin(\frac{a}{n+2})\right] \tag{5}$$

2.2 Reševanje naloge

Vrsta vsebuje zaporedje:

$$a_n = n!\sin(\frac{a}{1})\sin(\frac{a}{2})\sin(\frac{a}{3})\ldots\ \sin(\frac{a}{n+1})\sin(\frac{a}{n+2}) \tag{6}$$

Sedaj nas zanima konvergentnost vrste z zaporedjem a_n. Zato ker se v zaporedju pojavi izraz $n!$, najprej pomislimo na kvocientni kriterij za konvergentnost vrste. Opazimo tudi da so vsi členi zaporedja $a_n > 0$ večji od nič, zato lahko pri kvocientnemu testu izpustimo absolutno vrednost.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_{n+1}}{a_n}\right]$$
$$L = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)!\sin(\frac{a}{1})\sin(\frac{a}{2})\sin(\frac{a}{3})\,...\,\sin(\frac{a}{n+1})\sin(\frac{a}{n+2})\sin(\frac{a}{n+3})}{n!\sin(\frac{a}{1})\sin(\frac{a}{2})\sin(\frac{a}{3})\,...\,\sin(\frac{a}{n+1})\sin(\frac{a}{n+2})}\right]$$
$$L = \lim_{n\to\infty} \left[(n+1)\sin(\frac{a}{n+3})\right]$$

$$t = \frac{a}{n+3} \implies n = \frac{a}{t} - 3$$

$$L = \lim_{t\to 0} \left[(\frac{a}{t} - 2)\sin(t)\right]$$
$$L = \lim_{t\to 0} \left[\frac{a}{t}\sin(t)\right] - \lim_{t\to 0}\left[2\sin(t)\right] \ ; \text{ Ker obstajata obe limiti!}$$
$$L = a \cdot \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}\sin(t)\right] = a$$
$$a \in (0,\,1) \implies \text{absolutno konvergira}$$
$$a \in (1,\,\pi) \implies \text{divergira} \tag{7}$$

Pozorni moramo biti, na to, kaj se zgodi v primeru $a = 1$, kajti tam nam kvocientni test ne pove ali konvergira ali divergira. Zato bomo to preverili z Raabejevim testom.

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right]\\
L &= \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{1}{(n+1)\sin(\frac{1}{n+3})}-1\right)\right]\\
L &= \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{n+3}{(n+1)\frac{\sin(\frac{1}{n+3})}{\frac{1}{n+3}}}-1\right)\right]\\
L &= \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{n+3-(n+1)}{n+1}\right)\right]\\
L &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n}{n+1}\right]\\
L &= 2\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\right]=2
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Ker je $L > 1$ po Raabejevem kriteriju vrsta absolutno konvergira. Torej vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ divergira za $a \in (1,\, \pi)$, ter **absolutno konvergira za:**

$$
a \in (0,\, 1] \tag{9}
$$

3 Dodatek

Če ni razvidno kako smo dobili kandidati za limito, je podobno kot v enačbi (2), pa vendar zapišimo izpeljavo:

$$\begin{aligned}
&a_{n+1} = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} \\
&\\
&\text{če } \exists \lim_{n\to\infty} (a_n) \implies \quad a_{n+1} = a_n = x \\
&\\
&x = \frac{5x-3}{x+1} \\
&0 = x^2 - 4x + 3 \\
&x_1 = 3 \land x_2 = 1
\end{aligned} \tag{10}$$

To je predcej podobno enačbi (2), le da smo namesto neenačbe zapisali enačbo.