.

.

Matematika I

Rešena 5. domača naloga

Napisal : Luka Orlić, Vpis. Št.: 28221084
Tutor : Urša Mati Djuraki

29. september 2024

Kazalo

Z oddajo domače naloge potrjujem, da sem domačo nalogo reševal samostojno.

1 Prva naloga

1.1 Navodila

Izračunaj nedoločeni integral:

$$\int \frac{3\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx \tag{1}$$

1.2 Reševanje naloge

$$\int \frac{3\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$$
$$\int \frac{\sin x + \cos x + 2\sin x - 2\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$$
$$\int dx + 2\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$$
$$x - 2\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x + \cos x \\ dt = \sin x - \cos x\ dx \end{array} \right| =$$
$$x - 2\int \frac{1}{t}\, (\sin x + \cos x)\, dx \implies$$
$$x - 2\int \frac{1}{t}\, dt$$
$$\underline{\underline{\int \frac{3\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = x - 2\ln|\sin x + \cos x| + C}}$$

2 Druga naloga

2.1 Navodila

Poišči odvedljivo funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katero velja $f(0) = 0$ in

$$f'(x) = \sqrt{|1 - x^2|} \tag{2}$$

za vse $x \in \mathbb{R}$.

2.2 Reševanje naloge

za $|x| \leq 1$:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \begin{vmatrix} u = \arcsin x & x = \sin u \\ \cos^2 u = 1 - x^2 & dx = \cos u\, du \end{vmatrix}$$

$$\int \cos^2(u)\, du \implies \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \implies$$

$$\int \frac{1+\cos(2u)}{2}\, du = \frac{1}{2}\int\, du + \frac{1}{2}\int \cos(2u)\, du$$

$$\frac{1}{2}\left(u + \int \cos(2u)\, du\right) = \begin{vmatrix} v = 2u \\ dv = 2du \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\left(u + \int \frac{\cos(v)}{2}\, dv\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2}\int \cos(v)\, dv\right)$$

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u) + C$$

$$\frac{1}{2}\left(\arcsin(x) + \frac{1}{2}\cdot\sin(2\arcsin(x))\right) \implies$$

$$\sin(2\arcsin x) \wedge a = \arcsin(x) \wedge x = \sin(a)$$

$$\sin(2\arcsin x) = \sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \implies \cos a = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2} \implies$$

$$f(x)|_{[-1,\,1]} = \frac{1}{2}\left(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

za $|x| > 1$:

$$\int \sqrt{x^2-1}\;dx = \left| \begin{matrix} u = \arccos(\frac{1}{x}) & x = \frac{1}{\cos(u)} \\ \tan^2 u = x^2 - 1 & dx = \frac{\tan u}{\cos u}\;du \end{matrix} \right|$$

$$\int \sqrt{\tan^2 u} \cdot \frac{\tan u}{\cos u}\;du$$

$$\int \frac{\tan^2 u}{\cos u}\;du \wedge \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u} - 1$$

$$\int \frac{\frac{1}{\cos^2 u} - 1}{\cos u}\;du$$

$$-\int \frac{\cos^2 u - 1}{\cos^3 u}\;du$$

$$-\int \frac{1}{\cos u}\;du + \int \frac{1}{\cos^3 u}\;du$$

$$\int \frac{1}{\cos u}\;du = \left| \sec(u) = \frac{1}{\cos(u)} \right|$$

$$\int \sec(u)\;du = \int \frac{\sec u(\tan u + \sec u)}{\tan u + \sec u}\;du = \int \frac{\sec u \tan u + \sec^2 u}{\tan u + \sec u} =$$

$$= \left| \begin{matrix} v = \tan u + \sec u \\ dv = \sec u \tan u + \sec^2 u\;du \end{matrix} \right|$$

$$\int \frac{1}{v}\;dv = \ln|v| + C =$$

$$= \ln(|\tan u + \sec u|) + C \implies$$

$$\int \frac{1}{\cos^3 u}\;du = \int \sec^3 u\;du$$

$$\int \sec^3 u\;du = \frac{\sec u \tan u}{2} + \frac{1}{2}\int \sec u\;du$$

$$\frac{1}{2}\left(\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln(|\tan u + \sec u|)\right) + C \implies$$

$$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln|\sqrt{x^2-1} + x|\right) + C$$

sledi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln|\sqrt{x^2-1}+x|\right) + \frac{\pi}{4} & ; \quad 1 < x < \infty \\ \frac{1}{2}\left(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\right) & ; \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln|\sqrt{x^2-1}+x|\right) - \frac{\pi}{4} & ; \quad -\infty < x < -1 \end{cases}$$

kostanto C smo za $f(x)|_{[-\infty,-1]} \wedge f(x)|_{[1,\infty]}$ določili tako, da je funkcija zvezna in namreč smo vstavili da je $C = f(\pm 1)$.

Zgornja funkcija je sestavljena iz treh predpisov, ki so za lastno zožitev zvezni, ter so zvezni v mejah zožitev, zaradi določene konstante C. Funkcija je tako zvezna. Ker pa je vsaka zvezna zožitev funkcije dobljena kot integral zvezne funkcije, je potemtakem funkcija odvideljiva v vseh točkah. Tako smo dobili funkcijo, ki je zvezna, odvedljiva in velja $f(0) = 0$. Zadnja trditev je trivijalna in se lahko pokaže, kajti: $(\arcsin(0) + 0 \cdot \sqrt{1-0^2} = 0 + 0 = 0 \implies f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$.