.

.

Matematika II

Rešena 2. domača naloga za matematiko II

Napisal : Luka Orlić, 28221084
Tutor : Urša Mati Djuraki

29. september 2024

Kazalo

1 Prva naloga

1.1 Navodila

Za poljubne konstante a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ imamo naslednji sistem linearnih enačb za neznanke x, y, z, w:

$$
\begin{aligned}
3x + by + aw &= 5 \\
5x + cy + z + 2w &= 9 \\
-x - y + z &= d
\end{aligned}
$$

Poišči vse takšne a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, da bo imel dani sistem enačb dvoparametrično družino rešitev in te rešitve zapiši.

1.2 Reševanje naloge

$$
\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & b & 0 & a & 5 \\ 5 & c & 1 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & d \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -d \\ 5 & c & 1 & 2 & 9 \\ 3 & b & 0 & a & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -d \\ 0 & c-5 & 6 & 2 & 5d+9 \\ 3 & b & 0 & a & 5 \end{array}\right]
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -d \\ 0 & c-5 & 6 & 2 & 5d+9 \\ 0 & b-3 & 3 & a & 3d+5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -d \\ 0 & 1 & \frac{6}{c-5} & \frac{2}{c-5} & \frac{5d+9}{c-5} \\ 0 & b-3 & 3 & a & 3d+5 \end{array}\right]
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -d \\ 0 & 1 & \frac{6}{c-5} & \frac{2}{c-5} & \frac{5d+9}{c-5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{b-3} & \frac{a}{b-3} & \frac{3d+5}{b-3} \end{array}\right] \sim \ldots
$$

$$
\sim \frac{1}{3} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & -\frac{ac+a-2b}{2b-c-1} & -\frac{bd-9b+5c+5}{2b-c-1} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{6(1-a)}{2b-c-1} & -\frac{3(d+1)}{2b-c-1} \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{ac-5a-2b+6}{2b-c-1} & -\frac{-5bd+3cd-9b+5c+2}{2b-c-1} \end{array}\right] \Longrightarrow
$$

Rank matrike je 3, tako tudi rank razširjene matrike. Rank matrike je neodvisen od a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Zato lahko zaključimo, da je rešitev linearnih enačb odvisna od le enega prostega parametra, ter tako sistem enačb nima rešitve z več neodvisnih parametrov. (Izrek 1.46.ii str. 25, skipta MAT2, saj je samo en (neodvisen) parameter v tem primeru ker je $n - \text{rank}(C) = n - \text{rank}(A) = 1$.)

Razen v primerih $a = 1$, $b = 3$ in $c = 5$. Te podatke dobimo tekom Gauss-Jordanove eliminacije, ker se vrednosti pojavijo v imenovalcu.

v teh primerih dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & d \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Toda tukaj je razvidno (po Izreku 1.46.i str. 25, skripta MAT2), da tak sistem nima rešitve.

Torej množica rešitev je še vedno prazna množica.

2 Druga naloga

2.1 Navodila

a vsako naravno število $n \geq 3$ naj bo A_n matrika velikosti $n \times n$, podana na naslednji način:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Reševanje naloge

$$\det(A_3) = 0$$
$$\det(A_4) = 3$$
$$\det(A_5) = 3$$
$$\det(A_6) = 0$$
$$\det(A_7) = 3$$
$$\det(A_8) = 3$$
$$\det(A_9) = 0$$
$$\implies \det(A_n) = 3\,;\;\; n \notin \text{ števil deljivih s tri}$$
$$\implies \det(A_n) = 0\,;\;\; n \in \text{ števil deljivih s tri}$$

Ta rezultat je, trivialno vendar z veliko pisanja, možno pridobiti z razvojem determinante po stolpcih oziroma vrsticah.