

UNIVERZA V LJUBLJANI

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

**Poročilo vaje**

Vaja 31 - Torzijsko nihalo

Luka Orlić

Ljubljana, 25. oktober 2022

# Kazalo

<b>Seznam uporabljenih simbolov</b>	<b>2</b>
<b>1 Teoretični uvod</b>	<b>3</b>
1.1 Lastno nihanje torzijskega nihala . . . . .	3
1.2 Vsiljeno nihanje torzijskega nihala . . . . .	3
<b>2 Naloga</b>	<b>5</b>
<b>3 Potrebščine</b>	<b>5</b>
<b>4 Skica</b>	<b>5</b>
<b>5 Meritve</b>	<b>6</b>
5.1 Metodologija . . . . .	7
<b>6 Obdelava meritev</b>	<b>8</b>
6.1 Lastna dušena frekvenca brez dodatnega dušila . . . . .	8
6.2 Lastna dušena frekvenca z dodatnim dušilom . . . . .	8
6.3 Koeficient dušena brez dodatnega dušila . . . . .	8
6.4 Koeficient dušena z dodatnim dušilom . . . . .	8
6.5 Lastna frekvenca nihala brez dodatnega dušila . . . . .	9
6.6 Lastna frekvenca nihala z dodatnim dušilom . . . . .	9
6.7 Resonančna krivulja . . . . .	9
6.8 Graf faznega zamika $\delta(\omega/\omega_0)$ . . . . .	11
6.9 Povprečna sprejeta moč - $\frac{\bar{P}}{M_0 B_0 \omega_0}(\omega/\omega_0)$ . . . . .	13
<b>7 Analiza rezultatov</b>	<b>16</b>

## Seznam uporabljenih simbolov

Oznaka	Pomen
$A_i$	Amplituda lastnega nihaja z indeksom nihaja, enota: <i>deg</i>
$B_i$	Amplituda vsiljenega nihaja z indeksom nihaja, enota: <i>deg</i>
$f$	Frekvenca nihanja, enota: Hz
$\Phi$	Odmik od ravnovesne lege, enota: <i>deg</i>
$D$	koeficient vzmeti, enota:
$J$	Vztrajnostni moment nihala, enota: $kg * m^2$
$\delta$	fazni premik, enota: rad
$n$	število nihajev meritve; enota: brez enote
$\omega$	kotna hitrost; enota: $s^{-1}$

# 1 Teoretični uvod

## 1.1 Lastno nihanje torzijskega nihala

Nihanje je periodično gibanje okoli stabilne ravnovesne lege. nedušeno nihanje opišemo z enačbo:

$$\Phi = A \sin(\omega_0 t); \omega_0 = \sqrt{D/J} \quad (1)$$

V resnici ne obstaja nedušeno nihanje, saj se zaradi različnih uporov energija nihala manjša, to dušeno nihanje opišemo z enačbo:

$$\Phi = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_d t); \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (2)$$

iz tega sledi:

$$A_n = A_0 e^{-\frac{2\pi\beta n}{\omega_d}} \quad (3)$$

z logaritmi dobimo:

$$\beta = \frac{\omega_d}{2\pi n} \ln \frac{A_0}{A_n} \quad (4)$$

## 1.2 Vsiljeno nihanje torzijskega nihala

Pri lastnem nihanju torzijskega nihala, po začetnim sunkom navora, frekvenco določajo lastnosti nihala  $(J, D, \beta)$ , amplituda pa je odvisna od začetnega nihanja. Na nihalo pa lahko deluje tudi sinusno nihajoč zunanji izvor navora, za katerega velja:

$$M = M_0 * \sin(\omega t) \quad (5)$$

, se kmalu ustali s frekvenco tega navora, sicer ne v isti fazi. Takrat pravimo, da nihalo vsiljeno niha, kar opišemo z izrazom:

$$\Phi = B \sin(\omega t - \delta) \quad (6)$$

Amplituda  $B$  je odvisna od amplitude  $M_0$  navora  $M$ , razen tega pa od krožne frekvence  $\beta$  in od lastnosti nihala. Za torzijsko nihalo z vsiljenim nihanjem velja tudi:

$$B = \frac{B_0}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2]^2 + a^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \quad (7)$$

$$B_0 = \frac{M_0}{D} \quad (8)$$

$$a = \frac{2\beta}{\omega_0} \quad (9)$$

$$\tan(\delta) = \frac{a(\frac{\omega}{\omega_0})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (10)$$

Amplituda  $B$  je konstanta, ker dovajana moč  $P$ , s povprečno vrednostjo

$$\overline{P} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\phi = \frac{1}{2} \omega M_0 B \sin(\delta) \quad (11)$$

ravno pokriva energijske izgube nihala. Če spreminjamo frekvenco zunanje navora  $M$ , lahko zasledujemo odvisnost amplitude  $B$  od frekvence. Pri majhnih ( $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ ) je odmik nihala iz ravnovesne lege ves čas skoraj sorazmeren z navorom  $M$ , amplituda pa je  $B = B_0 = \frac{M_0}{D}$ ; fazna razlika med obema nihanjima je zelo majhna ( $\delta \approx 0$ ). Ko povečujemo frekvenco navora, se amplituda povečuje in doseže pri  $\omega \approx \omega_0$  največjo vrednost. Pravimo, da je tedaj nihalo v resonanci z navorom. Fazni premik je tedaj približno  $90 \text{ deg}$  nihalo zaostaja za navorom za četrto nihaja. Poprečna moč (glej enačbo), ki jo nihalo sprejema, je v okolici resonance največja. Pri nadaljnjem večanju frekvence začne amplituda padati, nihalo pa vedno bolj zaostaja za navorom. Pri  $\omega \ll \omega_0$  gre amplituda  $B$  proti nič, fazni premik pa proti  $180 \text{ deg}$ . Krivuljo, ki nam kaže odvisnost razmerja  $B/B_0$  od frekvence navora, imenujemo resonančna krivulja

## 2 Naloga

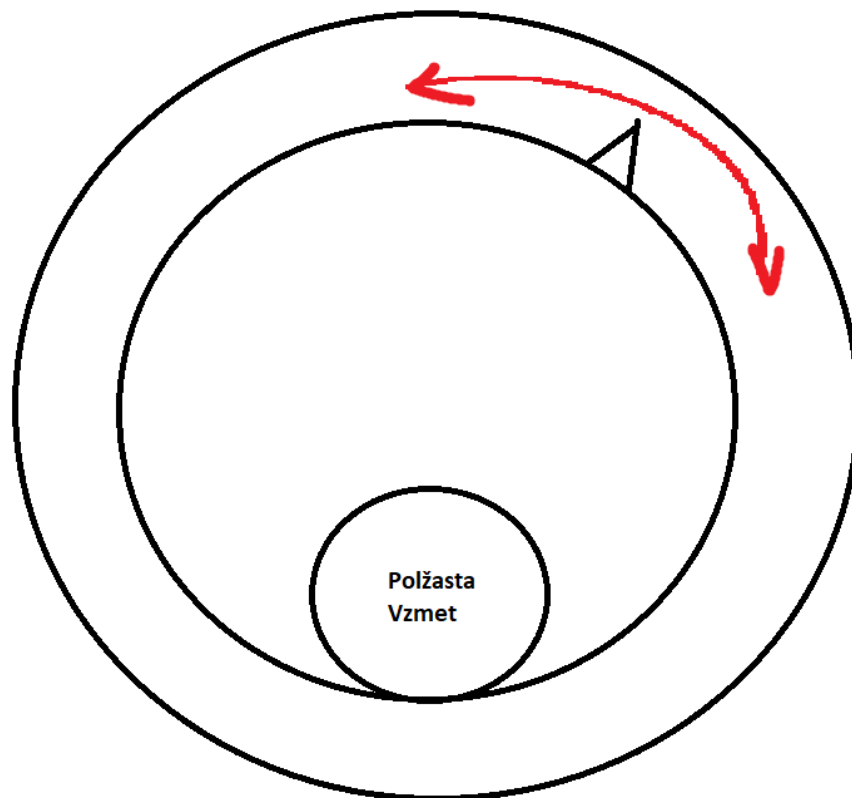
i.) Izmeri in izračunaj resonančno krivuljo za torzijsko nihalo pri dveh različnih dušenjih!

## 3 Potrebščine

- Torzijsko nihalo
- elektromotor z vzvodom
- Štoparica

## 4 Skica

Izjemno groba skica eksperimentalne meritve nihanja. Skica je izjemno slaba ampak ponazarja krog, ki ga odmika polžasta vzmet.



Slika 1: Skica kalorimetra

## 5 Meritve

Splošni podatki	
Meritve	Vrednost
$T_{sobe}$	22,5 C
$RH$	57 %
$P$	1016 hPa

1. Dušeno lastno nihanje meritev 1; n = 5		
Meritve	Vrednost L.	Vrednost D.
$A_z$	97,5 deg	105 deg
$A_k$	75 deg	82,5 deg
$t$	12,7 s	12,7 s

1. Dušeno lastno nihanje meritev 2; n = 5		
Meritve	Vrednost L.	Vrednost D
$A_z$	30 deg	37,5 deg
$A_k$	15 deg	22,5deg
$t$	12,8 s	12,8 s

2. Dušeno lastno nihanje meritev 1; n = 4		
Meritve	Vrednost L.	Vrednost D.
$A_z$	82,5 deg	67,5 deg
$A_k$	7.5 deg	3,8 deg
$t$	9,8 s	10,0 s

2. Dušeno lastno nihanje meritev 2; n = 4		
Meritve	Vrednost L.	Vrednost D
$A_z$	105 deg	90 deg
$A_k$	15 deg	7.5 deg
$t$	10,1 s	10,2 s

1. Vsiljeno nihanje			
Index	Frekvenca [Hz]	Amplituda [deg]	faza
1	0,10	7,5	0
2	0,20	9,8	0
3	0,30	11,3	$\frac{\pi}{16}$
4	0,32	12	$\frac{\pi}{8}$
5	0,34	13,5	$\frac{\pi}{4}$
6	0,36	21	$\frac{\pi}{2}$
7	0,37	41,3	$\frac{\pi}{2}$
8	0,375	180	$\frac{\pi}{2}$
9	0,38	138,8	$\frac{\pi}{2}$
10	0,40	32,3	$\frac{3\pi}{4}$
11	0,42	21	$\pi$
12	0,44	15	$\pi$
13	0,50	7,5	$\pi$
14	0,60	3,8	$\pi$

2. Vsiljeno nihanje			
Index	Frekvenca [Hz]	Amplituda [deg]	faza
1	0,10	6	0
2	0,20	7,5	0
3	0,30	9,8	0
4	0,32	11,3	$\frac{\pi}{4}$
5	0,34	13,5	$\frac{\pi}{4}$
6	0,36	17,3	$\frac{\pi}{2}$
7	0,38	22,5	$\frac{\pi}{2}$
8	0,39	30	$\frac{\pi}{2}$
9	0,40	37,5	$\frac{\pi}{2}$
10	0,41	22,5	$\frac{\pi}{2}$
11	0,42	21	$\frac{\pi}{2}$
12	0,44	13,5	$\frac{3\pi}{4}$
13	0,46	9,8	$\frac{3\pi}{4}$
14	0,50	7,5	$\pi$
15	0,60	3,8	$\pi$

\* faza je fazni zamik

## 5.1 Metodologija

Podatke za splošne pogoje smo pridobili s pomočjo stenskega aparata za merjenje rleativne vlažnosti, pritiska in teperature. Pogoji v sobi so ob začetku in kocu bili enaki. S pomočjo posebnega elektromotorja smo na vzmet inducirali sinusno stiskanje in raztezanje vzmeti, odmik smo merili vizualno. Privzeli smo, da je poskus ponovljiv, ter da da vedno iste rezultate, zato smo posebaj merili



čas petih nihajev ter amplitudo petega nihaja. Tu se lahko pojavi sistemska napaka. Posebno smo merili vrednosti za desni ekstrem nihala ter levi ekstrem nihala.

## 6 Obdelava meritev

Za izračun lastne dušene frekvence nihala smo uporabili naslednjo enačbo, da smo dobili rezultate:

### 6.1 Lastna dušena frekvenca brez dodatnega dušila

$$\omega_d = \frac{2\pi}{t_0}; t_0 = \frac{\bar{t}}{n} \quad (12)$$

$$\omega_d = \frac{2\pi n}{\bar{t}} \quad (13)$$

$$\omega_d = 2,5 * (1 \pm 0,004)s^{-1} \quad (14)$$

### 6.2 Lastna dušena frekvenca z dodatnim dušilom

Uporabimo enačbe iz prejšnjega računa ter dobimo:

$$\omega_d = 2,5 * (1 \pm 0,02)s^{-1} \quad (15)$$

### 6.3 Koefficient dušena brez dodatnega dušila

$$\beta = \frac{\omega_d}{2\pi n} \ln \frac{A_0}{A_n} \quad (16)$$

$$\bar{\beta} = 0,03 * (1 \pm 0)s^{-1} \quad (17)$$

Opozorilo: napaka pri  $\bar{\beta}$  je reda  $10^{-5}$  in ne zares 0.

### 6.4 Koefficient dušena z dodatnim dušilom

$$\beta = \frac{\omega_d}{2\pi n} \ln \frac{A_0}{A_n} \quad (18)$$

$$\bar{\beta} = 0,25 * (1 \pm 0,01)s^{-1} \quad (19)$$

### 6.5 Lastna frekvenca nihala brez dodatnega dušila

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \beta^2} \quad (20)$$

$$\omega_0 = 2,5 * (1 \pm 0,01)s^{-1} \quad (21)$$

### 6.6 Lastna frekvenca nihala z dodatnim dušilom

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \beta^2} \quad (22)$$

$$\omega_0 = 2,5 * (1 \pm 0,04)s^{-1} \quad (23)$$

### 6.7 Resonančna krivulja

Y-os sestavlja  $\frac{B}{B_0}$  ter X-os sestavlja  $\frac{\omega}{\omega_0}$  torej graf  $\frac{B}{B_0}(\frac{\omega}{\omega_0})$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f * 2\pi}{\omega_0} \quad (24)$$

in

$$\frac{B}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + a^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \quad (25)$$

koordinata izmerjene točke na grafu je torej:

$$(\frac{f * 2\pi}{\omega_0}, \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + a^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}) \quad (26)$$

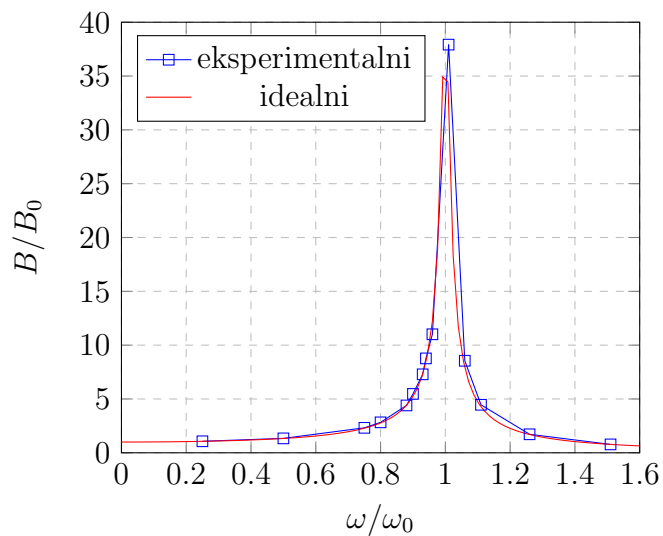
koordinata idealne resonančne krivulje pa se računa kot:

$$(\frac{\omega}{\omega_0}, \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + a^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}) \quad (27)$$

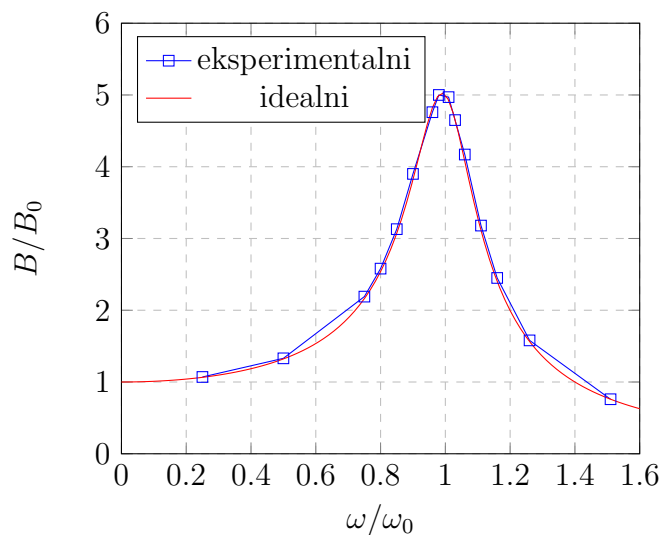
1. Vsiljeno nihanje		
Index	$\frac{\omega}{\omega_0}$	$\frac{B}{B_0}$
1	0,25	1,07
2	0,50	1,34
3	0,75	2,31
4	0,80	2,82
5	0,86	4,40
6	0,91	5,47
7	0,93	7,28
8	0,94	8,75
9	0,96	10,98
10	1,01	38,09
11	1,06	8,57
12	1,11	4,46
13	1,26	1,73
14	1,51	0,78

2. Vsiljeno nihanje		
Index	$\frac{\omega}{\omega_0}$	$\frac{B}{B_0}$
1	0,25	1,04
2	0,50	1,29
3	0,75	2,10
4	0,80	2,46
5	0,86	2,98
6	0,91	3,70
7	0,96	4,58
8	0,98	4,91
9	1,01	4,99
10	1,03	4,78
11	1,06	4,34
12	1,11	3,34
13	1,16	2,55
14	1,26	1,63
15	1,51	0,56

Resonančna frekvenca brez dodatnega dušenja



Resonančna frekvenca z dodatnim dušenjem



## 6.8 Graf faznega zamika $\delta(\omega/\omega_0)$

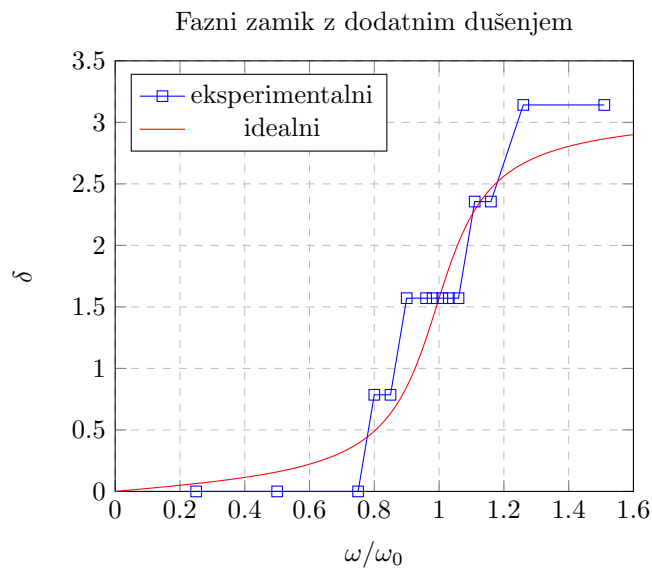
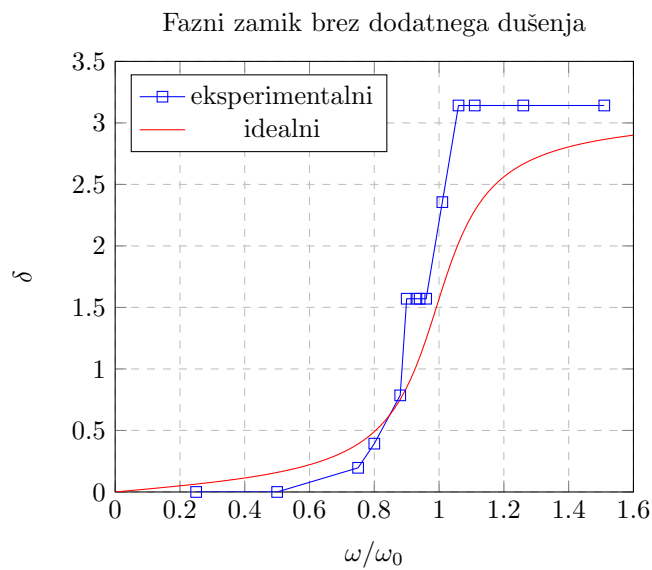
Fazni zamik računamo s formulo:

$$\tan(\delta) = \frac{a\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (28)$$

Tako bomo iz  $\omega/\omega_0$  določili pravilni  $\delta$ , ter to primerjali z grafom funkcije, zgoraj omenjene enačbe, če je  $\omega/\omega_0 = x$

1. Fazni zamik		
Index	$\delta_e$	$\delta_i$
1	0	0,06
2	0	0,16
3	$\pi/16$	0,40
4	$\pi/8$	0,50
5	$\pi/4$	0,75
6	$\pi/2$	0,87
7	$\pi/2$	1,03
8	$\pi/2$	1,11
9	$\pi/2$	1,20
10	$3\pi/4$	1,61
11	$\pi$	1,99
12	$\pi$	2,27
13	$\pi$	2,66
14	$\pi$	2,68

2. Fazni zamik		
Index	$\delta_e$	$\delta_i$
1	0	0,05
2	0	0,13
3	0	0,34
4	$\pi/4$	0,43
5	$\pi/4$	0,56
6	$\pi/2$	0,78
7	$\pi/2$	1,14
8	$\pi/2$	1,37
9	$\pi/2$	1,62
10	$\pi/2$	1,86
11	$\pi/2$	2,07
12	$3\pi/4$	2,36
13	$3\pi/4$	2,54
14	$\pi$	2,73
15	$\pi$	2,91



## 6.9 Povprečna sprejeta moč - $\frac{\bar{P}}{M_0 B_0 \omega_0}(\omega/\omega_0)$

Povprečno sprejeto moč izračunamo s formulo:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \omega M_0 B \sin(\delta) \quad (29)$$

iz česar sledi

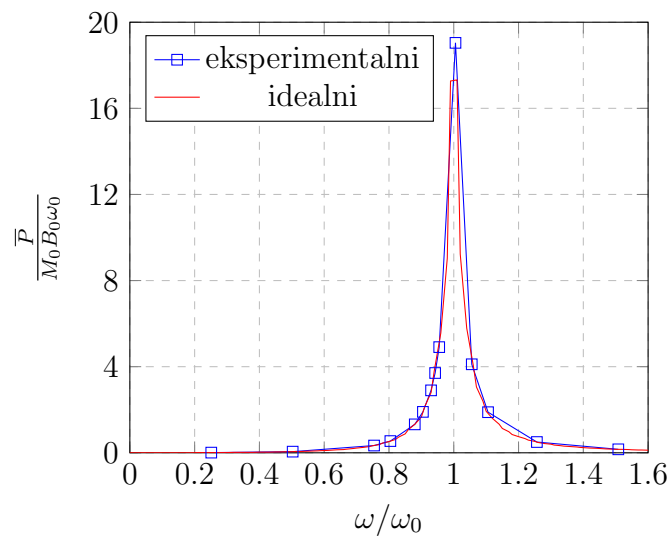
$$\frac{\bar{P}}{M_0 B_0 \omega_0} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_0} \frac{B}{B_0} \sin(\delta) \quad (30)$$

Za podatke lahko izračunamo:

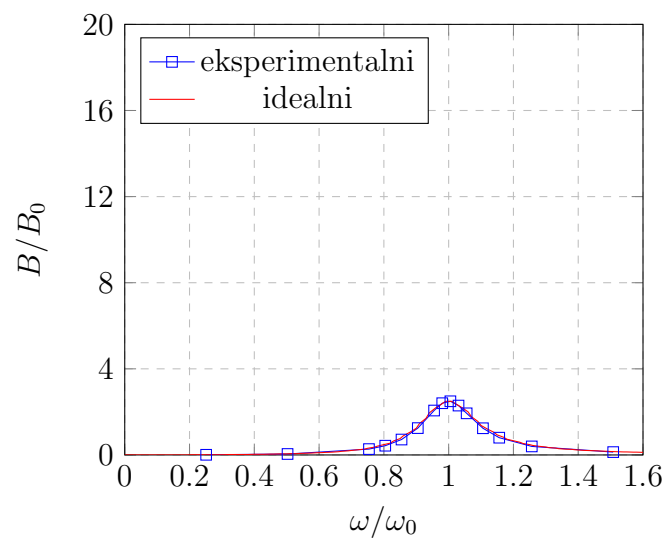
1. Povprečna sprejeta moč				
Index	$\frac{\omega}{\omega_0}$	$\frac{B}{B_0}$	$\delta$ izr.	$\frac{\bar{P}}{M_0 B_0 \omega_0}$
1	0,25	1,07	0,06	0,01
2	0,50	1,34	0,16	0,05
3	0,75	2,32	0,40	0,34
4	0,80	2,83	0,50	0,55
5	0,86	4,40	0,75	1,32
6	0,91	5,47	0,87	1,90
7	0,93	7,29	1,03	2,90
8	0,94	8,77	1,11	3,71
9	0,96	11,01	1,20	4,91
10	1,01	37,92	1,61	19,04
11	1,06	8,55	1,99	4,11
12	1,11	4,46	2,27	1,89
13	1,26	1,72	2,66	0,50
14	1,51	0,78	2,68	0,16

2. Povprečna sprejeta moč				
Index	$\frac{\omega}{\omega_0}$	$\frac{B}{B_0}$	$\delta$ izr.	$\frac{\bar{P}}{M_0 B_0 \omega_0}$
1	0,25	1,07	0,05	0,01
2	0,50	1,33	0,13	0,04
3	0,75	2,19	0,34	0,27
4	0,80	2,58	0,43	0,43
5	0,86	3,13	0,56	0,72
6	0,91	3,90	0,78	1,25
7	0,96	4,76	1,14	2,06
8	0,98	5,00	1,37	2,40
9	1,01	4,97	1,62	2,49
10	1,03	4,65	1,86	2,29
11	1,06	4,17	2,07	1,93
12	1,11	3,18	2,36	1,24
13	1,16	2,45	2,54	0,80
14	1,26	1,58	2,73	0,40
15	1,51	0,76	2,91	0,13

Povprečna sprejeta moč brez dodatnega dušenja



Povprečna sprejeta moč z dodatnim dušenjem





## 7 Analiza rezultatov

Ob pregledu rezultatov in napak, ugotovimo, da na koncu imamo napako. To je lahko iz raznih razlogov, na primer da nihanje motorja, ki je poganjalo vzmet ni bilo zares sinusno, da ima motor sam napako, med zapisano frekvenco in dejansko frekvenco in podobno. Največja napaka je pri maksimalni meritvi zato, ker je odklon bil tako velik, da več ni bil na merilni lestvici, ter smo ga le aproksimirali na 180 deg.