UNIVERZA V LJUBLJANI

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Poročilo vaje

Vaja 22 - viskoznost

Luka Orlić

Ljubljana, 11. oktober 2022

Kazalo

Seznam uporabljenih simbolov

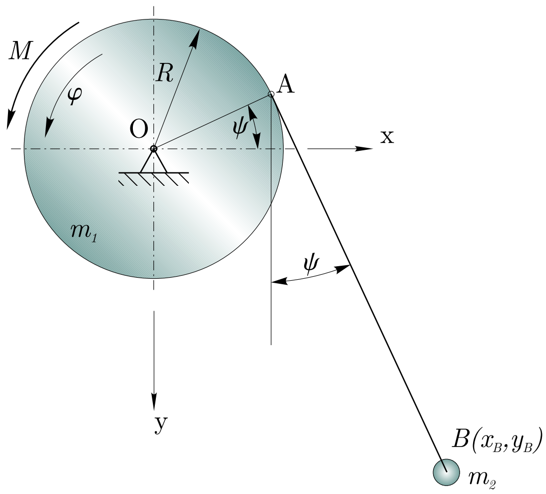
Oznaka	Pomen
η	koeficient viskoznosti: $kg * m^{-1} * s^{-1}$
R_1	polmer (notranjega) gibljivega valja, enota: cm
R_2	polmer (zunanjega) stacionarnega valja, enota: cm
ω	kotna hitrost vrtenja valja, enota: s^{-1}
h	višina viskozne plasti med valjema, enota: cm
J	vztrajnoistni moment valja, enota: $kg * m^2$

1 Uvod

To je uvod v seminar. Definicija je podana v 1.1. Vse znanje smo povzeli po [1]. V dodatku A so podane dodatne izpeljave.

1.1 Definicija naloge

Na homogen valj mase m_1 in polmera R je navita vrv brez teže, na katero je pripeto breme B mase m_2. Na valj deluje moment M, zaradi česar se breme B dviguje in niha okrog horizontalne osi. Določite diferencialno enačbo gibanja, če je dolžina vrvi na začetku l_0 (slika 1).



Slika 1: Skica naloge.

2 Reševanje naloge

Nalogo bomo rešimo z *Lagrange*ovimi enačbami 2. reda; dinamično ravnotežje sistema je opisano z enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad \text{za vse } j. \tag{1}$$

Kjer je T *kinetična energija sistema*, Q pa *posplošena sila*. Sistem ima P=2 prostostnih stopenj in N=2 nevezanih posplošenih koordinat:

$$q_1 = \varphi \tag{2}$$

$$q_2 = \psi \tag{3}$$

Kinetična energija sistema je:

$$T = \frac{1}{2}\, J_O\, \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, v_B^2, \tag{4}$$

kjer je J_O *masni vztrajnostni moment* valja okoli vrtišča O in v_B *hitrost translacije masne točke* B.

$$J_O = \frac{m_1\, R^2}{2} \tag{5}$$

Da določimo hitrost točke B določimo najprej njeno lego:

$$x_B = (l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)\, \sin(\psi) + R\, \cos(\psi) \tag{6}$$

$$y_B = (l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)\, \cos(\psi) - R\, \sin(\psi) \tag{7}$$

Z odvajanjem krajevnih koordinat dobimo hitrosti:

$$\dot{x}_B = +(l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)\, \dot{\psi}\, \cos(\psi) - R\,\dot{\varphi}\, \sin(\psi) \tag{8}$$

$$\dot{y}_B = -(l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)\, \dot{\psi}\, \sin(\psi) - R\,\dot{\varphi}\, \cos(\psi) \tag{9}$$

Sledi:

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = (l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)^2\, \dot{\psi}^2 + R^2\, \dot{\varphi}^2 \tag{10}$$

Sedaj vstavimo enačbi (5) in (10) v enačbo (4) in izpeljemo

$$T = \frac{1}{4}\,(m_1 + 2\,m_2)\, R^2\, \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, (l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)^2\, \dot{\psi}^2 \tag{11}$$

Kinetično energijo sedaj parcialno odvajamo kakor narekuje ravnotežna enačba (1), najprej za posplošeno koordinato φ:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2}\,(m_1 + 2\,m_2)\, R^2\, \dot{\varphi} \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2}\,(m_1 + 2\,m_2)\, R^2\, \ddot{\varphi} \tag{13}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2\, R\, (l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)\, \dot{\psi}^2 \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Podobno izpeljemo za posplošeno koordinato ψ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= m_2\,(l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)^2\,\dot{\psi} && (16)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= m_2\,(l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)^2\,\ddot{\psi} + 2\,m_2\,R\,(l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)\,(\dot{\psi} - \dot{\varphi})\dot{\psi} && (17)\\
\frac{\partial T}{\partial \psi} &= m_2\,R\,(l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)\,\dot{\psi}^2 && (18)\\
& && (19)
\end{aligned}$$

Glede na ravnotežno enačbo (1) moramo določiti še posplošeno silo, ki jo izpeljemo iz izraza za *virtualno delo*:

$$\delta W = Q_\varphi\,\delta\varphi + Q_\psi\,\delta\psi = M\,\delta\varphi m_2\,g\,\delta y_B, \tag{20}$$

kjer variacijo y_B moramo izračunati:

$$\delta y_B = \frac{\partial y_B}{\partial \varphi}\,\delta\varphi + \frac{\partial y_B}{\partial \psi}\,\delta\psi = -R\,\cos(\psi)\,\delta\psi - (l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)\,\sin(\psi)\,\delta\psi \tag{21}$$

Za virtualno delo torej izpeljemo izraz:

$$\delta W = (M - m_2\,g\,R\,\cos(\psi))\,\delta\varphi + (-m_2\,g\,(l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)\,\sin(\psi))\,\delta\psi \tag{22}$$

Sledi, da sta posplošeni sili:

$$\begin{aligned}
Q_\varphi &= M - m_2\,g\,R\,\cos(\psi) && (23)\\
Q_\psi &= -m_2\,g\,(l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)\,\sin(\psi) && (24)
\end{aligned}$$

Če sedaj enačbo za dinamično ravnotežje (1) zapišemo za vsako posplošeno koordinato posebej:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = Q_\varphi && (25)\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \psi_j} = Q_\psi && (26)
\end{aligned}$$

Z vstavljanjem zgoraj izpeljanih izrazov za kinetično energijo in posplošeno silo v enačbi (25) in (26) dobimo sistem dveh diferencialnih enačb gibanja:

$$\begin{aligned}
(l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)\,\ddot{\psi} + R(\dot{\psi}^2 + 2\,\dot{\varphi}\,\dot{\psi}) &= -g\,\sin(\psi) && (27)\\
\frac{1}{2}(m_1 + 2\,m_2)\,R\,\ddot{\varphi} + m_2(l_0 - R\,\varphi + R\,\psi)\,\dot{\psi}^2 &= M - m_2\,R\,g\,\cos(\psi) && (28)
\end{aligned}$$

3 Zaključek

To je zaključek seminarja.

Literatura

[1] A. ml. Kuhelj. *Mehanika – Dinamika.* Fakulteta za strojništvo, 1998.

A Dodatek

To so dodatne izpeljave.

$$y = x^2 \tag{29}$$