

University of *Ljubljana*
Faculty of *Mathematics and Physics*



Fizikalni praktikum III

Vaja : Akustični resonator

Poročilo

Avtor: Orlič, Luka
Profesor: Kladnik, Gregor
Asistent: Breclj, Tilen

Ljubljana, 6. november 2024

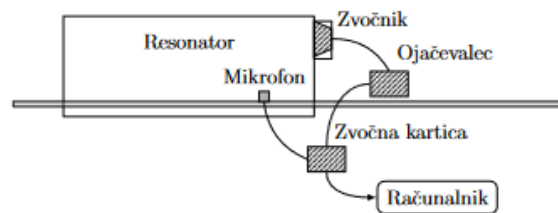
Kazalo

Seznam uporabljenih simbolov in indeksov	2
1 Teoretični uvod	3
1.1 Način meritev	4
2 Empirični del	6
2.1 Potrebščine	6
2.2 Naloga	6
3 Navodila	6
3.1 Dodatno	7
4 Meritve in rezultati	8

Seznam uporabljenih simbolov in indeksov

Oznaka	Pomen
p	vektor tlaka
\vec{u}	odmiki delov plina
ρ	gostota plina
κ	razmerje specifičnih toplot pri konstantnem tlaku in volumnu
c	hitrost zvoka v zraku
\vec{n}	vektor normale na steno
\vec{r}	krajevni vektor
ω	kotna hitrost valovanja
Φ	začetni fazni zamik
\vec{k}	skaliran vektor \vec{n}
U_{amp}	maksimalna amplituda signala
U_{dev}	efektivni odziv
$U(t)$	brezdimenzijska mera
A_r	izračunana amplituda
A_m	izmerjena amplituda
D_i	dimenzija škatle v i smeri

Indeks	Pomen
not	applicable



Slika 1: Slika resonatorja (*levo*) in skica oziroma shema eksperimenta (*desno*).

1 Teoretični uvod

Opis nihanja v plinu začnemo z Newtonovimi zakoni za kontinuum so podane v enačbi (1).

$$\rho \frac{\delta^2 \vec{u}}{\delta t^2} = -\nabla p, \quad (1)$$

kjer je ρ gostota plina, $\delta^2 \vec{u} / \delta t^2$ pospešek in $\nabla p = (\frac{\delta p}{\delta x}, \frac{\delta p}{\delta y}, \frac{\delta p}{\delta z})$ gradient vektorja tlaka p . Nadaljno povezavo med odmiki delov plina \vec{u} in gostot dobimo iz kontinuitetne enačbe (2)

$$\delta \rho = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{u}, \quad (2)$$

kjer smo z $\delta \rho$ označili odmik gostote od ravnovesne vrednosti. Potrebujemo pa še enačbo stanja, in sicer lahko privzamemo, da je prevajanje toplote zanemarljivo in zato uporabimo adiabatno stisljivost, kot opisana v enačbi (3),

$$\frac{\delta p}{p_0} = \kappa \frac{\delta \rho}{\rho_0}, \quad (3)$$

kjer je κ razmerje specifičnih toplot pri konstantnem tlaku in konstantnem volumnu. Enačbe (1), (2) in (3) premečemo in po želji lahko zapišemo valovne enačbe za tlak, hitrost, odmike ali gostoto. S pomočjo hitrosti zvoka c , kot podano v enačbi (4)

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}}, \quad (4)$$

navedimo naslednjo obliko v enačbi (5)

$$\nabla^2 \delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Ob trdni steni ni odmikov pravokotno na steno v smeri \vec{n} , prav tako ni nobene normalne komponente pospeška ali hitrosti. Ta pogoj se prevede v robni pogoj za nihanje tlaka kot opiše enačba (6)

$$\vec{n} \cdot \nabla p = 0 \quad (6)$$

Za zaprt prostor v obliki kvadra z robovi A , B in C je najprimerneše izbrati koordinatno izhodišče v enem od vogalov in osi x , y in z vzporedne robovom kvadra. Tako lahko zapišemo rešitev valovne enačbe pri frekvenci ω kot produkt kosinusov, da v izhodišču takoj izpolnimo robne pogoje. Nastavek za valovanja z neko amplitudo p_0 je opisan v enačbi (7)

$$p(\vec{r}, t) = p(\vec{r}) \cos(\omega t + \Phi)$$

$$p(\vec{r}) = p_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z); \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (7)$$

kjer je $p(\vec{r})$ krajevna odvisnost stoječega valovanja, ω njena kotna hitrost in Φ nek začetni fazni zamik. Z uporabo tega nastavka v valovni enačbi (5) dobimo zvezo med kotno frekvenco ω in valovnim vektorjem

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} \text{ enako enačbi (8)}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \vec{k} \cdot \vec{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (8)$$

Z upoštevanjem robnih pogojev na stenah (6) v nastavku (7) sledi, da so komponente valovnega vektorja opisani z enačbo (9)

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \frac{\pi}{A} \\ n_y \frac{\pi}{B} \\ n_z \frac{\pi}{C} \end{bmatrix} \quad (9)$$

kjer so n_x , n_y in n_z pozitivna cela števila ali 0. S tem smo določili kotne frekvence lastnih valovanj kot opisane v enačbi (10)

$$\omega = c\pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{A}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{B}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{C}\right)^2} \quad (10)$$

1.1 Način meritev

Meritve lahko opravimo na dva načina. Pri prvem načinu merimo zvočno jakost v resonatorju z mikrofoni, pri čemer vzbuja valovanje z zvočnikom, na katerega je priključimo izvor s konstantno amplitudo napetosti ali toka. Ta meritev je pojmovno in eksperimentalno enostavnejša, zahteva pa več opreme oziroma poseganja v resonator, saj potrebujemo oboje zvočnik in mikrofoni. Druga možnost je meritev impedance

zvočnika, ki ga uporabljamo za vzbujanje valovanja. Na zvočnik v tem primeru priključimo izvor konstantnega toka, kar pomeni, da je zaporedno z zvočnikom priključen še večji upor, npr. 1000Ω , in nato merimo napetost na zvočniku. Ta meritev je bolj zapletena, saj je poleg resonanc akustičnega resonatorja kot signal dobimo tudi zvočnikove mehanske resonance. Pri dobrih zvočnikih so sicer te resonance močno dušene in zaradi tega široke. Vseeno je priporočljivo po tej metodi najprej izmeriti resonančni odziv zvočnika v odprtem resonatorju in šele nato v zaprtem in tako določiti lastne resonance zvočnika samega. Kljub malo večji zapletenosti postopka, je ta metoda pomembna za razumevanje mnogih drugih meritev, kjer hočemo resonator zmotiti čim manj ozitoma nimamo na voljo detektorjev, tako da merimo odziv resonatorja preko učinkovitosti sklopitve z vzbujevalnim elementom.

2 Empirični del

2.1 Potrebščine

- Akustični resonator : zaboj iz vezanih in ivernih plošč z debelim dušenim stenami, notranje dimenzije so $56,7\text{ cm} \times 38,5\text{ cm} \times 24,0\text{ cm}$ z nedoločenostjo $\pm 0,1\text{ cm}$
- Prenosnik opremljen s programom AkRes in zunanjo zvočno kartico, ki podpira $44,1\text{ kHz}$ Mono-Duplex način predvajanja in sprejemanje zvoka
- Zvočnik, pritrjen na steno resonatorja blizu vogala in povezan preko ojačevalca na izhod zunanje zvočne kartice
- Premični mikrofonski povezan na vhod zunanje zvočne kartice

2.2 Naloga

1. Izračunaj najnižji resonančne frekvence akustičnega resonatorja za $n_{i \in [0,3]}$ in dobljene frekvence (manjše od 1000 Hz) v tabeli razvrsti po velikosti skupaj s pripadajočimi vrednostmi n_i . V tabeli pusti še dva prazna stolpca za izmerjene frekvence in amplitude.
2. Izmeri resonančni odziv akustičnega resonatorja v območju od 200 to 1000 Hz in ga nariši v ustrezni graf.
3. Izmeri odvisnost signala od položaja mikrofona v škatli za osnovno in še nekatere višje resonance. Izberi si take frekvence, da bodo odvisnosti $p(\vec{r})$ različne (recimo $n_{x \in [0,3]}$).
4. Primerjaj izmerjene in izračunane frekvence in na ta način določi, kateremu nihajnemu načinu pripadajo izmerjene resonance. Frekvence maksimumov in ustrezne amplitude vnesi v pripravljeno tabelo.
5. Iz prvih treh resonanc izračunaj hitrost zvoka.
6. Oцени razpolovno širino prvih treh resonačnih črt, ki je dovolj ločena od ostalih.

3 Navodila

S programom **AkRes**, bomo opravili meritve. Program meritve beleži v obliki **brezdimenzijske količine** $U(t)$, ki predstavlja "napetost" vhodnega oziroma izhodnega signala zvočne kartice. Med fluktuacijami tlaka in uvedbo napetosti je linearna zveza, ki je posledica principov delovanja mikrofona oziroma zvočnika, kot jo opiše enačba (11).

$$\delta p = kU(t) \tag{11}$$

kjer je koeficient k odvisna od karakteristike zvočnika in (strojnih ter programskih) ojačevalcev. Konstanta k je za nas nezaniva, kajti bomo pri analizi zvoka operirali kar direktno z nevtralno količino $U(t)$.

Na vhodnem signalu $U(t)$ dolžine časa τ program naredi dve statistiki z informacijo o jakosti in regularnosti odziva resonatorja. To sta maksimalni odziv oz. maksimalna amplituda signala (v programu označena s **Amplituda** ali **Amp**), računalnik dobi to vrednost s pomočjo predpisa enačbe (12)

$$U_{amp} = \frac{1}{2} \left(\max_{t \in [0, \tau]} (U(t)) - \min_{t \in [0, \tau]} (U(t)) \right) \quad (12)$$

in efektivni odziv oziroma standardna deviacija signala (v programu označen s **StdDev**), kot opisano v enačbi (13)

$$U_{dev} = \sqrt{\langle U^2(t) \rangle - \langle U(t) \rangle^2} ; \quad \langle a(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau a(t) dt \quad (13)$$

Če privzamemo da je povprečje signala $\langle U(t) \rangle$ enako nič, potem je U_{dev} povprečen kvadrat (ang. *root mean square* - *RMS*) napetosti, ki je bolj standardna količina pri meritvah. Maksimalni odziv U_{max} je podvržen motnjam iz okolice, saj meri ekstreme signala za razliko od povprečnega odziva U_{dev} , ki povzame povprečne lastnosti signala preko časovnega intervala $t \in [0, \tau]$. Napaka meritve U_{dev} zato pada kot $1/\sqrt{\tau}$.

3.1 Dodatno

Poleg omenjenih statistik program izračuna amplitudo odziva s pomočjo tako imenovane sinhronne detekcije (ang. *lock-in detection*). V splošnem lahko periodični vhodni signal $U(t)$ zapišemo kot vsoto harmoničnih komponent s frekvencami ν_k z različnimi amplitudami A_k in faznimi zamiki Θ_k , ki jo opiše enačba (14)

$$U(t) = \sum_k A_k \sin(2\pi\nu_k t + \Theta_k). \quad (14)$$

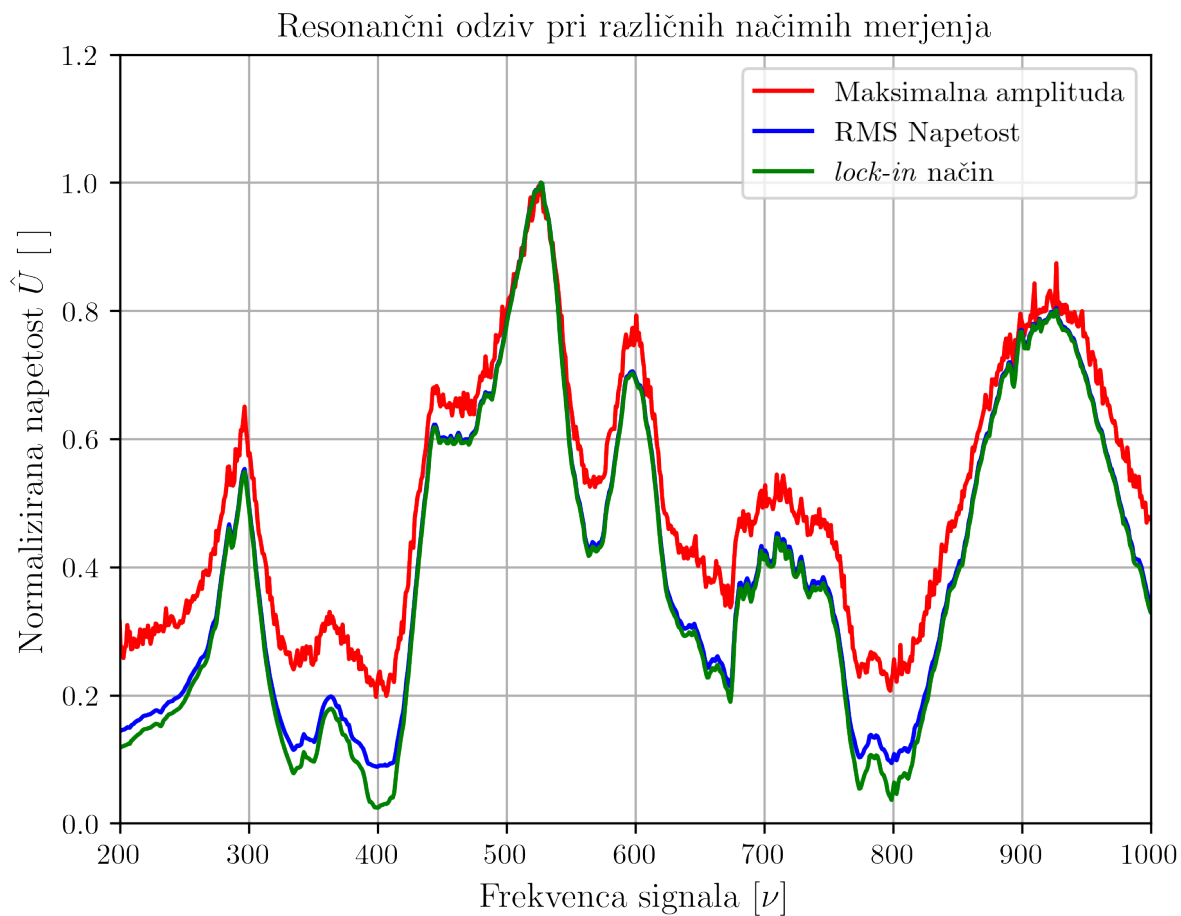
Nas zanima amplituda komponente pri točno določeni frekvenci ν_r , to je vzbujevalna frekvenca resonatorja, zato izračunamo povprečje produkta vhodnega signala $U(t)$ ter referenčnega harmoničnega signala s frekvenco ν_r , kot to opiše enačba (15)

$$U_0(\varphi) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sin(2\pi\nu_r t + \varphi) U(t) dt \quad (15)$$

Tukaj je τ čas trajanja signala, ki mora biti bistveno večji od signala, φ pa nastavljen fazni zamik referenčnega signala. Integral v enačbi (15) bo neničeln samo v primeru $\nu_k = \nu_r$ in bo za $\varphi = 0$ enak $U_0(0) = \frac{1}{2} A_r \cos(\Theta_r)$, za $\varphi = \frac{\pi}{2}$, pa bo enak $U_0(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} A_r \sin(\Theta_r)$, kjer je Θ_r fazni zamik med referenčnim signalom z $\varphi = 0$ in odzivom s frekvenco ν_r . Iskano amplitudo signala potem zračunamo po enačbi (16)

$$A_r = 2\sqrt{U_0^2(0) + U_0^2(\frac{\pi}{2})} \quad (16)$$

Napaka izračunane amplitude A_r pada kot $\frac{1}{\tau}$



Slika 2: Resonančni odziv merjen s tremi načini merjenja odziva, ki je normaliziran na grafu.

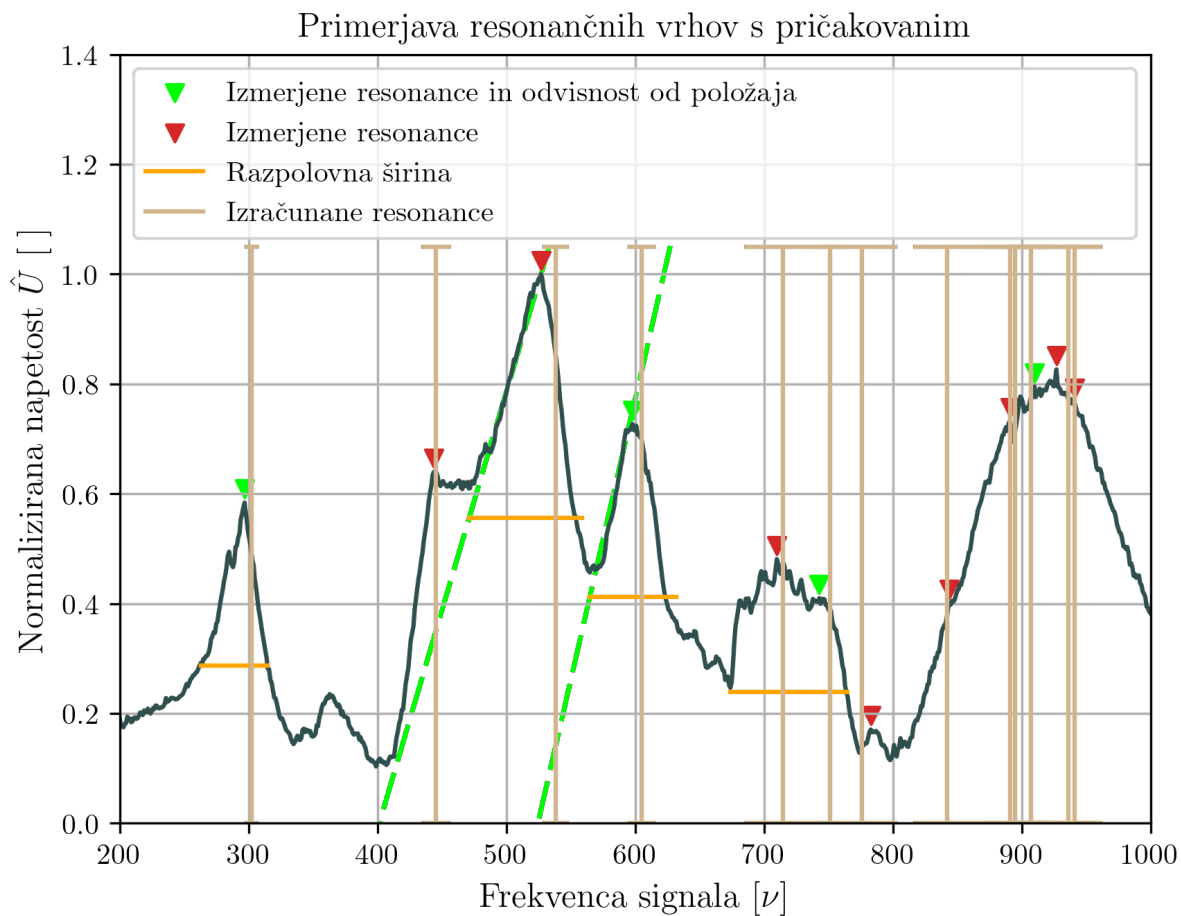
4 Meritve in rezultati

S pomočjo enačbe 10, smo dobili rezultat:

$$c_{izracunano} = (345 \pm 3) \text{ m/s}$$

Tabela 3: Resonančne frekvence (Izrač. in Izmer.)

vektor $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$	$\nu_{izr} \text{ [Hz]}$	$\nu_{izm} \text{ [Hz]}$	Amp.	Amp. St. dev.	Amp. lock
(1, 0, 0)	302 ± 5	310 ± 10	0.50	0.39	0.39
(2, 0, 0)	605 ± 11	610 ± 10	0.69	0.61	0.61
(2, 1, 0)	751 ± 11	750 ± 10	0.45	0.37	0.36
(1, 2, 0)	941 ± 22	940 ± 20	0.78	0.74	0.73



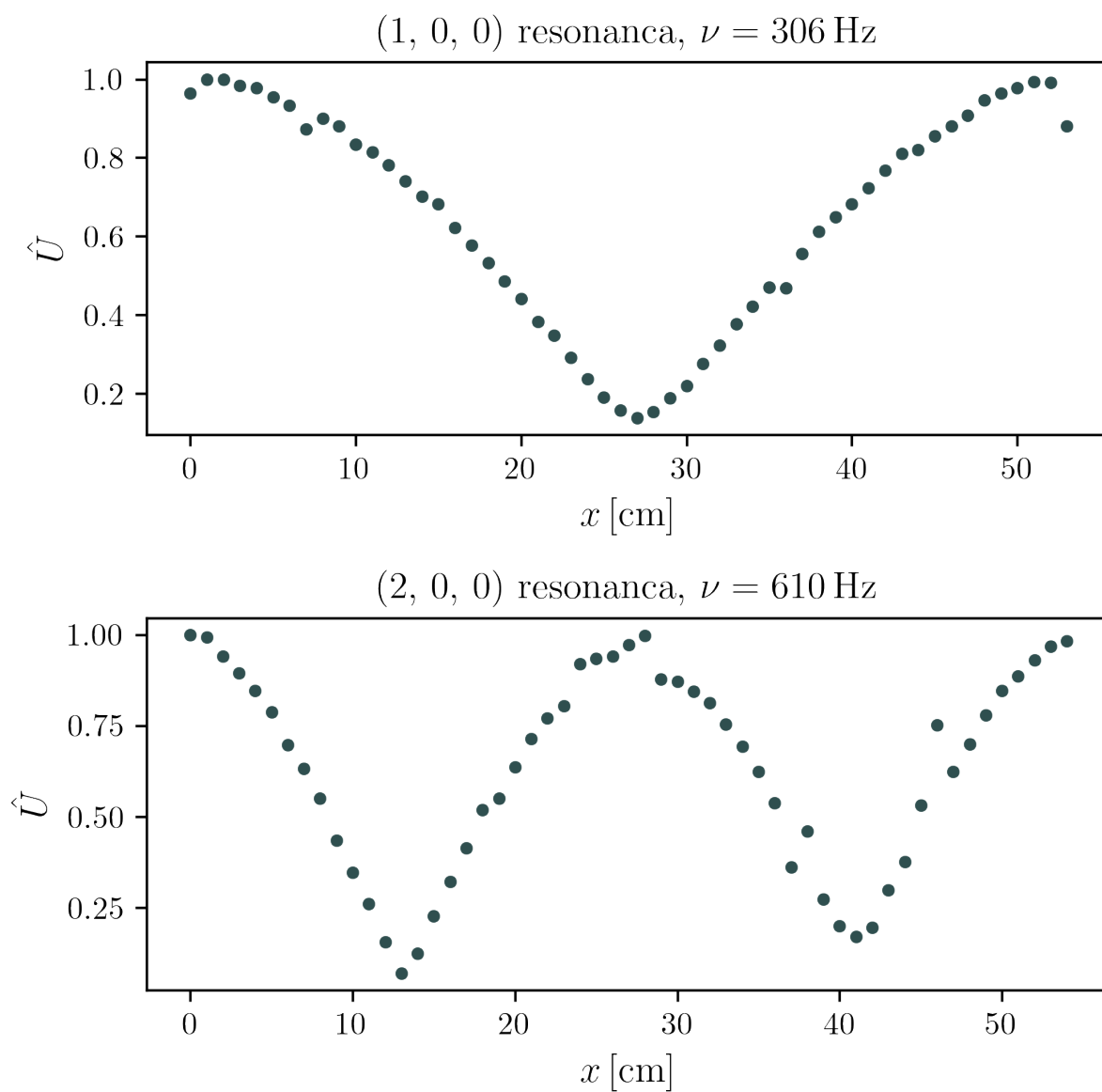
Slika 3: Primerjava izračunanih in izmerjenih znanih resonančnih vrhov, ter prikaz razpolovne širine za določene vrhove, kjer je za frekvenci 527 Hz in 598 Hz, analitično podaljšan graf kot linearna funkcija, ko bi ne obstajale druge ojačitve. Pri frekvenci 710 Hz, morda zgleda, da je tudi podaljšanje grafa, a to odstopanje izvira, ker je kot razpolovna amplituda prikazano povprečje točk, in je pravzaprav meritev razpolovne frekvence na grafu in obstaja.

Tabela 4: Hitrost zvoka

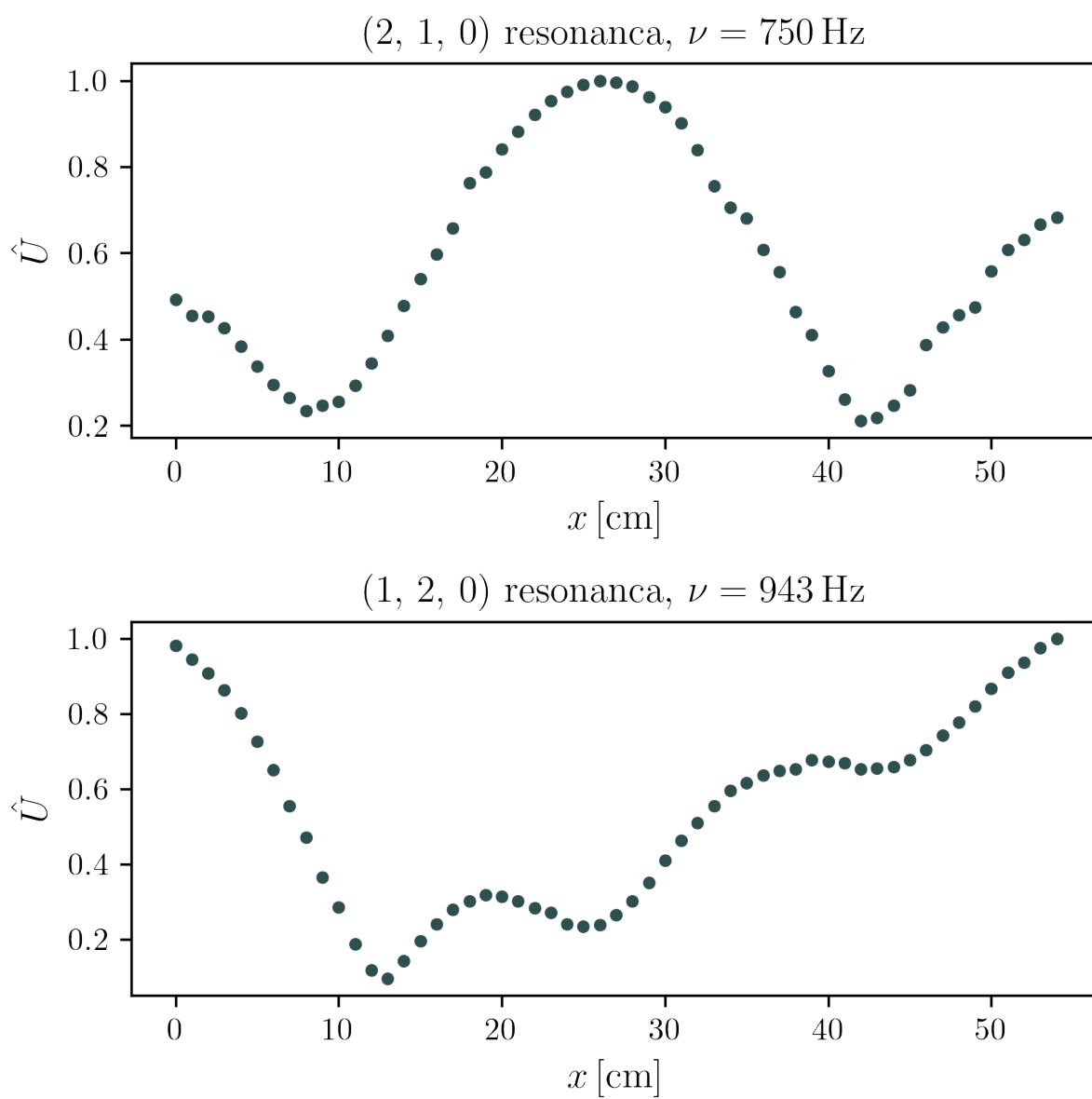
ν [Hz]	c [m/s]	σ_c [m/s]
306	347	6
610	346	6
750	342	5
943	344	8
Total	345	3

Tabela 5: Razpolovna širina

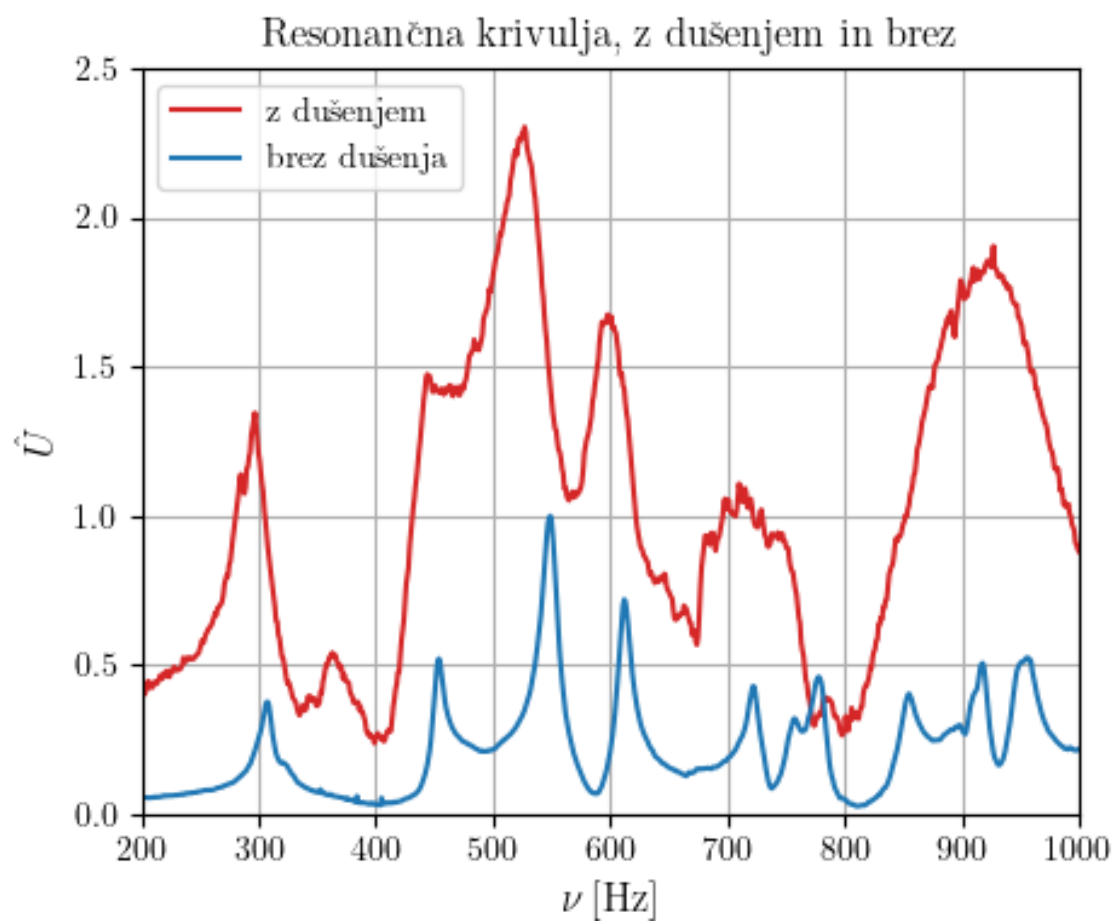
ν [Hz]	$FWHM$ [Hz]
297	52
527	88
598	67
710	91



Slika 4: Prikaz odziva pri premikanju mikrofona za frekvenci 306 Hz in 610 Hz.



Slika 5: Prikaz odziva pri premikanju mikrofona za frekvenci 750 Hz in 943 Hz.



Slika 6: Primerjava resonančne krivulje z in brez absorberja.