

University of Ljubljana  
Faculty of Mathematics and Physics



Fizikalni praktikum 3

# Vaja: Upogib

Poročilo

**Avtor:** Orlić, Luka  
**Nosilec:** Kladnik, Gregor  
**Asistent:** Brecelj, Tilen

Ljubljana, 15. oktober 2024

## Kazalo

<b>Seznam uporabljenih simbolov in indeksov</b>	<b>2</b>
<b>1 Teoretični uvod</b>	<b>3</b>
<b>2 Empirični del</b>	<b>7</b>
2.1 Naloge . . . . .	7
2.2 Potrebščine . . . . .	7
2.3 Meritve . . . . .	8
2.4 Obdelava podatkov . . . . .	8
<b>3 Zaključek</b>	<b>12</b>

## Seznam uporabljenih simbolov in indeksov

Oznaka	Pomen
$\frac{1}{R}$	krivinski radij
$\frac{\Delta l}{l}$	relativni razteg
E	prožnostni modul
F	sila
M	navor
$\Omega$	Presek, ki je pravokoten na nevtralno ploskev vzdolž palice
P	nevtralna ploskev, to je sloj palice, ki se ne raztegne ali skrči pri obremenitvi
S	presek
f	dolžinska gostota sile v prečni smeri na nevtralno ploskev
l	dolžina
$\sigma$	napetost (natezna ali tlačna)
u	odmik nevtralne ploskve obremenjene palice
x	odmik od preseka pravokotnega na nevtralno plast
y	odmik po preseku pravokotnega na nevtralno plast

Indeks	Pomen
g	gravitacije
k	na koncu
kv	pravokotni profil
max	največja možna
p	palica
s	na sredini
va	kroglni profil

## 1 Teoretični uvod

V klasični fiziki smo spoznali deformacije, ki jih delimo na elastične in plastične deformacije. Poenostavljeni so elastične deformacije takšne, da ko sila več na deformirano telo ne deluje, se to vrne v originalno obliko oziroma originalne dimenzije, pri plastični je pa ta deformacija, trajna in tudi ko sila več prisotna, telo ohrani novo obliko oziroma dimenzije.

Če na neko palico delujemo longitudinalno z nasprotno usmerjenima silama na nasprotnima koncema, tako da se deformira elastično, vemo da obstaja zveza, ki nam napetost na palici, definirano kot  $\frac{F}{S}$ , poveže s prožnostnim modulom s *Hookovim zakonom*:

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

V enačbi (1), lahko količnik sile in preseka definiramo kot  $\sigma \equiv \frac{F}{S}$ . O  $\sigma$  tako lahko povemo nekaj stvari. Prvo obstaja neka  $\sigma_{max}$ , ki omejuje napetost navzgor, kajti za  $\sigma > \sigma_{max}$ , velja, da je deformacija plastična ali palica tudi poči. Logično je, da napetost navzdol omejimo pri elastičnih deformacijah, ko napetosti pravzaprav ni. Zatorej velja, da je  $\sigma \in [0, \sigma_{max}]$ , dokler govorimo o  $\sigma$  elastičnih deformacij. Interval  $[0, \sigma_{max}]$ , pa imenujemo *območje elastičnosti*, za katerega je tipično  $\frac{\Delta l}{l}$  še precej majhen. Pri kovinskih palicah, je  $\sigma_{max}$  tipično reda velikosti par  $100 \text{ MPa}$ .

Ko opazujemo upogib ravne palice, oziroma ko silo na ravno palico nanašamo transverzalno, to v prvem približku obravnavamo, kot da bi presek palice  $\Omega$  ostal nespremenjen. Zamislimo si sedaj, da palico obravnavamo kot longitudinalno razrezane trakce oziroma plasti vzporedne z njeno vzdolžno osjo in ob vseh časih pravokotne na smer upogiba. Takrat blizu sredine poteka takoimenovana **nevtralna ploskev**, ki se niti ne raztegne niti skrči, temveč ohrani svojo dolžino in se le upogne. Pri čistem upogibu gre ta ploskev skozi težišče, oziroma geometrijsko središče, preseka. Pri upogibu, se plasti na eni strani raztegnejo, na drugi stisnejo. Če vzamemo nek presek  $\Omega$ , in še košček palice, ki je na eno stran oddaljen od  $\Omega$  za  $l$ . Potem ni težko opaziti, da se je ta košček nekoliko ukrivil, zato lahko temu koščku oziroma plastem v njem določimo nek (lokalni) krivinski radij  $R$ . Nato si vzamemo poljubno plast, ki je od nevtralne vzporedna in oddaljena za  $y'$  v radialni smeri. Vidimo lahko, da se je ta plast raztegnila in to dolžino označimo z  $\Delta l + l$ . Ni težko izpeljati, da je razmerje dolžin lokov enako razmerju radijev, in še naprej lahko naredimo, za nas uporabno izpeljavo:

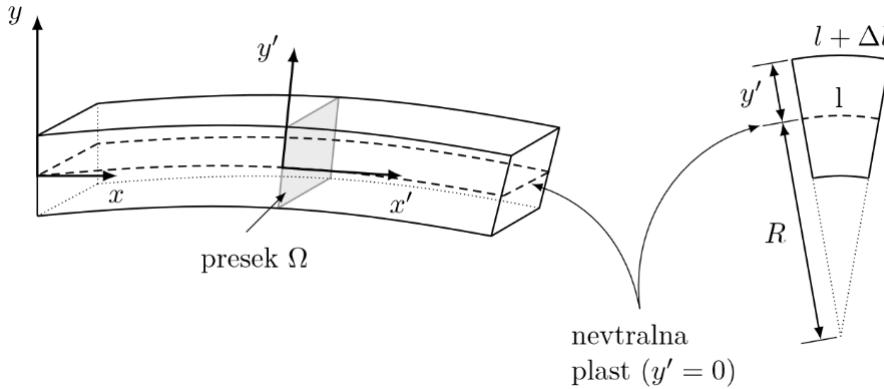
$$\frac{\Delta l + l}{l} = \frac{R + y'}{R} \quad (2)$$

$$1 + \frac{\Delta l}{l} = 1 + \frac{y'}{R} \quad (3)$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y'}{R} \quad (4)$$

Zaradi deformacije  $\Delta l$  se pojavi v plasti napetost z vzdolžno komponento, ki jo lahko zapišemo kot:

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l} = E \frac{y'}{R} \quad (5)$$



Slika 1: Skica palice z označenimi dimenzijami.

Vzemimo sedaj presek posamične male plasti s ploščino  $dS$ , na katero deluje sila z vzdolžno komponento  $F/S dS \implies \sigma dS$ , katerih vsota predstavlja celotno silo pravokotno na presek  $\int_{\Omega} \sigma dS$  z ene strani in je pri čistem upogibu enaka 0. Vsoto navorov, ki je sorazmerna z ukrivljenostjo  $(1/R)$ , lahko izpeljemo:

$$M = \vec{F} \cdot \vec{r}; F \perp \Omega \implies M = Fr \quad (6)$$

$$M = F \cdot y'; F = \int_{\Omega} \frac{F}{S} dS = \int_{\Omega} \sigma dS \quad (7)$$

$$M = \int_{\Omega} \sigma y' dS = \int_{\Omega} \frac{E}{R} y'^2 dS; J = \int_{\Omega} y'^2 dS \quad (8)$$

$$M = \frac{EJ}{R} \quad (9)$$

Seveda je od tu jasno razvidno, da ima  $y'$  vlogo ročice navora. Pozorni moramo biti tudi na vztrajnostni momen preseka palice  $J$ , za katerega velja:

$$\text{pravokotni presek : } J = \frac{ab^3}{12}; a, b \text{ so dimenzijsi pravokotnika} \wedge y' \in [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}] \quad (10)$$

$$\text{krožni presek : } J = \frac{\pi r^4}{4}; r \text{ je radij kroga} \quad (11)$$

Izpeljava teh vztrajnostnih momentov je v prilogah. Sedaj definirajmo koordinatni sistem. Točko  $(0, 0)$  postavimo v geometrijsko središče preseka  $\Omega$ , tako da je  $x$ -os vzdolž nevtralne ploskve neobremenjene palice,  $y$ -os, je pa na to pravokotna. Želimo dobiti funkcijo, ki nam v odvisnosti od  $x$  koordinate pove, odmak nevtralne ploskve obremenjene palice od nevtralne lege neobremenjene palice, to funkcijo označimo  $u(x)$ . Privzamimo tudi, da našo palico le šibko upogibamo ( $u'(x) \ll 1$ ) in zato je ukrivljenost približno

$$u''(x) \approx \frac{1}{R}, \quad (12)$$

ter se navor poenostavi v

$$M = \frac{EJ}{R} = EJ \cdot u''(x); x \in [0, l], \quad (13)$$

kjer  $'$  označuje  $\frac{d}{dx}$ . Enačba (13) predpostavlja prvo vez med obremenitvijo - navorom  $M$  in geometrijo palice - funkcijo  $u(x)$ . Zanima nas, kako lahko izrazimo navor sil na prečni presek z ene stani preseka,  $M(x)$ , z zunanjimi silami na palico.

Palica naj bo v prečni smeri glede na nevtralno ploskev obremenjena z dolžinsko gostoto sile  $f(x)$ . Ponovno opazujemo presek  $\Omega$  na mestu  $x$  nevtralne ploskve. Osredotočiti se moramo na vpliv leve strani na izbrani presek glede na os v točki  $x$ . Navor notranjih napetosti  $M(x)$  na prečni presek z ene strani mora biti neak navoru zunanjih sil z iste strani. Navor na desni del je v splošnem enak levemu. Na dolžini  $d(x') \equiv dx'$  deluje sila  $f(x') dx'$  in tako navor  $M(x)$  z zunanjimi silami izrazimo kot

$$M = \int_{x_0}^x f(x')(x - x') dx' + M_0 , \quad (14)$$

kjer je  $x_0$  začetek palice na levi strani. Pri tem je  $M_0$  zunanji navor, ki deluje na levi konec palice v primeru, če je tam vpeta. Prvi odvod navora je enak strižni sili  $F(x)$ , s katero desni del deluje na levega na mestu  $x$ , in se zapiše kot

$$M' = \int_{x_0}^x f(x') dx' = F(x) = EJu''' . \quad (15)$$

Vidimo, da je enak vsoti zunanjih sil, ki delujejo na levi del palice; torej je bndasprotno enak strižni sili, s katero desni del deluje na levega na mestu  $x$ . Drugi odvod navora pa predstavlja dolžinsko gostoto sile  $f(x)$  in s pomočjo enačbe (13) dobimo *osnovno enačbo palice*:

$$M'' = f(x) = EJ \cdot u^{(4)}(x) . \quad (16)$$

Enačbo (16) želimo rešiti za naš primer centralno obremenjene palice s silo  $F_0$  in podprtne na koncih oddaljenih za dolžino  $l$ . Izhodišče x-osi si bomo izbrali na sredini palice. Posledica diskretno porazdeljene sile na sredini palice je nezveznost tretjega odvoda  $u'''(x)$ , katerega skok vrednosti je enak

$$\Delta u'''(x = 0) = -\frac{F_0}{EJ} . \quad (17)$$

Simetričnost palice okoli  $x = 0$  nam omogoča, da problem reduciramo na obravnavo le desne strani  $x > 0$ . Zaradi odsotnosti sile velja zunaj sredine homogena enačba  $u^{(4)}(x) = 0$ . Od tod ugotovimo, da je oblika palice opisljiva z nastavkom

$$u(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 , \quad (18)$$

kjer so  $a, b, c$  in  $d$  konstantni koeficienti. Zaradi simetrije, zveznosti  $u'(x)$  in nezveznosti  $u'''(x)$  sledi, da je  $b = 0$  in  $d$  s spremembo strani obrane predznak. Nastavek mora izpolniti pogoje:

- $u(l/2) = 0$ , ker je palica tam podprta
- $u''(l/2) = 0$ , ker konec palice ni vpet in nanj deluje noben navor
- $\Delta u'''(0) = -\frac{F_0}{EJ}$ , zaradi diskretne sile.

Ko izpolnimo vse pogoje in izračunamo koeficiente, dobimo rešitev za desno stran palice

$$u(x) = -\frac{F_0 l^3}{48 E J} \left[ 1 - 6 \left( \frac{x}{l} \right)^2 + 4 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right] \quad (19)$$

Na sredini ( $x = 0$ ) se torej palica zniža:

$$U(0) = -\frac{F_0 l^3}{48 E J} \quad (20)$$

Zanima naš še maksimalna obremenitev, da lokalne deformacije relativnega raztezka ostanejo pod 0.00001, tako dobimo enačbo (21)

$$F_{max} \approx \epsilon \frac{8EJ}{Dl} . \quad (21)$$

## 2 Empirični del

### 2.1 Naloge

1. Opazuj upogibanje dveh palic različnih presekov v odvisnosti od obremenitve in izračunaj njuna prožnostna modula.
2. ceni maksimalno obremenitev palic ter za koliko se palici upogneta zaradi lastne teže. Primerjaj tudi gostoti obeh palic.
3. Nariši diagrama spremicanja strižne sile in navora vzdolž palice za izbrano utež.

### 2.2 Potrebščine

- Stojalo,
- mikrometerska ura,
- uteži,
- tehnicka,
- kljuka za obešanje uteži,
- dve ravni palici okroglega in pravokotnega profila,
- kljunasto merilo,
- meter.

Masa [g]	Upogib [ $10^{-1}$ mm] Kvadratni profil	Upogib [ $10^{-1}$ mm] Krožni profil
0	5.92	6.02
10	5.90	60.1
30	5.86	5.94
50	5.83	5.89
100	5.75	5.74
200	5.58	5.46
400	5.24	4.89
600	4.89	4.33
1100	4.03	2.09
2100	2.325	0.09
1100	4.05	2.89
600	4.90	4.31
400	5.25	4.87
200	5.58	5.45
100	5.75	5.72
50	5.83	5.87
30	5.83	5.87
10	5.90	5.98

Tabela 3: Tabela meritev upogiba palic različnih profilov pri različni obremenitvi.

### 2.3 Meritve

Meritve so zabeležene v tabeli (3) in tabeli (4). Podatke o palicah podajo enačbe med (22) in (27), kjer enačba po (22) govori o lastnostih palice s kvadratnim profilom in enačbe po (25) govori o lastnostih palice z okroglim profilom.

$$l = (56.00 \pm 0.02) \text{ cm} \quad (22)$$

$$a, b = (6.9 \pm 0.1) \text{ mm} \quad (23)$$

$$m_{p, kv} = (262 \pm 2) \text{ g} \quad (24)$$

$$l = (56.00 \pm 0.02) \text{ cm} \quad (25)$$

$$r = (6.9 \pm 0.1) \text{ mm} \quad (26)$$

$$m_{p, va} = (208 \pm 2) \text{ g} \quad (27)$$

### 2.4 Obdelava podatkov

Podatke smo obdelali s pomočjo programskega jezika python in knjižnicami: "uncertainties", "numpy" in "fprlib".

Odmik igle [ $10^{-4}$ m]	Masa na tehnični [g]
0.649	90
0.605	90
0.596	65
0.413	102
0.368	87
0.113	69

Tabela 4: Meritve ure, ki pritiska tehnično, torej graf mase v odvisnosti od odmika igle

Prvo nas je zanimal koeficient vzmeti ure mikrometra, da bi to meritev dobili, smo odčitali razne odmike ure ob tehnično, ki je izpisala maso oziroma silo, s katero je na tehnično igla pritiskala.

$$m = \frac{k_i \Delta x}{g} + m_{igle} \quad (28)$$

Z uporabo linear fit na podatki v tabeli (4) z enačbo (28), kjer je  $k_i$  iskani koeficient vzmeti igle,  $m_i$  je masa igle,  $\Delta x$  odmik igle,  $g$  je gravitacijski pospešek in  $m$  je masa odčitana s tehnicice, lahko dobimo rezultat.

$$k_i = (41 \pm 10) \text{ N/m} \quad (29)$$

Ni težko nastaviti formulo za silo na palico pri znanih utežeh in upogibu, to opiše enačba (30)

$$F(u_0) = gm + k_i u_0 \quad (30)$$

Zračunamo tudi lahko vztrajnostna momenta po enačbah (10) in (11):

$$J_{kv} = (1.89 \pm 0.11) \cdot 10^{-10} \text{ m}^4 \quad (31)$$

$$J_{va} = (1.11 \pm 0.13) \cdot 10^{-10} \text{ m}^4 \quad (32)$$

Trivialno je tudi izračunati gostote palic, katerih rezultat je v enačbah (33) in (34). Na podlagi teh rezultatov, lahko sklepamo, da sta materiala palic ista. Probajmo to še preveriti z izračunom Youngovega modula.

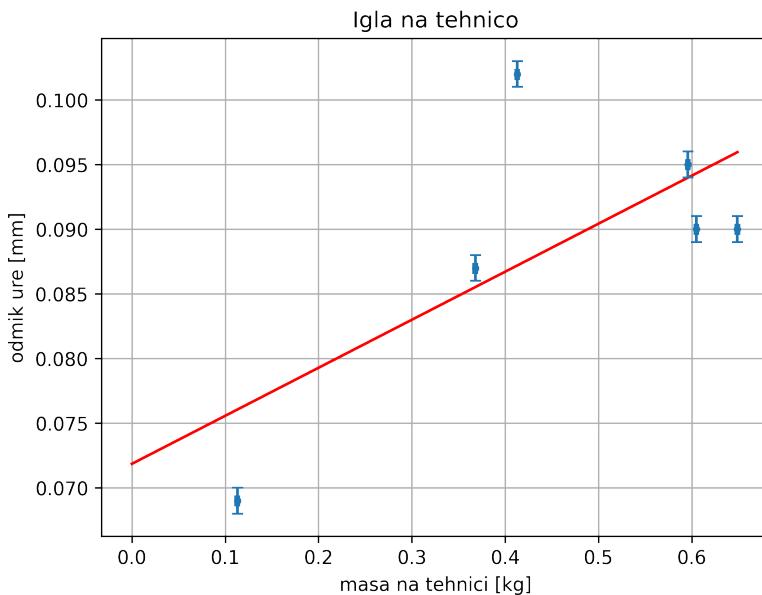
$$\rho_{kv} = (9830 \pm 100) \text{ kg/m}^3 \quad (33)$$

$$\rho_{va} = (9930 \pm 100) \text{ kg/m}^3 \quad (34)$$

Izračunajmo Youngove module za palici.

$$E_{kv} = (110 \pm 10) \text{ GPa} \quad (35)$$

$$E_{va} = (180 \pm 20) \text{ GPa} \quad (36)$$



Slika 2: Graf, ki prikazuje odmik igle ure in maso, ki jo odčitamo na tehnici.

Opazimo, da sta Youngova modula precej različna in ne nakazujeta istega rezultata. Če hitro ocenimo še maksimalno obremenitev, dobimo reda velikosti par kil. Zaradi tega, sumimo, da podatki z velikimi masami, ne ležijo v območju linearnosti. Ker imamo približke, ki se ukvarjajo samo pod privzetim dejstvom, da je odmik linearen in vsebuje kot koeficient Youngov modul, lahko eno tretino najbolj odstopajočih meritev odstranimo. V resnici, je potrebno odstraniti le eno meritev, namreč to pri  $2100\text{ g}$ , na kar dobimo Youngova modula:

$$E_{kv} = (110 \pm 10) \text{ GPa} \quad (37)$$

$$E_{va} = (120 \pm 10) \text{ GPa} \quad (38)$$

Sedaj je očitno da Youngova modula sovpadata znotraj napake, torej lahko zaključimo varno, da sta materiala podobna v gostoti in Youngovem modulu. Za konec ocenimo še maksimalne obremenitve:

$$F_{kv, max} = (45 \pm 1)\text{N} \quad (39)$$

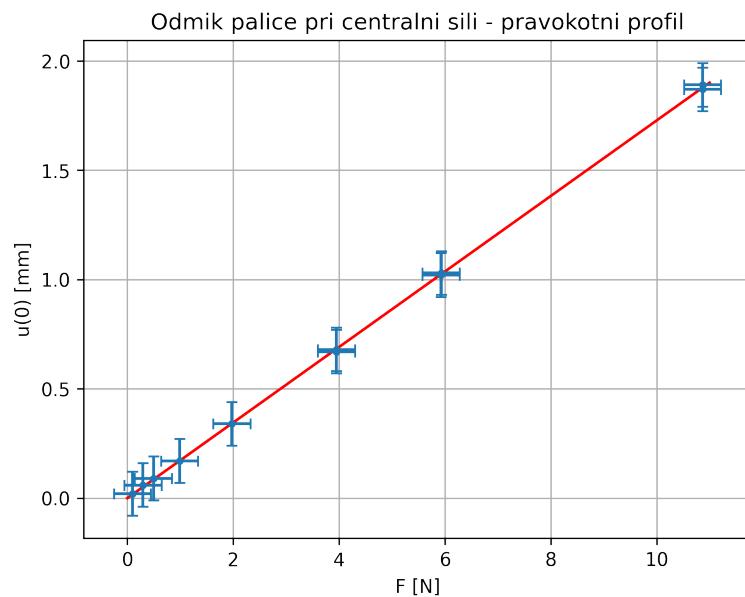
$$F_{va, max} = (30 \pm 1)\text{N}, \quad (40)$$

in povešenost mase zaradi lastne teže:

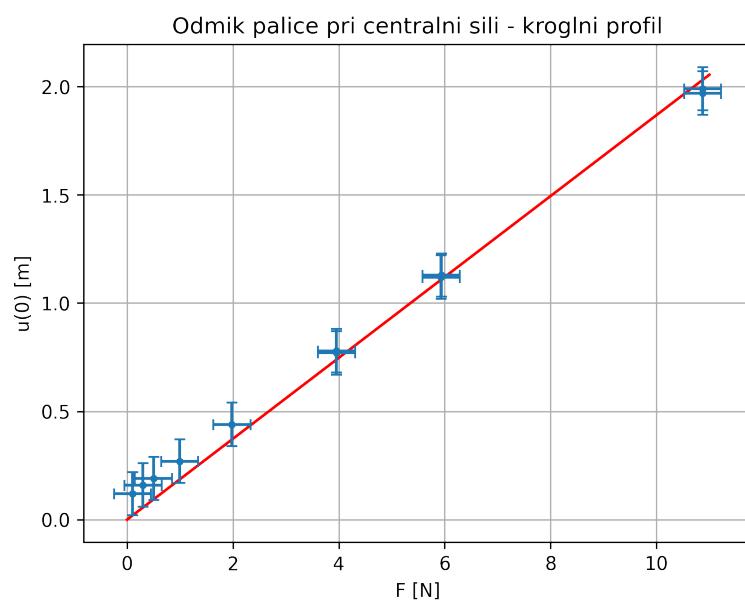
$$u_{kv,g} = (0.500 \pm 0.05)\text{mm} \quad (41)$$

$$u_{va,g} = (0.600 \pm 0.07)\text{mm} \quad (42)$$

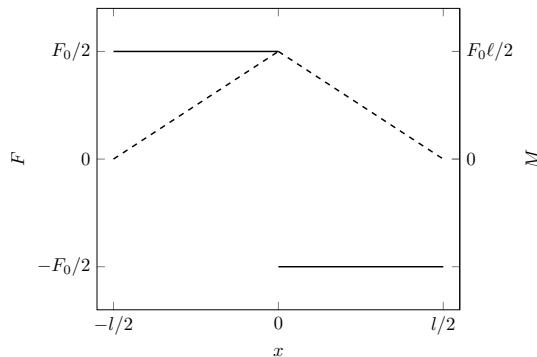
Podatke in izračunane vrednosti, še prikažimo na grafih (2), (3) in (3).



Slika 3: Graf, ki prikazuje palice z pravokotnim profilom v odvisnosti od sile na sredino palice.



Slika 4: Graf, ki prikazuje palice z kroglnim profilom v odvisnosti od sile na sredino palice.



Slika 5: Graf, ki prikazuje  $F(x) \wedge M(x)$  na nevtralni ravnini, za poljubno točkasto silo v sredini palice.

### 3 Zaključek

Zaključimo, da se Youngov modul znotraj napake pokriva, torej smiselno predpostavimo hipotezo, da je youngov modul neodvisen od profila palice, vendar bi to hipotezo bilo potrebno preveriti, kajti iz tega poskusa ni povsem prepričljivo, da je temu tako.

Vajo bi lahko izboljšali v meritvah, če bi lahko natančneje upeli valjasto palico. Z bolje umerjeno tehniko in mikrometersko uro, oziroma namesto ure bi morda bil boljši optični aparat za merjenja upogiba, saj tako upliv sile igle ne bi več bil faktor.

Poglejmo še funkciji  $F(x, y = 0) \wedge M(x, y = 0)$  na nevtralni ravnini, to je prikazano na sliki (5).