University *of Ljubljana*
Faculty *of Mathematics and Physics*

Fizikalni praktikum 3

Vaja: Torzijsko nihalo z visečo žico

Poročilo

Avtor: Orlić, Luka
Nosilec: Kladnik, Gregor
Asistent: Brecelj, Tilen

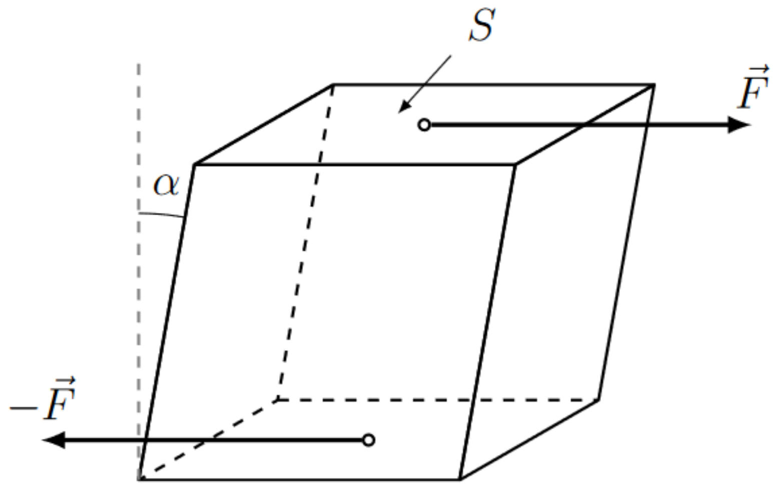
Ljubljana, 15. oktober 2024

Kazalo

Seznam uporabljenih simbolov in indeksov

Oznaka	Pomen
G	strižni modul
α	nagib dveh stranskih ploskev kvadra,
F	sila
S	površina
M	navor
D	torzijski koeficient
φ	zasuk enega konca žice glede na drugega
r	radij
E	prožnostni modul
l	dolžina
μ	Poissonovo število
t	čas
J	vztrajnostni moment

Indeks	Pomen
i	splošni indeks
k	kvader
v	valj
z	zobnik
izm, mer	račun na podlagi izmerjenih časov
izr, dim	račun na podlagi izmerjenih dimenzij teles



Slika 1: Skica strižne napetosti

1 Teoretični uvod

Poleg tlačnih obremenitev poznamo strižne, to je ko je vektor normale stranice, kjer apliciramo silo, pravokoten na silo, namesto vzporeden. Za razliko od elastičnega (youngovega modula) tu govorimo strižnem modulu G. Sile pri strižni napetosti delujejo v parih, kot prikazano na skici (1).

Za strižno napetost velja enačba (1).

$$\frac{F}{S} = G\alpha \tag{1}$$

V tej enačbi je α nagib dveh stranskih ploskev kvadra. V primeru te vaje gre za čisto strižno bremenitev. Žica je različno zasukana odvisno od lokacije vzdolž dolge geometrijske osi. Torzijski koeficient D je opredeljen z enačbo:

$$M = D\varphi \tag{2}$$

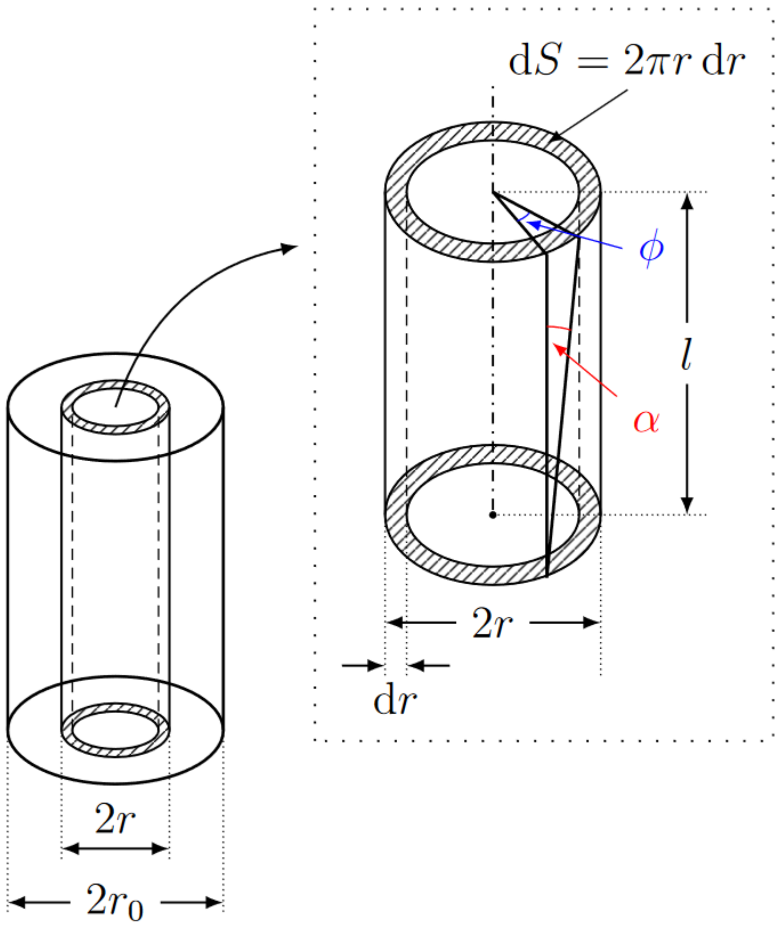
kjer je M navor na žico, φ pa zasuk enega konca žice glede na drugega. Velja da je $D = D(L, d, G)$. Žico obravnavamo kot koncentrično tanke cevke, kjer ima žica dimenzije dolžine l in radija r_0, ki se med sabo tesno prilegajo. To lahko opazimo narisano na skici (2).

Opomnimo zveze $\alpha = \varphi\frac{r}{l}$ iz katere sledi $dM = r\,dF = r\alpha G\,dS$, če to integriramo, dobimo navor ki deluje na osnovno ploskev žice $M = \int dM = \varphi\frac{\pi r_0^4 G}{2l}$. Od tu lahko trivialno odčitamo D in dobimo enačbo (3).

$$D = \frac{\pi r_0^4 G}{2l} \tag{3}$$

Seveda lahko iz enačbe (3) izrazimo strižni modul G, ki je z youngovim modulom E povezan z $G = (E)/(2+2\mu)$, kjer je μ Poissonovo število in predstavlja $\Delta r/r = \mu\;\delta l/l$. Če na spodnji konec žice obesimo telo in jo torzijsko zanihamo, bo ta nihala harmonično in pri zadosti majhnih odmikih, velja enačba (4).

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \tag{4}$$



Slika 2: Torzijska deformacija žice, oziroma kako obravnavamo žico kot koncentrične cevi.

1.1 Vztrajnostni momenti

Za votli valj z debelo steno velja:

$$dJ = r^2 dm \tag{5}$$

$$dm = \rho dV;\ dV = dSh \tag{6}$$

$$dS = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2; \text{to je površina male 'debele' cevčice} \tag{7}$$

$$dA = \pi(r^2 + 2r\,dr + (dr)^2) - \pi r^2;\ (dr)^2 = 0 \tag{8}$$

$$dA = 2\pi r\,dr \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

$$dV = 2\pi hr\,dr \tag{11}$$

$$dm = \rho 2\pi rh\,dr \tag{12}$$

$$dJ = r^2 \rho 2\pi rh\,dr \tag{13}$$

$$dJ = 2\rho\pi r^3 h\,dr \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

$$\rho = \frac{M}{V} \tag{16}$$

$$\rho = \frac{M}{\pi h(r_2^2 - r_1^2)} \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

$$dJ = 2\rho\pi r^3 h\,dr \tag{19}$$

$$J = 2\rho\pi h \int_{r_1}^{r_2} r^3\,dr = \tag{20}$$

$$= \frac{\rho\pi h}{2}(r_2^4 - r_1^4) = \tag{21}$$

$$= \frac{\pi h}{2}[\frac{M}{\pi}(r_2^2 - r_1^2)][(r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2)] \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

$$J = \frac{1}{2}M(r_2^2 + r_1^2) \tag{24}$$

Za kocko z votlo valjasto luknjo pa velja:

$$J = \sigma\left(\frac{S_k}{12}(a^2 + b^2) - \frac{S_i}{2}\left(\frac{d}{2}\right)\right);\ a \approx h \implies \tag{25}$$

$$J = \frac{m_k}{24}\left(\frac{16a^4 - 3d^4}{4a^2 - \pi d^2}\right) \tag{26}$$

1.2 Izpeljava za torzijski koeficient

$$D = (J_p + J_i)\left(\frac{2\pi}{t_i}\right)^2 \wedge J_p = D\left(\frac{t_p}{2\pi}\right)^2 \wedge \left(\frac{2\pi}{t_i}\right)^2 \equiv A \wedge \left(\frac{t_p}{2\pi}\right)^2 \equiv B \tag{27}$$

$$D = DBA + J_i A \tag{28}$$

$$D = \frac{J_i A}{1 - BA} \tag{29}$$

$$D = \frac{J_i \frac{4\pi^2}{t_i^2}}{1 - \frac{t_p^2}{4\pi^2}\frac{4\pi^2}{t_i^2}} \tag{30}$$

$$D = \frac{4 J_i \pi^2}{t_i^2 - t_p^2} \tag{31}$$

$$J_i = \frac{D(t_i^2 - t_p^2)}{4\pi^2} \tag{32}$$

opmoba je, da v enačbah od (27) do (32), je indeks i za označevanje poljubnega telesa, kajti po istme kopitu bomo zračunali za vsa telesa.

2 Empirični del

2.1 Naloge

1. Določi torzijski koeficient D žice,
2. Izračunaj strižni modul G jekla, iz katerega je žica,
3. Določi vztrajnostni moment in vztrajnostni radij danega telesa (kvadra z valjasto votlino) iz meritve nihajnega časa torzijskega nihala in primerjaj rezultat z izračunanim vztrajnostnim momentom.
4. Določi vztrajnostni moment zobnika.

2.2 Potrebščine

- stojalo,
- jeklena žica,
- plošča z ročajem,
- uteži: votel kovinski valj, kvader z valjasto votlino, zobnik,
- tehnica,
- ura,
- kljunasto merilo,
- mikrometer.

2.3 Meritve

Meritve	t prazno [s]	t kocka [s]	t valj [s]	t zobnik [s]
1	2.225	4.276	6.209	3.466
2	2.201	4.281	6.189	3.471
3	2.217	4.277	6.186	3.466
$\bar{t}$ [s]	2.214	4.278	6.195	3.468
σ_t [s]	0.001	0.002	0.010	0.002

Tabela 3: Tabela meritve časa nihanja z različnimi telesi in osnovno statistično obdelavo

Dimenzija žice $r_0 = (0.6 \pm 0.15)\ mm \land l = (0.29 \pm 0.05)\ m$

<table>
<tr><th>vse [m]</th><th>stranica a</th><th>stranica b</th><th>višina</th><th>d</th><th>m [kg]</th></tr>
<tr><td>Kvader</td><td>0.0599</td><td>0.0600</td><td>0.0599</td><td>0.0400</td><td>1.193</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Valj</td><td>d luknje</td><td>d plašča</td><td>višina</td><td colspan="2">m [kg]</td></tr>
<tr><td>0.0145</td><td>0.0879</td><td>0.0494</td><td colspan="2">2.488</td></tr>
<tr><td>Zobnik</td><td colspan="3"></td><td colspan="2">0.755</td></tr>
</table>

Tabela 4: Tabela meritev dimenzij teles

2.4 Rezultati

Iz enačbe (24), dobimo rezultat:

$$J_{v,\,izr.} = (2.47 \pm 0.16)\; g\, m^2 \tag{33}$$

Iz enačbe (31) dobimo rezultat:

$$D = (2.91 \pm 0.19)\; mNm \tag{34}$$

Na podlagi rezultata (34) in enačbe (32), ter enačbe (31), lahko izračunamo vztrajnostni moment kvadra iz dimenzij in časa nihanja, ter ta dva primerjamo.

$$J_{k,\,dim.} = (1.06 \pm 0.05)\; g\, m^2 \tag{35}$$

$$J_{k,\,mer.} = (0.99 \pm 0.07)\; g\, m^2 \tag{36}$$

Opazimo, da se meritev in izračunan vrednost prekrivata izjemno dobro znotraj napake, torej smo zadovoljni, da smo meritev opravili dobro. Zdaj izračunamo še vztrajnostni moment zobnika po enačbi (32), in dobimo:

$$J_{z,\,izr.} = (0.53 \pm 0.04)\; g\, m^2 \tag{37}$$

Za konec pa še iz torzijskega koeficienta D izrazimo strižni modul G po enačbi (3):

$$G = (4 \pm 1)\; GPa \tag{38}$$

3 Zaključek

Z meritvami smo zadovoljni, neposredno imamo podatek tudi o vztrajnostnem momentu žice s ploščo. Eksperiment bi lahko izboljšali z optičnem senzorjem, ki zaznava barvo, in s tem natančneje izmerili nihajni čas, ali merili za več nihajev, kajti s tem povprečje se bolj približa pravemu nihajnemu času. Nihaje je smiselno meriti ob ekstremnih legah.