

University of *Ljubljana*  
Faculty of *Mathematics and Physics*



Fizikalni praktikum 3

# Vaja:

## Poročilo

**Avtor:** Orlič, Luka

**Nosilec:** Kladnik, Gregor

**Asistent:** Podpilec, Rok

Ljubljana, 13. marec 2025

# Kazalo

<b>Seznam uporabljenih simbolov in indeksov</b>	<b>2</b>
<b>1 Teoretični uvod</b>	<b>3</b>
<b>2 Empirični del</b>	<b>5</b>
2.1 Naloga . . . . .	5
2.2 Potrebščine . . . . .	5
2.3 Uporabne enačbe . . . . .	5
2.4 Navodila . . . . .	5
2.5 Znani podatki . . . . .	6
2.6 Meritve . . . . .	6
<b>3 Zaključek</b>	<b>7</b>

## Seznam uporabljenih simbolov in indeksov

Oznaka	Pomen
--------	-------

Indeks	Pomen
--------	-------

## 1 Teoretični uvod

Opisujemo vravko v primeru, ko je njena kinetična (rotacijska) energija mnogo večja od njene potencialne energije. Vrtavka ima dologo os poravnano z  $z$ -osjo. Hkrati pa  $\vec{\omega}_{rot} \parallel \hat{z}$ . Posledično  $\vec{\omega}_{rot} = (0, 0, \omega_z) \equiv \vec{\omega}_z$ . Vztrajnostnega moment je v splošnem tenzor  $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , vendar v našem primeru se poenostavi v matriko  $J = \text{diag}(J_{11}, J_{22}, J_{33})$ , kar pa lahko zapišemo tudi kot vektor  $\vec{J} = (J_{11}, J_{22}, J_{33})$ . Po vseh predpostavkah in poenostavitvah, ki smo jih naredili, lahko **nutacijsko frekvenco** zapišemo kakor:

$$\nu_n = \frac{J_{33}}{J_{11}} \cdot \nu_z; \quad \nu_z = \frac{\omega_z}{2\pi}, \quad (1)$$

**precesijska frekvenca** pa je podana kakor:

$$\nu_p = \frac{1}{4\pi^2} \frac{mgh^*}{J_{33}\nu_z}, \quad (2)$$

kjer je  $m$  masa vrtavke,  $g$  težnostni pospešek in  $h^*$  razdalja med težiščem in oporno točko osi ( $h^*$  je ročica navora).



Slika 1: Prikaz eksperimentalne postavitve.

## 2 Empirični del

### 2.1 Naloga

Izmeri precesijsko ( $\omega_{pr}$ ) in nutacijsko kotno hitrost ( $\omega_N$ ) v odvisnosti od kotne hitrosti ( $\omega_z$ ) vrtavke. Izvedi meritev pri vsaj treh frekvencah  $\nu_z = \omega_z/(2\pi)$ . Na primer pri približno 600, 500 in 400 obratov na minuto (kratica rpm – angl. rotations per minute). Gornjo meritev izvedi pri naslednjih nastavitvah vrtavke:

- vrtavka z utežjo blizu krogle
- utež na sredini palice
- utež na koncu palice (pusti si prostor za oprijem)

Meritve z različnimi nastavitvami vrtavke izvedi pri podobnih frekvencah  $\nu_z$  kot prej, da so rezultati lažje primerljivi. Izmerjene vrednosti  $\omega_{pr}$  in  $\omega_N$  primerjaj z izračunanimi in naredi tabelo.

### 2.2 Potrebščine

- krogla s podnožjem in priborom (palica, utež in ploščica z vzorcem)
- kompresor pod mizo
- stroboskop
- stoparica

### 2.3 Uporabne enačbe

$$J_{krogla} = \frac{2}{5}mr^2$$

$$J_{valja,z} = \frac{1}{2}mr^2$$

$$J_{valja,x} = J_{valja,y} = m \left( \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{12}h^2 \right)$$

Steinerjev izrek :  $J_{\text{new axis}} = J_{\text{old axis}} + mD^2$ ;  $D$  je razdala med staro in novo osjo

### 2.4 Navodila

Sestavi vajo po navodilih. Vrtavka je sestavljena iz kovinske krogle, aluminijaste palice s snemljivo in premakljivo utežjo. Na palici je fiksno pritrjena ploščica z močno kontrastnim vzorcem. Pod stroboskopsko pomočjo vzorca določi frekvenco rotacije okoli lastne osi vrtavke  $\nu_z$ . Vključi kompresor

in ventilator. S prsti zavrtim vrtavko v navpičnem položaju in pustim, da jo zračni curek dodatni zavrti. Spreminjam frekvenco na stroboskopu in ko se vzorec na vrtavki ustali, odčitam izmerjeno vrednost vrtenja. Prislonim svinčnik in s tem izmaknem vrtavko iz osi in vrtavka začne s precesijo. Izmerim precesijski čas pod različnimi koti, da vidim, da je neodvisen od kota. S kratkim udarcem po vrtavki, začnem nutacijo. Potrebno jo je večkrat vzbuditi, saj jo trenje zavira.

## 2.5 Znani podatki

Podane so dimenzije krogle in treh valjev:

$$m_s = 515 \text{ g} \quad 2r_s = 50,8 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} m_r &= 15 \text{ g} & 2r_r &= 51 \text{ mm} & h_r &= 1,1 \text{ mm} \\ m_b &= 27 \text{ g} & 2r_b &= 6,5 \text{ mm} & h_b &= 100,5 \text{ mm} \\ m_w &= 18 \text{ g} & 2r_w &= 20 \text{ mm} & h_w &= 25,2 \text{ mm} \end{aligned}$$

## 2.6 Meritve

<i><b>IZMERJENI PODATKI</b></i>				
$h^* = (0 \pm 0,1) \text{ cm}$				
$\nu_z \pm 50 \text{ [RPM]}$	$\nu_z \pm 0,8 \text{ [Hz]}$	$10t_p \text{ [s]}$	$\nu_p \pm 0,1 \text{ [Hz]}$	$\nu_n \pm 0,1 \text{ [Hz]}$
350	5,8	31,6	0,3	3,7
510	8,5	31,4	0,3	4,6
600	10,0	36,0	0,2	8,4
$h^* = (3,5 \pm 0,1) \text{ cm}$				
$\nu_z \pm 50 \text{ [RPM]}$	$\nu_z \pm 0,8 \text{ [Hz]}$	$10t_p \text{ [s]}$	$\nu_p \pm 0,1 \text{ [Hz]}$	$\nu_n \pm 0,1 \text{ [Hz]}$
360	6	18,0	0,5	2,3
510	8,5	19,2	0,5	3,1
580	9,7	22,4	0,4	3,6
$h^* = (6,5 \pm 0,1) \text{ cm}$				
$\nu_z \pm 50 \text{ [RPM]}$	$\nu_z \pm 0,8 \text{ [Hz]}$	$10t_p \text{ [s]}$	$\nu_p \pm 0,1 \text{ [Hz]}$	$\nu_n \pm 0,1 \text{ [Hz]}$
300	5,0	6,46	1,5	1,8
410	6,8	13,6	0,7	3,6
510	8,5	22,6	0,4	4,7

Tabela 3: Vsebuje vse opravljene meritve.

<b><i>IZRAČUNANI PODATKI</i></b>					
$h^* = (0 \pm 0, 1) \text{ cm}$					
$\nu_z$ [RPM]	$\pm$ [RPM]	$\nu_p$ [Hz]	$\pm$ [Hz]	$\nu_n$ [Hz]	$\pm$ [Hz]
350	50,00	0,79	0,12	2,86	0,41
510	50,00	0,55	0,06	4,17	0,41
600	50,00	0,45	0,04	4,90	0,41
$h^* = (3, 5 \pm 0, 1) \text{ cm}$					
$\nu_z$ [RPM]	$\pm$ [RPM]	$\nu_p$ [Hz]	$\pm$ [Hz]	$\nu_n$ [Hz]	$\pm$ [Hz]
360	50,00	0,91	0,13	2,60	0,35
510	50,00	0,66	0,07	3,58	0,35
580	50,00	0,58	0,05	4,07	0,36
$h^* = (6, 5 \pm 0, 1) \text{ cm}$					
$\nu_z$ [RPM]	$\pm$ [RPM]	$\nu_p$ [Hz]	$\pm$ [Hz]	$\nu_n$ [Hz]	$\pm$ [Hz]
300	50,00	1,29	0,22	1,74	0,29
410	50,00	0,94	0,12	2,38	0,29
510	50,00	0,76	0,08	2,96	0,30

Tabela 4: Vsebuje vse teoretične izračune.

### 3 Zaključek

Meritve in izračuni se ne prekrivajo v napah, zato z izvedenimi meritvami nismo zadovoljni in priporočamo, da se poskus ponovno izvede z opremo, ki lahko zagotovi večjo konsistentnost.

Med opravljanjem poskusa smo opazili, da kompresor in ventil v trenutni postavitvi ne moreta zagotoviti konstantne kotne hitrosti vrtavke, namreč ta med izvajanjem meritev pospešuje ali zavira.

Opazili smo tudi, da pri odmikih iz  $z$ -osi, da bi dobili precesijo in nato nutacijo, dotik svinčnika oz. druge palice, ki naj bi vrtavko odmaknila, povzroča kaotično obnašanje, ki se lahko konča tudi v temu, da vrtavka izstopi iz jamice in izleti po mizi. Priporočili bi način za bolj konsistenten odmik od  $z$ -osi, za katero je prva ideja neka magnetna naprava tipa, da je najvišji aluminijasti valj zamenjan z magnetom, in nato povzročimo precesijo in nutacijo s tem, da približamo drugi magnet po  $z$ -osi.

Dodatno je videti, da obstaja trenje med podlago in vrtavko, četudi naj pritisk iz kompresorja poskrbel, da je zanemarljiv. Priporočamo, da bi podlaga bila bolj gladka in morda prekrita z neko tekočino, ki bi zmanjšala vpliv trenja, a opozarjamo, da bi na vrtavko imela vpliv tudi viskoznost tekočine.

Merjenje frekvence nutacije je tudi zelo težko s stroboskopom in bi predlagali kakšno drugo metodo. Prva misel je, da bi lažje in bolj konsistentno lahko merili, če bi imeli na položajo stroboskopa hitro kamero, ki bi gibanje snemala. Tako bi lahko tudi določali maksimalni in minimalni kot nutacije, ter kot precesije, ter zares lahko pokazali, da je frekvenca precesije neodvisna od odmika od  $z$ -osi.