



图像处理与识别

——Part 4 图像频域增强

主讲：张磊



图像频域增强

► 频域处理主要内容

- ✓ 频域滤波基本原理
- ✓ 频域滤波方法：低通滤波、高通滤波、同态滤波
- ✓ 从频域规范产生空域模板：基本原理



图像频域增强

▶ 频域处理主要内容

➤ 空域图像增强的理论基础---线性系统滤波

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$$

▶ 由傅里叶变换的卷积定理，上述系统可描述为

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

- ▶ 这里， $F(u, v)$ 是待增强图像 $f(x, y)$ 的傅里叶变换，即将图像分解成了一系列基图像； $H(u, v)$ 对应于空域线性系统单位冲击响应函数的傅里叶变换，称之为传递函数或滤波器函数。通过一系列基图像加权，实现图像增强——图像频域增强。



图像频域增强

▶ 频域增强基本原理

- ✓ 预处理: $f(x, y) = (-1)^{x+y} f(x, y)$, 频谱中心化
- ✓ 傅里叶变换: $F(u, v) = F\{f(x, y)\}$
- ✓ 滤波: $G(u, v) = F(u, v)H(u, v)$
- ✓ 反变换: $g(x, y) = F^{-1}\{G(u, v)\}$
- ✓ 后处理: $g(x, y) = (-1)^{x+y} g(x, y)$



图像频域增强

- ▶ 根据信息(信号+噪声)在空域和频域的对应关系, 在傅里叶域, 变换系数反映了图像在空域难以定义的特征:
- ✓ 频谱的直流低频分量对应于图像的平滑区域(背景、信号缓变部分)
- ✓ 频谱的高频分量对应于图像的边缘或变换剧烈区域(空间位置突变的信息)
- ✓ 外界叠加噪声对应于频谱中频率较高的部分
- ✓ 恒定的干扰条纹对应于频谱中的特征点

设计一个滤波器, 通过提升、压低、去除某些频率分量, 从而达到图像增强的目的。

对于较为复杂的杂波以及多特征的增强, 空域模板法性能有限。



图像频域增强

► 空域滤波与频域滤波的等价关系

如：空域模板平滑等价于频域低通滤波，空域模板的频率响应就是频域低通滤波器函数

$$W = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

其频率响应

$$H(w_m, w_n) = \frac{1}{9} (1 + 2\cos(w_m))(1 + 2\cos(w_n))$$



图像频域增强

▶ 频域滤波

□ 低通滤波器

- ✓ 频域低通滤波的基本思想
- ✓ 理想低通滤波器(ILPF)、Butterworth低通滤波器(BLPF)、指数滤波器、梯形滤波器

□ 高通滤波器

- ✓ 频域高通滤波的基本思想
- ✓ 理想高通滤波器(IHPF)、Butterworth高通滤波器(BHPF)、指数滤波器、梯形滤波器

□ 同态滤波器

- ✓ 基本思想



图像频域增强

► 频域滤波

□ 低通滤波器

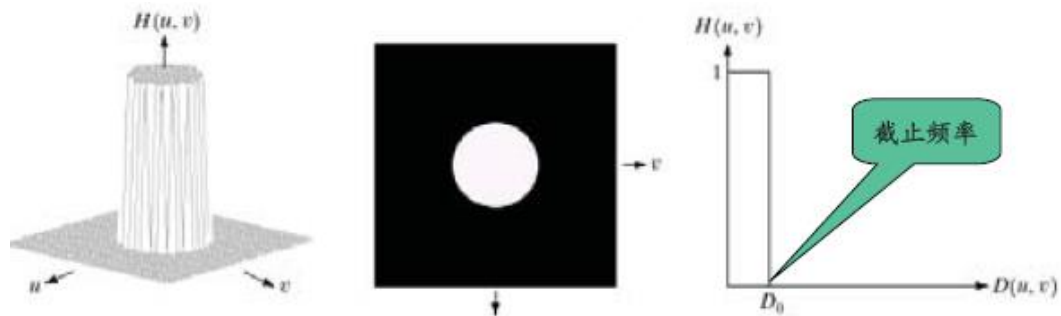
- ✓ 频域低通滤波的基本思想：构造一个低通滤波器 $H(u,v)$ ，使低频分量顺利通过，并有效阻止高频分量(高频噪声)，再经过逆变换，获得平滑图像。
- ✓ 低通滤波是一个以牺牲图像清晰度为代价来减少干扰效果的过程

□ 理想低通滤波器(ILPF)

$$H(u,v) = \begin{cases} 1; & \text{if } D(u,v) \leq D_0 \\ 0; & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

D_0 ——截止频率

$D(u,v)$ —— (u,v) 到原点的距离，距离函数



三维透视图、幅频谱、滤波器矩形特性曲线；
以 D_0 为半径的圆内所有频率分量无失真通过，
而圆外的所有频率分量全部抑制。



图像频域增强

► 理想低通滤波器(ILPF)

✓ 截止频率 D_0 设计

D_0 , 即圆形半径 r 的计算;

根据总能量的90%所占的圆的半径;

总能量的计算: $\sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u, v)$

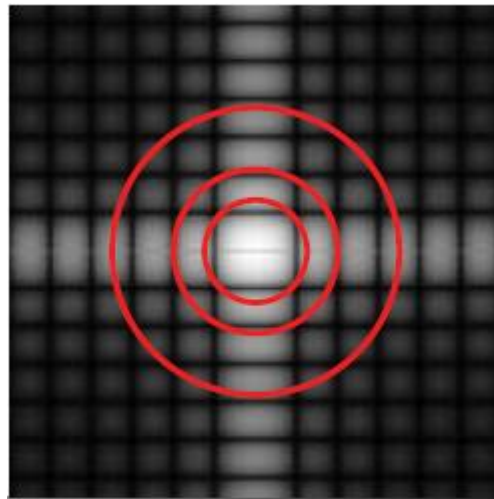
其中, $p(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$

圆形内的能量: $\sum \sum P(u, v)$

根据 $90\% = \frac{\sum_u \sum_v P(u, v)'}{\sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u, v)}$ 的值

✓ 求出相应的 D_0

$$r = D_0 = (u^2 + v^2)^{1/2}$$



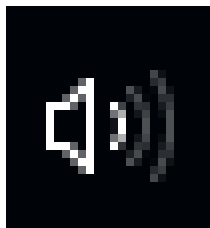


图像频域增强

► 理想低通滤波器特性分析

- ✓ D_0 半径内的频率分量无损通过
- ✓ 园外的频率分量会被滤除
- ✓ 若滤除的高频分量中含有大量的边缘信息，会发生图像边缘模糊现象

90%的能量被保留，而大部分尖锐的细节信息存在于去掉的10%的能量中，被平滑的图像被一种非常严重的**振铃效果**所影响，见书P82





图像频域增强

► 理想低通滤波器实现

采用理想低通，截止频率为 $D_0=10, 50, 100, 200$

步骤：

1. 构造频率变量

$$U = 1 - \frac{M}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{M}{2} - 1$$

$$V = 1 - \frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

2. 计算 (U, V) 到原点的距离

$$D_{ij} = \sqrt{U_i^2 + V_i^2}$$

3. 定义截止频率 D_0

4. 计算滤波器函数 H



图像频域增强

► 理想低通滤波器实现

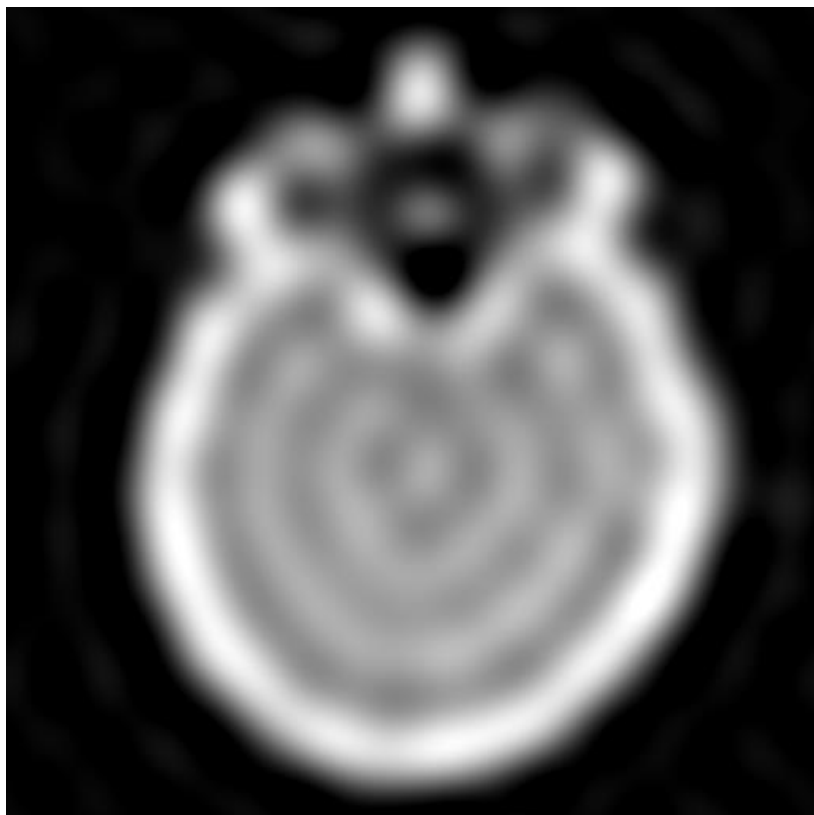


一幅高频信息较强的原图像



图像频域增强

► 理想低通滤波器实现



截至频率为 $D_0 = 10$



截至频率为 $D_0 = 50$



图像频域增强

► 理想低通滤波器实现



截至频率为 $D_0 = 100$



截至频率为 $D_0 = 200$



图像频域增强

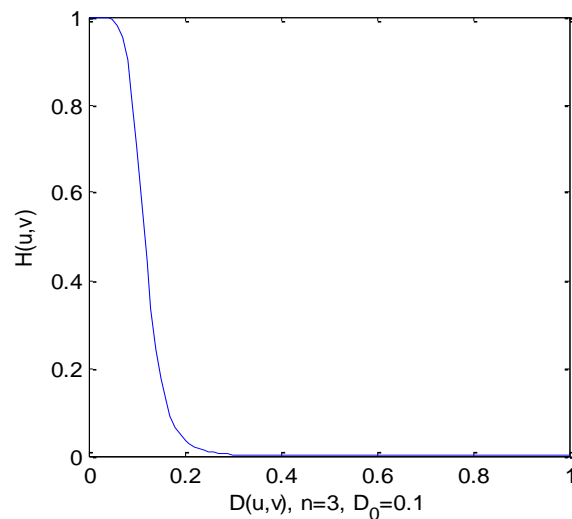
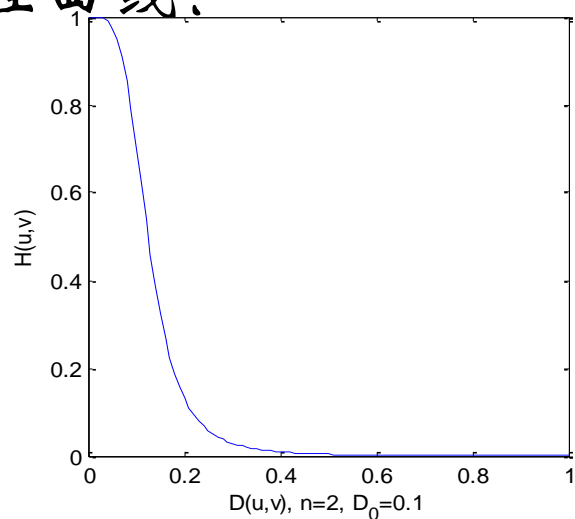
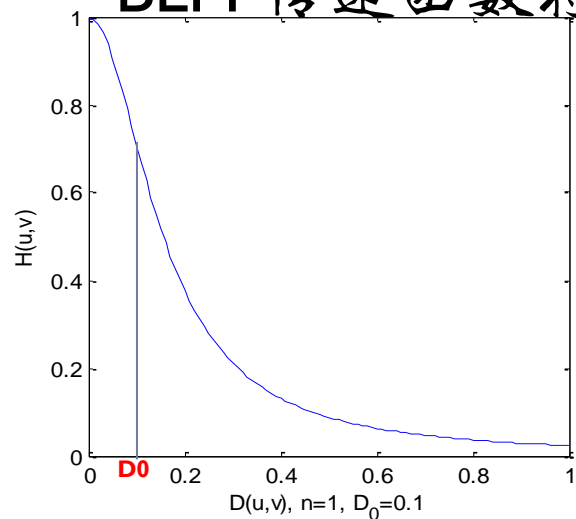
► Butterworth低通滤波器(BLPF)

□ 定义

一个截止频率在 origin 距离为 D_0 的 n 阶 BLPF 的传递函数为

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + (\sqrt{2} - 1)[D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

BLPF 传递函数特性曲线:

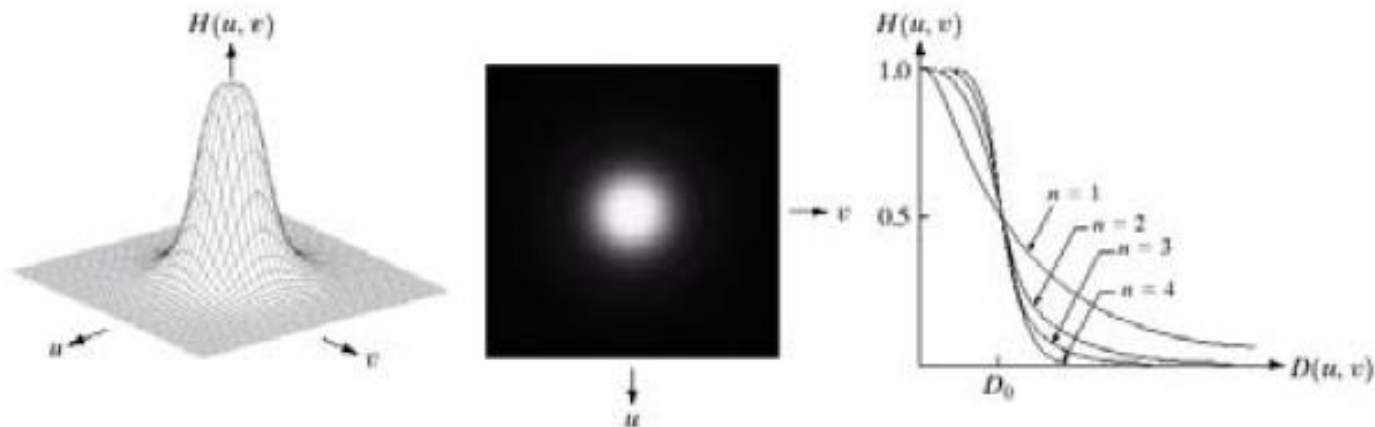




图像频域增强

► Butterworth低通滤波器(BLPF)

三维透视图、幅频谱、滤波器矩形特性曲线



► 截止频率设计

- 通常把 $H(u, v)$ 开始小于其最大值的一定比例的点当作其截止频率点。比如当 $D_0 = D(u, v)$ 时, $H(u, v) = 1/\sqrt{2}$



图像频域增强

► Butterworth低通滤波器(BLPF)的实现

截止频率为 $D_0=10, 50, 100, 200$

步骤:

1. 构造频率变量

$$U = 1 - \frac{M}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{M}{2} - 1$$

$$V = 1 - \frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

2. 计算 (U,V) 到原点的距离

$$D_{ij} = \sqrt{U_i^2 + V_i^2}$$

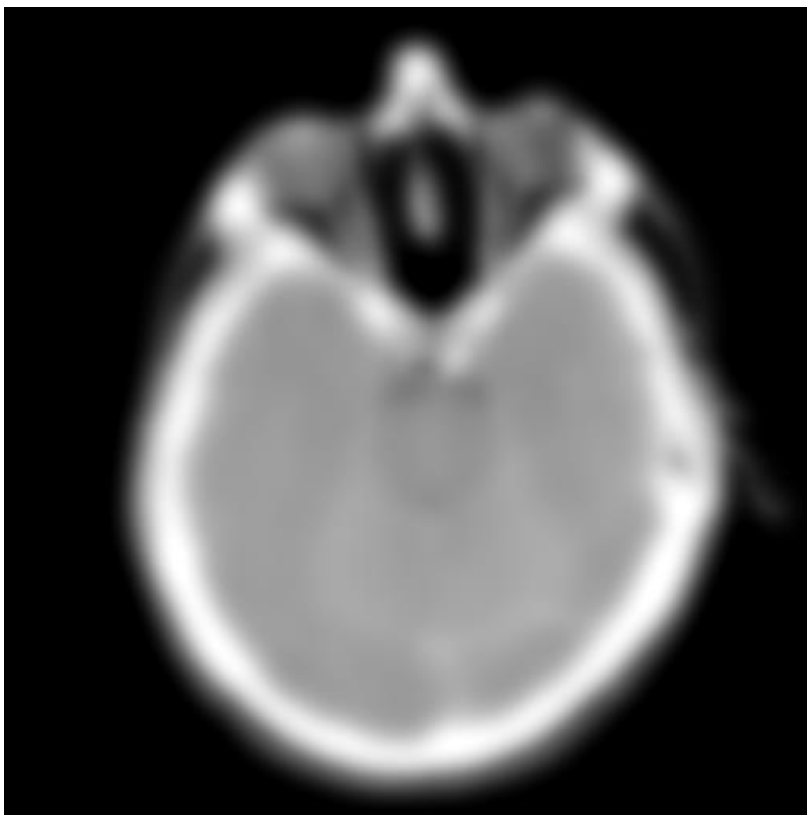
3. 定义截止频率 D_0

4. 计算滤波器函数 H

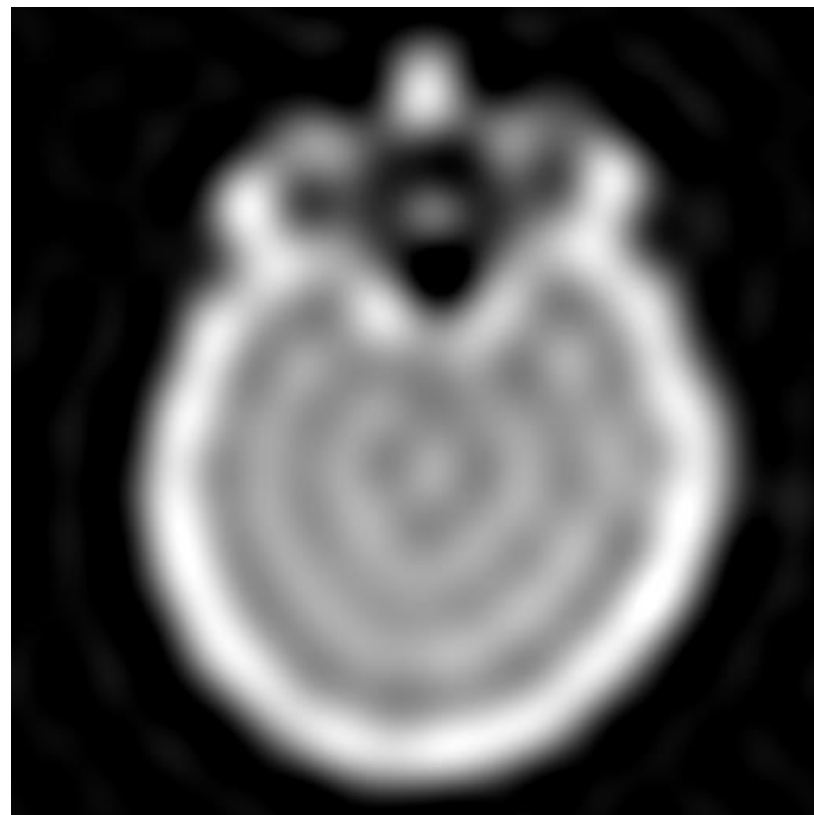


图像频域增强

► Butterworth低通滤波器(BLPF)的实现



截至频率为 $D_0 = 10$ ，巴特沃斯



截至频率为 $D_0 = 10$ ，理想低通

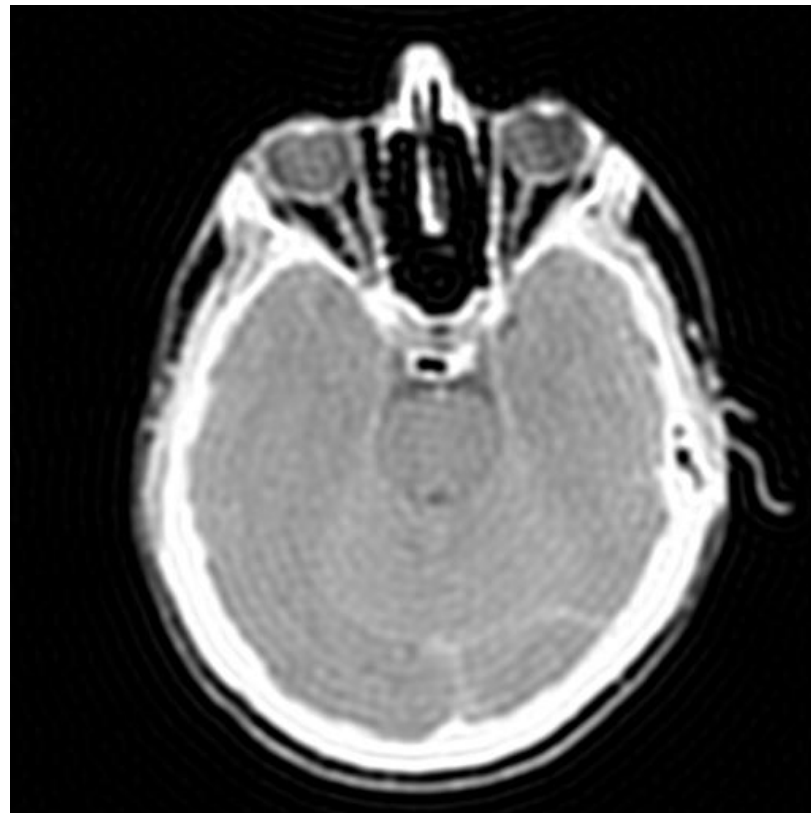


图像频域增强

► Butterworth低通滤波器(BLPF)的实现



截至频率为 $D_0 = 50$ ，巴特沃斯



截至频率为 $D_0 = 50$ ，理想低通



图像频域增强

► Butterworth低通滤波器(BLPF)的实现



截至频率为 $D0 = 100$ ，巴特沃斯



截至频率为 $D0 = 100$ ，理想低通



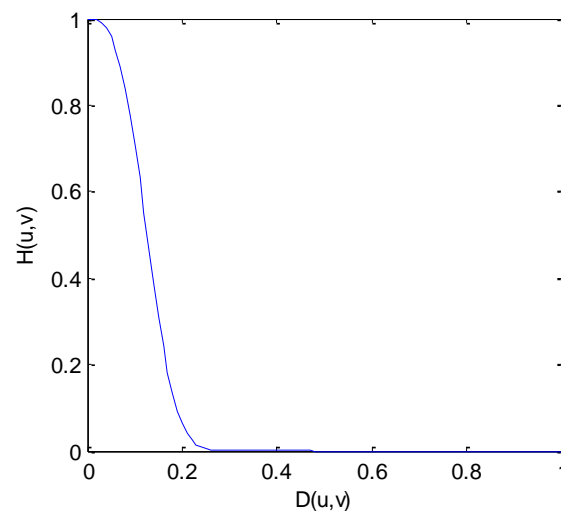
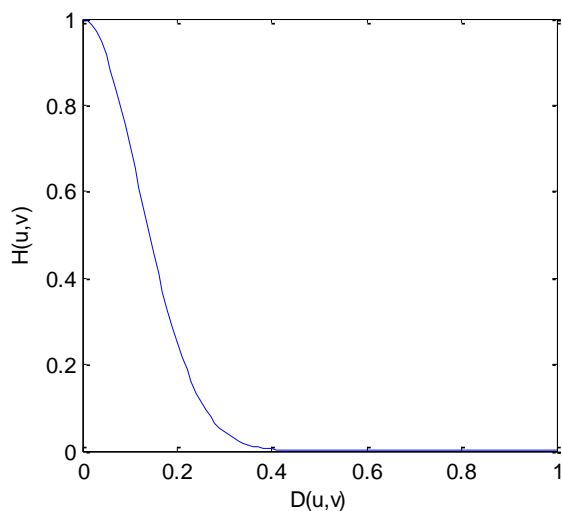
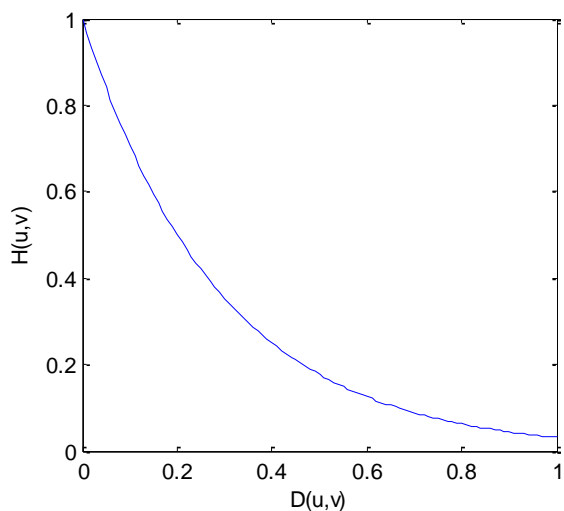
图像频域增强

► 指数低通滤波器(ELPF)

□ 定义

► 指数低通滤波器是一种平滑滤波，传递函数定义为

$$H(u, v) = \exp \left\{ - \left[\frac{D(u, v)}{D_0} \right]^n \right\}$$





图像频域增强

► 指数低通滤波器(ELPF)

□ 特性

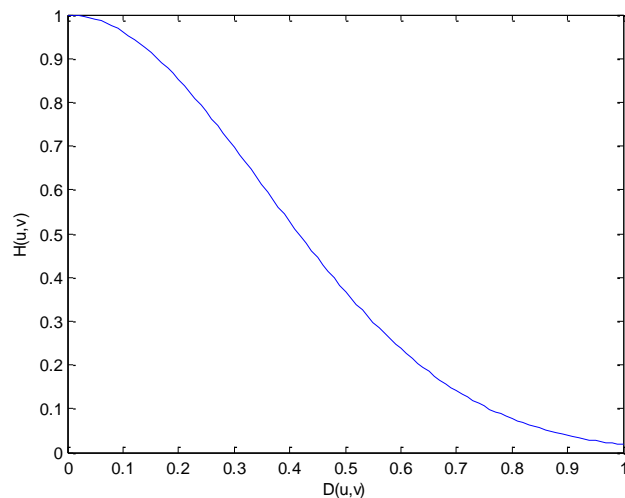
与BLPF相比，ELPF的传递函数具有更快的衰减率， n 越大，衰减越快；具有更平滑的过渡带，滤波图像稍模糊，但没有振铃现象。

一般，2阶指数滤波具有较好的特性。

高斯低通滤波器(GLPF)

与ELPF具有相似的特性。

$$H(u, v) = \exp \left\{ -\frac{D^2(u, v)}{D_0^2} \right\}$$





图像频域增强

► 指数低通滤波器(ELPF)实现

截止频率为 $D_0=10, 50, 100, 200$

步骤:

1. 构造频率变量

$$U = 1 - \frac{M}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{M}{2} - 1$$

$$V = 1 - \frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

2. 计算 (U,V) 到原点的距离

$$D_{ij} = \sqrt{U_i^2 + V_j^2}$$

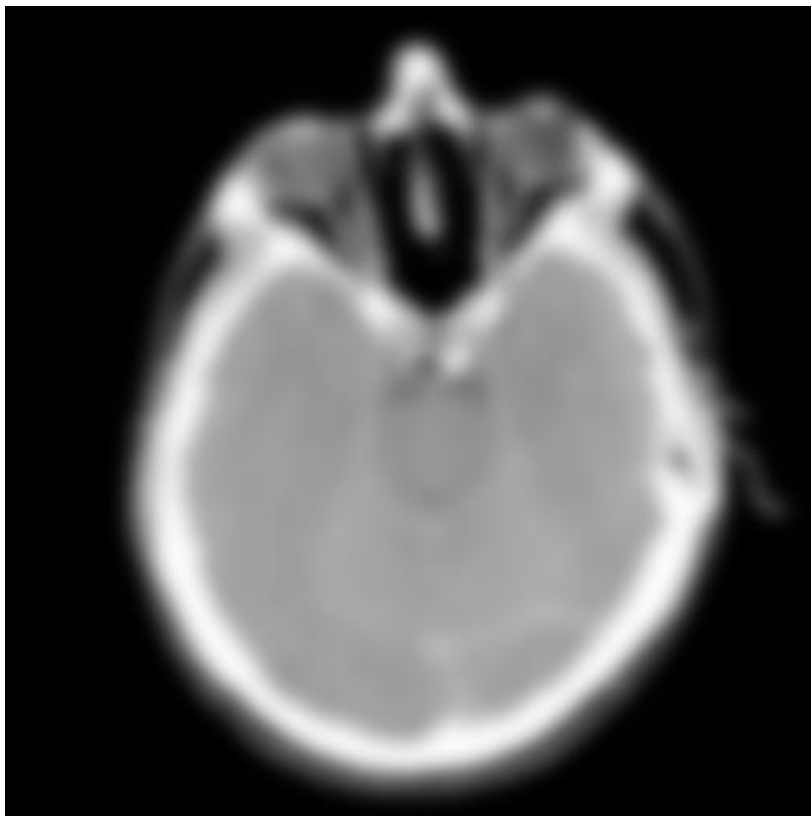
3. 定义截止频率 D_0

4. 计算滤波器函数 H



图像频域增强

► 指数低通滤波器(ELPF)实现



截至频率为 $D_0 = 10$



截至频率为 $D_0 = 100$



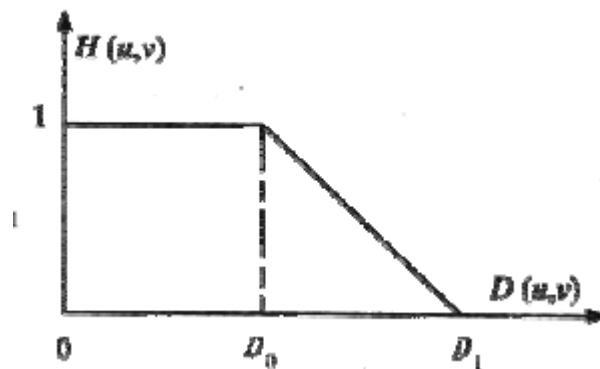
图像频域增强

► 梯形低通滤波器(TLPF)

□ 定义

梯形低通滤波器是理想低通滤波器和完全平滑滤波器的折合，其传递函数为

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) < D_0 \\ \frac{D_1 - D(u, v)}{D_1 - D_0} & D_0 \leq D(u, v) \leq D_1 \\ 0 & D(u, v) > D_1 \end{cases}$$



其中， D_0 为截止频率。

特性：滤波效果好于理想低通滤波ILPF,振铃效应也好于ILPF，但差于BLPF。



图像频域增强

► 低通滤波器

截至频率越大，保留的频率成分(低频)越多。

与高通相反，截至频率越大，保留的频率成分(高频)越少。



图像频域增强

► 高通滤波器

□ 基本思想

选取一个滤波器传递函数 $H(u,v)$ ，通过它减少 $F(u,v)$ 的低频部分来得到 $G(u,v)=F(u,v)H(u,v)$ ，再通过逆变换得到锐化后的图像。

基本形式： $H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$

图像的边缘反映在频域是高频，因此可以通过频域高通滤波得到图像的边缘信息 Δf ，从而获得锐化图像，即

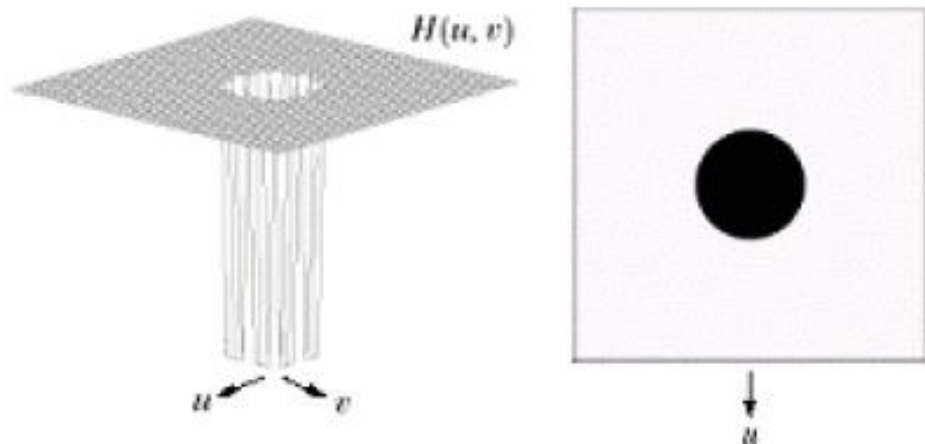
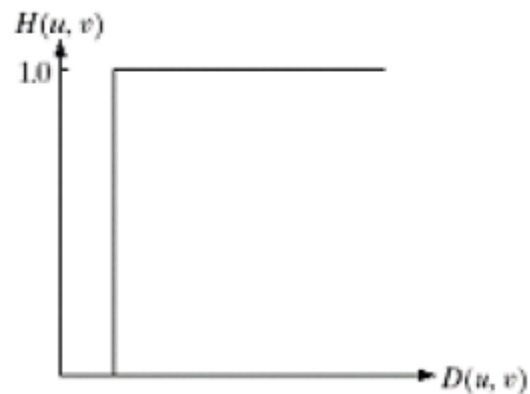
$$g(m, n) = f(m, n) + \alpha \cdot \Delta f$$



图像频域增强

- ▶ 理想高通滤波器(IHPF)
- ▶ 传递函数表达式为

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$





图像频域增强

► 理想高通滤波器(IHPF)实现

截止频率为 $D_0=10, 50, 100, 200$

步骤:

1. 构造频率变量

$$U = 1 - \frac{M}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{M}{2} - 1$$

$$V = 1 - \frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

2. 计算 (U, V) 到原点的距离

$$D_{ij} = \sqrt{U_i^2 + V_j^2}$$

3. 定义截止频率 D_0

4. 计算滤波器函数 H



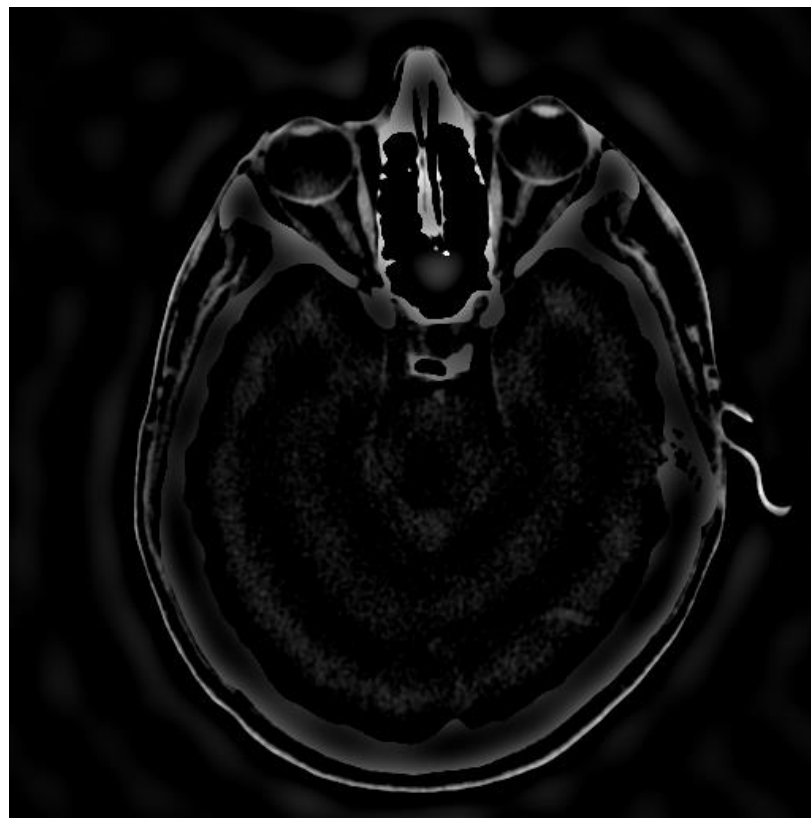


图像频域增强

► 理想高通滤波器(IHPF)实现



原始图

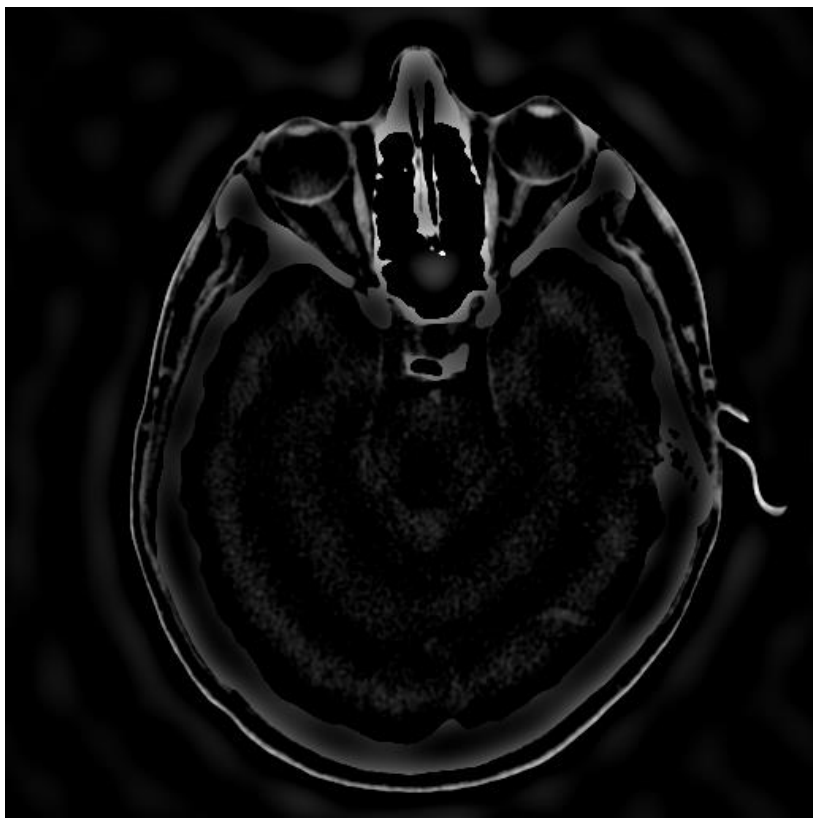


截至频率为 $D_0 = 10$

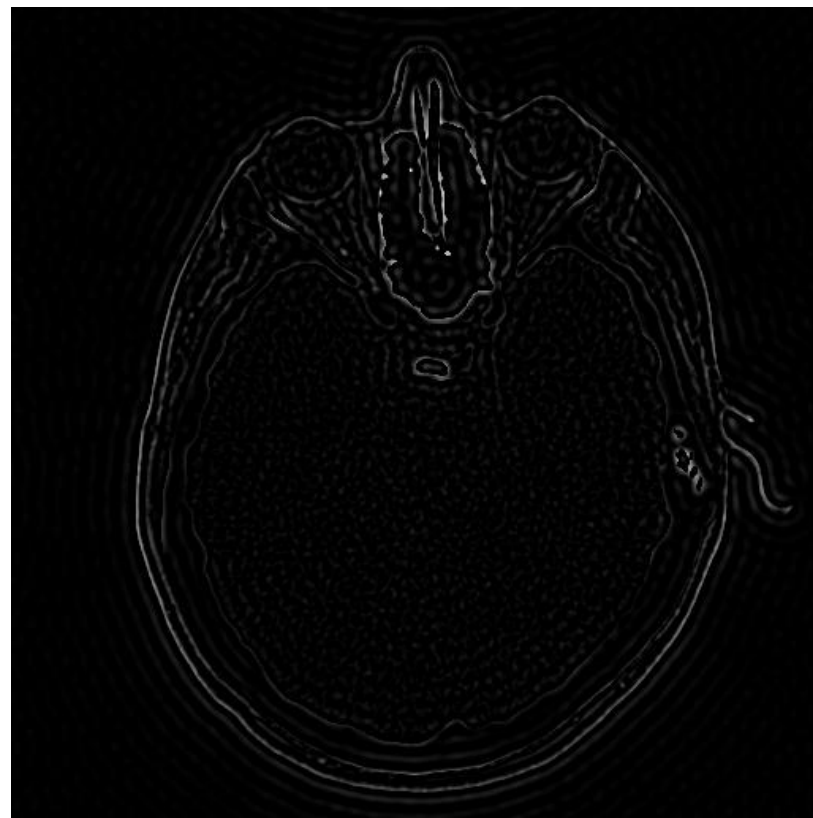


图像频域增强

► 理想高通滤波器(IHPF)实现



截至频率为 $D_0 = 10$

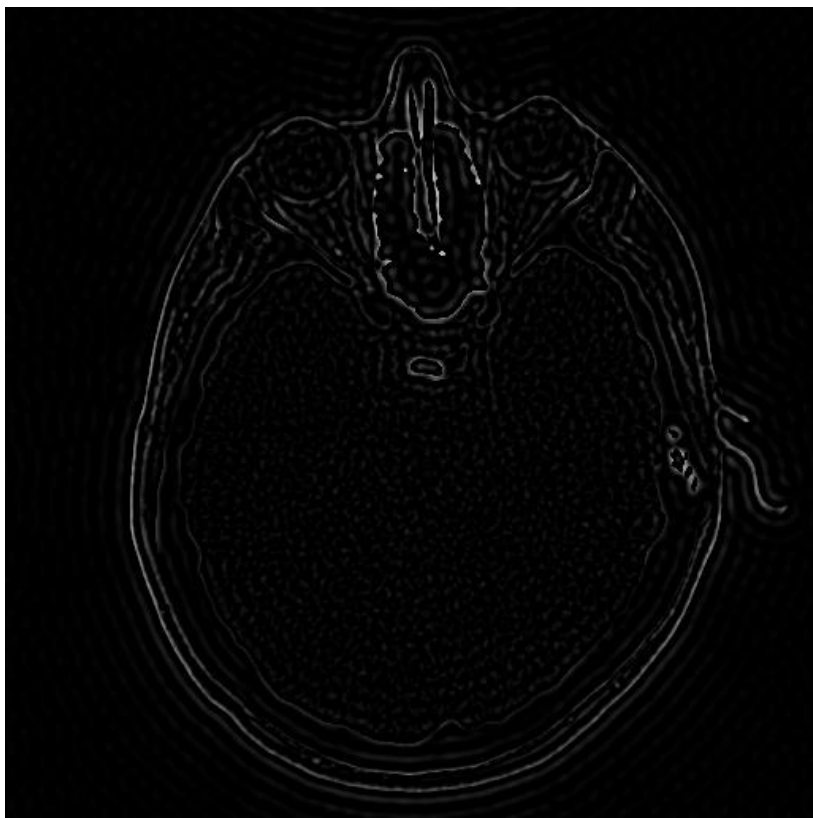


截至频率为 $D_0 = 50$



图像频域增强

► 理想高通滤波器(IHPF)实现



截至频率为 $D_0 = 50$



截至频率为 $D_0 = 100$

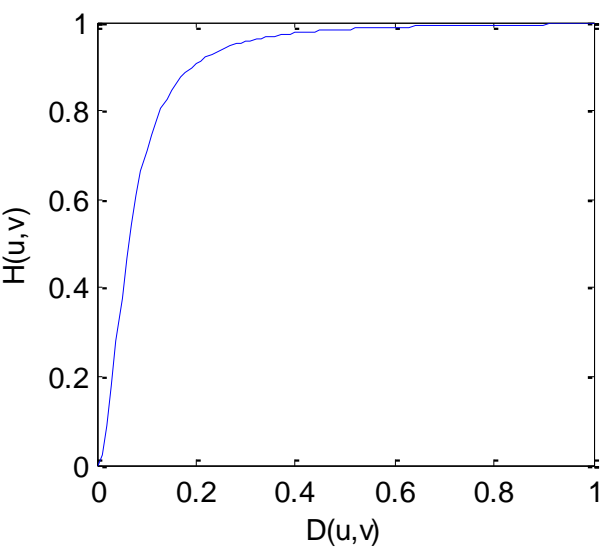


图像频域增强

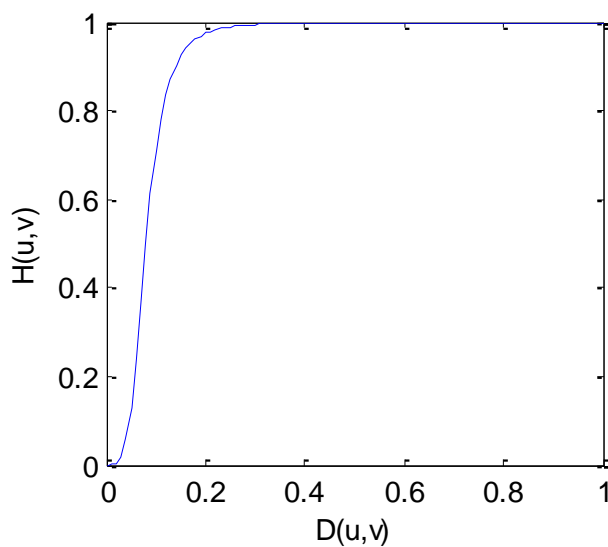
► Butterworth高通滤波器(BHPF)

□ 传递函数:

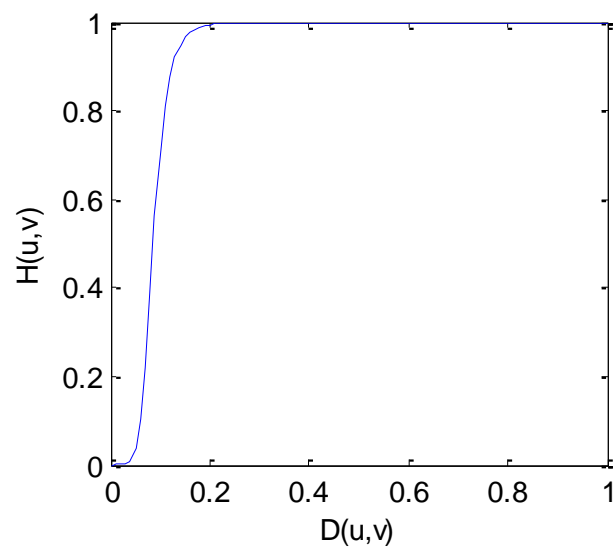
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + (\sqrt{2} - 1)[D_0/D(u, v)]^{2n}}$$



$n=1$



$n=2$

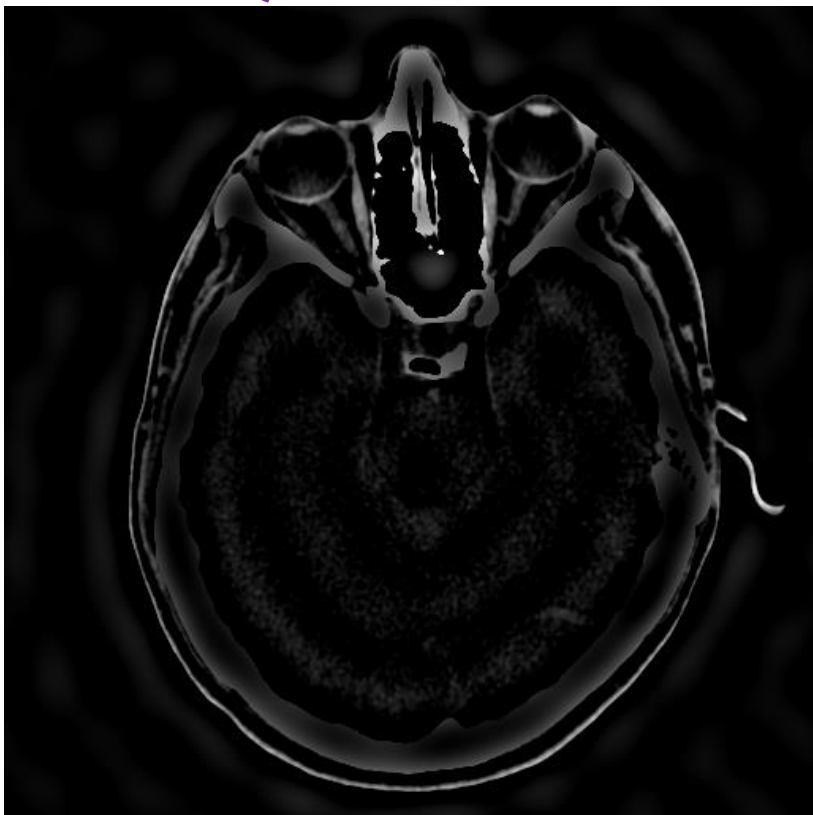


$n=3$



图像频域增强

► Butterworth高通滤波器(BHPF)实现 与理想高通对比



截至频率为 $D_0 = 10$ ，理想低通

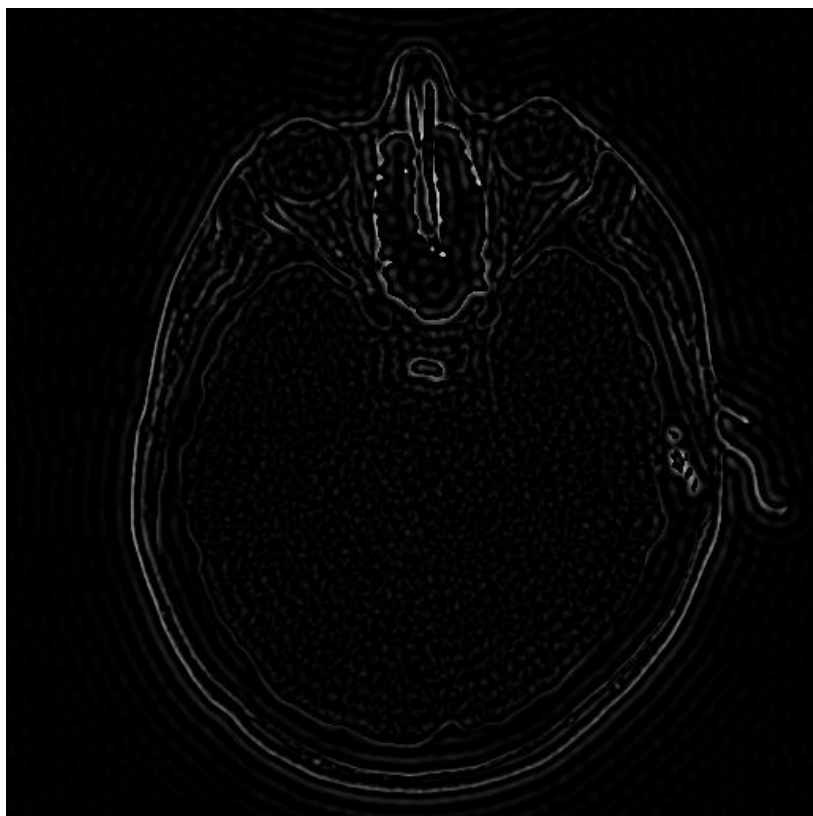


截至频率为 $D_0 = 10$ ，巴特沃斯



图像频域增强

► Butterworth高通滤波器(BHPF)实现 与理想高通对比



截至频率为 $D_0 = 50$ ，理想低通



截至频率为 $D_0 = 50$ ，巴特沃斯

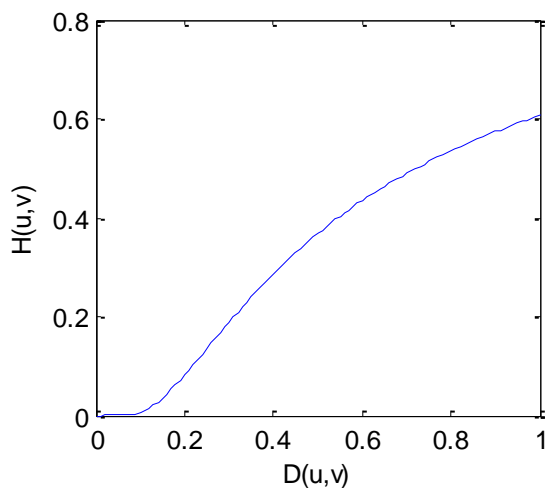


图像频域增强

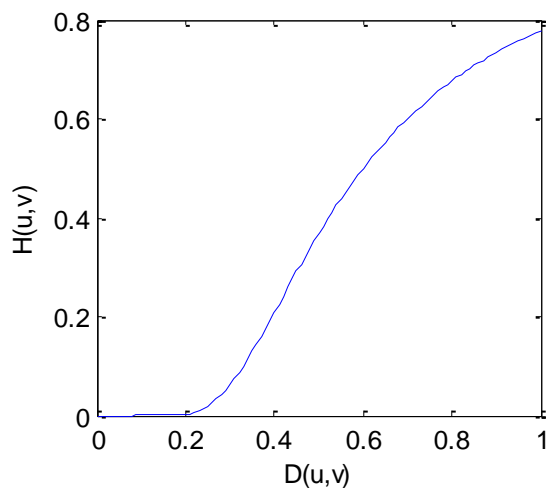
► 指数高通滤波器(EHPF)

□ 传递函数:

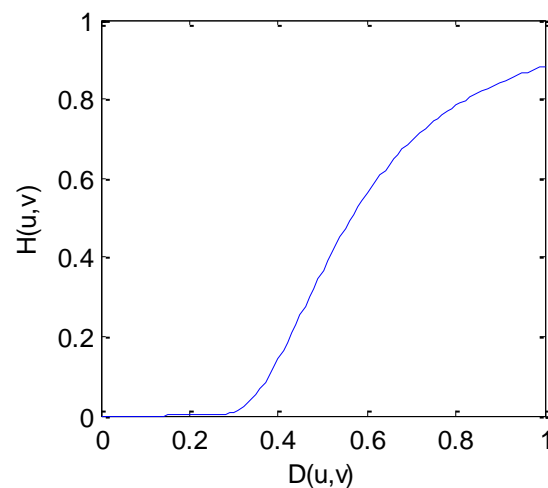
$$\square H(u, v) = \exp\left(-\left[\frac{D_0}{D(u, v)}\right]^n\right)$$



$n=1$



$n=2$



$n=3$



图像频域增强

► 指数高通滤波器实现



原始图



截至频率为 $D_0 = 10$



图像频域增强

► 指数高通滤波器实现



截至频率为 $D0 = 10$



截至频率为 $D0 = 50$

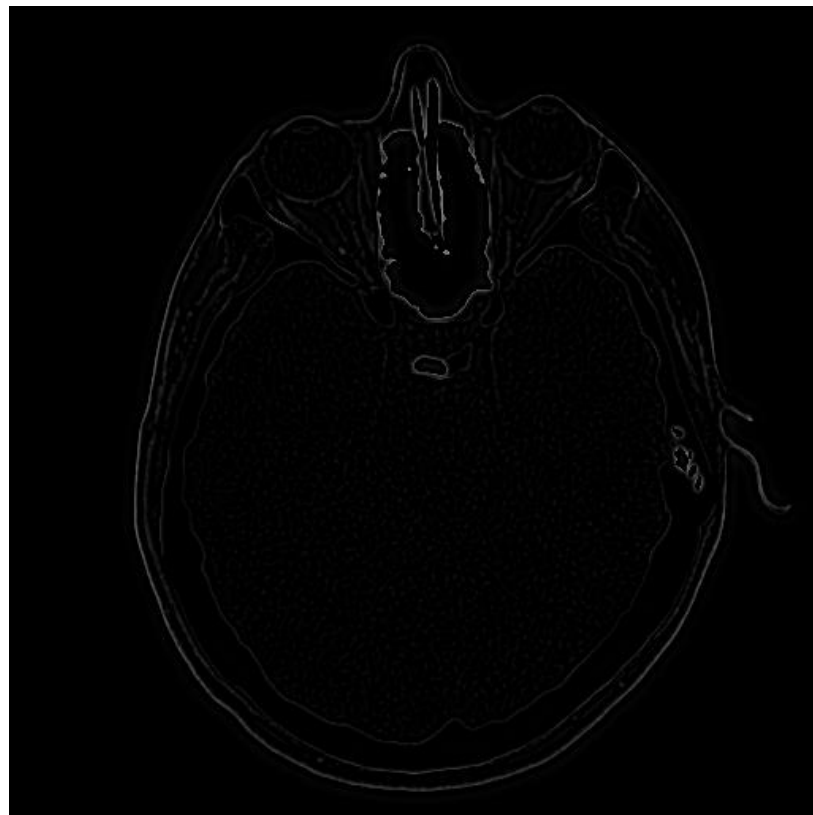


图像频域增强

▶ 指数高通滤波器实现



截至频率为 $D0 = 50$



截至频率为 $D0 = 100$



图像频域增强

► 高斯高通滤波器(GHPF)

► 传递函数:

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

其中, D_0 为截至频率。

► 拉普拉斯算子的频域实现 [参考第三部分P56]

$$H(u, v) = 4\pi^2(u^2 + v^2)$$

拉普拉斯图像:

$$-\nabla^2 f(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(u, v)H(u, v)\}$$



图像频域增强

► 高频强调滤波[参考第三部分P54]

与空域图像锐化中的高增益滤波器对应。

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \mathfrak{F}^{-1}\{[1 + k \cdot [1 - H_{LP}(u, v)]]F(u, v)\} \\ &= \mathfrak{F}^{-1}\{[1 + k \cdot H_{HP}(u, v)]F(u, v)\} \end{aligned}$$

高频强调滤波的更一般表达式：

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{[k_1 + k_2 \cdot H_{HP}(u, v)]F(u, v)\}$$

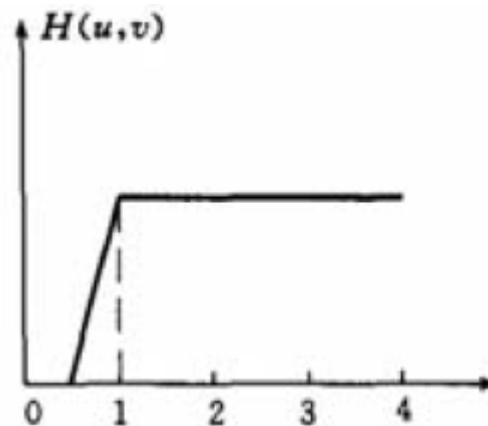


图像频域增强

► 梯形高通滤波器(EHPF)

► 传递函数:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0; & D(u, v) < D_1 \\ \frac{D(u, v) - D_1}{D_0 - D_1}; & D_1 \leq D(u, v) \leq D_0 \\ 1; & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$





图像频域增强

► 频域高通滤波器特性分析

- 问题：低频成分被严重地消弱，使图像失去层次。
- **需要注意的是**，高通滤波器输出并不是锐化的图像，而是图像的高频分量即图像的边缘。因此，还需要加上原图像，才能得到期望的锐化图像。
- 另外，在上述的低通或高通滤波器设计中，只考虑了单方面。如何处理低通和高通同时存在的情况？也就是既需要低通，又需要高通？



图像频域增强

▶ 同态滤波

- **目的**：为了达到压制低频部分（灰度动态范围），同时又能提升高频部分（对比度）。
- **背景**：根据图像的形成和光特性，一幅图像是由光源的照度分量 $i(m,n)$ 和目标的反射分量 $r(m,n)$ 组成，即

$$f(m,n) = i(m,n) \cdot r(m,n)$$

在理想条件下，照度分量 $i(m,n)$ 是常数，可以无失真的反映 $r(m,n)$ ；在实际中，光照并不均匀。而且，照度分量 $i(m,n)$ 是缓慢变化，表现为低频部分，而 $r(m,n)$ 反映目标的细节，表现为高频。

因此，需要对**照度分量进行压缩**，对**反射分量进行增强**，使图像更清晰，即同态滤波。



图像频域增强

► 同态滤波

□ 同态滤波原理

为了实现同态滤波，需要将 $i(m, n)$ 和 $r(m, n)$ 分开，并分别采取压缩低频、提升高频的方法。

对上式两端取对数，有

$$z(m, n) = \ln[f(m, n)] = \ln[i(m, n)] + \ln[r(m, n)]$$

然后，进行频域变换(FFT)

$$Z(u, v) = I(u, v) + R(u, v)$$



图像频域增强

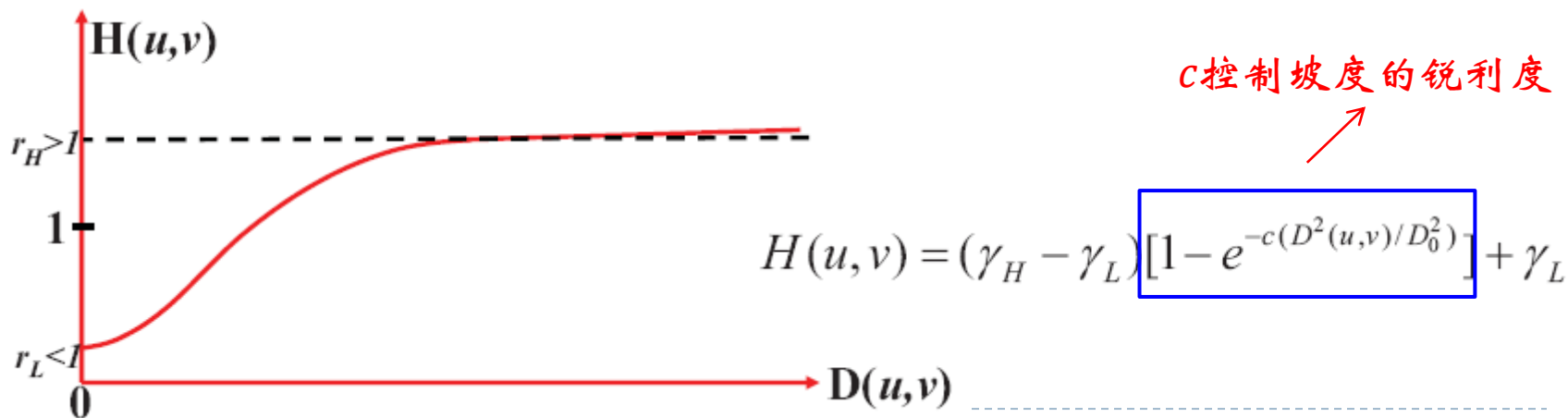
▶ 同态滤波

在频域，采用滤波器 $H(u,v)$ 进行滤波处理，有

$$\begin{aligned} S(u, v) &= H(u, v)Z(u, v) \\ &= H(u, v)I(u, v) + H(u, v)R(u, v) \end{aligned}$$

然后，进行反变换到空域，再取指数运算，获得同态滤波后的空域图像。

这里， $H(u,v)$ 即为同态滤波器。





图像频域增强

▶ 同态滤波 特性分析

- 图像的照度分量是平缓的空域变换，而反射分量近于陡峭的空域变换；
- 低频部分对应于照度分量，而高频部分对应于反射分量；
- 上述特性是粗略的近似，可用于图像的增强；
- 可用利用同态滤波器对照度分量和反射分量分别操作进行
- 那么需要找一个滤波器函数 $H(u,v)$ ，对低频和高频部分具有压缩和提升作用。



图像频域增强

▶ 选择性滤波

在很多应用中，需要对指定的频段进行处理，即选择性滤波。主要有两类：
带通/带阻滤波器、陷波滤波器。

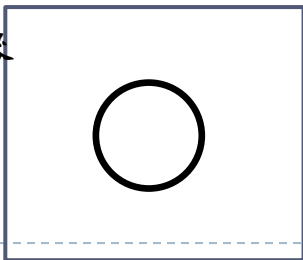
➤ 带通/带阻滤波器

设 W 为通带/阻带的带宽(粗略)，则带阻滤波器的传递函数 $H_{BR}(u, v)$ 表示为

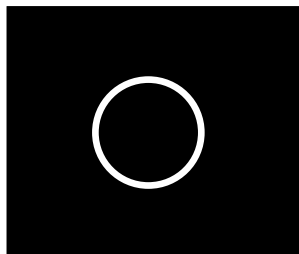
理想	Butterworth	高斯
$H(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{若 } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{DW}{D^2 - D_0^2} \right]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2 - D_0^2}{DW} \right]^2}$

带通滤波器的表达式： $H_{BP}(u, v) = 1 - H_{BR}(u, v)$ ，类似于低通和高通。

带阻滤波器



带通滤波器



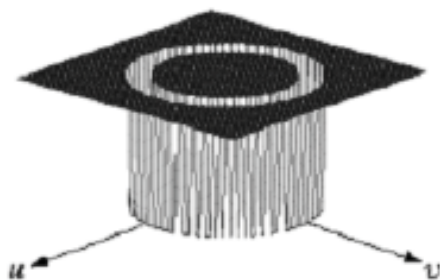


图像频域增强

► 带阻滤波器

► 理想带阻滤波器

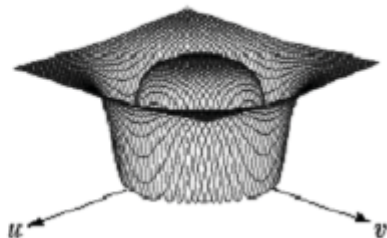
$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) < D_0 - \frac{W}{2} \\ 0 & D_0 - \frac{W}{2} \leq D(u, v) < D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & D(u, v) \geq D_0 + \frac{W}{2} \end{cases}$$



► 巴特沃斯带阻滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$

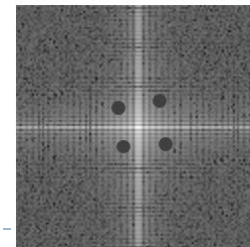
$$D(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$



► 高斯带阻滤波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D^2(u, v) - D_0^2}{D(u, v)W} \right]^2}$$





图像频域增强

► 陷波滤波器(notch filter)

作用:实现某一频率点的信号迅速衰减,从而阻碍该频率的信号通过。从功能上,陷波滤波器属于带阻滤波器,只是频带十分狭窄。(陷波带阻滤波器)

陷波带阻滤波器:可以通过一个高通滤波器与该高通滤波器向陷波滤波器中心平移后的乘积构成。

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^Q H_k(u, v) H_{-k}(u, v)$$

其中, $H_k(u, v)$ 和 $H_{-k}(u, v)$ 为高通滤波器, 中心分别位于 (u_k, v_k) 和 $(-u_k, -v_k)$ 处。有 Q 个陷波对。

对于 n 阶的batterworth陷波带阻滤波器, 其表达式为

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^3 \left[\frac{1}{1 + [D_{0k}/D_k(u, v)]^{2n}} \right] \left[\frac{1}{1 + [D_{0k}/D_{-k}(u, v)]^{2n}} \right]$$

其中, $D_k(u, v)$ 和 $D_{-k}(u, v)$ 表示距离。



图像频域增强

▶ 陷波滤波器(notch filter)

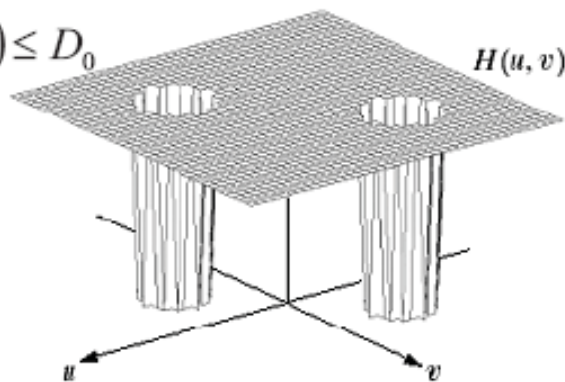
✓ 通常用于周期信号的频域滤波

▶ 理想陷波滤波器——中心在 (u_0, v_0) 并在 $(-u_0, -v_0)$ 对称的理想陷波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D_1(u, v) \leq D_0 \text{ or } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$D_1(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} - u_0 \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} - v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$D_2(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} + u_0 \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} + v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$





图像频域增强

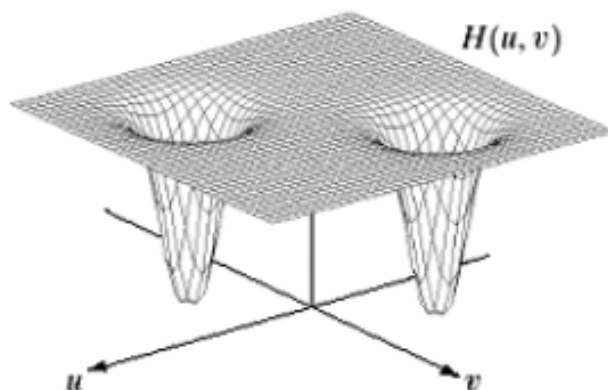
▶ 陷波滤波器(notch filter)

➤ 巴特沃斯陷波滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0^2}{D_1(u, v)D_2(u, v)} \right]^n}$$

$$D_1(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} - u_0 \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} - v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$D_2(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} + u_0 \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} + v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$





图像频域增强

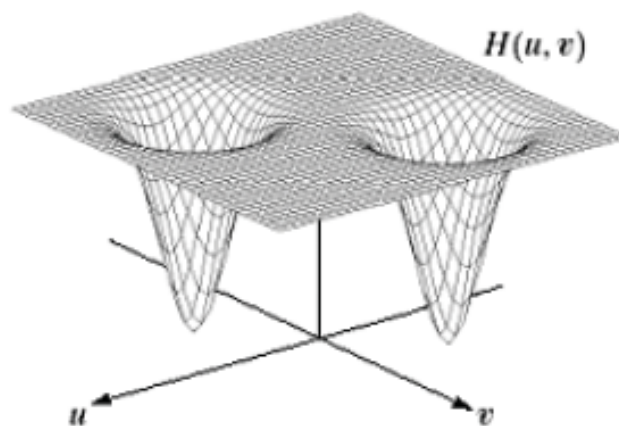
▶ 陷波滤波器(notch filter)

➤ 高斯陷波滤波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D_1(u, v) D_2(u, v)}{D_0^2} \right]^2}$$

$$D_1(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} - u_0 \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} - v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$D_2(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} + u_0 \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} + v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$





小结

本章主要学习图像频域增强的基本方法，主要包括：

■ 低通滤波器

- ✓ 理想低通(ILPF)
- ✓ Butterworth低通(BLPF)
- ✓ 指数低通(ELPF)
- ✓ 梯形低通(TLPF)

■ 高通滤波器

- ✓ 理想高通(IHPF)
- ✓ Butterworth高通(BHPF)
- ✓ 指数高通(EHPF)
- ✓ 梯形高通(THPF)

■ 同态滤波

■ 选择性滤波(带阻/带通滤波、陷波滤波)