שאלה מס׳ 3 (35%)

<u>כפל מטריצות ריבועיות (Strassen)</u>. ברצוננו להכפיל שתי מטריצות ריבועיות A, B מסדר $n \times n$ מעל שדה מסוים. תוצאת המכפלה הינה מטריצה $C = A \times B$ מסדר $n \times n$. נדרשות בדיוק n^3 פעולות של כפל-סקלרים (סקלר=מספר בשדה) אם מחשבים את C באופן ישיר לפי ההגדרה $C_{i,j} = \Sigma_{1 \le k \le n} A_{i,k} \times B_{k,j}$.

בשאלה זו נציג אלגוריתם רקורסיבי מחוכם, שמצמצם באופן ניכר את מספר הכפלות-הסקלרים (שנחשבות יקרות ביחס לפעולות של חיבור וחיסור של סקלרים). נניח לשם פשטות, כי n הינו חזקה של 2, כך שניתן ״לפרק״ כל מטריצה ל-4 תתי-מטריצות מסדר $(\frac{1}{2}n) \times (\frac{1}{2}n)$, כדלקמן.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right), B = \left(\begin{array}{c|c} e & g \\ \hline f & h \end{array}\right), C = \left(\begin{array}{c|c} r & s \\ \hline t & u \end{array}\right).$$

שימו לב, שמהגדרת כפל מטריצות מתקיים:

$$r = a \times e + b \times f \qquad t = c \times e + d \times f$$
$$s = a \times g + b \times h \qquad u = c \times g + d \times h$$

כעת נחשב את 7 המטריצות:

$$P_1 = a \times (g - h) \qquad P_5 = (a + d) \times (e + h) \qquad P_3 = (c + d) \times e$$
$$P_2 = (a + b) \times h \qquad P_6 = (b - d) \times (f + h) \qquad P_4 = d \times (f - e)$$
$$P_7 = (a - c) \times (e + g)$$

(א) הסבירו כיצד לחשב את 4 המטריצות הנדרשות, r, s, t, u באמצעות פעולות **<u>חיבור וחיסור</u>** בלבד על המטריצות $P_1, \ldots, P_7$ (אסורה הכפלה של מטריצות). למשל $u = -P_7 + P_5 + P_1 - P_3$.

חישוב של s: $P_1 + P_2$

חישוב של t: $P_3 + P_4 = (c + \cancel{d}) \times e + d \times (f - \cancel{e}) = c \times e + d \times f$

חישוב של r: $P_5 + P_6 + P_4 - P_2$

(ב) בדקו **<u>כמה הכפלות של סקלרים</u>** דרושות בסך הכל לאלגוריתם הרקורסיבי שתואר בשאלה זו.

1 נקבל $\Theta(n^2)$, או במדויק: $n^2 \cdot \frac{7}{4}$

2

נכונות

$P_3 = c \times e + d \times e$

$P_4 = h \times f - d \times e$

$P_1 = ag - ah$

$P_2 = ah + bh$

$P_5 = ae + de + ah + dh$

$P_6 = bf + bh - df - dh$

$P_7 = ae + ag - ce - cg$

$S = ag + bh$

$r = ae + bf$

$P_1 + P_2 = ag \cancel{- ah} \cancel{+ ah} + bh$

$= ag + bh = S$

$P_5 + P_6 = \overbrace{ae + bf}^{r} \cancel{+ de} + ah + bh \cancel{- df}$

$+ P_4 = ah + bh$

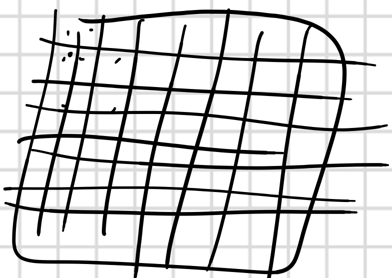
$- P_2 = 0$

בעיות $T(n)$:

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1)$$

$4 \times 4 = 4 \cdot 7$ (2^2)

$8 \times 8 = 16 \cdot 7$ (2^3)



$2^k \times 2^k = (2^{k-1})^2 \cdot 7$

$n = 2^k$

$$n \times n \simeq \left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot 7 = \boxed{n^2 \cdot \frac{7}{4}} = \Theta(n^2)$$