שאלה 1 (20 נקודות)

יהיו A ו־B קבוצות. יהי n מספר טבעי. נתון שמתקיים $\left|\mathcal{P}(A)\setminus\mathcal{P}(B)\right|=2^n$.

הוכיחו כי A היא קבוצה סופית, כי $|A|=n+1$ וכי $|A\setminus B|=1$. האם גם B קבוצה סופית?

נתון:

$$|P(A)\setminus P(B)|=2^n$$

א. אראה:

כי

$$P(A)\setminus P(B)=P(A)\setminus P(A\cap B)$$

ניקח $X\in P(A)\setminus P(B)$

לכן, $X\in P(A)\ ,\ X\notin P(B)$

$$X\notin P(B)$$

ידוע כי $A\cap B\subseteq B$

לכן, $P(A\cap B)\subseteq P(B)$

לכן, לכל Y $\quad Y\in P(A\cap B)\longrightarrow Y\in P(B)$

נניח כי $X \in P(A \cap B)$,

לכן נקבל $X \in P(B)$

וזאת סתירה. $\left(X \in P(A) \setminus P(B) \right)^*$

לכן, $X \notin P(A \cap B)$

לכן, לכל $X \in P(A) \setminus P(B)$

מתקיים $X \in P(A)$, $X \notin P(B \cap A)$

לכן, $X \in P(A) \setminus P(A \cap B)$

לכן, $\boxed{P(A) \setminus P(B) \subseteq P(A) \setminus P(B \cap A)}$

ניקח $X \in P(A) \setminus P(B \cap A)$

לכן, $X \in P(A)$, $X \notin P(B \cap A)$

$X \notin P(B \cap A)$

$$X \notin P(B\cap A)$$

$$\Downarrow$$

$$X \nsubseteq B\cap A$$

לכן, קיים $a\in X$, $a\notin B\cap A$

אך ידוע כי $X\subseteq A$, לכן $a\in A$

נניח כי לכל $a\in X$, מתקיים $a\in B$

לכן, נקבל $a\in A, a\in B$ ולכן

$$X\subseteq A \ , \ X\subseteq B$$

$(x\in P(A)\setminus P(A\cap B))^{*} \longrightarrow X\subseteq A\cap B$

סתירה, ולכן, קיים $a\in X$

כאשר $a\notin B$

לכן, $X\nsubseteq B$

ומתקיים $X\subseteq A$, $X\nsubseteq B$

ולכן, $X\in P(A)\setminus P(B)$

לכן, $\boxed{P(A)\setminus P(B\cap A) \subseteq P(A)\setminus P(B)}$

לכן, $\boxed{P(A)\setminus P(B\cap A) = P(A)\setminus P(B)}$

הכלה דו כיוונית

נסתכל על

$$|P(A)\setminus P(B)| = 2^n$$

$$\Downarrow$$

$$|P(A)\setminus P(B)| = |P(A)\setminus P(B\cap A)| = 2^n$$

ניקח $B\cap A = C$

$$|P(A)\setminus P(C)| = 2^n$$

$B\cap A \subseteq A$ לפי משפט 1.14

לכן, לכל $X\in P(C)$ שמקיים $X\in P(A)$

כי $C\subseteq A$ ו- $X\subseteq C$ אז $\boxed{X\subseteq C\subseteq A}$

לכן $P(C) \subseteq P(A)$

לכן $|P(A) \setminus P(C)| = |P(A)| - |P(C)| = 2^n$

$$2^{|A|} - 2^{|C|} = 2^n$$

$$2^{|C|}\left(2^{|A|-|C|} - 1\right) = 2^n$$

$$2^{|A|-|C|} - 1 = 2^{n-|C|}$$

מפני ש- $|A| \geq |C|$

מתקיים $2^{|A|} \geq 2^{|C|}$

$$2^{|A|-|C|} \geq 1$$

הביטוי $0 \leq \left(2^{|A|-|C|} - 1\right)$

חייב להיות חזקה של 2, לפי הביטוי
ארגעני אלו.

קיבלנו מספר זוגי - $2^{|A|-|C|} - 1$

(הרי המספר הנ"ל לא יכול להיות 0 כי הוא
שווה ל- $2^{n-|C|}$ <u>שתמיד</u> שונה מ-0)

המספר האי זוגי היחיד שהוא חזקה של 2 הוא 1:

כי לכל $n>1$, 2^n הוא זוגי!

לכן,

$$1 = 2^{|A|-|C|} - 1 = 2^{n-|C|}$$

$$2^1 = 2^{|A|-|C|} \qquad 1 = 2^{n-|C|}$$

$$\Downarrow$$

$$|A|-|C| = 1 \qquad n = |C|$$

$$|A| = 1+|C| \qquad \boxed{|A| = n+1}$$

(לכן הקבוצה היא קבוצה סופית)

$C = A\cap B^*$

אראה כי $A\setminus B = A\setminus C$

יהי $x\in A\setminus B$

$$\Downarrow$$

$$x\in A,\ x\notin B$$

לכן $x\notin A\cap B = C$

לכן $x\in A\setminus C$

לכן $\boxed{A \setminus B \subseteq A \setminus C}$

ניקח $x \in A \setminus C$

$$\Downarrow$$

$x \in A$, $x \notin C = A \cap B$

נניח כי $x \in B$.

ידוע כי $x \in A$, לכן נקבל $x \in A \cap B$

סתירה ולכן $x \notin B$

לכן

$$x \in A \setminus B$$

לכן $\boxed{A \setminus C \subseteq A \setminus B}$

לכן $\boxed{A \setminus B = A \setminus C}$

$$|A \setminus B| = |A \setminus C|$$

מפני ש- $C \subseteq A$

$$|A \setminus C| = |A| - |C| = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|A \setminus B| = 1}$$

B לא קבוצה סופית בהכרח

דוגמא: $n=1$

$|A|=n+1=2$

$A=\{0,1\}$ $\qquad$ $B=\{1,2,....\}$

$$|P(A)\setminus P(B)|=2^1$$

$$|P(A)\setminus P(A\cap B)|=2^1$$

הראיתי שזה נכון

$$|P(\{0,1\})\setminus P(\{1\})|=2^1$$

$$|\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{1,0\}\}\setminus\{\emptyset,\{1\}\}|=$$

$$\boxed{|\{\{0\},\{1,0\}\}|=2}$$

לכן, B לא סופית בהכרח,

$|A|=n+1$, $|A\setminus B|=1$

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי A קבוצה לא ריקה. לכל $n\in\mathbf{N}$ יהי R_n יחס שקילות על הקבוצה A.

תהי $R=\liminf R_n$. (ראו הגדרת liminf בעמוד 34 בכרך א'.)

א. הוכיחו ש־R יחס שקילות על A.

ב. יהי $a\in A$. לכל יחס שקילות E על הקבוצה A תהי $S_E(a)=\{x\in A\,|\,xEa\}$ מחלקת השקילות של a לפי יחס השקילות E. הוכיחו כי $S_R(a)=\liminf S_{R_n}(a)$.

לפי שאלה 46

$$R=\liminf R_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}R_n$$

יהי $n\in N$, $a\in A$

ידוע כי $\langle a,a\rangle\in A$

לכן

*שאלה 46

$$\{\langle a,a\rangle\,|\,a\in A\}\subseteq\bigcap_{k=1}^{\infty}R_k\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=i}^{\infty}R_k=R$$

$\bigcap_{k=n}^{\infty}R_n$ הוא איבר באיחוד R

$\boxed{\text{לכן } R \text{ הוא יחס רפלקסיבי.}}$

יהי $b\in A$. $(a\neq b)$

אם קיים $k\in N$ כאשר לכל $n\geq k$

מתקיים $\langle a,b\rangle\in R_n$

אז.

קיים $k \in \mathbb{N}$ כאשר לכל $n \geq k$

מתקיים $\langle b,a\rangle \in R_n$

לכן, אם קיים $b\in A$, $k\in \mathbb{N}$ כאשר לכל $n\geq k$
מתקיים $\langle a,b\rangle \in R_n$

מתקיים גם $\langle b,a\rangle \in R_n$

לכן, היחס $\bigcap_{i=k}^{\infty} R_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty} R_i = R$ הוא סימטרי

אך, גם אם לא קיים $b\in A$, $k\in \mathbb{N}$

כאשר לכל $n\geq k$ מתקיים

$\langle a,b\rangle \in R_n$

R הוא עדיין סימטרי, כי קיימים בו

$\langle a,a\rangle \in R$ לכל $a\in A$

ולכן הוא גם סימטרי $(\langle a,a\rangle = \langle a,a\rangle)$

בכל מקרה

$\boxed{\text{לכן } R \text{ סימטרי}}$

נניח שקיימים $a,b,c\in A$, $k\in N$

כך שלכל $n\geq k$ מתקיים

$$\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\in R_n$$

$$\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\in\bigcap_{n=k}^{\infty}R_n\subseteq R$$

מפני שלכל n R_n הוא יחס שקילות

הערה 2.5
יחס שקילות
הוא טרנזיטיבי

מתקיים

$$\langle a,c\rangle\in R_n$$

ולכן,

$$\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\in\bigcap_{n=k}^{\infty}R_n\subseteq R$$

ולכן R הוא יחס טרנזיטיבי.

גם לא קיימים $a,b,c\in A$, $k\in N$ כאשר לכל

$n\geq k$ מתקיים $\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\in R_n$

ידוע שמתקיים $\langle a,a\rangle, \langle a,a\rangle \in R$

וידוע שמתקיים $\langle a,a\rangle \in R$

$\boxed{\text{ולכן } R \text{ טרנזיטיבי בכל מקרה.}}$

ולכן, R רפלקסיבי,
סימטרי
וטרנזיטיבי

ולכן יחס שקילות על A

מש״ל א

ב)

צ״ל: יהי $a \in A$

$$S_R(a) = \liminf S_{R_n}(a)$$

$\downarrow$

$$S_{\liminf R_n}(a) = \liminf S_{R_n}(a)$$

$\downarrow$

לכן יהא שהיכלות, $a \in S_{\liminf(R_n)}(a)$

$a \in \liminf S_{R_n}(a)$

נניח שקיים $b \in A$ כאשר $a \neq b \in S_R(a)$

$\Downarrow$

$$\langle a,b \rangle \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{n=i}^{\infty} R_n}$$

לכן, ק״מ לפחות i אחד כאשר

$$\langle a,b \rangle \in \bigcap_{n=i}^{\infty} R_n$$

לכן לכל $n \geq i$ מתקיים $\langle a,b \rangle \in R_n$

לכן, $a, b \in S_{R_n}(a)$

ולכן, גם, סגור על $\liminf S_{R_n}(a)$:

$\Downarrow$

$$\liminf S_{R_n}(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=i}^{\infty} S_{R_n}(a)$$

קיים i כאשר $a, b \in \bigcap_{n=i}^{\infty} S_{R_n}(a)$

לכן, $b \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=i}^{\infty} S_{R_n} = \liminf S_{R_n}(a)$

$$\boxed{\text{ולכן, } S_R(a) \subseteq \liminf S_{R_n}(a)}$$

יהי $c \in \liminf S_{R_n}(a)$

$$\Downarrow$$

$$c \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=i}^{\infty} S_{R_n}(a)$$

לכן, קיים i כאשר $c \in \bigcap_{n=i}^{\infty} S_{R_n}(a)$

לכן, קיים i כאשר לכל $n \geq i$

מתקיים $c \in S_{R_n}(a)$

לכן מתקיים לכל $n \geq i$ $\quad \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle \in R_n$

$$\Downarrow$$

לכן, קיים i כאשר $\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle \in \bigcap_{n=i}^{\infty} R_n$

לכן, $\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=i}^{\infty} R_n = R$

$$\Downarrow$$

$$\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle \in R$$

$$\Downarrow$$

$$c \in S_R(a)$$

ולכן $\boxed{\liminf S_{R_n}(a) \subseteq S_R(a)}$

הכלה דו כיוונית

ולכן,

$$\boxed{S_R(a) = \liminf\left(S_{R_n}(a)\right)}$$

סוף ג

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה חלקית. אומרים ש-$a,b\in A$ ניתנים להשוואה (ביחס $\prec$) אם ורק אם מתקיים $a\prec b$ או $a\succ b$ או $a=b$.

א. הראו שאם $a,b\in A$ אינם ניתנים להשוואה ביחס $\prec$ אז היחס $\prec^+$ המוגדר על ידי

$$\prec^+ = \prec \cup \left\{\langle x,y\rangle \,\middle|\, \begin{matrix} x\preccurlyeq a\\ b\preccurlyeq y\end{matrix}\right\}$$

הוא יחס סדר חלקי על הקבוצה A, ו-a,b ניתנים להשוואה ביחס $\prec^+$.

(ראו הסבר לסימון $\preccurlyeq$ בתחתית עמוד 52).

ב. הראו שאם A קבוצה סופית, אז $\prec$ אינו סדר מלא על A אם ורק אם יש על A שני יחסי סדר מלא שונים זה מזה שמכילים את $\prec$.

ג. מצאו את כל יחסי הסדר המלא על $A=\{1,2,3,4\}$ המכילים את $\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$.

א)

יהי $a,b\in A$ כאשר $\langle a,b\rangle\notin\prec$

יהי $c\in A$ ידוע כי

$\langle c,c\rangle\notin\prec$

יחס סדר
↓
אי רפלקסיבי

הגדרה 2.11

נניח כי $c\prec^+ c$ מתקיים

לכן,

$$\langle c,c\rangle\in\left\{\langle x,y\rangle \,\middle|\, \begin{matrix} x\preccurlyeq a\\ b\preccurlyeq y\end{matrix}\right\}$$

לכן, $b\preccurlyeq c$, $c\preccurlyeq a$, אך מפני
שאז חייב טרנזיטיבי, נקבל

$b\preccurlyeq a$ בסתירה לנתון

לכן $c \prec^{*} c$ לכן מתקיים

לכן $\prec^{*}$ היא רפלקסיבי

יהי $c,d,e \in A$

כאשר:

$$c \prec d \ , \ d \prec e$$

$\prec$ הינו רפלקסיבי

$$\boxed{\text{לכן} \quad c \prec^{*} e}$$

כאשר

$$\langle\langle c,d\rangle,\langle d,e\rangle\rangle \in \left\{\langle x,y\rangle \,\middle|\, \begin{matrix} x \preceq a \\ b \preceq y \end{matrix}\right\}$$

לכן, נקבל

$$c \preceq a$$
$$b \preceq e$$

$$\boxed{\text{ולכן מתקיים} \quad c \prec^{*} e}$$

כאשר

$$\langle d,e\rangle \in \left\{\langle x,y\rangle \;\middle|\; \begin{matrix} x \preceq a \\ b \preceq y \end{matrix}\right\}$$

$$\langle c,d\rangle \in \prec$$

נקבל: $b \preceq e$, $c \prec d \preceq a$

אם $d=a$ אם $d\neq a$

$c \prec a$ $c \prec d \prec a$

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\prec$ טרנזיטיבי

מתקיים $c \preceq a \Longleftarrow c \prec a$

$$\boxed{c \prec^{\prec} e \text{ מתקיים}}$$

כאשר

$$\langle c,d\rangle \in \left\{\langle x,y\rangle \;\middle|\; \begin{matrix} x \preceq a \\ b \preceq y \end{matrix}\right\}$$

$$\langle d,e\rangle \in \prec$$

ונקבל $d \prec e$, $c \preceq a$ $b \preceq d$

$b \preceq d \prec e$

$b = d$ ↙ ↘ $b \neq d$

$b \prec e$ $\qquad$ $b \prec d \prec e$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$ $\prec$ טרנזיטיבי

$b \preceq e$ מתקיים $\Longleftarrow$ $b \prec e$ $\qquad$ $c \preceq a$

$\boxed{\text{לכן } e \dot{\prec} c \text{ מתקיים}}$

$\boxed{\text{הראנו כי } \dot{\prec} \text{ טרנזיטיבי וגם רפלקסיבי} \quad \text{לכן } \dot{\prec} \text{ יחס סדר חלקי על } A}$

$\boxed{\text{משפט 1}}$

האם $b \dot{\prec} a$ מתקיים?

ידוע כי $a \preceq a$

$b \not\prec b$

$a \prec^+ b$ מתקיים

לכן,

$\boxed{\text{מש"ל 2}}$

ג)

<u>כיוון 1:</u>

יהיו יחסים $\prec_2$, $\prec_1$

כאשר $\prec \subseteq \prec_2$, $\prec \subseteq \prec_1$

לכל $a,b\in A$ כאשר $a\prec b$ מתקיים:

$a\prec_1 b$, $a\prec_2 b$

קיימים $a,b\in A$ כאשר $a\prec_1 b$, אך $a\not\prec_2 b$

(כי $\prec_2 , \prec_1$ שונים)

הגדרה 2.11 יחס סדר הוא אי-רפלקסיבי:

אך, מכיוון ש- $a\prec_1 b$, a ו-b שונים

ומכיוון ש- $a\not\prec_2 b$ ו- $a\neq b$

אז: $\boxed{b\prec_2 a}$ ו- $\boxed{a\prec_1 b}$

נניח כי $\prec$ יחס סדר מלא

ידוע ש $\prec \subseteq \prec_1$ $\prec \subseteq \prec_2$

לכן, $b \not\prec a$ $a \not\prec b$

כי אם אחד מהם יתקיים, תהיה סתירה
עם היחס השני

$$\boxed{\text{ולכן היחס לא משווה עם } a \text{ ו-} b \quad \text{לכן } \prec \text{ אינו יחס סדר!}}$$

כיוון שני:

ניקח $\prec$ כאשר $\prec$ אינו יחס מלא

נניח כי קיימים $\prec_1, \prec_2, \prec_3$ יחסי סדר
שלמים <u>שונים</u> כאשר:

$\prec \subseteq \prec_k$ לכל $k \in \{1,2,3\}$

לכן, קיימים $a,b \in A$ שונים

כאשר $a \not\prec b$, $b \not\prec a$

שאלה 4 (10 נקודות)

תהי $f:A\to B$ פונקציה. נניח ש- $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה ו- $|B|\ge 2$.

נגדיר $\prec'=\{\langle f(x),f(y)\rangle \mid x\prec y\}$.

הוכיחו כי $\langle B,\prec'\rangle$ היא קבוצה סדורה אם ורק אם f היא פונקציה הפיכה.

כיוון 1

נניח כי $f:A\to B$ לא הפיכה.

לכן, קיימים $a_1,a_2\in A$ שונים כאשר

הגדרה 3.10

הפיכה: 1) חח"ע

$a_1\prec a_2$ ו- $f(a_1)=f(a_2)=b$

$$\prec'=\{\langle f(x),f(y)\rangle \mid x\prec y\}$$

$$\Downarrow$$

$$a_1\prec a_2$$

$$\Downarrow$$

$$f(a_1)\prec' f(a_2)$$

$$b\prec' b$$

$$\downarrow$$

סתירה כי $\prec'$ הוא יחס סדר שלו

2) פונ׳ על:

נניח ש- $f:A\to B$ לא פונ׳ על.

לכן, קיימת $b\in A$ כאשר <u>לכל</u>

$f(a)\neq b$

לכן, אם ניקח b' כאשר $b\neq b'$

הגדרה 2.10 $b \not< b'$ $b' \not< b$ $b\neq b'$ לא יחס מלא.

ולכן סתירה

לכן, $f:A\to B$ פונ׳ הפיכה

גם אם $\underbrace{(f \text{ לא על או } f \text{ לא חח״ע})}_{f \text{ לא הפיכה}}$

כיוון 2:

נתון: $f:A\to B$ הפיכה

יהי $b_1,b_2\in B$, a_1,a_2 כאשר

$$f^{-1}(b_1)=a_1,\ f^{-1}(b_2)=a_2$$

3 אפשרויות: (כי $\prec$ יחס סדר מלא - משווה)

1) אם $a_1=a_2$

f הפיכה

אז: $\boxed{b_1=b_2}$

2) אם $a_1\prec a_2$

אז: $f(a_1)\prec' f(a_2)$

$$\downarrow$$

$$\boxed{b_1\prec' b_2}$$

3) $a_2\prec a_1$

$$\downarrow$$

$$f(a_2)\prec' f(a_1)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{b_2\prec' b_1}$$

לכן, $\prec'$ יחס משווה.

יהי $b \in B$ נניח כי

$$b \prec' b$$

ניקח $a \in A$ כאשר $f^{-1}(b) = a$ (כי f הפיכה)

לכן, מתקיים

$a \prec a$ (לפי הגדרת $\prec$)

אך זו סתירה, לכן, $\cancel{b \prec' b}$

לכל $b \in B$

$$\boxed{\text{לכן, } \prec' \text{ אי רפלקסיבי}}$$

יהי $b_1, b_2, b_3 \in B$

כאשר $b_2 \prec' b_3$ $\quad$ $b_1 \prec' b_2$

ניקח $a_1, a_2, a_3 \in A$

כאשר:

$f^{-1}(b_i) = a_i$ לכל $i \in \{1,2,3\}$

לכן, מפני שנקבל

לפי הגדרת α'

$a_1 \alpha a_2 \qquad a_2 \alpha a_3$

ידוע כי α הוא יחס סדר מלא,
ולכן הוא טרנזיטיבי.

לכן, נקבל $a_1 \alpha a_3$

ולפי הגדרת α', נקבל

$$b_1 \alpha' b_3$$

ולכן α' טרנזיטיבי.

מפני ש α' מלאה
גם רפלקסיבי
וטרנזיטיבי

מש"ל α' יחס סדר מלא

שאלה 5 (10 נקודות)

תהי A קבוצה. תהיינה f,g,h פונקציות מ־A ל־A כך ש־$f\circ g\circ h$ פונקציה הפיכה.

הוכיחו או הפריכו את הטענות:

א. g פונקציה חד־חד־ערכית.

ב. g פונקציה על A.

א)

נתון: $f\circ g\circ h : A \to A$

פונ' הפיכה.

2 מקרים:

$|A|=1$

במצב זה קיים $a\in A$ אחד ויחיד,

ולכן

$$f(a)=a=g(a)=h(a)$$

ולכן פונ' f,g,h חח"ע ועל, וכך

גם $f\circ g\circ h$ חח"ע

$\downarrow$

$$f\circ g\circ h(a)=a$$

לכן g חח"ע

$|A|>1$ יהי $a_1, a_2 \in$ שונים

נניח ש $a_3 = h(a_1) = h(a_2)$

לכן $f\circ g\circ h(a_1) = f\circ g\circ h(a_2)$

מפני ש-

$$f\circ g(h(a_1)) = f\circ g(a_3) = f\circ g(h(a_2))$$

אך $a_1 \neq a_2$ ו $f\circ g\circ h$ פונ׳ הפיכה
ולכן חח"ע ולכן סתירה.

לכן $h(a_1) \neq h(a_2)$ לכל $a_1, a_2 \in A$ שונים

$\boxed{\text{ולכן, } h \text{ חח"ע}}$

יהי $a_4, a_5 \in A$ שונים כאשר

* h חח״ע

$$h(a_1)=a_4 \neq h(a_2)=a_5$$

נניח כי:

$$g(a_4)=g(a_5)=a_6$$

לכן נקבל

$$f\circ g\circ h(a_1) = f\circ g\circ h(a_2)$$

כי:

$$f\circ g(a_4) = f\circ g(a_5)$$

$$f(g(a_4)) = f(g(a_5))$$

$$f(a_6) = f(a_6)$$

ולכן $f\circ g\circ h$ לא חח״ע ולכן סתירה.
(כי $f\circ g\circ h$ הפיכה)

בכל מקרה גם אם $|A|=1$
וגם אם $|A|>1$

$\boxed{\text{לכן } g \text{ חח״ע}}$

$\boxed{\text{משל ג}}$

ב)

ניקח $A=\mathbb{R}$,

$$h(x)=x$$

$$g(x)=2^x$$

$$f(x)=\begin{cases}\log_2(x) & x>0\\ x & \text{else}\end{cases}$$

לכן, לא היה פתרון ל- $g(x)=-1$

ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f\circ g\circ h(x)=x$$

כי:

$$f\left(2^x\right)=x$$

$$\boxed{x=x}$$

לכל $2^x>0$
x ממשי

לכן $f\circ g\circ h=I_A$

ו- g לא על!

$\boxed{\text{לכן } g \text{ לא על}}$

שאלה 6 (20 נקודות)

תהי $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ הפונקציה המוגדרת כך: $f\left(\langle m,n\rangle\right)=(2m+1)\cdot 2^{n}-1$.

א. הוכיחו ש־ f חד־חד־ערכית ועל.

ב. הסבירו כיצד תוכלו למצוא את $f^{-1}(k)$, כאשר באפשרותכם להוסיף ולחסר 1, ולחלק ב־2.

ג. מצאו מהי הקבוצה $f\left[\left\{\langle m,0\rangle \mid m\in\mathbf{N}\right\}\right]$.

ד. מצאו מהי הקבוצה $f^{-1}\left[\left\{2^{n}-1 \mid n\in\mathbf{N}\right\}\right]$.

ה. תהי $f_1:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ פונקציית הזהות. לכל $k\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$ אם $f_k:\bigtimes_{i=0}^{k-1}\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ הוגדרה, נגדיר

פונקציה $f_{k+1}:\bigtimes_{i=0}^{k}\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ על ידי $f_{k+1}\left(\langle a_0,a_1,\ldots,a_k\rangle\right)=f\left(\langle a_0,f_k\left(\langle a_1,\ldots,a_k\rangle\right)\rangle\right)$.

הוכיחו כי f_k פונקציה חד־חד־ערכית ועל לכל $k\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$, והסיקו שקיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל $g_{k,m}:\bigtimes_{i=0}^{k-1}\mathbf{N}\to\bigtimes_{i=0}^{m-1}\mathbf{N}$ לכל $k,m\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$ (רשמו נוסחה ל־ $g_{k,m}$ באמצעות f_k,f_m).

ניקח $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in N\times N$ שונים

ונבדוק האם $f(\langle a,b\rangle)=f(\langle c,d\rangle)$

יכול להתקיים:

$$(2a+1)\cdot 2^{b}\cancel{-1}=(2\cdot c+1)\cdot 2^{d}\cancel{-1}$$

$$\frac{2a+1}{2c+1}=\frac{2^{d}}{2^{b}}$$

$$\frac{2a+1}{2c+1}=2^{d-b}$$

מפני ש $2a+1$, $2c+1$ הם אי־זוגיים,
לא יהיה ניתן להגיע ל-חזקה של 2

אלא אם כן $a=c,\ d=b$

ולכן, אם $f(\langle a,b\rangle)=f(\langle c,d\rangle)$

אז $a=c, b=d$

$\boxed{\text{לכן } f \text{ חח״ע}}$

ניקח מספר $n\in\mathbb{N}$ נייצג אותו
בעזרת k ו-j כאשר j היא השארית
של המספר ב-2 ו-k הוא מס׳ הפעמים
ש-2 "נכנס" למספר זה.

יהי $n\in\mathbb{N}$

נמצא $\langle a,b\rangle\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ כאשר:

$f(\langle a,b\rangle)=2n$

$$(2a+1)\cdot 2^{b}-1=2n \quad /+1$$

$$(2a+1)\cdot 2^{b}=2n+1$$

$b=0$

$a=n$

לכן, לכל מס׳ זוגי קיים $\langle a,b\rangle$
כאשר $f(\langle a,b\rangle)$ שווה למס׳ זה.

יהי $n \in N$. נמצא $\langle a,b \rangle \in N \times N$ כאשר

$$f(\langle a,b \rangle) = 2n+1$$

$$(2a+1) \cdot 2^{b} - 1 = 2n+1$$

$$(2a+1) \cdot 2^{b} = 2(n+1)$$

$$(2a+1) \cdot 2^{b-1} = n+1$$

נבדיל בין 2 מקרים:

<u>$n+1$ זוגי:</u>

ניקח k_{n+1} מספר כאשר:

$$k_{n+1} = \max \left\{ i \;\middle|\; i, \frac{n+1}{2^{i}} \in N \right\}$$

(לדוג' $k_7 = 2$ $\quad k_8 = 3 \quad k_4 = 2$)

ניקח j_{n+1} מספר כאשר:

$$j_{n+1} = \frac{n+1}{2^{k_{n+1}}}$$

(לדוגמא: $j_1 = 1 \quad j_7 = 7 \quad j_8 = 0$)

* j_{n+1} תמיד אי זוגי

לכן, כל j_{n+1} אפשר לייצג

עם j'_{n+1} כאשר

$$j_{n+1} = 2j'_{n+1} + 1 = \frac{n+1}{2^{k_{n+1}}}$$

לכן,

$$(2a+1)\cdot 2^{b-1} = n+1 = (2j'_{n+1}+1)\cdot 2^{k_{n+1}}$$

$$\Downarrow$$

$$a = j'_{n+1} \qquad b = k_{n+1}+1$$

לכן, לכל n, זוגי או אי-זוגי קיימים

$\langle a,b\rangle \in N\times N$ כאשר:

$$f(\langle a,b\rangle) = n$$

לכן f על

$$\boxed{\text{ולכן, } f \text{ על וחח"ע}}$$

$\boxed{\text{מש"ל}}$

ב)

למצוא את $f^{-1}(k)$:

יהי k.

נצייר $\langle a,b\rangle$ התמונה הסופית

נוסיף ל k 1 ונקבל $k+1$

כמות הפעמים שניתן לחלק ב-2 את $k+1$ $\boxed{\text{היא } b}$ $\boxed{\text{מז״ל}}$

המספר שנשאר הוא מספר אי זוגי.

אז נחסיר ממנו 1.

נחלק אותו ב-2, $\boxed{\text{ונקבל את } a}$ $\boxed{\text{משל}}$

ג)

$$f[\{\langle m,0\rangle \mid m\in N\}] =$$

$$\{f(\langle m,0\rangle) \mid m\in N\} =$$

$$\{(2\cdot m+1)\cdot 2^0-1 \mid m\in N\} =$$

$$\{2m+1-1 \mid m\in N\} =$$

$$\boxed{\{2m \mid m\in N\} = \text{המספרים הזוגיים}}$$

מס ג

ד)

$$f^{-1}\left[\{2^n-1 \mid n\in N\}\right]$$

נשתמש באלגוריתם שכתבתי בסע' 4 ב.

פעולה	ערך קודם	
נוסיף 1	2^n-1	
מס' הפעמים שמחלקים ב-2 כאשר המספר עדיין שלם הוא b	2^n	$b=n$
נחסר אחד ואז נחלק ב-2	1	
קיבלנו את a	0	$a=0$

לכן,

$$\boxed{f^{-1}\left[\{2^n-1 \mid n\in N\}\right]=\{\langle 0,n\rangle \mid n\in N\}}$$

מש"ל

ה)

נתון

$$f(\langle m,n\rangle) = (2m+1)\cdot 2^{n} - 1$$

$$f_{k+1}(\langle a_0, a_1, \dots, a_k\rangle) = f(\langle a_0, f_k(\langle a_1, a_2, \dots, a_k\rangle)\rangle)$$

כאשר

$$f_{k+1} : \left(\bigtimes_{i=0}^{k} N\right) \to N$$

ניקח

$$f_1(\langle a_0\rangle) = a_0$$

פונ' הזהות

הפיכה ∈ חח"ע ועל

נניח כי $f_k(\langle a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\rangle)$

חח"ע ועל.

נסתכל על f_{k+1}:

$$f_{k+1}(\langle a_0, \dots, a_k\rangle) = f(\langle a_0, f_k(\langle a_1, \dots, a_k\rangle)\rangle)$$

ידוע כי f היא חח"ע ועל

נניח וקיימים

שונים $\overbrace{\langle a_0, \dots, a_k\rangle}^{=a}, \overbrace{\langle b_0, \dots, b_k\rangle}^{=b} \in \bigtimes_{j=0}^{k} N$

כאשר

$$f(a)=f(b)$$

לכן,

$$f(\langle a_0, f_k(\langle a_1,a_2,\dots a_k\rangle)\rangle) = f(\langle b_0, f_k(\langle b_1,\dots b_k\rangle)\rangle)$$

מפני ש f פונ' חח"ע

נקבל:

$$a_0=b_0$$

$$f_k(\langle a_1,\dots a_k\rangle) = f_k(\langle b_1,\dots b_k\rangle)$$

מפני ש f_k חח"ע נקבל

$a_i=b_i$ לכל $i\in\{1,\dots k\}$

ולכן $a_i=b_i$ לכל $i\in\{0,\dots k\}$

ולכן הם חייבים להיות שווים. *

לכן $\boxed{f_{k+1} \text{ פונ' חח"ע}}$. לפי אינדוקציה

נסתכל שוב על f_{k+1}.

יהי $n \in N$ ונחפש $\langle a_0, a_1, \dots a_k \rangle \in \bigtimes_{i=0}^{k} N$

כאשר $f_{k+1}(\langle a_0, \dots a_k \rangle) = n$

ונקבל

$$n = f(\langle a_0, f_k(\langle a_1, \dots a_k \rangle) \rangle)$$

ידוע כי f היא פונ׳ על.

לכן קיימים $j, i \in N$ כאשר

$$f(\langle \underbrace{i}_{a_0}, \underbrace{j}_{f_k(\langle a_1, \dots a_k \rangle) = j} \rangle) = n$$

אך ידוע כי f_k פונ׳ על, לכן קיים

$$\langle a_1, \dots a_k \rangle \in \bigtimes_{i=1}^{k} N$$

כאשר

$$f_k(\langle a_1, \dots a_k \rangle) = j$$

ולכן קיים

$$\langle a_0, \dots a_k \rangle \in \bigtimes_{i=0}^{k} N$$

כאשר

$$f_{k+1}(\langle a_0, \ldots a_k \rangle) = n$$

לכל n.

$\boxed{\text{לכן, } f \text{ פונ' על}}$

$\boxed{\text{לכן, } f \text{ פונ' חח"ע ועל}}$

$\boxed{\text{מש"ל ה}}$

נגדיר פונ' חח"ע ועל באופן הבא

$$g_{k,m} : \bigtimes_{i=0}^{k-1} N \to \bigtimes_{i=0}^{m-1} N$$

f חח"ע ועל

נגדיר $f(\langle m,n \rangle) = (2m+1) \cdot 2^n - 1$

ונשתמש גם ב- $f_k : \bigtimes_{i=0}^{k-1} N \to N$

$f^{-1} : N \to N \times N$

נבדיל בין 3 מצבים.

$k=m$:

$\boxed{g_{k,m} \text{ היא פונ' הזהות}}$

$: k < m$

$$\boxed{g_{k,m}(\langle a_0, \dots a_k \rangle) = \langle a_0, \dots a_{k-1}, f^{-1}_{m-k+1}(a_k) \rangle}$$

$: k > m$

$$\boxed{g_{k,m}(\langle a_0, \dots a_k \rangle) = \langle a_0, \dots a_{m-1}, f_{k-m+1}(\langle a_m, \dots a_k \rangle) \rangle}$$