שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $f:\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ פונקציה רציפה ב־ $\mathbf{R}^k$ וגזירה ברציפות ב־ $\mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$. נניח ש־ $f\left(0^{[k]}\right)=0$ וכן $f(x)>0$ לכל $x\in \mathbf{R}^k\setminus\{0^{[k]}\}$. נניח גם ש־ $x\cdot\nabla f(x)>0$ לכל $x\in\mathbf{R}^k\setminus\{0^{[k]}\}$.

א. הוכיחו שהקבוצה $U=\{x\in\mathbf{R}^k \mid f(x)<1\}$ היא קבוצה כוכבית.

הערה: ניתן להוכיח זאת גם בהנחה החלשה יותר ש־ $x\cdot\nabla f(x)>0$ בנקודות בהן $f(x)=1$.

ב. אם $k=2$ והקבוצה U חסומה הראו שהקבוצה $S=\{x\in\mathbf{R}^2 \mid f(x)=1\}$ היא תמונת לולאה פשוטה וסדירה שמספר הליפוף שלה סביב ראשית הצירים הוא 1.

הדרכה: אפשר לרשום את נקודות S בצורה $x=(r\cos t, r\sin t)$, ולהיעזר במשפט ההגדרה הסתומה עם המשוואה $f(r\cos t, r\sin t)=1$.

$$x\cdot\nabla f(x)>0$$

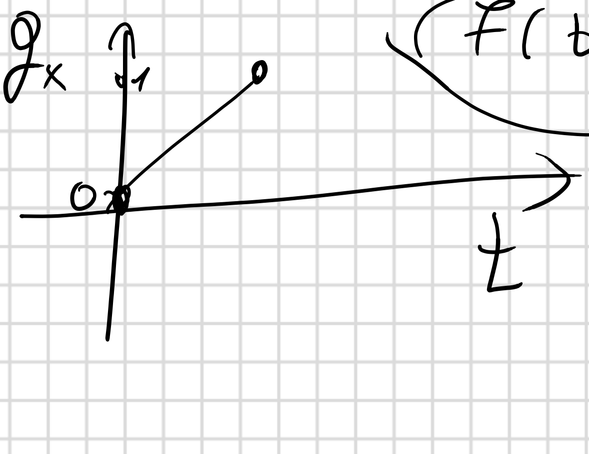
$$U=\{x \mid x\in\mathbb{R}^k \quad f(x)<1\}$$

$$g:[0,1]\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$$

$$g:(t,x)\mapsto f(tx)$$

$$g(1,x)<1 \qquad g(0,x)=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}=x\cdot\nabla f(tx)>0$$



$f(tx)<1$

מש"ל

ב) ניקח $x=(r\cos(t), r\sin(t))$ $r\neq 0$

$\varphi:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$

$$f(\overset{x}{r\cos(\theta)}, \overset{y}{r\sin(\theta)}) = 1$$

$$dx = -r\sin(\theta)d\theta \quad dy = r\cos(\theta)d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi} x\,dy + y\,dx = \frac{1}{2\pi}r^2\int_0^{2\pi} \overbrace{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}^{=1}\,d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi}r^2\cdot\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}}\cdot r^2 = r^2 = 1$$

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}^k$ מסילה שאורכה סופי ומתקיים: $L(\varphi)\le|\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)|$

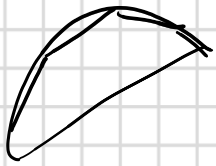
נתון גם ש־φ אינה קבועה בשום קטע שהיא מוגדרת בו.

הראו ש־φ היא מסילה פשוטה ששקולה למסילה אפינית.

הערה: מסילה אפינית היא צמצום של פונקציה אפינית מ־$\mathbf{R}$ ל־$\mathbf{R}^k$ לקטע סגור. ראו שאלה 13.ב.8.

נגדיר ψ מסילה אפינית $\psi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^k$

נסמן. $F(t)=\int_\alpha^t|\varphi'(x)|\,dx$



ידוע כי $F(t)$ פונק' עולה

ידוע כי $F(\beta)=L(\varphi)\le|\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)|$

$L(\varphi)\ge\underbrace{|\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)|}$

$\tau:=(\alpha,\beta)$ הלוקח את φ, לפי א' שוויון המשולש

$L(\varphi)=|\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)|$

נניח כי φ לא פשוטה. לכן קיים t_1,t_2 כאשר

$\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$ $(\alpha\le\underbrace{t_1<t_2}\le\beta)$

לפחות הוכלה כשלמות

נגדיר ו- :
$\psi_1:[t_1,t_2]\to\mathbb{R}^k$ החלק הזה
$\psi_2:[\alpha,\beta]$ החלק הזה

$L(\varphi)=L(\psi_1)+L(\psi_2)>L(\psi_1)\ge|\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)|$

לכן סתירה. לכן זו מסילה פשוטה.

נניח בשלילה כי φ היא לא אפינית.

נסתכל על פונ' $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^k$

$$\psi : t \mapsto \varphi(\beta) t + (1-t)\varphi(\alpha)$$

הסקנו כי: $L(\varphi) = L(\psi) = |\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)|$

לכן קיים נק' כי הנקודות φ לא קבוצה. (φ לא הקבוצה)

נניח בשלילה כי φ לא אפינית.

יהי $x \in \mathbb{R}^k$ כך ש $x \notin Im(\psi)$, $x \in Im(\varphi)$

לכן,

$$L(\varphi) = |\varphi(\alpha) - x| + |x - \varphi(\beta)| > |\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)|$$

לכן סתירה.

לכן אפינית