1.2-2

נניח שאנו משווים מימושים של מיון-הכנסה ומיון-מיזוג על אותה מכונה. עבור קלטים בגודל n, מיון-הכנסה מתבצע ב-$8n^2$ צעדים, ומיון-מיזוג מתבצע ב-$64n\lg n$ צעדים. עבור אילו ערכים של n מיון-הכנסה רץ מהר יותר מאשר מיון-מיזוג?

1.2-3

מהו הערך הקטן ביותר של n, שבו אלגוריתם שזמן הריצה שלו $100n^2$ יהיה מהיר מאלגוריתם שזמן הריצה שלו 2^n, על אותה מכונה?

שאלה 1

א

1.2-2

$$8n^2 < 64n\log(n) \quad / : n \neq 0$$

$$8n < 64\log(n) \quad / : 8$$

$$n < 8\log(n)$$

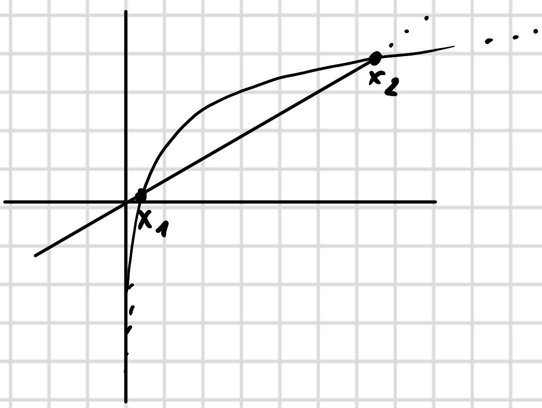
ידוע כי $x = 8\log(x)$

מתקיים עבור שני ערכים. $x_2 \approx 43.559$,

$x_1 \approx 1.09$

*לפי הצבה במחשבון

נבדוק לגבי $n = 5$ כאשר $x_1 < n < x_2$:



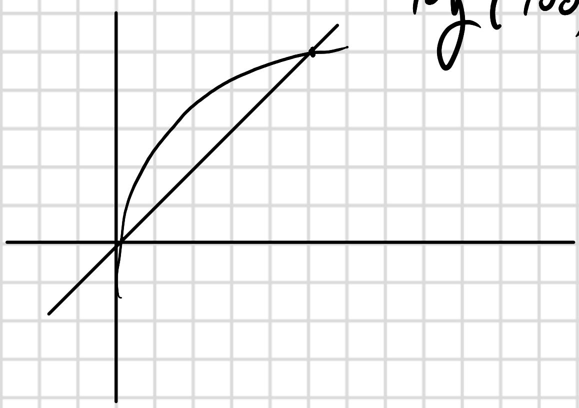
$$5 < 8\log(5) \approx 18.5$$

לכן, טענה זו מתקיימת כאשר גודל המערך n מקיים:

$$1.09 < \boxed{2 \leq n \leq 43} < 43.55$$

$n=0$ כאשר *מתקיים $\Leftarrow 100n^2 < 2^n$ / $\log()$

$$\log(100n^2) < \log(2^n)$$



$$\log(100) + 2\log(n) < n$$

*

$$\log(x) + 2\log(x) = x$$

$$x_1 \approx 0.103...$$

$$x_2 \approx 14.32$$

לכן, מתקיים כאשר $n \geq 15 > 14.32$, או $n < 0.1$

$\Downarrow$

$n=0$

היות ו- n אי שלילי.

לכן, $n=15$ הוא הערך הקטן ביותר
המספק את דורתי הקולה (פרט ל- $n=0$)

3-1 התנהגות אסימפטוטית של פולינומים

יהי

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

פולינום ב-n ממעלה d, כאשר $a_d > 0$, ויהי k קבוע. השתמשו בהגדרת הסימונים האסימפטוטיים כדי להוכיח את התכונות הבאות:

א. אם $k \geq d$, אזי $p(n) = O(n^k)$.
ב. אם $k \leq d$, אזי $p(n) = \Omega(n^k)$.
ג. אם $k = d$, אזי $p(n) = \Theta(n^k)$.
ד. אם $k > d$, אזי $p(n) = o(n^k)$.
ה. אם $k < d$, אזי $p(n) = \omega(n^k)$.

ב)

א)

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

$$p(n) = O(n^k) \Leftarrow k \geq d$$

כלומר: האם קיים n_0 כאשר לכל $n \geq n_0$ מתקיים:

יהי c: $\quad 0 \leq a_0 + a_1 n + \dots a_d n^d \leq c n^k \; / : n^k$

$$0 \leq \frac{a_1}{n^k} + \frac{a_2}{n^{k-1}} + \dots \frac{a_d}{n^{k-d}} \leq c$$

נגדיר $\quad S = \sum_{j=1}^{d} a_i$

ידוע כי $\quad \frac{1}{n^{k-i}} \leq 1$ לכל $0 \leq i \leq k$

לכן

$$\frac{a_i}{n^{k-i}} \leq a_i$$

ולכן

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{a_i}{n^{k-i}} \leq S$$

ניקח $c = S + 1$.

וקיבלנו c המספק את תנאי ההגדרה.

ולכן

$$\boxed{p(n) = O(n^k)}$$

ב)

$$p(n) = \Omega(n^k) \Leftarrow k \le d$$

נבדוק האם קיים c, n_0, כאשר לכל $n > n_0$ מתקיים:

$$cn^k \le a_0 + a_1 n + \cdots a_d n^d \; / : n^d$$

$$\frac{c}{n^{d-k}} \le \frac{a_0}{n^d} + \frac{a_1}{n^{d-1}} + \cdots + a_d$$

ידוע כי $\frac{1}{n^{d-k}} \le 1$ $\leftarrow$ $d \ge k$ *

ולכן

$$\frac{c}{n^{d-k}} \le c$$

ניקח $c = \frac{a_d}{2}$

ונקבל

$$\frac{a_d}{2n^{d-k}} \le \frac{a_d}{2} \le a_d \le \frac{a_0}{n^d} + \frac{a_1}{n^{d-1}} + \cdots + a_d$$

ולכן קיים $c = \frac{a_d}{2}$ כאשר לכל $n > 2$ (אפשר לקחת $n_0 = 2$ * יכול להיות ערך אחר)

ולכן מתקיימים תנאי הטענה ונקבל

$$\boxed{p(n) = \Omega(n^k)}$$

ב) $k=d$

הראנו כי $p(n)=O(n^k)$, $k\ge d$

$p(n)=\Omega(n^k)$ $k\le d$

לפי משפט 3.1 נקבל כי

$$\boxed{p(n)=\Theta(n^k)}$$

ג)

$$p(n)=o(n^k) \Leftarrow \underline{k>d}$$

צריך למצוא n_0 כך ש<u>לכל</u> $C\in\mathbb{R}^+$, $n\ge n_0$ מתקיים:

$$p(n) < cn^k$$

$$a_0 + a_1 n^1 + \dots + a_d n^d < Cn^k \quad / :n^k$$

$$\frac{a_0}{n^k} + \frac{a_1}{n^{k-1}} \dots + \frac{a_d}{n^{k-d}} < C$$

ידוע כי לכל d הביטוי $\frac{a_d}{n^{k-d}}$ שואף ל-0.

לכן, ניקח n_{a_i} כך שלכל $n>n_{a_i}$ מתקיים $\frac{a_i}{n^{k-i}} < \frac{C}{d}$

ניקח $n_0=\max\{n_{a_i} \mid 0\le i\le d\}$

ולכן לכל $n>n_0$ שמקיים (לפי הגדרת n_0)

$$\frac{a_1}{n^k}+\frac{a_2}{n^{k-1}}+\dots+\frac{a_d}{n^{k-d}}<\underbrace{\frac{c}{d}+\frac{c}{d}+\dots+\frac{c}{d}}_{d\text{ פעמים}}=c$$

וקיבלנו שלכל c קיים n_0 כאשר שלכל $n>n_0$
הטענה מתקיימת ולכן הטענה נכונה!
לכן $\Leftarrow$ $p(n)=o(n^k)$

ה) $k<d \Leftarrow$ $p(n)=\omega(n^k)$

אראה כי לכל $c\in\mathbb{R}^+$ קיים n_0 כאשר לכל $n>n_0$
שמתקיים

$$c\cdot n^k<p(n)$$
$$\Downarrow$$
$$c\cdot n^k<a_0+a_1n+\dots a_dn^d \quad /:n^k$$

$$c<\frac{a_0}{n^k}+\frac{a_1}{n^{k-1}}+\dots a_dn^{d-k}$$

$n^{d-k}\geq 1$ (כאשר $n\geq 1$) היות ו- אבל

ניקח $n_0=\sqrt[d-k]{\frac{c}{a_d}}$

כאשר $n>n_0$, נקבל $a_dn^{d-k}>c$

ולכן נקבל כי כאשר $n > n_0$:

$$\frac{a_0}{n^k} + \dots + a_d n^{d-k} > C$$

ולכן לכל C קיים n_0 המקיים את תנאי השאלה.

לכן

$$\boxed{p(n) = \omega(n^k) \Leftarrow d > k}$$

3-3 סידור פונקציות על פי קצב הגידול האסימפטוטי שלהן

א. סדרו את הפונקציות הבאות על פי שיעור הגידול שלהן. כלומר, מצאו סידור $g_1, g_2, \ldots, g_{30}$ של הפונקציות המקיים

$$g_1 = \Omega(g_2), g_2 = \Omega(g_3), \ldots, g_{29} = \Omega(g_{30})$$

חלקו את הרשימה למחלקות שקילות כך ש- $f(n)$ ו- $g(n)$ שייכות לאותה מחלקה אם ורק אם $f(n) = \Theta(g(n))$.

$\cancel{\lg(\lg^* n)}$	$\cancel{2^{\lg^* n}}$	$\cancel{(\sqrt{2})^{\lg n}}$	$\cancel{n^2}$	$\cancel{n!}$	$(\lg n)!$
$\cancel{\left(\frac{3}{2}\right)^n}$	$\cancel{n^3}$	$\cancel{\lg^2 n}$	$\cancel{\lg(n!)}$	$\cancel{2^{2^n}}$	$\cancel{n^{1/\lg n}}$
$\cancel{\ln \ln n}$	$\cancel{\lg^* n}$	$\cancel{n \cdot 2^n}$	$\cancel{n^{\lg \lg n}}$	$\cancel{\ln n}$	$\cancel{1}$
$\cancel{2^{\lg n}}$	$\cancel{(\lg n)^{\lg n}}$	$\cancel{e^n}$	$\cancel{4^{\lg n}}$	$\cancel{(n+1)!}$	$\cancel{\sqrt{\lg n}}$
$\cancel{\lg^*(\lg n)}$	$\cancel{2^{\sqrt{2 \lg n}}}$	$\cancel{n}$	$\cancel{2^n}$	$\cancel{n \lg n}$	$\cancel{2^{2^{n+1}}}$

ב. הביאו דוגמה לפונקציה אי-שלילית יחידה $f(n)$ המקיימת: עבור כל הפונקציות $g_i(n)$ המופיעות בחלק א', $f(n)$ אינה $O(g_i(n))$ ואינה $\Omega(g_i(n))$.

שאלה 2

$2^{\lg(n)} = n$ / ונציב $\frac{1}{\lg n}$

$2 = n^{\frac{1}{\lg n}}$

א) הסדר:

g_{30}: 1 $\quad n^{\frac{1}{\lg(n)}} = 2$

g_{29}: ידוע כי מתקיים לכל f: $\Omega(\lg(f(n))) = f(n)$

$\lg(\lg^*(n))$

$\lg^*(n)$ $\quad$ לפי הגדרת $\lg^*$: $\lg^*(\lg(n)) = \lg^*(n) - 1$

g_{28}, g_{27}: ידוע כי מתקיים לכל f: $\Omega(f(n)) = 2^{f(n)}$

$2^{\lg^*(n)}$

$\lg(\lg(n))$ $\quad \ln(\ln(n)) = \ln\left(\frac{\lg(n)}{\lg(e)}\right) = \frac{\lg\left(\frac{\lg(n)}{\lg(e)}\right)}{\lg(e)}$

$\sqrt{\lg(n)}$

$\lg(n)$

$n\lg(n)$ $\quad \lg(n!) =$

$2^{\sqrt{2\lg(n)}}$

$\sqrt{2}^{\lg(n)} = 2^{\frac{1}{2}\lg(n)} = \sqrt{n}$

n $\quad 2^{\lg(n)} = n$

n^2 $\quad 4^{\lg(n)} = (2^2)^{\lg(n)} = (2^{\lg(n)})^2 = n^2$

n^3

$n^{\lg(n)}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^n$

2^n

$n \cdot 2^n$

e^n

$n!$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

2^{2^n}

g_1 : $2^{2^{n+1}} = 2^{2^n \cdot 2} = \left(2^{2^n}\right)^2$

2-1 שימוש במיון-הכנסה על מערכים קטנים במיון-מיזוג

אף כי זמן הריצה של מיון-מיזוג במקרה הגרוע הוא $\Theta(n\lg n)$ ושל מיון-הכנסה – $\Theta(n^2)$, הגורמים הקבועים גורמים לכך שמיון-הכנסה מהיר יותר עבור ערכי n קטנים. לכן יש מקום להשתמש במיון-הכנסה בתוך מיון-מיזוג עבור תת-בעיות קטנות דיין. נתבונן בגרסה שונה של מיון-מיזוג, שבה n/k תת-רשימות באורך k ממוינות באמצעות מיון-הכנסה, ואז ממזגים אותן לרשימה אחת באמצעות מנגנון המיזוג המקובל, כאשר k הוא ערך שאותו יש לקבוע.

א. הראו שאפשר למיין n/k תת-רשימות, כל אחת באורך k, באמצעות מיון-הכנסה, בזמן $\Theta(nk)$ במקרה הגרוע.

ב. הראו שניתן למזג את התת-רשימות בזמן $\Theta(n\lg(n/k))$ במקרה הגרוע.

ג. אם נתון כי זמן הריצה במקרה הגרוע של גרסה זו של מיון-מיזוג הוא $\Theta(nk + n\lg(n/k))$, מהו הערך האסימפטוטי (במונחי Θ) הגדול ביותר של k כפונקציה של n, שעבורו זמן הריצה האסימפטוטי של גרסה זו זהה לזה של מיון-מיזוג הרגיל?

ד. כיצד יש לבחור את k הלכה למעשה?

א) למיין מערך באורך k עלות
מיון הכנסה הוא $\Theta(k^2)$
מפני שקיימות $\frac{n}{k}$ רשימות,
נקבל

$$\Theta\left(\frac{n}{k}\cdot k^2\right) = \boxed{\Theta(n\cdot k)}$$

מש"ל

ב) מיון מיזוג זוהי פעולה רקורסיבית
כאשר בכל איטרציה שלה יש מעבר על כל $\boxed{n}$
האיברים.
אך מספר האיטרציות של המיזוג הוא $\lg\left(\frac{n}{k}\right)$
מפני שכאשר המערך מחולק ל- $\frac{n}{k}$ תתי מערכים
הם ממוינים.
ולכן נקבל

$$\Theta\left(n\cdot \lg\left(\frac{n}{k}\right)\right) = \boxed{\Theta\left(n\lg\left(\frac{n}{k}\right)\right)}$$

מש"ל ב

ג) ידוע כי זמן הריצה במיון מיזוג רגיל

הינו:

$\Theta(n\lg(n))$

והמיון המשולב הוא

$\Theta(nk+n\lg(\frac{n}{k}))$

מיידית ניתן לראות כי אם $k>\Theta(\lg(n))$

נקבל כי המיון המשולב גבוה מהמיון הרגיל:

$k>\Theta(\lg(n))$

$\Downarrow$

$\Theta(nk+n\lg(\frac{n}{k})) \ge \Theta(nk) > \Theta(n\lg(n)) =$ מיון מיזוג רגיל

לכן, נבדוק עבור $k=\Theta(\lg(n))$:

$$\Theta\left(n\lg(n)+n\lg\left(\frac{n}{\lg(n)}\right)\right)=$$

$$=\Theta(n\lg(n)+n(\lg(n)-\lg(\lg(n))))$$

$$\Theta(n\lg(n)+n\lg(n)-n\lg(\lg(n)))=$$

$\Theta(n\lg(n)) =$ מיון מיזוג

* ידוע כי $\lg(\lg(n))$ יותר חלשה מ־$\lg(n)$ ובפרט

לכן:

$$\boxed{k = \Theta(\lg(n))}$$

$\boxed{\text{~כל}}$

ד) ניתן לקחת $k = \lceil \lg(n) \rceil$

במקרה ש- $\frac{n}{k}$ הינו מספר שלם.

4-4 דוגמאות נוספות לנוסחאות נסיגה

מצאו חסם עליון וחסם תחתון אסימפטוטיים עבור $T(n)$ בכל אחת מנוסחאות הנסיגה שלהלן.
הניחו כי $T(n)$ קבוע עבור n קטן דיו. מצאו חסמים הדוקים ככל שתוכלו, ונמקו תשובותיכם.

א. $T(n) = 3T(n/2) + n\lg n$

ב. $T(n) = 5T(n/5) + n/\lg n$

ג. $T(n) = 4T(n/2) + n^2\sqrt{n}$

ה. $T(n) = 2T(n/2) + n/\lg n$

ו. $T(n) = T(n/2) + T(n/4) + T(n/8) + n$

ז. $T(n) = T(n-1) + 1/n$

ח. $T(n) = T(n-1) + \lg n$

ט. $T(n) = T(n-2) + 2\lg n$

א)

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n\lg(n)$$

נשתמש בשיטת האב:

$$f(n) = n\lg(n)$$

$$n^{\lg(3)} \approx n^{1.584\ldots}$$

ניקח $\epsilon = 0.1$.

נקבל

$$n\lg(n) = O\left(n^{\lg(3)-\epsilon}\right)$$

מפני ש- $\lg(n) = O(n^{\alpha})$ לכל $\alpha > 0$

ונקבל

$$\boxed{T(n) = \Theta\left(n^{\lg(3)}\right)}$$

ב)

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{5}\right) + \frac{n}{\lg(n)}$$

$$T(n) = 5\left(5T\left(\frac{n}{5^2}\right) + \frac{\frac{n}{5}}{\lg\left(\frac{n}{5}\right)}\right) + \frac{n}{\lg(n)}$$

$$T(n) = 5\left(5\left(5T\left(\frac{n}{5^3}\right) + \frac{\frac{n}{25}}{\lg\left(\frac{n}{25}\right)}\right) + \frac{\frac{n}{5}}{\lg\left(\frac{n}{5}\right)}\right) + \frac{n}{\lg(n)}$$

וניתן להבין שמקבלים:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_5(n)} n \cdot \frac{1}{\lg\left(\frac{n}{5^i}\right)}$$

$$T(n) = n \cdot \sum_{i=0}^{\log_5(n)} \frac{1}{\lg(n) - i\lg(5)} =$$

$$T(n) = n \cdot \sum_{i=0}^{\log_5(n)} \frac{1}{\lg(n) - i\lg(5)} =$$

$$T(n) = n \cdot \sum_{i=0}^{\log_5(n)} \frac{1}{i}$$

*

$$\lg(n) - \lg(5^i) = k$$

לכל k קיים $i = \log_5(n) - k$

ולכן

$$= T(n) = n \cdot \ln(\log_5(n))$$

* הגבלה של הטור ההרמוני היא $\ln(n)$

$$\boxed{T(n) = \Theta(n\lg(\lg(n)))}$$ ולכן

ג)

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2\sqrt{n}$$

נשתמש בשיטת האב:

$$f(n) = n^{2.5} \qquad n^{\log_2(4)} = n^2$$

יהי $0.1 = \epsilon > 0$

ונקבל

$$f(n) = n^{2.5} = \Omega(n^{2+\epsilon}) = \Omega(n^{2.1})$$

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^{2.5})}$$ ולכן נקבל

ה)

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\lg(n)}$$

בדומה לסעיף ב:

$$T(n) = 2\left(2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^3}\cdot\frac{1}{\lg\left(\frac{n}{2^3}\right)}\right) + \frac{n}{2^2}\cdot\frac{1}{\lg\left(\frac{n}{2^2}\right)}\right) + \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\lg\left(\frac{n}{2}\right)}\Bigg) + n\lg(n)$$

ניתן לראות ש:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\lg(n)} n\cdot\frac{1}{\lg\left(\frac{n}{2^i}\right)} =$$

$$T(n) = n\cdot\sum_{i=0}^{\lg(n)}\frac{1}{\lg(n)-\lg(2^i)} = n\cdot\sum_{i=0}^{\lg(n)}\frac{1}{\lg(n)-i} = n\cdot\sum_{i=0}^{\lg(n)}\frac{1}{i}$$

להפוך את הסדר

בדומה לסעיף ב׳ נקבל

$$\boxed{T(n) = \Theta(n \lg(\lg(n)))}$$

ו)

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{8}\right) + n$$

נבנה עץ:

$$n \qquad\qquad n$$

$$\frac{n}{2} \quad \frac{n}{4} \quad \frac{n}{8} \qquad\qquad \frac{7}{8}n$$

$$\frac{n}{4} \quad \frac{n}{8} \quad \frac{n}{16} \quad \frac{n}{8} \quad \frac{n}{16} \quad \frac{n}{32} \quad \frac{n}{16} \quad \frac{n}{32} \quad \frac{n}{64} \qquad\qquad \frac{49}{64}n$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$k = \lg(n)$ כאשר) $\qquad \dfrac{7^k}{8^k}n$

נקבל:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\lg(n)} \frac{7^i}{8^i} \cdot n =$$

$$T(n) = n \cdot \sum_{i=0}^{\lg(n)} \frac{7^i}{8^i} = \Theta(n)$$

ג)

$$T(n) = T(n-1) + \frac{1}{n}$$

$$T(n) = T(n-2) + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

$$T(n) = T(n-3) + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

לכן, ניתן להבין ש:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n-i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \ln(n)$$

הסתמכתי על עובדה זו גם בסעיפים הקודמים

ונקבל

$$T(n) = \Theta(\lg(n))$$

ד)

$$T(n) = T(n-1) + \lg(n)$$

נבדוק האם מתקיים

$$T(n) = O(n\lg(n))$$

לכן, קיים $c>0$ כאשר [illegible] מתקיים

$$T(n) \leq cn\lg(n)$$

אראה זאת באינדוקציה:

כאשר $n=2$:

$$T(1)=\Theta(1)\leq 2\cdot \lg(2)\cdot c=2c$$

מספיק אם

(היות ו- $T(n)$ קבוע לn קטן מספיק
לפי הנתונים, ניתן גם לבחור n אחר לבסיס!)

נניח ומתקיים עבור n כלשהו:

$$T(n)\leq cn\lg(n)$$

נראה כי מתקיים

$$T(n+1)\leq c(n+1)\lg(n+1)$$

$$T(n)+\lg(n+1)\leq c(n+1)\lg(n+1)$$

$$T(n)\leq \lg(n+1)\cdot(c(n+1)-1)$$

ניקח $c=1$
ונקבל:

$T(n)\leq n\lg(n)$ הנחת האינדוקציה:

$T(n)\leq \lg(n+1)\cdot n$ מה שצריך להוכיח:

$\lg(n)$ פונ' עולה

ונקבל:

$$\boxed{T(n)\leq n\lg(n)\leq n\lg(n+1)}$$

קיים $c=1$
אשר מקיים את
התנאים.

לכן

$$\boxed{T(n) = O(n\lg(n))}$$ (כאשר $c=1$)

כעת אראה כי $T(n)=\Omega(n\lg(n))$:

יהי $c>0$

אראה כי קיים c כאשר כמעט לכל n שמתקיים:

$$c\cdot n\lg(n) \leq T(n)$$

אראה זאת באינדוקציה:

$$T(1)=\Theta(1) \geq 1\lg(1)\cdot c = 0$$

בסיס ישיר

נניח כי מתקיים

$$T(n) \geq c n\lg(n)$$

אראה כי מתקיים

$$T(n+1) \geq c(n+1)\lg(n+1)$$

$$T(n)+\lg(n+1) \geq c(n+1)\lg(n+1)$$

ניקח $c=1$ (נקבל:)

$$T(n) + \lg(n+1) \geq (n+1)\lg(n+1)$$

$$T(n) \geq n\lg(n+1)$$

וכן ידוע ש: $\lg(n)$ פונ' עולה

$$T(n) \geq n\lg(n) \geq n\lg(n+1)$$

פסוק ויש

לכן, מש״ה $T(n) = \Omega(n\lg(n))$

לכן, מכיוון שמתקיים

$$T(n) = \Omega(n\lg(n))$$

$$T(n) = O(n\lg(n))$$

קיבלנו:

$$\boxed{T(n) = \Theta(n\lg(n))}$$

מש״ל

ט)

$$T(n) = T(n-2) + 2\lg(n)$$

אראה כי מתקיים $T(n) = O(n\lg(n))$

נמצא $c > 0$ כאשר:

$$T(n) = T(n-2) + 2\lg(n) \leq$$

לפי הגדרת $T(n)$

$$\leq c\cdot(n-2)\lg(n-2) + 2\lg(n) \leq$$

$\lg(n)$ פונ' עולה

$$\leq c\cdot(n-2)\lg(n) + 2\lg(n) =$$

$$= cn\lg(n) + (2-2c)\lg(n) =$$

$$cn\lg(n) + (2-2c)\lg(n) \leq cn\lg(n)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c \geq 1}$$

לכן קיים $c>0$

ונקבל

$$T(n) = O(n\lg(n))$$