ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20521

טופולוגיה קבוצתית

חוברת הקורס - סתיו 2025א

כתבה: חנה גלזנר

אוקטובר 2024 - סמסטר סתיו - תשפ"ה

תוכן העניינים

אל הסטודנט,

שאו ברכה עם הצטרפותכם ללומדי הקורס "טופולוגיה קבוצתית".

בחוברת זו תמצאו את הפרטים שעליכם לדעת כדי שתוכלו לבצע את המוטל עליכם בקורס באופן מלא ויעיל. בהמשך תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://www.openu.ac.il/shoham .

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכזת ההוראה בקורס היא חנה גלזנר. ניתן לפנות אליה באופן הבא:

- בטלפון 09-7782115, בימי ג' בשעות 14:00 - 15:00.
- דרך אתר הקורס.
- בפקס 09-7780631
- **שאילתא** - לפניות בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאילתא. לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות.

אנו מאחלים לכם הצלחה בלימודים.

בברכה,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20521 / 2025א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח מטלת אופ"ל (באתר הקורס)	ממ"ן (במערכת המטלות)
1	01.11.2024-29.10.2024	פרק 1			
2	08.11.2024-03.11.2024	פרק 1		מטלת אופ"ל 01 10.11.24	
3	15.11.2024-10.11.2024	פרק 2			ממ"ן 11 17.11.24
4	22.11.2024-17.11.2024	פרק 2		מטלת אופ"ל 02 24.11.24	
5	29.11.2024-24.11.2024	פרק 3			ממ"ן 12 1.12.24
6	06.12.2024-01.12.2024	פרק 3			
7	13.12.2024-08.12.2024	פרק 4			ממ"ן 13 15.12.24
8	20.12.2024-15.12.2024	פרק 4			
9	27.12.2024-22.12.2024 (ה-ו חנוכה)	פרק 5			
10	03.01.2025-29.12.2024 (א-ה חנוכה)	פרק 5			ממ"ן 14 5.1.25
11	10.01.2025-05.01.2025	פרק 5			
12	17.01.2025-12.01.2025	פרק 6			
13	24.01.2025-19.01.2025	פרק 7			ממ"ן 15 26.1.25
14	31.01.2025-26.01.2025	פרק 7			
15	03.02.2025-02.02.2025				ממ"ן 16 2.2.25

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לעבור בהצלחה את הקורס ולקבל נקודות זכות, הכרחי ומספיק לקיים את התנאים הבאים גם יחד:

א. להגיש מטלות בהיקף של 10 נקודות לפחות (אפשר עד 20).
ב. להגיש אחת ממטלות 15, 16.
ג. לקבל לפחות 60 בבחינת הגמר.
ד. לקבל לפחות 60 ציון סופי.

תיאור המטלות

קניית שליטה בחומר הקורס מצריכה תרגול רב, וזה מתבטא, בין השאר, בריבוי המטלות.
בקורס יש 2 מטלות אופ"ל ושישה ממ"נים. משקל כל מטלת אופ"ל 1 נקודה ומשקל כל ממ"ן 3 נקודות.

הערות חשובות לתשומת לבך!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.
כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:
בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.
זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.
מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנטים מגישים לבדיקה אמורה להיות פרי עמלם. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.
אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת אופ״ל 01

הקורס: 20521 טופולוגיה קבוצתית

חומר הלימוד למטלה: פרק 1

מספר השאלות: --

משקל המטלה: 1

סמסטר : 2025א

מועד אחרון להגשה: 10.11.24

מטלה ממוחשבת באתר הקורס.

מועד הגשה מעודכן והוראות להגשת המטלה יופיעו באתר הקורס לקראת מועד ההגשה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20521 - טופולוגיה קבוצתית

חומר הלימוד למטלה: פרק 1 **משקל המטלה:** 3

מספר השאלות: 4 **מועד אחרון להגשה:** 17.11.24

סמסטר: 2025א

שליחת מטלות היא באמצעות מערכת המטלות המקוונת. על המטלות להיות מוקלדות או סרוקות בצורה **ברורה**. יש להגיש קובץ אחד בלבד, מסוג PDF בלבד.

שאלה 1

א. תהי $B \subseteq l_\infty$ קבוצת הסדרות המתאפסות ממקום מסויים. (כלומר $\underline{x} = \langle x_n \rangle_n \in B$ אםם קיים k טבעי כך שלכל $n > k$, $x_n = 0$).

הוכיחו כי $\mathrm{Cl}B$ היא קבוצת הסדרות המתכנסות ל- 0 .

ב. הראו כי במרחב המטרי l_2 קבוצת הסדרות שיש להן רכיב חיובי היא קבוצה פתוחה ואינה קבוצה סגורה.

שאלה 2

א. יהי $X \subset \mathbb{R}$ תת המרחב שאיבריו הם כל המספרים מהצורה $m + \frac{1}{k}$, כאשר k,m שלמים.

הראו כי ב- X כל מספר שלם הוא נקודת הצטברות וכל מספר לא שלם הוא נקודה מבודדת.

ב. יהיו X מרחב מטרי, $A \subseteq X$ ו- $x \in X$. הוכיחו כי x נקודת הצטברות של A אםם $d\left(x, A - \{x\}\right) = 0$.

שאלה 3

א. תהי $\varphi : C([0,1]) \to C([0,1])$ הפונקציה הבאה: לכל $f \in C([0,1])$,
$\varphi(f)(x) = f(|\sin x|)$.
הוכיחו כי φ היא פונקציה רציפה.

ב. תהי $\varphi : l_2 \to \mathbb{R}$ הפונקציה הבאה: לכל $\underline{x} = \langle x_1, x_2, x_3, \ldots \rangle \in l_2$, $\varphi(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$.
הוכיחו כי φ היא פונקציה רציפה, וכי $\sqrt{\varphi}$ רציפה במידה שווה.

ג. יהי L המרחב המטרי $\{\frac{1}{n} | n = 1, 2, 3, 4, \ldots\} \cup \{0\}$ עם המרחק הרגיל.
יהי X מרחב מטרי כלשהו. תהי $x \in X$, ותהי $\langle x_n \rangle$ סדרת נקודות ב- X.
הוכיחו כי הסדרה $\langle x_n \rangle$ מתכנסת ל- x אם ורק אם הפונקציה $f : L \to X$, הנתונה ע"י $f(0) = x$, $f(\frac{1}{n}) = x_n$, היא רציפה.

שאלה 4

א. הוכיחו כי לא קיימת מטריקה d על הרציונליים, השקולה למטריקה הרגילה, כך שהמרחב $\langle Q, d \rangle$ שלם.

ב. יהי X מרחב מטרי שלם בעל יותר מנקודה אחת, ותהי $x \in X$ נקודה מבודדת. הוכיחו כי המרחב $X - \{x\}$ גם הוא שלם.

ג. הוכיחו כי קיימת פונקציה ממשית ורציפה בקטע $[0,1]$ שאינה מונוטונית במובן החלש בשום תת-קטע מהצורה $[a,b]$, $0 \le a < b \le 1$.
רמז: אם הפונקציה מונוטונית בתת-קטע כלשהו, אז היא מונוטונית בתת קטע שקצותיו רציונליים.
התבוננו באוסף הקבוצות $A_{p,q} = \{ f \in C([0,1]) \mid f|_{[p,q]} \ is\ monotonic \}$ עבור $p < q \in Q \cap [0,1]$, והשתמשו במשפט בייר.

מטלת אופ״ל 02

הקורס: 20521 טופולוגיה קבוצתית

חומר הלימוד למטלה: פרק 2

מספר השאלות: --

משקל המטלה: 1

סמסטר : 2025א

מועד אחרון להגשה: 24.11.24

מטלה ממוחשבת באתר הקורס.

מועד הגשה מעודכן והוראות להגשת המטלה יופיעו באתר הקורס לקראת מועד ההגשה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20521 - טופולוגיה קבוצתית

חומר הלימוד למטלה: פרק 2 **משקל המטלה:** 3

מספר השאלות: 5 **מועד אחרון להגשה:** 1.12.24

סמסטר: 2025א

שליחת מטלות היא באמצעות מערכת המטלות המקוונת. על המטלות להיות מוקלדות או סרוקות בצורה **ברורה**. יש להגיש קובץ אחד בלבד, מסוג PDF בלבד.

שאלה 1

יהי τ אוסף הקבוצות הכולל את $\varnothing, R$ וכל הקבוצות מהצורה (a,∞) כאשר $a \in R$.

א. הוכיחו כי τ טופולוגיה על R.

ב. הוכיחו כי לכל קבוצה חסומה מלעיל ב- R יש פנים ריק בטופולוגיה τ.

ג. הוכיחו כי הסגור של כל קבוצה שאינה חסומה מלעיל הוא R.

ד. מצאו את השפה של הקבוצה $(0,1)$.

שאלה 2

א. יהי X מרחב טופולוגי ותהי $A \subseteq X$ קבוצה פתוחה או סגורה. הראו כי ∂A קבוצה בעלת פנים ריק.

ב. האם טענת הסעיף הקודם נכונה גם ללא ההנחה כי A פתוחה או סגורה?

ג. יהי X מרחב טופולוגי ותהי $B \subseteq X$ קבוצה, כך שכל תת-קבוצה של B סגורה ב- X. הוכיחו כי אין ל- B נקודות הצטברות.

ד. יהי X מרחב טופולוגי ותהי $D \subseteq X$ קבוצה צפופה. הוכיחו כי לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ מתקיים $U \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap D)$.

שאלה 3

א. יהי X מרחב טופולוגי ותהי $A\subseteq X$ קבוצה פתוחה. הוכיחו כי A פתוחה-רגולרית אםם $\partial A=\partial \mathrm{Cl}A$. (הגדרת קבוצה פתוחה-רגולרית מופיעה בשאלה 38 בעמ׳ 35 בכרך ב).

ב. נתבונן במישור של מור, המתואר בעמודים 29-30 בכרך ב׳. בהתאם לסימונים שם, נסמן ב- M את המישור של מור, ב- H את קבוצת הנקודות הנמצאות מעל ציר x , וב- R את ציר x .

a. הוכיחו כי כל תת-קבוצה $X\subseteq M$ המקיימת $\varnothing \neq X\subseteq R$ **אינה** קבוצה סגורה-רגולרית ב- M .

b. הוכיחו כי כל תת קבוצה $Y\subseteq M$ המקיימת $H\subseteq Y\subsetneq M$ **אינה** קבוצה פתוחה-רגולרית ב- M .

c. הוכיחו כי כל עיגול פתוח ב- M החלקי ל- H ואינו משיק ל- R הוא קבוצה פתוחה-רגולרית ב- M .

שאלה 4

א. תהי $f:R_{CF}\to R_{CF}$ הפונקציה הנתונה ע״י $f\left(x\right)=\begin{cases}0 & x=0,1,2,3\\ x & x\neq 0,1,2,3\end{cases}$. בדקו האם f רציפה, האם היא פתוחה והאם היא סגורה.

ב. תהי $g:R_{CC}\to R_{CC}$ הפונקציה הנתונה ע״י $g\left(x\right)=x^2$. בדקו האם g רציפה, האם היא פתוחה והאם היא סגורה.

ג. תהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה ועל בין מרחבים טופולוגיים.

הוכיחו כי אם $A\subseteq X$ קבוצה צפופה, אז $f\left(A\right)$ קבוצה צפופה ב- Y .

שאלה 5

א. הוכיחו כי המרחבים $H=\left\{\left\langle x,y\right\rangle \mid y>0\right\}$, $D=\left\{\left\langle x,y\right\rangle \mid x^2+y^2<1\right\}$, כאשר שניהם עם הטופולוגיה המושרית מ- $\mathbb{R}^2$, הומואמורפיים זה לזה.

ב. הוכיחו כי הישר של סורגנפריי R_S אינו הומאומורפי לישר הקו-סופי R_{CF} .

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20521 - טופולוגיה קבוצתית

חומר הלימוד למטלה: פרק 3

משקל המטלה: 3

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 15.12.24

סמסטר: 2025א

שליחת מטלות היא באמצעות מערכת המטלות המקוונת. על המטלות להיות מוקלדות או סרוקות בצורה **ברורה**. יש להגיש קובץ אחד בלבד, מסוג PDF בלבד.

שאלה 1

א. תהי $A=\{a,b,c\}$ ותהי $f:\mathbb{R}\to A$ הפונקציה $f(x)=\begin{cases} a & x<0 \\ b & x>0 \\ c & x=0 \end{cases}$.

מצאו טופולוגיה על A לפיה המרחב A הומאומורפי למנה $\mathbb{R}/f$.

ב. הוכיחו כי המעגל $S^1=\{\langle x,y\rangle \mid x^2+y^2=1\}$ (כתת-מרחב של $\mathbb{R}^2$) הוא מרחב זיהוי של $\mathbb{R}^2$, ומצאו פונקציית זיהוי מתאימה.

ג. תהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה ועל בין מרחבים טופולוגיים. נניח כי לכל מרחב Z ופונקציה $g:Y\to Z$, אם $g\circ f$ רציפה אז גם g רציפה.

הוכיחו כי Y הומאומורפי למרחב המנה X/f.

שאלה 2

א. נתבונן בקבוצה $N\times N$.

a. הוכיחו כי טופולוגיית המכפלה $N_{CF}\times N_{CF}$ עשירה ממש מהטופולוגיה הקו-סופית $(N\times N)_{CF}$.

b. הוכיחו כי ההטלה על הרכיב הראשון אינה רציפה כפונקציה $(N\times N)_{CF}\to N_{CF}$.

ב. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים, $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$.

a. הוכיחו כי $\partial_X(A)\times\partial_Y(B)\subseteq\partial_{X\times Y}(A\times B)$ (כאשר $\partial_X(A)$ מציין את השפה של A במרחב X, וכן הלאה).

b. הדגימו מקרה בו אין שיוויון.

שאלה 3

א. יהיו $X_1,\ldots,X_n$ מרחבים טופולוגיים, ו $x_k\in X_k$ לכל $1\le k\le n$.

הוכיחו כי $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\in\prod_{k=1}^{n}X_k$ מבודדת אם לכל $1\le k\le n$, x_k מבודדת ב- X_k.

ב. הראו כי טענת הסעיף הקודם אינה נכונה עבור מכפלה של אינסוף מרחבים.

ג. יהי $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ אוסף אינסופי של מרחבים, ולכל $\gamma\in\Gamma$ תהי $A_\gamma\subseteq X_\gamma$ תת-קבוצה. הוכיחו כי אם עבור אינסוף γ מתקיים $A_\gamma\neq X_\gamma$, אז $\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ בעלת פנים ריק ב- $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$.

ד. נתבונן ב- $R^N=\prod_{n=1}^{\infty}R$ עם טופולוגיית התיבות. הוכיחו כי לכל $\mathbf{x}=\langle x_n\rangle_n$, אוסף כל הסדרות $\mathbf{y}=\langle y_n\rangle_n$ כך ש- $\mathbf{x}-\mathbf{y}:=\langle x_n-y_n\rangle_n$ סדרה מתכנסת לאפס הוא קבוצה פתוחה וסגורה.

שאלה 4

א. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים. נגדיר יחס שקילות על מרחב המכפלה באופן הבא:

$\langle x_1,y_1\rangle\sim\langle x_2,y_2\rangle\Leftrightarrow x_1=x_2$.

הראו כי מרחב המנה $X\times Y/\sim$ הומאומורפי ל- X.

ב. הוכיחו כי במרחב המכפלה $\mathbb{R}^I$ קבוצת הפונקציות העולות ממש אינה פתוחה.

(פונקציה $f:I\to\mathbb{R}$ נקראת עולה ממש אם לכל $x_1<x_2$ מתקיים $f(x_1)<f(x_2)$)

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20521 - טופולוגיה קבוצתית

חומר הלימוד למטלה: פרק 4 **משקל המטלה:** 3

מספר השאלות: 5 **מועד אחרון להגשה:** 5.1.25

סמסטר: 2025א

שליחת מטלות היא באמצעות מערכת המטלות המקוונת. על המטלות להיות מוקלדות או סרוקות בצורה **ברורה**. יש להגיש קובץ אחד בלבד, מסוג PDF בלבד.

שאלה 1

א. נתבונן במרחב $Y = \{\langle x, y\rangle \mid xy = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. הוכיחו כי Y אינו הומאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

ב. הוכיחו כי פונקציה $f : N_{CF} \to \mathbb{R}$ היא רציפה אסם היא קבועה.

שאלה 2

א. יהיו X מרחב קשור ו- Y מרחב כלשהו. תהי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה.
הראו כי הגרף של f הוא קבוצה קשורה במרחב המכפלה $X \times Y$.

ב. הוכיחו כי קבוצה לא ריקה, קשורה, פתוחה וסגורה במרחב טופולוגי היא מרכיב קשור.

שאלה 3

א. הוכיחו כי המרחב N_{CF} קשור מקומית.

ב. נתבונן במרחב $X = \left\{m + \frac{1}{k} \mid m, k \in Z, k \neq 0\right\}$ עם הטופולוגיה המושרית כתת-מרחב של $\mathbb{R}$.
בדקו באילו נקודות מרחב זה קשור מקומית. נמקו.

ג. הוכיחו כי מרחב טופולוגי הוא קשור מקומית אם ורק אם יש לו בסיס שאיבריו הם קבוצות פתוחות וקשורות.

שאלה 4

א. הוכיחו כי מרחב מטרי בן מניה עם יותר מנקודה אחת הוא בלתי קשור לחלוטין.

ב. נתבונן במרחב $X=\mathbb{R}-\{0\}$. הוכיחו כי לכל n טבעי המרחב X^n קשור מקומית, אבל המרחב X^N אינו קשור מקומית.

שאלה 5

תהי $U\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה וקשורה. הוכיחו כי U קשורה מסילתית.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20521 - טופולוגיה קבוצתית

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5,6 **משקל המטלה:** 3

מספר השאלות: 6 **מועד אחרון להגשה:** 26.1.25

סמסטר: 2025א

שליחת מטלות היא באמצעות מערכת המטלות המקוונת. על המטלות להיות מוקלדות או סרוקות בצורה **ברורה**. יש להגיש קובץ אחד בלבד, מסוג PDF בלבד.

שאלה 1

א. הראו כי מרחב טופולוגי הוא T_0 אם ורק אם אין בו בסיס סביבות משותף לשתי נקודות שונות.

ב. יהי X מרחב T_0, כך שלכל $x,y \in X$ קיים הומאומורפיזם $f: X \to X$ המחליף בין הנקודות, כלומר $f(x)=y$, $f(y)=x$. הוכיחו כי X הוא מרחב T_1 .

ג. יהי X מרחב טופולוגי כלשהו, ותהי $f: X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו כי מרחב המנה X/f הוא T_1 .

שאלה 2

א. הוכיחו כי הפרח האינסופי (עמוד 71 בכרך ג) הוא מרחב T_2 .

ב. הוכיחו כי במרחב האוסדורף כל רטרקט הוא קבוצה סגורה.

שאלה 3

א. נתבונן בספירה $S^2 = \left\{ \langle x,y,z \rangle \mid x^2+y^2+z^2=1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ונגדיר עליה יחס שקילות לפי $\langle x,y,z \rangle \sim \langle -x,-y,-z \rangle$. הוכיחו כי מרחב המנה $S^2/\sim$ הוא מרחב האוסדורף.

ב. הוכיחו כי רטרקט של מרחב T_4 הוא מרחב T_4 .

שאלה 4

א. יהי X מרחב נורמלי. הוכיחו כי כל פונקציה רציפה מקבוצה סגורה ב- X לקוביה $I^n=\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \mid 0\le x_i\le 1\ \forall i=1,2,\ldots,n\}$ ניתנת להרחבה לפונקציה רציפה $X\to I^n$.

ב. יהי X מרחב נורמלי, ויהיו $A,B\subseteq X$ קבוצות סגורות וזרות. הוכיחו כי קיימות קבוצות פתוחות $U,V\subseteq X$ בעלות סגורים זרים, כך ש- $A\subseteq U$ ו- $B\subseteq V$.

שאלה 5

נתבונן במרחב R עם הטופולוגיה שבה הקבוצות הפתוחות הן $\varnothing, R$ והקבוצות מהצורה (a,∞) עבור $a\in R$.

א. הוכיחו כי סדרה מתכנסת במרחב זה אםם היא חסומה מלרע, וכי אם היא מתכנסת אז יש לה אינסוף גבולות.

ב. הוכיחו כי מרחב זה הוא מרחב מניה שניה.

שאלה 6

א. יהי X מרחב מניה ראשונה ספרבילי. הוכיחו כי כל תת-מרחב צפוף של X הוא ספרבילי.

ב. הוכיחו כי אם יש ל- X תת-מרחב צפוף וספרבילי, אז גם X ספרבילי.

ג. נתבונן במרחב $R^2-\{\langle 0,0\rangle\}$ עם הטופולוגיה המושרית כתת-מרחב של המישור הרדיאלי. הוכיחו כי זהו מרחב מניה ראשונה, וכי אינו מניה שניה ואינו ספרבילי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20521 - טופולוגיה קבוצתית

חומר הלימוד למטלה: פרקים 6,7 **משקל המטלה:** 3

מספר השאלות: 5 **מועד אחרון להגשה:** 2.2.25

סמסטר: 2025א

שליחת מטלות היא באמצעות מערכת המטלות המקוונת. על המטלות להיות מוקלדות או סרוקות בצורה **ברורה**. יש להגיש קובץ אחד בלבד, מסוג PDF בלבד.

שאלה 1

א. הוכיחו כי במרחב מטרי גם הכיוון ההפוך של משפט לינדלף מתקיים. כלומר, הוכיחו כי אם X מרחב מטרי שבו לכל כיסוי פתוח יש תת-כיסוי בן-מניה, אז X מרחב מניה שניה.

ב. הוכיחו כי במרחב מניה שניה, לכל קבוצה שאינה בת-מניה יש נקודת הצטברות.

ג. הדגימו מרחב ספרבילי שבו יש תת-קבוצה שאינה בת-מניה ואין לה נקודת הצטברות.

שאלה 2

א. הדגימו תת-קבוצה של $\mathbb{Q}$ שהיא קומפקטית ואינסופית.

ב. הדגימו מרחב קומפקטי שאינו מרחב מניה ראשונה.

ג. הוכיחו כי הקטע $[0,1]$ כתת-מרחב של R_s אינו קומפקטי.

שאלה 3

א. הוכיחו כי למרחב קומפקטי וקשור מקומית יש מספר סופי של מרכיבים קשורים.

ב. נתבונן ב- $X=[0,1]^R$ עם טופולוגית המכפלה, ונגדיר $h:X\to\mathbb{R}$ באופן הבא: לכל $f:R\to[0,1]$ נגדיר $h(f)=\inf\left(f^{-1}(0)\right)$ אם הקבוצה $f^{-1}(0)$ אינה ריקה, ו- $h(f)=0$ אחרת.

הוכיחו כי h אינה רציפה.

שאלה 4

יהי X מרחב האוסדורף ויהי $Y \subseteq X$ תת-מרחב קומפקטי מקומית.

הוכיחו כי Y פתוח בתת-המרחב $\mathrm{Cl}Y$.

הדרכה: לכל $y \in Y$ מצאו סביבה פתוחה U_y ביחס ל- Y שהסגור שלה ביחס ל- Y קומפקטי במרחב X. מצאו את הסגור של סביבה זו במרחב X.

כתבו $U_y = Y \cap V_y$ כאשר V_y פתוחה ב- X. הוכיחו $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}Y}\left(V_y \cap \mathrm{Cl}Y\right) = \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}Y}\left(V_y \cap Y\right)$ והשתמשו בכך כדי להראות כי U_y פתוחה בטופולוגיה של $\mathrm{Cl}Y$.

שאלה 5

א. הוכיחו כי המכפלה של מספר בן-מניה של מרחבים קומפקטיים סדרתית היא קומפקטית סדרתית.

ב. יהי X מרחב מטרי קומפקטי. הוכיחו כי ל- X יש קוטר סופי, וכי קיימות נקודות $x, y \in X$ שהמרחק ביניהן שווה לקוטר.

ג. יהיו X, Y מרחבים מטריים, ותהי $f: X \to Y$ פונקציה רציפה במידה שווה ועל.

a. הוכיחו כי אם X חסום כליל אז גם Y חסום כליל.

b. הוכיחו באמצעות דוגמה כי הטענה אינה נכונה אם f רציפה אך לא במידה שווה.