שאלה 1 (15 נקודות)

תהי $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ סדרת וקטורים בלתי תלויה לינארית ב- $\mathbb{R}^4$. ותהי A הקבוצה הבאה:

$$A = \{v_1 + tv_2 + v_3, \quad v_2 + tv_3 + v_4, \quad v_3 + tv_4 + v_1, \quad v_4 + tv_1 + v_2\}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

א. עבור אלו ערכי הפרמטר $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathrm{Sp}(A) = \mathbb{R}^4$?

ב. מצאו בסיס וממד ל- $\mathrm{Sp}(A)$ עבור ערכי t שבהם $\mathrm{Sp}(A) \neq \mathbb{R}^4$.

א)

ידוע כי B סדרת וקטורים בלתי תלויה לינארית באורך 4, ב- R^4.

ידוע כי $dim(R^n) = n$, ולכן, $dim(R^4) = 4$.

לפי משפט 8.3.2 ,2, כל קבוצה בלתי תלויה לינארית באורך n ($n=4$ כי $dim(R^4)=4$) היא בסיס.

לכן, B בסיס (סדור) של R^4.

נסתכל על A: (לכל $t \in R$)

$$A = \{V_1 + tV_2 + V_3,\ V_2 + tV_3 + V_4,\ V_3 + tV_4 + V_1,\ V_4 + tV_1 + V_2\}$$

ידוע כי $Sp(A) = R^4$ אמ"ם:

קיימים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in F$ כאשר לכל $V \in R^4$:

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_1 t V_2 + \lambda_1 V_3 + \lambda_2 V_2 + \lambda_2 t V_3 + \lambda_2 V_4 + \lambda_3 V_3 + \lambda_3 t V_4 + \lambda_3 V_1 + \lambda_4 V_4 + \lambda_4 t V_1 + \lambda_4 V_2 = V$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 t)V_1 + (\lambda_1 t + \lambda_2 + \lambda_4)V_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 t + \lambda_3)V_3 + (\lambda_2 + \lambda_3 t + \lambda_4)V_4 = V$$

ידוע כי קיימים $\alpha_1, \dots \alpha_4 \in F$

כאשר $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i V_i = V$.

לכן, נבדוק האם לכל $\alpha_1, \dots, \alpha_4 \in F$

קיימים $\lambda_1, \dots \lambda_4 \in F$

כאשר:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 t &= \alpha_1 \\
\lambda_1 t + \lambda_2 + \lambda_4 &= \alpha_2 \\
\lambda_1 + \lambda_2 t + \lambda_3 &= \alpha_3 \\
\lambda_2 + \lambda_3 t + \lambda_4 &= \alpha_4
\end{aligned}$$

נסתכל על כמות הפתרונות,

כלומר על מטריצת המקדמים המצומצמת:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & t \\ t & 1 & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_4 \to R_4 - R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & t \\ t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 & -t \\ -t & 0 & t & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + tR_1]{R_2 \to R_2 - tR_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & t \\ 0 & 1 & -t & 1-t^2 \\ 0 & t & 0 & -t \\ 0 & 0 & 2t & t^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2 \cdot t}$$

היין בונה הכל

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & t \\ 0 & 1 & -t & 1-t^2 \\ 0 & 0 & t^2 & t^3-2t \\ 0 & 0 & 2t & t^2 \end{bmatrix}
\xrightarrow{R_3 \to R_3 \cdot 2 - tR_4}
$$

*

$$
-t - t(1-t^2) \\
-t - t + t^3 = \\
t^3 - 2t
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & t \\ 0 & 1 & -t & 1-t^2 \\ 0 & 0 & 0 & t^3-4t \\ 0 & 0 & 2t & t^2 \end{bmatrix}
\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & t \\ 0 & 1 & -t & 1-t^2 \\ 0 & 0 & 2t & t^2 \\ 0 & 0 & 0 & t^3-4t \end{bmatrix}
$$

כדי שמטריצה זו תהווה מקדמים של איברי בסיס ל-R^4, צריך להיות הצגה יחידה של כל $r \in R^4$
לפי 1.12.2, אם כל המשוואות הקשורים, אזי קיים פתרון יחיד.

לכן:

$$t^3 - t\cdot 4 \neq 0 \qquad\qquad 2t\neq 0$$

$$t\neq 0$$

$$t(t^2-4)\neq 0$$

$$t(t-2)(t+2)\neq 0$$

עפל $t\neq 0,2,-2$

ג) נטפל A $t=2,\ t=-2$

נקבל מטריצות מקדמים של:

$$t=2 \qquad\qquad\qquad\qquad t=-2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

לכן, המטריצות האלה שקולות לאותן מטריצות
ללא שורת האחרונה · שורת האפסים.

נציב A'_1 = הבסיס השקול "החדש" כאשר $t=2$

נציב A'_2 = הבסיס השקול "החדש" כאשר $t=-2$

לכן, אם נסתכל על $Sp(A'_1) = Sp(A) = Sp(A'_2)$
כאשר $t=2$, או $t=-2$

נקבל קבוצה בת 3 איברים, ואיבר נוסף, שהוא ה-0.

לכן, מפני ש- $|A'_2 \setminus \{0\}| = 3 = |A'_1 \setminus \{0\}|$

$$Sp(A') = Sp(A'_1) = 3$$

ולכן, כאשר $t=2$, או $t=-2$ המימד של $Sp(A)$
הינו $\boxed{3}$

נסתכל על $t=0$:
נקבל:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נציב $A' =$ הבסיס השקול "החדש" כאשר $t=0$

לכן, אם נסתכל על $Sp(A) = Sp(A')$
כאשר $t=0$

נקבל קבוצה בת 2 איברים, ו-2 איברים נוספים, שהם שווים 0.
לכן, כאשר $t=0$, המימד של $Sp(A)$ הינו $\boxed{2}$.

שאלה 2 (15 נקודות)

תהי $U \subseteq \mathbb{R}_4[x]$ המוגדרת באופן הבא:

$$U = \{2(b+c) + 2(a-c)x + (a+3b+2c)x^2 + 2(b+c)x^3 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- U (אין צורך להוכיח ש- U תת־מרחב).

ב. הוכיחו שהקבוצה $B = (u_1 = 1 - x + x^2 + x^3,\ u_2 = 2x + x^2)$ בסיס (סדור) של U.

ג. האם הפולינום $p(x) = 2 + 4x + 5x^2 + 2x^3$ שייך לתת-מרחב U? אם כן, מצאו $[p(x)]_B$.

(א

$$U = \{2(b+c) + 2(a-c)x + (a+3b+2c)x^2 + 2(b+c)x^3 \mid a,b,c \in R\}$$

$$\Downarrow$$

$$U = \{2ax + ax^2 + 2b + 3bx^2 + 2bx^3 + 2c - 2cx + 2cx^2 + 2cx^3 \mid a,b,c \in R\}$$

$$U = \{a(2x + x^2) + b(2 + 3x^2 + 2x^3) + c(2 - 2x + 2x^2 + 2x^3) \mid a,b,c \in R\}$$

$$\Downarrow$$

$$Sp(\{2x + x^2,\ 2 + 3x^2 + 2x^3,\ 2 - 2x + 2x^2 + 2x^3\}) = U$$

המשך בעמ' הבא

נהפוך את הבסיס למטריצה:

$$\begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & x^3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{R_1 \to \frac{R_1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_1: 1$
$C_2: x$
$C_3: x^2$
$C_4: x^3$

לפי שאלה 7.5.12, המרחב שורות בין מטריצות שקולות-שורה שווה.

לכן, אם נמיר לפולינומים, נקבל:

$$Sp(\{2x+x^2, 2+3x^2+2x^3, 2-2x+2x^2+2x^3\}) =$$
$$Sp(\{1-x+x^2+x^3, 2x+x^2\}) = U$$

ולכן, $\{1-x+x^2+x^3, 2x+x^2\}$ היא בסיס ל-U, $\dim U = 2$.

* בניגוד לקבוצה הכאו'נה, הקבוצה הפנ"ה בת"ל

* אם הקבוצה $\{1-x+x^2+x^3, 2x+x^2\}$ בסיס ל-V גם הסדרה $(1-x+x^2+x^3, 2x+x^2)$ בסיס ל-V.

$\boxed{\text{פתרון}}$

ג)

נבדוק אם $p(x)=2+4x+5x^2+2x^3$

ונבד: $\in Sp(\{1-x+x^2+x^3, 2x+x^2\})=V$

$$V=\{a(1-x+x^2+x^3)+b(2x+x^2) \mid a,b\in\mathbb{R}\}=$$

$$V=\{a+(2b-a)x+(a+b)x^2+ax^3 \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

נבדוק האם קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כאשר:

$$a+(2b-a)x+(a+b)x^2+ax^3=2+4x+5x^2+2x^3$$

$\boxed{a=2}$ I

$2b-a=4$ II

$a+b=5$ III

$a=2$ IV

$a=2$

$2+b=5$

$\boxed{b=3}$

נבדוק עם II:

$2\cdot3-2=4$

$6-2=4$

$4=4$

מתקיים זהות

$\boxed{\text{לכן, } p(x)\in V}$

נמצא את $[P(x)]_B$

$(a=2,\ b=3)$

כאשר מצאנו ש- $P(x)\in U$, מצאנו ערכים ל- a, b.

a ו- b היו מקדמים לצירוף הלינארי של $P(x)$.

ניתן לראות זאת בבירור כך בעזרת הקבוצה U המוגדרת כך:

$$U=\{a(1-x+x^2+x^3)+b(2x+x^2)\mid a,b\in R\}=$$

לכן, $[P(x)]_B=(2,3)$

שאלה 3 (10 נקודות)

תהיינה A,B מטריצות ריבועיות מסדר n המקיימות $\rho(AB)<\rho(BA)$.

א. הוכיחו שהמטריצות A ו- B הן מטריצות **לא** הפיכות.

ב. נתון בנוסף ש- $n=3$ ו- $\rho(BA)<\rho(B)$. חשבו $\rho(A)$, $\rho(B)$, $\rho(BA)$ ו- $\rho(AB)$.

א)

$$P(AB)<P(BA)$$

מכיוון ש A ו- B הן מטריצות ריבועיות מסדר n, כך גם AB ו- BA. לכן, $P(BA)\le n$

ולכן:

$$P(AB)<P(BA)\le n$$

לכן, $P(AB)<n$

ולכן $P(AB)\ne n$

לפי שאלה 8.5.8 לכן, $|AB|=0$

לפי משפט 4.5.1 $|A|\cdot|B|=0$

3 אפשרויות:

אפשרות 1

$|A|=|B|=0$

$\Downarrow$

B,A מטריצות לא הפיכות

לפי 4.4.1

אפשרות 2

$|A|=0$

$P(A)<n$

נניח כי B הפיכה.

לפי שאלה 8.5.7 $P(BA)=P(A)$

לכן, $P(AB)<P(BA)=P(A)$

קיימת סתירה, מפני $P(AB)\leq\min\{P(A),P(B)\}-e$

ולכן B אינה הפיכה, ולכן,

A,B אינן הפיכות

אפשרות 3

$|B|=0$

לכן, $P(B)<n$

נניח כי A הפיכה

לפי שאלה 8.5.7 $P(BA)=P(B)$

לכן, $P(AB)<P(BA)=P(B)$

קיימת סתירה, מפני ש- $P(AB)\leq\min\{P(A),P(B)\}$

ולכן A אינה הפיכה, ולכן,

A,B אינן הפיכות

בכל המקרים של $|AB|=|A|\cdot|B|=0$

A,B מטריצות לא הפיכות

לכן הטענה נכונה. מש"ל

ב) נתון: $P(AB)<P(BA)$,

$P(BA)<P(B)$,

$n=3$

לכן:

$0\leq P(AB)<P(BA)<P(B)<3$

מפני $P(B)\neq 3$

שהיא לא הפיכה

לפי 8.5.8,

לפי 4.4.1,

לכן, $P(AB)=1$, $P(BA)=2$, $P(B)=2$

נסתכל על $P(A)$.

קודם כי $P(A)<3$ מפני ש- A אינה הפיכה, ולכן $P(A)\neq 3$.

לפי שאלה 8.5.6,

$$2 = P(BA) \leq \min\{P(A), P(B)\}$$

$$\Downarrow$$

אם $P(A)=1$, מתקיימת סתירה

לכן, $P(A)=2$

ולכן $P(AB)=1,\ P(BA)=2,\ P(B)=2,\ P(A)=2$

שאלה 4 (15 נקודות)

עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבעו האם היא לינארית. אם היא לינארית, הוכיחו. אם לא, הסבירו מדוע.

א. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ המוגדת על ידי $T(x,y) = (x, xy, y)$.

ב. $T: M_{3\times 3}^{\mathbb{R}} \to M_{2\times 2}^{\mathbb{R}}$ המוגדרת על ידי $T(X) = X_{11}^{M}$.

להזכירם, A_{ij}^{M} היא המטריצה המינורית ה- i,j. ראו הגדרה 4.1.3.

ג. $T:\mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ המוגדרת על ידי $T\big(p(x)\big) = p(x) - x^2 p''(x)$.

א)

$$T((x,y)) = (x, xy, y)$$

נניח כי ההעתקה לינארית:

לכן,

$$T((1,1)+(1,1)) = T((1,1)) + T((1,1))$$

$$T((2,2)) = (1,1,1) + (1,1,1)$$

$$(2,4,2) = (2,2,2)$$

סתירה, ולכן $T((x,y)) = (x, xy, y)$ אינה העתקה לינארית!

ב)

$$T: M^{R}_{3\times 3} \to M^{R}_{2\times 2}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix}$$

אוכיח ש:

$A, B \in M^{R}_{3\times 3}$ $\quad \lambda \in R$

$$T(A+B) = T(A) + T(B)$$

$$\lambda T(A) = T(\lambda A)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}^{M}_{1,1} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

פסוק אמת

$$\lambda T(A) = T(\lambda A)$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

פסוק אמת

לפי הגדרה 9.1.1, $T(X)=X^{M}_{1,1}$ העתקה לינארית!

ג)

$$T(P(x)) = P(x) - x^2 P''(x)$$

נציב:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

לפי 6.11.1 הגדרת הנגזרת:

$$T(P(x)) = ax^3 + bx^2 + cx + d - x^2\left(\left(3ax^2 + 2bx + c\right)'\right) =$$

$$T(P(x)) = ax^3 + bx^2 + cx + d - x^2(6ax + 2b)$$

$$T(P(x)) = -5ax^3 - bx^2 + cx + d$$

לכן נגדיר

$$\boxed{T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = -5ax^3 - bx^2 + cx + d}$$

נסתכל על הפולינום כ-וקטור:

$$T((a,b,c,d)) = (-5a, -b, c, d)$$

לכן,

$$T((a,b,c,d)) = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{4\times 4} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}}_{4\times 1} = \begin{pmatrix} -5a \\ -b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

ולכן $T(P(x))$ הינה טרנספורמציה לינארית.

* מפני שידוע כי העתקה לינארית בעזרת הכפלת וקטור\מטריצה הקלט במטריצה היא העתקה לינארית.

שאלה 5 (15 נקודות)

נתונה העתקה לינארית $T: M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$ המוגדרת באופן הבא:

עבור $A \in M_n(\mathbb{R})$ קבועה נתונה, לכל $X \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מתקיים $T_A(X) = XA$.

א. הוכיחו שההעתקה T איזומורפיזם אם ורק אם A מטריצה הפיכה.

ב. נתון $\rho(A) = m$ ו-$n = m + 1$ ותהי $O \neq B \in \text{Ker}T$. חשבו $\rho(B)$.

א)

נוכיח ב-2 כיוונים.

<u>כיוון ראשון:</u>

נניח כי A מטריצה הפיכה

נמצא העתקה $S(X)$, כאשר

$S \cdot T(X) = I$

ניקח $S(X) = X \cdot A^{-1}$ A הפיכה

לכן,

$S(T(X)) = S(XA) =$

$XA \cdot A^{-1} = \boxed{X}$

<u>כיוון שני:</u>

נניח כי $T(X)$ היא איזומורפיזם

לכן, קיימת $S(X)$, איזומורפיזם, כאשר

$S(T(X)) = X$

$$S(XA)=X$$

קיימת רק העתקה הפוכה <u>אחת</u> ל- $T(X)$.

לכן, ומצאנו העתקה אחת המקיימת רק כאשר A הפיכה:

ניקח: $B\in M_{m\times n}(R)$ $S(X)=X\cdot B$:

$$S(T(X))=XA\cdot B=X \quad (\text{כי } ST=I)$$

$$\Downarrow$$

$$X(A\cdot B-I)=0$$

$\cancel{X}=0$ ← לא תמיד נכון!

$A\cdot B=I$ ← קשר זה מתקיים רק כאשר $B=A^{-1}$,

כלומר כאשר A הפיכה

לכן, התנאים גוררים אחד את השני,
לכן, הטענה נכונה.

מש"ל

ב)

$0 \neq B \in \ker(T)$

$A_{m+1 \times m+1} \rightarrow \rho(A)=m$

$B_{m \times m+1} \cdot A_{m+1 \times m+1} = 0 \ / \ "\rho(\ )"$

$\Downarrow$

מכאן:

$\rho(B \cdot A) = \rho(0) = 0$ לפי הגדרת $\rho()$

לפי שאלה 8.5.6:

$0 = \rho(B \cdot A) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\}$

$0 \leq \min\{m, \rho(B)\}$

$\Downarrow$

$0 \leq \rho(B) \leq m \leftarrow B_{m \times m+1}$

נסתכל על המשוואה: $A_{m+1 \times m+1} X_{m+1 \times 1}$

$Ax = 0 \ / \ (\ )^t \rightarrow x^t A^t = 0$

המרחב: $x \in P$

וקטור עמודה $X_{m+1 \times 1}$*

וקטור שורה $X^t_{1 \times m+1}$

לפי 8.6.1: $\dim(P) = m+1-\rho(A)$

$\dim(P) = m+1-m$

$$\boxed{\dim(P)=1}$$

ניקח $0 \neq u \in F^{m+1} \leftarrow P = Sp(\{u\})$

u וקטור שכזה

ניקח: $v_1, v_2, \dots v_m \in P$ (כוקטורי שורה)

כאשר:

$$B = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}_{m \times m+1} \rightarrow [B]_i^R \cdot A = 0$$

לכל $1 \leq i \leq m$:

* לפי הגדרת P

לכן, קיימים $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{m+1} \in R$ כאשר:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 u \\ \lambda_2 u \\ \vdots \\ \lambda_{m+1} u \end{bmatrix}$$

נסתכל על מרחב השורות של B, שנקרא לו V

כאשר $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m+1} \in R$:

$$\alpha_1\lambda_1 u + \alpha_2\lambda_2 u + \dots + \alpha_{m+1}\lambda_{m+1} u \in V$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i\lambda_i\right)\cdot u \in V$$

ולכן, $\dim(V)=1$ (מפני ש- $V=Sp(\{u\})$

לפי הגדרה 8.5.4,

$$\dim(V)=1=\rho(B)$$

שאלה 6 (15 נקודות)

נתונה העתקה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המקיימת $T(1,1,0)=(1,2,3)$, $T(0,1,1)=(0,1,2)$.

נגדיר $T(2\alpha,\alpha^3,-a^2)=(2,3,4\alpha^2)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

א. מצאו את ערכי a כך שההעתקה T לינארית.

ב. מצאו את הערך של a כך שלא ניתן להגדיר העתקה T שהיא חד-חד ערכית עבורו, ומצאו נוסחה מפורשת להעתקה $T(x,y,z)$.

נסתכל על $A=\{(0,1,1),(1,1,0)\}$:

ננסה למצוא צירוף לינארי של איברי A
ל- $(2a,a^3,-a^2)$:

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2a \\ 1 & 1 & a^3 \\ 1 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a^3 \\ 1 & 0 & -a^2 \\ 0 & 1 & 2a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a^3 \\ 0 & -1 & -a^3-a^2 \\ 0 & 1 & 2a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a^3 \\ 0 & -1 & -a^3-a^2 \\ 0 & 0 & 2a-a^3-a^2 \end{pmatrix}$$

$2a-a^3-a^2 \neq 0$ [illegible] שונה אפס

$$a(-a^2-a+2) \neq 0 \,/\cdot(-1)$$

$$a(a^2+a-2) \neq 0$$

$$a(a+2)(a-1) \neq 0$$

$$a \neq 0, -2, 1$$

עבור ערכים אלו, $(2a, a^3, -a^2)$ הוא <u>לא</u> צירוף לינארי של A.

עבור ערכים אלו ($a \neq 0, -2, 1$) לא קיימת הגבלה, היות ואין צירוף לינארי של A ל- $(2a, a^3, -a^2)$.

נסתכל על $a=0 \rightarrow (0,0,0)$: $(2a, a^3, -a^2)$

לפי הנתון,

$$T((0,0,0)) = (2,3,0)$$

לפי 9.1.2: סתירה, היות ו- $T((0,0,0)) = (0,0,0)$ לכל העתקה לינארית T

לכן, $a \neq 0$

$\underline{a=1} \rightarrow (2,1,-1)$

נבדוק עבור איזה ערכים $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ מתקיים:

$$\lambda_1(0,1,1) + \lambda_2(1,1,0) = (2,1,-1)$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 2 & I \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 & II \\ \lambda_1 = -1 & III \end{cases}$$

נבדוק האם II מתקיים לפי I, III:

$-1+2=1$

$1=1$

פסוק אמת!

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$

נבדוק האם משפט 9.1.3 מתקיים: (כדי לבדוק האם T העתקה לינארית)

$$T(-1\cdot(0,1,1)+2(1,1,0)) = -1\cdot T((0,1,1))+2T((1,1,0))$$

$$T((2,1,-1)) = -(0,1,2)+2\cdot(1,2,3)$$

$$T((2,1,-1)) = (2,3,4)$$

דבר זה אכן מתקיים לפי הנתון
כאשר $a=1$!

לכן T העתקה לינארית כאשר $a=1$.

$(-4,-8,-4) \longleftarrow \underline{a=-2}$

נבדוק עבור אילו ערכים $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\lambda_1(0,1,1)+\lambda_2(1,1,0)=(-4,-8,-4)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -4 & \text{I} \\ \lambda_1+\lambda_2 &= -8 & \text{II} \\ \lambda_1 &= -4 & \text{III} \end{aligned}$$

נבדוק האם II מתקיים לפי I, III:

$$-4+(-4)=-8$$

$$-8=-8$$

פסוק אמת!

$\Downarrow$

$\lambda_1=-4 \quad \lambda_2=-4$

נבדוק האם משפט 9.1.3 מתקיים: (כדי לבדוק האם T העתקה לינארית)

$$T(-4\cdot(0,1,1)-4(1,1,0))=-4T((0,1,1))-4T((1,1,0))$$

$$T((-4,-8,-4))=-4(0,1,2)-4(1,2,3)$$

$\downarrow$ לפי הנתון

$$(2,3,16)=(-4,-12,-20)$$

$\downarrow$

פסוק שקר

$\Downarrow$

T אינה העתקה לינארית
כאשר $a=-2$

לסיכום:

כאשר $a=1$, הוקטור $(2a,a^3,-a^2)$ הינו צירוף
לינארי של A, ולפי הנתון משפט 9.1.3 מתקיים
ולכן T העתקה לינארית במקרה זה.
כאשר $a\neq-2,1,0$ הוקטור $(2a,a^3,-a^2)$ אינו צירוף
לינארי של A, ולכן לא קיימת ט"ל הנ"ל.
(ל כ מפני שהוא שונה מ-0)

כאשר $a=-2$, או $a=0$ הגענו לסתירה לנתון ש-T העתקה לינארית

לכן, T היא העתקה לינארית כאשר $a\neq -2,0$

ב)

נסתכל על

$$A=\{(1,1,0),(0,1,1),(2a,a^3,-a^2)\}$$

נתון:

$$T(A)=\{(1,2,3),(0,1,2),(2,3,4a^2)\}$$

לפי 9.5.2

מפני ש-T <u>לא</u> חח"ע, יתקיים: $\ker(T)\supset\{0\}$

ניקח $v_1=(1,1,0),\ v_2=(0,1,1),\ v_3=(2a,a^3,-a^2)$

נשים $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ כאשר:

$$T(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3)=0=\lambda_1T(v_1)+\lambda_2\cdot T(v_2)+\lambda_3T(v_3)$$

(נשים מתי דבר זה מתקיים:

$$\begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 4a^2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2\to R_2-2R_1\\ R_3\to R_3-3R_1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4a^2-6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2-4 & 0 \end{pmatrix}$$

רק כאשר $4a^2-6=0$, קיים פיתרון לא טריוויאלי.

לכן, כאשר $4a^2-2=0$, קיים פיתרון לא טריוויאלי מה שגורר קיום <u>יותר</u> מפתרון יחיד למשוואה $T(V)=0$,

לכן, לפי למה 9.5.2, T אינה חח"ע אם"ם:

$$4a^2-4=0$$

$$\Downarrow$$

$$a=\pm 1.$$

נבדוק את $a=1$.

נקבל

$$\begin{cases} (4a^2-4)\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -2\lambda_3 \end{cases}$$

לכל $\lambda_3 \in R$ מתקיים.

לכן, $\lambda_2 = \lambda_3$

$\lambda_1 = -2\lambda_3$

נסתכל על הוקטור המתקבל:

$$-2\lambda_3(1,1,0)+\lambda_3(0,1,1)+\lambda_3\overset{(2a,\ a^3-a^2)}{(2,1,-1)}=$$

$$\lambda_3(-2+2,\ -2+1+1,\ 1+(-1))=$$

$$\lambda_3(0,0,0)=(0,0,0)$$

$\Downarrow$

לכן, כאשר $a=1$, הפיתרון למשוואה $T(v)=0$ נכון **רק** כאשר $v=0$, מה שגורם ל-T להיות חח"ע.

נבדוק את $a=-1$

ובכלל, כמו ב- $a=1$:

$$\lambda_1=-2\lambda_3$$
$$\lambda_2=\lambda_3$$

$\Downarrow$

$$-2\lambda_3(1,2,3)+\lambda_3(0,1,2)+\lambda_3(-2,1,-1)=$$

$$\lambda_3(-2-2,\ -4+1-1,\ -6+2-1)=$$

$$\lambda_3(-4,-4,-5)\neq(0,0,0)$$

נציב לכל λ_3 (פרט ל- $\lambda_3=0$ הפיתרון הטריוויאלי)

$$\Downarrow$$

לכן, כאשר $a=-1$, $v=(-4,-4,-5)$:

$$T(v)=0$$

מה שגורם ל- T להיות לא חח"ע!

לכן, $a=-1$

ניקח $(x,y,z)\in R^3$

נמצא $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in R$ כך ש:

$$\lambda_1(0,1,1)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(-2,-1,-1)=(x,y,z)$$

$$\begin{cases}\lambda_2-2\lambda_3=x & \mathrm{I}\\ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=y & \mathrm{II}\\ \lambda_1-\lambda_3=z & \mathrm{III}\end{cases}$$

$\underline{\mathrm{III}}$:

$$\lambda_1=z+\lambda_3$$

$$\Downarrow$$

$\underline{\mathrm{II}}$:

$$z+\cancel{\lambda_3}+\lambda_2-\cancel{\lambda_3}=y$$

$$\lambda_2=y-z$$

$$\Downarrow$$

$\underline{\mathrm{I}}$:

$$y-z-2\lambda_3=x$$

$$\lambda_3=\frac{y-z-x}{2}$$

$\underline{\mathrm{III}}$:

$$\lambda_1=z+\frac{y-z-x}{2}=\lambda_1=\frac{y+z-x}{2}$$

$$\lambda_1=\frac{y+z-x}{2}$$
$$\lambda_3=\frac{y-z-x}{2}$$
$$\lambda_2=y-z$$

$\Downarrow$

$(x,y,z)\in R^3$ לכל

$$T((x,y,z)) = T\left(\frac{y+z-x}{2}\cdot(0,1,1)+(y-z)\cdot(1,1,0)+\frac{y-z-x}{2}(-2,-1,-1)\right)$$

9.1.1 לפי הגדרת העתקה לינארית

$$T((x,y,z)) = \frac{y+z-x}{2}\cdot T((0,1,1))+(y-z)T((1,1,0))+\frac{y-z-x}{2}T((-2,-1,-1))$$

$$T((x,y,z)) = \frac{y+z-x}{2}\cdot(0,1,2)+(y-z)\cdot(1,2,3)+\frac{y-z-x}{2}(2,3,4)=$$

$$\left(0,\frac{y+z-x}{2},y+z-x\right)+(y-z,2y-2z,3y-3z)+\left(y-z-x,\frac{3(y-z-x)}{2},2y-2z-2x\right)=$$

$$\left(2y-2z-x,\frac{4y-2z-4x}{2}+2y-2z,6y-4z-3x\right)=$$

$$T((x,y,z)) = (2y-2z-x,4y-3z-2x,6y-4z-3x)$$

$$a=-1$$

שאלה 7 (15 נקודות)

יהיו $U, W \subseteq M_n(\mathbb{R})$ תת המרחבים הבאים :

$$U = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid [A]_{ij} = 0 \text{ if } i > j\}$$
$$W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$$

כלומר, $A \in U$ היא מטריצה משולשית עילית ו- $A \in W$ היא מטריצה סימטרית.

נגדיר העתקה $T: U \to W$ באופן הבא : לכל $X \in U$, $T(X) = X + X^t$.

א. הוכיחו שההעתקה T מוגדרת היטב. כלומר, שתמונות ההעתקה שייכות ל-W.

ב. הוכיחו שההעתקה T איזומורפיזם.

ג. עבור $n = 2$ נגדיר בסיס B לתת המרחב U ובסיס C לתת המרחב W –

$$B = \left(u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$C = \left(w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

חשבו את $[T]_C^B$, המטריצה המייצגת את ההעתקה T לפי הבסיסים B ו- C.

א)

לפי הגדרה 9.1.1, אוכיח כי

לכל $B, A \in U$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$1)\ T(B+A) = T(B) + T(A) \in W$$

$$2)\ \lambda T(A) = T(\lambda A)$$

אוכיח זאת:

1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$T(B+A)=T(A)+T(B)$$

$$T\left(\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ & a_{22}+b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \vdots \\ 0 & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix}\right)+T\left(\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \\ 0 & \ddots & b_{nn} \end{pmatrix}\right)$$

* לפי הגדרת T

$$\begin{pmatrix} 2a_{11}+2b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{12}+b_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n}+b_{1n} & \cdots & & 2a_{nn}+2b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & 2a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{12} & 2b_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{1n} & \cdots & & 2b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11}+2b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{12}+b_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n}+b_{1n} & \cdots & & 2a_{nn}+2b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a_{11}+2b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{12}+b_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n}+b_{1n} & \cdots & & 2a_{nn}+2b_{nn} \end{pmatrix}\in W$$

ניתן להבין בבירור כי התוצאה היא איבר ב-W

פסוק אמת!

2)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \lambda\in R$$

$$\lambda T(A) = T(\lambda A)$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & 2a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & 2a_{nn} \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ & \lambda a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{12} & 2\lambda a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{1n} & \cdots & \cdots & 2\lambda a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{12} & 2\lambda a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{1n} & \cdots & \cdots & 2\lambda a_{nn} \end{pmatrix} \in W$$

ניתן להבין בבירור כי המטריצה היא איבר ב-W
פסוק אמת.

לכן העתקה $T: V \to W$ $T(X) = X + X^t$ העתקה לינארית
מוגדרת היטב.

ב) אניח כי קיים $S: W \to T$
שהיא ההופכית ל-T – לפי 9.9.2 T
איזומורפיזם

ניקח $S(X)$ כאשר:

$$S\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \frac{1}{2}a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & \frac{1}{2}a_{nn} \end{pmatrix}$$

אראה כי לכל $X \in U$

$$(ST)(X) = X$$

ניקח

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נחשב:

$$S\left(T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{12} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}\right)\right) =$$

$$S\left(\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & 2a_{nn} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & \cdots & & 2a_{nn} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{2}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \frac{2}{2}a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{2}{2}a_{nn} \end{pmatrix} = X$$

$$\Downarrow$$

לכן, לכל $X \in U$,

$$(ST)(X) = X \Rightarrow ST = I$$

לכן, T (1-1 ו-ל) איזומורפיזם.

ג)

$$[T]_C^B = \left(\left[T\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)\right]_C, \left[T\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\right]_C, \left[T\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\right]_C \right)$$

לפי הגדרת T

$$[T]_C^B = \left(\left[\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_C, \left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right]_C, \left[\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\right]_C \right)$$

$$C = \left(w_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \right)$$

$$\left[\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_C = (2,0,0)$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right]_C = (0,0,1)$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\right]_C = (0,2,0)$$

$\Downarrow$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$$