שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $(f_n(x))$ סדרת פונקציות המתכנסת במידה שווה בקטע $[a,b]$ לפונקציה רציפה $f(x)$.

נניח גם ש- (x_n) סדרת נקודות בקטע $[a,b]$ המתכנסת לנקודה x_0.

הראו כי $f_n(x_n) \to f(x_0)$.

תנו דוגמה המראה שאם נוותר על התכנסות במ״ש של $(f_n(x))$ ונסתפק בהתכנסות נקודתית לפונקציה רציפה $f(x)$ בקטע $[a,b]$, אז ייתכן ש- $f_n(x_n) \not\to f(x_0)$.

נסתכל על הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f_n(x_n)\right) = f(x_0)$$

אם״ם מתקיים:

לכל $\epsilon_0>0$ קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| < \epsilon_0$$

יהי $\epsilon_0>0$

נסתכל על הביטוי

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| =$$

$$|(f_n(x_n) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0))|$$

לכן,

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

נסתכל על $|f_n(x_n) - f_n(x_0)|$:

ידוע כי f רציפה, ומפני ש לכל $c \in [a,b]$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\left(f_n(c)\right) = f(c)$$

לכן, "נציב" $c = x_n$ לפי הגדרת הגבול, ונקבל,

שלכל $\underbrace{\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}}_{\text{הגדרה}} > 0$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כאשר לכל $n > N_1$

מתקיים: $|f_n(x_n) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_1$

נסתכל על $|f_n(x_0) - f(x_0)|$:

ידוע שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים: $\lim_{n\to\infty}\left(f_n(x)\right) = f(x)$

לכן, לכל $\underbrace{\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_0}{2}}_{\text{הגדרה}} > 0$ קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כאשר לכל

$n > N_2$ מתקיים

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_2$$

ולכן, קיבלנו:

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

ולכן

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0$$

לכל $n > \max\{N_1, N_2\}$

ולכן, הגבול קיים ומתקיים:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(f_n(x_n)\right) = f(x_0)}$$

מש"ל

דוגמא:

בקטע $[0,1]$ $f_n(x) = (1-x)^n$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}(f_n) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

ניקח סדרה $x_n = \frac{1}{n}$

נניח כי (f_n) מתכנסות במ"ש.

לכן, לפי משפט 6.4, מכיוון ש- f_n רציפות
לכל n, כך גם f. אך זוהי
סתירה, כי f לא רציפה ב- $x=0$.

לכן, (f_n) לא מתכנסות במ"ש.

לכן, לכל n, מתקיים: $x_n \neq 0$,

$$f_n(x) = (1-x)^n$$

נסתכל על הגדרת הגבול המתבקשת:
לכל $\varepsilon > 0$

$$|f_n(x_n) - f(0)| = |(1-\tfrac{1}{n})^n - 1| = |(1-\tfrac{1}{n})^n - 1| < \varepsilon$$

נסתכל על n

$$f_n(x_n) = (1-\tfrac{1}{n})^n$$

נניח כי גבול זה קיים.

אם גבול זה לא קיים הדוגמא עדיין
עונה על השאלה

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)=L \quad / \ln(\ \ )$$

פונ'
רציפה!

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)=\ln(L)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)\underset{\text{לופיטל}}{=}\ln(L)$$

$$\frac{1}{n}\to 0^{+} \quad \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\to 0^{-}$$

$$\ln(L)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'}\right)=\left[\begin{array}{c} x=\frac{1}{n} \\ n\to\infty \Rightarrow x\to 0^{+} \\ \text{הצבה} \end{array}\right]=$$

$$\ln(L)=\lim_{x\to 0^{+}}\left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right)\underset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0^{+}}\left(\frac{\frac{-1}{1-x}}{1}\right)=$$

$$\ln(L)=\lim_{x\to 0^{+}}\left(\frac{-1}{1-x}\right)\underset{\text{רציפות}}{=}\frac{-1}{1-0^{+}}=-1=\ln(L)$$

$$\boxed{L=e^{-1}}$$

לכן, $L \neq f(0)$

ולכן, קיבלנו

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty}\left(f_n(x_n)\right) \neq f(x_0) \\ f_n(x) = (1-x)^n \\ x_n = \frac{1}{n} \end{array}}$$

$\boxed{\text{משל}}$

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $f(x)$ גזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}$ (כלומר, f בעלת נגזרת רציפה ב- $\mathbb{R}$).

נגדיר $f_n(x) = n\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \mathbb{R}$.

מצאו את $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ והוכיחו שבכל קטע $[a,b]$ סדרת הפונקציות $\left(f_n(x)\right)$ מתכנסת במידה שווה.

נתון:

$$f_n(x) = n\cdot\left(f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)\right)$$

ונקבל:

$$f_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

נמצא את

$$\lim_{n\to\infty}\left(f_n(x)\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}\right) = \underset{\text{הצבה}}{\left[\begin{array}{c}\frac{1}{n} = h \\ n\to\infty \Rightarrow h\to 0^+\end{array}\right]} =$$

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) = \underset{\substack{\text{הנגזרת} \\ \text{הימנית}}}{f'_+(x)} \quad \boxed{= f'(x)}$$

מאינפי 1

f גזירה

נסתכל לפי הגדרה 6.2.

ונראה ש לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כאשר

לכל $N<n$ מתקיים:

$$|f_n(x)-f'(x)|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}-f'(x)\right|<\varepsilon$$

לפי משפט 8.6 סעיף 1 קיים $x<c_n<x+\frac{1}{n}$ <u>לכל</u> $n\geq 1$

כאשר:

$$f_n(x)=\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}=$$

$$f_n(x)=\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{(x+\frac{1}{n})-(x)}=f'(c_n)$$

ולכן: $f_n(x)=f'(c_n)$ כאשר $x<c<x+\frac{1}{n}$

$$|f_n(x)-f'(x)|=\boxed{|f'(c_n)-f'(x)|}$$

ידוע כי $f'(x)$ פונקציה רציפה ב-R, ולכן $[a,b]$ בפרט.

לכן, $f'(x)$ רציפה במ"ש לפי אינפי 1.

לכן, לפי הגדרת רציפות במ"ש, לכל $\delta>0$ קיים $\varepsilon>0$ כאשר לכל $x_0,x_1\in[a,b]$ שעבורם $|x_1-x_0|<\delta$

מתקיים: $|f'(x_0)-f'(x_1)|<\varepsilon$

לכן קיים $\delta>0$ כאשר $|x-c_n|$ לכל x, ולפחות כמעט לכל n

לפי הגדרת c_n $(x<c<x+\frac{1}{n})$

$\underbrace{\text{כמעט לכל } n}_{\text{לכל } n}$

ולכן, קיים $|f'(c_n)-f'(x)|<\varepsilon$ כמעט לכל n.

$$|f'(c_n)-f'(x)|=|f_n(x)-f'(x)|<\varepsilon$$

כמעט לכל n

לכל $[a,b]$

$\boxed{\text{מש"ל}}$

ולכן, לפי 6.2 (f_n) רציפה במידה שווה ומתכנסת ל-$f'(x)$

שאלה 3 (20 נקודות)

קבעו לגבי כל אחד מטורי הפונקציות הבאים האם הוא מתכנס במידה שווה:

א. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n \ln^2 n}$ בתחום התכנסותו.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{\left((n-1)x+1\right) \cdot (nx+1)}$ ב- $[0,\infty)$.

א)

$$f_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{(x^2)^n}{4^n \cdot \ln^2(n)}$$

נגדיר טור חזקות בהתאם:

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2^n \cdot \ln^2(\frac{n}{2})} & n \text{ זוגי:} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ונקבל:

$$\sum_{n=4}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

לפי משפט 6.10:

נציב את הגבול:

$$C = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2^n \cdot \ln^2(\frac{n}{2})}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^2(\frac{n}{2})}}\right)$$

תת סדרה של a_n

ידוע כי $\ln^2(\frac{n}{2}) > 1$ כאשר לכל n:
$n \overset{2}{>} 2$

ידוע כי $\ln^2(\frac{n}{2}) < n$ כאשר לכל n

לכן, $1 < \ln^2(\frac{n}{2}) < n \; / \sqrt[n]{\;}$

$$1 < \sqrt[n]{\ln^2(\tfrac{n}{2})} < \sqrt[n]{n}$$

לכן,

$$1 = \lim_{n\to\infty}(1) < \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\ln^2(\tfrac{n}{2})}\right) < \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$$

מ.ו.ן.פ. 1

לכן,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\ln^2(\tfrac{n}{2})}\right) = 1$$

ולכן,

$$1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\ln^2(\frac{n}{2})}}\right) = \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^2(\frac{n}{2})}}\right) = 1}$$

לכן,

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^2(\frac{n}{2})}}\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

לכן, רדיוס ההתכנסות של הטור הוא 2.

לפי הערה 2 בעמ' 210 ביחידה 6, אם הטור מתכנס ב- $x=\pm 2$, אז הטור מתכנס בצורה שווה ב- $[-2,2]$.

נבדוק:

$x=2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\cancel{2^{2n}}}{\cancel{2^{2n}}\cdot \ln^2(n)} =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\ln^2(n)} = ?$$

* כמובן שהטור שלנו מתחיל ב-$n=2$, אך ניתן לבצע הזזה של הספירה

לפי משפט לייבניץ* הטור מתכנס, היות ו- $\frac{1}{\ln^2(n)}$ סדרה אפסה ואי שלילית.

ניתן להראות זאת גם עם מבחן דיריכלה כי $\frac{1}{\ln^2(n)}$ מונוטונית ואפסה והטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ חסום.

לכן, הטור מתכנס.

נבדוק עם $x=-2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\left((-2)^2\right)^n}{2^{2n}\cdot \ln^2(n)}$$

ונקבל את אותו טור עם $x=2$, ולכן

שניהם מתכנסים (ב- $x=\pm 2$)

לכן, הטור מתכנס במ״ש ב: $[-2,2]$

$\boxed{\text{מש״ל}}$

ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(nx+1)\cdot((n-1)x+1)} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}$$

נגדיר את סדרת הסכומים:

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{x+1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{x+1}} - \cancel{\frac{1}{2x+1}}\right) + \cancel{\ }\cdots + \cancel{\ }\left(\cancel{\frac{1}{(k-1)x+1}} - \frac{1}{kx+1}\right) =$$

$$\boxed{1 - \frac{1}{kx+1} = S_k(x)}$$

נמצא את $S(x)$:

$$S(x) = \lim_{k\to\infty}\left(S_k(x)\right) = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{kx+1}\right) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פונק' זו לא רציפה ב- $[0,\infty)$

ונניח שהטור הנ"ל מתכנס במ"ש, לפי משפט 6.4^*

וקבל סתירה, היות ו- $S_k(x)$ רציפה לכל k,

$S_k(x)$ צריכה להיות רציפה גם היא, אז סתירה! לכן הטור לא מתכנס במ"ש ב- $[0,\infty)$	מש"ל

שאלה 4 (20 נקודות)

נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

הראו כי f גזירה ב- $[0,\infty)$ וחשבו את $f'(0)$ ואת $f'(1)$.

$$f_n(x)=(-1)^{n+1}\cdot\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

הסברה $\frac{x}{n}$ יורדת, ומפני ש $\ln(t)$ עולה.

הסברה $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ יורדת

סדרה זו גם לאפס:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\underset{\text{רציפות}}{=}\text{"}\ln\left(1+\frac{x}{\infty}\right)\text{"}=\ln(1+0)=\ln(1)=\boxed{0}$$

לפי משפט לייבניץ הטור מתכנס,

ניתן להראות זאת גם עם מבחן דיריכלה

כי $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ מונוטונית ולאפס, והטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ חסום.

* נכון לכל $x\in[0,\infty)$

$$f_n(x)=(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

$$f_n'(x)=(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)=$$

$$f_n'(x) = (-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{n+x}\right)$$

הפונ׳ $f_n'(x)$ רציפה לכל n.

נגדיר $S_k(x)$ כך:

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) =$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty}\left(S_n(x)\right)$$

לפי משפט 5.20, סע׳ 4 ב

נגדיר $a_n(x) = \frac{1}{n+x}$

ולכן $S_k(x) = \sum^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n(x)$

ונקבל: $|S(x) - S_n(x)| \le a_{n+1}(x)$ לכל n

כאשר $S(x)$ מתכנס

ולכן $\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}\cdot$ $|S(x) - S_n(x)| \le \left(\frac{\frac{1}{n}}{\underbrace{1+\frac{x}{n}}_{b_n(x)}}\right) = \frac{1}{x+n+1}$

$b_n(x) = \frac{1}{x+n+1}$ יורדת לכל n (ולכל x)

לפי שאלה 7, ביחידה 6

ניתן להבין כי $S_n(x)$ מתכנס במ"ש ל-$S(x)$

נציב:

$$S(0)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{0}{n}}\right)=$$

$$\boxed{S(0)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}=\ln(2)}$$

לפי דוגמא 6.24

$$S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+n}=\sum_{n=2}^{\infty}}_{\text{הזזה}}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\boxed{S(1)=(-1)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}-1\right)=1-\ln(2)}$$

מש"ל

שאלה 5 (20 נקודות)

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = |x|$ לכל x בתחום התכנסות הטור, אז רדיוס ההתכנסות של הטור שווה ל-0.

ב. $\int_1^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x^n)}{n^2 + x\ln n} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\pi} \frac{\cos(x^n)}{n^2 + x\ln n} dx$.

א)

נניח כי $R>0$

לפי משפט 6.12 $f(x)$ רציפה בקטע $(-R,R)$

ו- $f'(x)$ רציפה בקטע $(-R,R)$

אך הנגזרת של f לא רציפה:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

$f'(x)$ לא מוגדרת ב- $x=0$

לכן זוהי סתירה ו- $R=0$

ב)

ניקח

$$f_n(x) = \frac{\cos(x^n)}{n^2 + x\ln(n)}$$

נרשום ש $f_n(x)$:

לכל $x \geq 0$ $\quad \frac{\cos(x^n)}{n^2 + x\cdot\ln(n)} \leq \frac{1}{n^2 + x\ln(n)} \leq \boxed{\frac{1}{n^2}}$

* לפי הקטע $(1,\pi)$

ידוע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, לכן,

לפי משפט 6.7,

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש

לכן, לפי משפט 6.8*

$$\int_1^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x^n)}{n^2 + x\ln(n)} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\pi} \frac{\cos(x^n)}{n^2 + x\ln(n)}$$

$\boxed{\text{מש"ל}}$