Mamman 11

שאלה 1

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $r>0$ ותהי $a \in \mathbf{R}^k$. תהי $\varphi : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ פונקציה אפִינית שמקיימת: $\varphi\left(B\left(0^{[k]};1\right)\right) = B(a;r)$

הוכיחו ש- $\varphi\left(S\left(0^{[k]};1\right)\right) = S(a;r)$.

נתון:

קיימת פונ φ כאשר:

$$\varphi(B(0^{[k]};1)) = B(a;r)$$

צ"ל:

$$\varphi(S(0^{[k]};1)) = S(a;r)$$

נסתכל על φ : (פונקציה אפינית)

$$\varphi(x) = f(x) + b$$

ניקח פונ'

$$\varphi_0(x) = \frac{2}{r} * (f(x) + b - a)$$

כאשר קיימת $A \in M^{\mathbb{R}}_{k\times k}$ כאשר:

$$\varphi_0(x) = xA^t + \frac{2}{r}(b-a)$$

לפי הגדרת φ, φ_0 נקבל:

$$\varphi_0(B(0^{[k]};1)) = B(0^{[k]};2)$$

נסתכל על הבסיס הסטנדרטי $E = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ מעל $\mathbb{R}^k$, ונקבל:

$$\forall 1 \le n \le k (\exists x \in B(0^{[k]},1)(\varphi_0(x) = e_n))$$

לכן A מטריצה הפיכה ולכן הפונקציה

$$f_0(x) = xA^t$$

הפיכה ועל, (מהקורס אלגברה ליניארית 1)

ולכן, ניתן להבין בבירור כי הפונקציה φ_0 הפיכה ועל.

לכן, הפונקציה φ הפיכה ועל.

כיוון 1:

יהי:

$$c \in S(a,r)$$

לכן קיימות סדרות $(d_n),(e_n)$ כאשר: (לפי הגדרת $\partial B(a;r)$)

$$\lim_{n\to\infty}(d_n)=c=\lim_{n\to\infty}(e_n)$$

$$\forall n>0(d_n\in B(a,r),e_n\notin B(a,r))$$

נגדיר את הסדרות $(a_n)_n,(b_n)_n$ באופן הבא:

$$\forall n>0(a_n=\varphi^{-1}(d_n),b_n=\varphi^{-1}(e_n),)$$

נסתכל על הסדרות הללו ונקבל:

$$\forall n>0(d_n\in B(a,r))\implies \forall n>0(a_n\in B(0^{[k]},1))$$

בנוסף, מפני ש φ פונ חח"ע,אז לא יכול להיות b_n ,שנמצא מחוץ ל $B(0;1)$, ומקיים $b_n\in B(a;r)$

$$\forall n>0(e_n\notin B(a,r))\implies \forall n>0(b_n\notin B(0^{[k]},1))$$

אך ידוע כי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}(d_n)=\lim_{n\to\infty}(e_n)=c$$

כלומר, (מפני ש φ רציפה אז גם φ^{-1} רציפה)

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi^{-1}(d_n))=\lim_{n\to\infty}(\varphi^{-1}(e_n))=\varphi^{-1}(c)$$

ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=\lim_{n\to\infty}(b_n)=\varphi^{-1}(c)$$

לכן, מתקיים:

$$\forall \text{Neighbourhood D of } \varphi^{-1}(c)(\exists n,m(a_n\in D \text{ and } b_m\in D))$$

ידוע כי

$$\forall n>0(a_n\in B(0^{[k]},1))$$

$$\forall n>0(b_n\notin B(0^{[k]},1))$$

ונקבל כי

$$\varphi^{-1}(c)\in\partial B(0;1)$$

כלומר,

$$\varphi^{-1}(c)\in S(0^{[k]};1)$$

לכן

$$c \in \varphi(S(0^{[k]};1))$$

ונקבל

$$S(a;r) \subseteq \varphi(S(0^{[k]};1))$$

כיוון 2:

יהי:

$$y \in \varphi(S(0^{[k]};1)), x \in \mathbb{R}^k$$

כאשר:

$$\varphi(x) = y$$

ניקח סדרות $(d_n), (e_n)$ כאשר: (לפי הגדרת $\partial B(0^{[k]};1)$)

$$\lim_{n\to\infty}(d_n) = x = \lim_{n\to\infty}(e_n)$$

$$\forall n > 0(d_n \in B(0^{[k]},1), e_n \notin B(0^{[k]},1))$$

מפני ש φ פונ' חח"ע, נקבל:

$$\forall n > 0(\varphi(d_n) \in B(a;r), \varphi(e_n) \notin B(a;r))$$

מפני ש φ פונ' רציפה, נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi(d_n)) = \varphi(\lim_{n\to\infty}(d_n)) = \varphi(x) = y = \varphi(\lim_{n\to\infty}(e_n)) = \lim_{n\to\infty}(\varphi(e_n))$$

לפי הסדרות $(\varphi(d_n)), (\varphi(e_n))$, ולפי התנהגותן סביב y, נקבל כי

$$\forall \text{Neighbourhood D of } y(\exists n, m(\varphi(d_n) \in D \text{ and } \varphi(e_m) \in D))$$

כאשר

$$\forall n > 0(d_n \in B(0^{[k]},1), e_n \notin B(0^{[k]},1))$$

לכן, לפי הגדרת y נקבל:

$$y \in \partial B(a;r)$$

כלומר,

$$y \in S(a;r)$$

ולכן,

$$\varphi(S(0^{[k]};1)) \subseteq S(a;r)$$

ולפי הכלה דו כיוונית, נקבל:

$$\varphi(S(0^{|k|};1)) = S(a;r)$$

מש"ל

שאלה 2

שאלה 2 (15 נקודות)

הוכיחו או הפריכו: אם A קבוצה ב־ $\mathbf{R}^k$ אז $\partial A \subseteq \partial(A \setminus \partial A)$.

יהי

$$x \in \partial(A \backslash \partial A)$$

לכן קיימת נקודה $x \in \mathbb{R}^k$ כאשר:

$$\forall \text{Neighbourhood D of } x(\exists a,b \in D(a \in A \backslash \partial A \text{ and } b \notin A \backslash \partial A))$$

ונקבל:

$$\exists \text{Neighbourhood D of } x(\exists a,b \in D((a \in A \text{ and } (b \notin A \text{ or } b \in \partial A))))$$

יהי סביבה D של x. קיים $b \in D$ כאשר A $b \notin$ או $b \in \partial A$

אפשרות אחת: $b \notin A$

קיימת נקודה מחוץ לA, ולכן יש איבר בA ואיבר מחוץ לA

אפשרות שנייה: $b \in \partial A$

לפי הגדרת b, לכל סביבה של b, כולל D, ולכן יש איבר בA ואיבר מחוץ לA
לכן, לכל סביבה של x מתקיים:

$$\forall \text{Neighbourhood D of } x(\exists a,b \in D(a \in A \text{ and } b \notin A))$$

לכן מתקיים

$$x \in \partial A$$

לכן

$$\partial(A \backslash \partial A) \subseteq \partial A$$

מש"ל

שאלה 3

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה עולה במובן הרחב, דהיינו אם $x<y$ אז $f(x)\le f(y)$.

הוכיחו כי הקבוצה $U=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y>f(x)\}$ היא קבוצה פתוחה אם ורק אם לכל $a\in\mathbf{R}$

מתקיים $f(x)\xrightarrow[x\to a^+]{} f(a)$.

כיוון 1

נניח כי U קבוצה פתוחה.
נניח בשלילה כי קיים $a\in\mathbb{R}$ כאשר מתקיימת ההגדרה הנגדית לגבול:

$$\exists\varepsilon>0(\forall\delta>0(\exists a<x<a+\delta(f(x)-f(a)\geq\varepsilon)))$$

אראה כי קיימת נקודה $c\in U$ כאשר:

$$\exists c\in U(\forall\text{Neighbourhood D of }c\exists a,b\in\mathbb{R}^k(a\in U\text{ and }b\notin U))$$

מהנחת השלילה, נקבל:

$$\exists\varepsilon>0(\forall\delta>0(\exists a<x<a+\delta(f(x)\geq f(a)+\varepsilon)))$$

לפי הערכים מהנחת השלילה, ניקח את הנקודות:

$$(a,f(a)+\varepsilon)\in U$$

$$(a,f(a)+\varepsilon-\frac{\delta}{2})\in U$$

$$f(x)\geq f(a)+\varepsilon\implies(x,f(a)+\varepsilon)\notin U$$

נקבל שלכל $\delta>0$, המרחק בינהן הוא:

$$d=\sqrt{(a-x)^2+(f(a)+\varepsilon-f(a)-\varepsilon)^2}$$

$$d=|x-a|$$

$$0<x-a<\delta$$

לכן, לכל סביבה של הנקודה $(a,f(a)+\varepsilon)$
קיים $\delta>0$ כאשר הנקודות $(a,f(a)+\varepsilon-\frac{\delta}{2}),(x,f(a)+\varepsilon)$ נמצאת בסביבה זו.
לכן c מקיימת

$$\forall\text{Neighbourhood D of }c\exists a,b\in\mathbb{R}^k(a\in U\text{ and }b\notin U))$$

לכן U לא פתוחה. לכן קיבלנו סתירה.
ולכן, הגבול מתקיים לכל a.

כיוון 2

נניח כי מתקיים:

$$\forall a(\lim_{x->a^+} f(x) = f(a))$$

יהי $a \in \mathbb{R}$
ידוע כי מתקיים:

$$\forall \varepsilon > 0(\exists \delta > 0(a < x < a + \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon))$$

מפני ש $x > a$, וf פונ' מונוטונית עולה, נקבל כי מתקיים:

$$\forall \varepsilon > 0(\exists \delta > 0(\forall a - \delta < x < a + \delta(f(x) < f(a) + \varepsilon)))$$

יהי $\varepsilon > 0$. לכן קיים $\delta > 0$ כאשר $\forall a < x < a + \delta(f(x) < f(a) + \varepsilon)$
ניקח את הנקודה $(a, f(a) + 2\varepsilon)$.
אראה כי קיימת סביבה לנקודה זו המוכלת ב U:
ניקח את הקבוצה הפתוחה:

$$U_a = \{(x, y)|\ y > f(x) \text{ and } a - \delta < x < a + \delta\}$$

ידוע כי לכל $a - \delta < x < a + \delta$ מתקיים $f(x) < f(a) + \varepsilon$
לכן,

$$(a - \delta, a + \delta) \times (f(a) + \varepsilon, \infty) \subseteq U_a$$

לפי טענה 2.א.29 מכרך א' בספר הלימוד,
נקבל כי הקבוצה $(a - \delta, a + \delta) \times (f(a) + \varepsilon, \infty)$ היא קבוצה פתוחה
ידוע כי מתקיים $(a, f(a) + 2\varepsilon) \in U_a$
ולכן היא סביבה של נקודה זו.
לכן, קבוצה זו היא קבוצה פתוחה

קיבלנו שהצד הראשון גורר את השני והצד השני גורר את הראשון
לכן הטענות הללו שקולות
מש"ל

שאלה 4

שאלה 4 (15 נקודות)

יהי $\alpha > 0$. האם קיים הגבול $\lim_{x \to 0^{[k]}} \dfrac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|\right)^{\alpha}}$?

נסתכל על הגבול

$$\lim_{x\to 0^{[k]}} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{(\sum_{i=1}^{k}|x_i|)^{\alpha}} = \lim_{x\to 0^{[k]}} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|x_i|}\right)^{2\alpha}}$$

יהי $x \in U$ איבר בסביבה של $0^{[k]}$

ידוע כי מתקיים:

$$0 \le \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|x_i|}\right)^{2\alpha}} \le \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k}x_i^2}\right)^{2\alpha}} = \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{(|x|)^{2\alpha}}$$

ידוע כי לפי חוק הסנדוויץ' 1.ו.2 בכרך א, מתקיים:

$$0 \le \lim_{x\to 0^{[k]}} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|x_i|}\right)^{2\alpha}} \le \lim_{x\to 0^{[k]}} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{(|x|)^{2\alpha}}$$

נסתכל על הגבול

$$\lim_{x\to 0^{[k]}} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{(|x|)^{2\alpha}}$$

נקבל:

$$\lim_{x\to 0^{[k]}} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{(|x|)^{2\alpha}} = \lim_{x\to 0^{+}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2\alpha}}$$

מהקורס חשבון אינפיניטסימלי 1, הגבול הבא שקול:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^{2\alpha}}}$$

ונקבל:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2a}}{e^{x}}$$

נשתמש בחוק לופיטל ונקבל:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2ax^{2a-1}}{e^{x}}$$

נשתמש בו עוד n פעמים עד שמתקיים $2a - n < 0$, ונקבל:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\prod_{i=2a}^{2a+n-1} i\right)x^{n-2a}}{e^{x}}$$

ונקבל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\prod_{i=2a}^{2a+n-1} i\right)x^{n-2a}}{e^x} = "\frac{0}{\infty}" = 0$$

לכן מתקיים

$$0 \le \lim_{x\to 0^{[k]}}\frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|x_i|}\right)^{2\alpha}} \le \lim_{x\to 0^{[k]}}\frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{(|x|)^{2\alpha}} = 0$$

ונקבל:

$$\lim_{x\to 0^{[k]}}\frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|\right)^{\alpha}} = \lim_{x\to 0^{[k]}}\frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|x_i|}\right)^{2\alpha}} = 0$$

מש"ל

שאלה 5

שאלה 5 (30 נקודות)

א. הראו שהקבוצה $S=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^2=x^2+y^2\right\}\setminus\left\{(0,0,0)\right\}$ היא משטח.

הערה: למעשה אפשר להוכיח ש־ S היא טלאי דו־ממדי. שימוש בשיעורים קוטביים או גליליים יכול להועיל.

ב. הראו שלכל $r\in(0,1]$ הקבוצה $S\cap B\left((0,0,0);r\right)$ אינה קשורה־מסילתית ואילו הקבוצה $S\cap B\left((0,0,0);r\right)\cup\left\{(0,0,0)\right\}$ קשורה־מסילתית.

ג. הראו שהקבוצה $S\cup\left\{(0,0,0)\right\}$ אינה משטח.

סעיף א

ניקח $S=\{(x,y,z)\mid(x^2+y^2+z^2)^2=x^2+y^2\}$
אראה כי קיימת פונ' h שהיא הומיאומורפיזם מS ל$\mathbb{R}^2$
נסתכל על הקבוצה S
ניקח $(x,y,z)\in S$
לכן,

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2+y^2 / \sqrt{}$$

$$x^2+y^2+z^2 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

$$z^2 = (\pm\sqrt{x^2+y^2}) - x^2 - y^2$$

אם ה"פלוס מינוס יהיה מינוס" אזי צד אחד במשוואה תמיד יהיה חיובי והצד השני תמיד יהיה שלילי, לכן הוא לא יכול להיות מינוס.

ונקבל:

$$z = \pm\sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2}$$

ניקח

כאשר: $f : S \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0,0)\}$

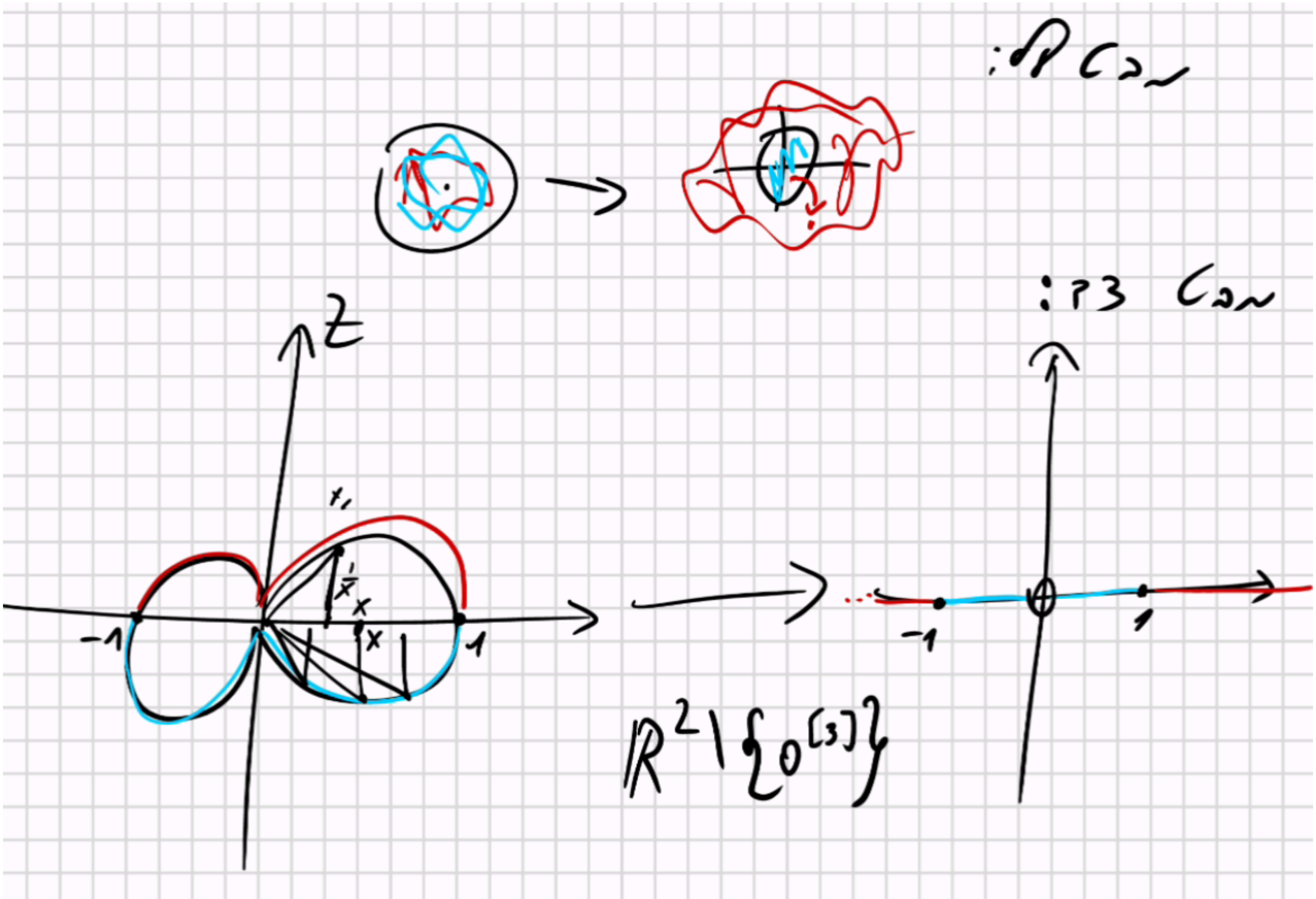
$$f(x,y,z) = \begin{cases} (x,y) & \text{if } z >= 0 \\ \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) & \text{else} \end{cases}$$

אראה שקיימת פונ' הופכית לf ולכן היא הומיאומורפיזם

ניקח:

$$f^{-1}(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{x^2+y^2}}\right) & \text{if } z > 0 \\ (x, y, -\sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2}) & \text{else} \end{cases}$$

לכן, f הומיאומורפיזם. אציג סרטוט הממחיש את ההומיאומורפיזם:



ולכן הקבוצה S היא טלאי דו ממדי (כמובן ש $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0,0)\}$ קבוצה פתוחה)

ולכן הקבוצה S משטח

משל א

סעיף ב

יהי $r \in (0,1]$
נסתכל
ניקח:

$$S_1 = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in S \cap B(0^{[3]}, r) \text{ and } z \geq 0\}$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in S \cap B(0^{[3]}, r) \text{ and } z \leq 0\}$$

נניח כי קיימת מסילה φ מהנקודה $a \in S_1$ ל $b \in S_2$.
ניקח את האיבר השלישי במסילה זו:

$$[\varphi]_3$$

מפני שהמסילה היא פונ' רציפה, כך גם כל איברי הפונ', ולכן גם הפונ' $[\varphi]_3$ רציפה.
ממשפט ערך הביניים של קושי מהקורס חשבון אינפיניטסמילי 1, נקבל כי מתקיים:

$$\forall a_3 \geq y \geq b_3 (\exists x(([\varphi]_3)(x) = y)$$

ולכן, לפי הגדרת a ו b, נקבל כי קיים x כאשר:

$$([\varphi]_3)(x) = 0$$

נסתכל על $\varphi(x) = c$
לפי הגדרת נקודה ב S,נקבל:

$$c_3 = \pm\sqrt{\sqrt{c_1^2 + c_2^2} - c_1^2 - c_2^2}$$

$$c_3 = 0$$

ונקבל:

$$0 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} - c_1^2 - c_2^2$$

$$0 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} - c_1^2 - c_2^2$$

$$c_1^2 + c_2^2 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$(c_1^2 + c_2^2)^2 = c_1^2 + c_2^2$$

ונקבל:

$$(c_1^2 + c_2^2)(c_1^2 + c_2^2 - 1) = 0$$

ונקבל:

$$c_1^2 + c_2^2 = 0 \text{ or } c_1^2 + c_2^2 = 1$$

נפריד למקרים:

אפשרות 1: $c_1^2 + c_2^2 = 1$

נקבל כי

$$c \notin B(0^{[3]}, r)$$

אפשרות 2: $c_1^2 + c_2^2 = 0$, כלומר $c = 0^{[3]}$

נקבל כי

$$c \in B(0^{[3]}, r)$$

לכל $r \in (0,1]$.
לכן המסילה חייבת לעבור ב $0^{[3]}$, ולכן זו סתירה כי איבר זה לא נמצא בקבוצה.
לכן הקבוצה $S \cap B(0^{[3]}, r)$ לא קשורה מסילתית.
נסתכל על הקבוצות $S_1' = S_1 \cup \{0^{[3]}\}, S_2' = S_2 \cup \{0^{[3]}\}$, כאשר אראה שהן קשורות מסילתית, ומפני שיש להן נקודה משותפת $0^{[k]}$ אזי האיחוד של שתיהן קשור מסילתית.
לפני, נגדיר יותר במדויק את הקבוצות S_1', S_2'ניקח נקודה בS, ונראה האם היא ב $B(0^{[3]}, r)$

$$(x, y, \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2})) \in S$$

$$x^2 + y^2 + \left(\sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2}\right)^2 < r$$

$$x^2 + y^2 - x^2 - y^2 + \sqrt{x^2+y^2} < r$$

ונקבל:

$$x^2 + y^2 < r^2$$

הקבוצה הראשונה: $S_1' = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in S \text{ and } z \geq 0 \text{ and } x^2+y^2 < r^2\} \cup \{0^{[3]}\}$

ניקח את הפונ'

$$f_1 : \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < r^2\} \to S_1'$$

$$f_1(x,y) = (x, y, \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2}) \in S_1'$$

לכן הפונ f_1 רציפה, וידוע כי $B(0^{[2]}, r^2)$ קשורה מסילתית.
לכן, נקבל

$$f_1(B(0^{[2]}, r^2)) = S_1'$$

ולפי טענה 2.ט.2 מספר הלימוד, הקבוצה S_1' קשורה מסילתית

הקבוצה השנייה: $S_2' = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in S \text{ and } z \leq 0 \text{ and } x^2+y^2 < r^2\} \cup \{0^{[3]}\}$

ניקח את הפונ'

$$f_2 : \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < r^2\} \to S_2'$$

$$f_2(x,y)=(x,y,-\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2})\in S_2'$$

לכן הפונ f רציפה, וידוע כי $B(0^{[2]},r^2)$ קשורה מסילתית.
לכן, נקבל

$$f_2(B(0^{[2]},r^2))=S_2'$$

ולפי טענה 2.ט.2 מספר הלימוד, הקבוצה S_2' קשורה מסילתית.
לכן הקבוצות הללו קשורות מסילתית.
ניקח $a\in S_1', b\in S_2'$. אראה שהם קשורים מסילתית.
ניקח מסילה מ a ל $0^{[3]}$, ומסילה מ $0^{[3]}$ ל- b.
לכן קיימת מסילה מa, ל$0^{[k]}$, לb היא מסילה שעוברת ב $S_1'\cup S_2'=S\cap B(0^{[2]},r^2)\cup 0^{[3]}$.
ולכן כל 2 נקודות בקבוצות הללו קשורות מסילתית,
ולכן הקבוצה $S_1'\cup S_2'=S\cap B(0^{[2]},r^2)\cup 0^{[3]}$ קשורה מסילתית.
הקבוצה $S\cap B(0^{[3]},r)$ לא קשורה מסילתית.
מש"ל ב

סעיף ג

אוכיח טענת עזר:
יהי טלאי S. לכל קבוצה פתוחה U, הקבוצה $U\cap S$ היא טלאי.
נגדיר:

$$h:\Omega\to S$$

כאשר h הומיאומורפיזם על S, והקבוצה Ω פתוחה.
נניח בשלילה כי $h^{-1}(S\cap U)$ לא פתוחה.
לכן מתקיים:

$$\exists_{x\in h^{-1}(S\cap U)}(\exists_{(x_n)_n^\infty}(x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x \text{ and } \forall_n(x_n\notin h^{-1}(S\cap U))))$$

מהפתיחות של Ω, נקבל $x_n\in\Omega$ כמעט לכל n. ללא הגבלת הכלליות, נניח ששייכות זאת מתקיימת לכל n.
ניקח סדרה $(y_n)_n^\infty$ כאשר מתקיים:

$$n=h(x_n)\in S$$

$$y=h(x)$$

וידוע כי מתקיים

$$y_n\notin S\cap U\ ,\ y\in S\cap U$$

נקבל

$$y_n\notin U\ ,\ y\in U$$

וזו סתירה כי U קבוצה פתוחה.
לכן $h^{-1}(S\cap U)$ פתוחה, ו h היא הומיאומורפיזם מ $S\cap U$ ל $h^{-1}(S\cap U)$
לכן, הקבוצה $S\cap U$ היא טלאי.

נגדיר $S' = S \cup \{0^{[3]}\}$
לפי הגדרת

$$\exists i \in I(0^{[3]} \in U_i)$$

ניקח k כאשר $0^{[3]} \in U_k$. ניקח $h : \Omega \to U_k \cap S'$ פונ' הומיאומורפיזם על Ω
ניקח:

$$x = h^{-1}(0^{[3]})$$

מפני שהקבוצה U_k פתוחה, קיים r כאשר:

$$A = h^{-1}(\Omega) \cap B(0^{[3]}, r) \neq \emptyset$$

לפי הטענה, קבוצה זו היא טלאי.
לפי סעיף ב, הקבוצה A היא קשורה מסילתית.
ניקח הומיאומורפיזם:

$$h' : \Omega' \to A$$

ולכן מתקיים

$$h'^{-1} : A \to \Omega'$$

הומיאומורפיזם, כלומר פונ זו היא פונ' חחע ורציפה.
לפי טענה 2.ט.2, הקבוצה A קשורה מסילתית. נקבל כי Ω' קבוצה קשורה מסילתית
נסתכל על הקבוצה $\Omega' \backslash \{h'^{-1}(0)\}$.
קיים r כאשר:

$$B(h'^{-1}(0); r) \subseteq \Omega'$$

יהי $a, b \in \Omega' \backslash \{h'^{-1}(0)\}$.
ידוע כי קיימת מסילה $\varphi : [0,1] \to \Omega'$ ב Ω' מa לb.
נבדיל בין 2 מקרים:

מקרה 1 $h'^{-1}(0) \notin \varphi([0,1])$

לכן המסילה היא גם ב $\Omega' \backslash \{h'^{-1}(0)\}$ ולכן קיים מסילה

מקרה 2 $h'^{-1}(0) \in \varphi([0,1])$

מפני ש Ω' היא קבוצה פתוחה, ידוע כי קיים:

$$B(h'^{-1}(0); r) \subseteq \Omega'$$

ניקח $B(0; \frac{r}{2})$. ניתן "להחליף" את הסביבה של $h'^{-1}(0)$ במסלול על $S(h'^{-1}(0); \frac{r}{2})$, היות והקבוצה הזו היא קשורה מסילתית. לכן קיים מסלול ב $\Omega \backslash \{h'^{-1}(0)\}$.

לכן הקבוצה הזו היא קשורה מסילתית.

ונקבל לפי טענה 2.ט.2, כי $A\backslash\{h'^{-1}(0)\}$ קשורה מסילתית, סתירה לסעיף ב.
לכן S' לא משטח.
מש"ל ג.