שאלה 1 (20 נקודות)

חשבו את הגבולות (אם הם לא קיימים הוכיחו זאת).

א. $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}}$$

ב. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+e^{-x}\right)^{x^2}$$

1א)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin(\frac{1}{n})}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n^2\sin(\frac{1}{n})}}\right)=$$

נסתכל על הסדרה:

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ לכל $n>0$

לפי 6.16 ידוע כי:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=e$$

לכן, לפי הגדרת גבול של סדרות,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=\lim_{n\to\infty}(a_{n^2})=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)=\boxed{e}$$

לכן:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n^2\sin(\frac{1}{n})}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2\sin(\frac{1}{n})}}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\sin(\frac{1}{n})}}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\sin(\frac{1}{n})}}\right)=$$

נסתכל על $\left(\frac{\frac{1}{n}}{\sin(\frac{1}{n})}\right)$:

ניקח: $a_n=\frac{1}{n}$:

נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{\sin(a_n)}\right)$$

ידוע כי $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)=1$

לפי: 4.45

לפי 4.29, לכל $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כאשר $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{\sin(x_n)}\right)=1$$

ולכן, אם ניקח $x_n=\frac{1}{n}$,

נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\sin(\frac{1}{n})}\right)=1$$

לכן,

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\sin(\frac{1}{n})}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}\cdot 1}\right)=e^{0\cdot 1}=e^{0}=\boxed{1}$$

ב) $\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+e^{-x}\right)^{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+e^{-x}\right)^{e^x}\right)^{\frac{x^2}{e^x}}\right) =$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+e^{-x}\right)^{e^x}\right)^{\frac{x^2}{e^x}}\right)$$

נסתכל על $\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+e^{-x}\right)^{e^x}\right)$

לפי 6.1.6 $\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)=e$

לכן, לפי הגדרת הגבול ע"פ היינה במשפט 4.29,

לכל (x_n) כאשר $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\right.$

ניקח $x_n=e^n$

קיים מפני ש- $e>1$: $\lim_{n\to\infty}(x_n)=\lim_{n\to\infty}(e^n)=e^{\infty}=\infty$

לכן, $\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x^n}\right)=e$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+e^{-n}\right)^{e^n}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+e^{-x}\right)^{e^x}\right)=e$$

לכן,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+e^{-x}\right)^{e^x}\right)^{\frac{x^2}{e^x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{x^2}{e^x}}\right)$$

מפני $e>1$, לפי משפט 2.49

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^k}{r^n}\right)=0$$

(לכל $k\in N$)

נקח בה $k=2$, $r=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{e^n}\right)=0$$

ולכן,

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{x^2}{e^x}}\right)=e^0=\boxed{1}$$

שאלה 2 (20 נקודות)

הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x+e^x(1-\cos x)$ היא על $\mathbb{R}$.

$$f(x)=x+e^x(1-\cos(x))$$

ידוע ש- $f(x)$ רציפה, מפני שהיא סכום מכפלה, והפרש של פונ׳ רציפות ב- R .

יהי $y\in R$

אראה כי קיים $x_1, x_2\in R$, כאשר $f(x_1)\leq y\leq f(x_2)$

ניקח $x_2=y$:

אני אוכיח כי $y\leq f(y)$ לכל y:

$$y\leq f(y)$$

$$y\leq y+e^y(1-\cos(y)) \quad /-y$$

$$0\leq e^y(1-\cos(y))$$

ידוע כי לכל $r\in\mathbb{R}$,
$e^r>0$

ידוע כי $\cos(y)\leq 1$,
ולכן $0\leq 1-\cos(y)$

לכן, מכפלתם גדולה מ-0

לכן, $0\leq e^y(1-\cos(y))$
הינו פסוק אמת.

$\boxed{\text{לכן, לכל } y\in\mathbb{R},\ y\leq f(y)}$

ניקח $x_1 = (4\lfloor -|y| \rfloor)\frac{\pi}{2}$

נוכיח כי

$$f(x_1) \leq y$$

$$(4\lfloor -|y| \rfloor)\cdot\frac{\pi}{2} + e^{(4\lfloor -|y| \rfloor)\frac{\pi}{2}}\cdot\left(1-\cos\left((4\lfloor -|y| \rfloor)\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\cos\left((4\lfloor -|y| \rfloor)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\pi\lfloor -|y| \rfloor\right) =$$

מחזוריות $\to \cos(2\pi k + \alpha) = \cos(\alpha)$

$$\cos(0) = 1$$

לכן,

$$(4\lfloor -|y| \rfloor)\cdot\frac{\pi}{2} + e^{(4\lfloor -|y| \rfloor)\frac{\pi}{2}}\cdot(1-1) \leq y$$

$$\frac{\pi}{2}(4\lfloor -|y| \rfloor) + e^{(4\lfloor -|y| \rfloor)\frac{\pi}{2}}\cdot 0 \leq y$$

$$\lfloor -|y| \rfloor \cdot 2\pi \leq y$$

ידוע כי $|y| \geq 0$

לכן,

לפי הגדרת $|y|$ | לפי הגדרת החלק השלם

$$\boxed{y} \geq -|y| \geq \lfloor -|y| \rfloor \geq \boxed{2\pi\lfloor -|y| \rfloor}$$

$$\lfloor -|y| \rfloor \leq 0$$

לכן, $f((4\lfloor -|y| \rfloor)\frac{\pi}{2}) = f(x_1) \leq y$

לכן, קיימים $x_1 = 4\lfloor -|y| \rfloor$, $x_2 = y$

$$f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$$

לפי 5.31 , מכיוון ש $f(x)$ רציפה ב-R , ו-y
(משפט) בין $f(x_1)$ ל- $f(x_2)$ יש קיים x_0
כאשר $f(x_0) = y$ ולכן, לכל y קיימים ערכים
ולכן $f(x)$ על.

משל

שאלה 3 (20 נקודות)

לכל אחת מהפונקציות הבאות מצא את תחום ההגדרה, תחום הרציפות ותחום הגזירות. כמו כן לכל נקודה בתחום הגזירות, מצאו את הנגזרת המתאימה. נמקו את תשובותיכם.

א. $f(x) = \sqrt{|x|}\sin x$

ב. $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

א)

$$f(x) = \sqrt{|x|} \cdot \sin(x)$$

תחום הגדרה:

$\sin(x)$ לכל $x \in R$

$\sqrt{|x|} \Leftarrow |x| \geq 0$, לכן לכל $x \in R$

$\boxed{\text{לכל } x \in R}$

רציפות

$$f(x) = \sqrt{|x|} \cdot \sin(x)$$

$\sin(x)$ רציפה בכל $x \in R$

$\sqrt{|x|}$ גם רציפה - מפני שהן הרכבה של 2 פונ' רציפות

לכן, הכפל גם רציף.

לכן הפונ' רציפה לכל R

גזירות

$\sin(x)$ גזירה בכל $x \in R$

$\sqrt{|x|}$ אינה גזירה כאשר $|x|=0$ (רק שם $|x|$)

נבדוק את הפונ' ב- $x=0$: $f(0)=0^*$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)-f(0)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{|h|}\cdot \sin(h)}{h}\right) =$$

לפי משפט 4.45

$$\lim_{h\to 0}\left(\sqrt{|h|}\right)\cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\sqrt{|h|}\right) = 0^+ = 0$$

$$f(x) = \sqrt{|x|}\cdot \sin(x)$$

נסתכל על $x>0$: $\leftarrow$ $|x| = x > 0$

$$f(x) = \sqrt{x}\cdot \sin(x)$$

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cdot \cos(x)$$

נסתכל על $x<0$:

$$f(x)=\sqrt{-x}\cdot\sin(x)$$

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin(x)+\cos(x)\cdot\sqrt{x}=-\frac{\sin(x)}{2\sqrt{-x}}+\sqrt{-x}\cos(x)$$

לכן,

$$\boxed{f'(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cdot\cos(x) & x>0\\ 0 & x=0\\ \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{-x}}+\sqrt{-x}\cos(x) & x<0\end{cases}}$$

ג)

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin(\frac{1}{x})\cos(\frac{1}{x}) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

<u>תחום הגדרה</u>

$x^2\sin(\frac{1}{x})\cos(\frac{1}{x})$ מוגדר לכל $x\neq0$

0 מוגדר לכל x

לכן, תחום ההגדרה הוא $\boxed{\text{לכל } x}$

רציפות

ידוע כי לכל $x\neq 0$,

$x^2\sin(\frac{1}{x})\cos(\frac{1}{x})$ הינה פונ' רציפה,
מפני שהיא "מורכבת" מפונקציות רציפות.

לכן, נבדוק רציפות ב- $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)\right) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0 = f(0)$$

לפי המשפט ההיינליני ל- 2.22, סדרה אפסה כפול סדרה חסומה הינה סדרה אפסה.

לכן הפונ' רציפה ב- $x=0$, וב- $x\neq 0$
ולכן הפונ' רציפה $\boxed{\text{לכל } x}$

גזירות:

$x^2\sin(\frac{1}{x})\cos(\frac{1}{x})$ פונ' גזירה לכל $x\neq 0$, מפני שהיא מורכבת מפונ' רציפות ב- $x\neq 0$

נסתכל על $f'(0)$, ונבדוק האם הוא קיים:

$$f(0)=0$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)-f(0)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}\right)=$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{h^2\sin(\frac{1}{h})\cos(\frac{1}{h})}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(h\sin(\tfrac{1}{h})\cos(\tfrac{1}{h})\right)=0$$

לפי המשפט הגלגולי ל- 2.22, סדרה אפסה כפול סדרה חסומה הינה סדרה אפסה.

לכן, הגבול קיים, והפונ' גזירה $\boxed{\text{בכל } x}$.

נסתכל על $x\neq 0$:

$$f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)=$$

לזהות $2\cos(x)\sin(x)=\sin(2x)$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(2x\sin\left(\frac{2}{x}\right)+x^2\left(-\frac{2}{x^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right)=$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(2x\sin\left(\frac{2}{x}\right)-2\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right)$$

$$f'(x)=x\sin\left(\frac{2}{x}\right)-\cos\left(\frac{2}{x}\right)$$

לכן,

$$f'(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{2}{x}\right)-\cos\left(\frac{2}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$

שאלה 4 (25 נקודות)

א. הוכיחו כי $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

רמז: הסתמכו על הגדרת הנגזרת של e^x ב $x=0$.

ב. יהי $a\in\mathbb{R}$ ותהי $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{2} & x\le 0\\ \frac{a-\sqrt{\cos x}}{x} & x>0\end{cases}$.

(i) מצאו את כל הערכים של a שעבורם f רציפה ב $x=0$.

רמז: הפרידו למקרים: $a=1$, $a\neq 1$.

(ii) מצאו את כל הערכים של a שעבורם f גזירה ב $x=0$.

א)

לפי 7.30 ידוע כי $(e^x)'=e^x$

לכן. ידוע כי:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\right)=e^x$$

לכל x.

ניקח $x=0$:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{h}-e^0}{h}\right)=e^0=\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{h}-1}{h}\right)=\boxed{1}$$

fen

ב)

i)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{2} & x\le 0\\ \frac{a-\sqrt{\cos(x)}}{x} & x>0\end{cases}$$

מפני ש- $\frac{e^x-1}{2}$ רציפה לכל R, הפונ' $f(x)$

רציפה משמאל לכל $x\leq 0$.

מפני שכאשר $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\cos(x)>0$, הפונ' $\frac{a-\sqrt{\cos(x)}}{x}$

רציפה מימין לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$. (קיימים עוד תחומים כאלה, אך הם

לא רלוונטיים לשאלה זו.)

e^x היא פונ' רציפה!

יקוים כי: $\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^x-1}{2}\right) = \frac{e^0-1}{2} = \boxed{0}$

לכן, $f(x)$ פונ' רציפה אמ"מ $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a-\sqrt{\cos(x)}}{x}\right)=0$

נבדוק מתי דבר זה יקרה:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a-\sqrt{\cos(x)}}{x}\right) \overset{\text{כפל בהופכי}}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{(a-\sqrt{\cos(x)})(a+\sqrt{\cos(x)})}{x(a+\sqrt{\cos(x)})}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^2-\cos(x)}{x(a+\sqrt{\cos(x)})}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{(a^2-\cos(x))(a^2+\cos(x))}{x(a+\sqrt{\cos(x)})(a^2+\sqrt{\cos(x)})}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^4-\cos^2(x)}{x(a+\sqrt{\cos(x)})(a^2+\cos(x))}\right)$$

נסתכל על 2 אפשרויות: $a=1$, $a\neq 1$

$a\neq 1$:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^4-\cos^2(x)}{x(a+\sqrt{\cos(x)})(a^2+\cos(x))}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^4-\cos^2(x)}{(a+\sqrt{\cos(x)})(a^2+\cos(x))}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)=\text{''}\frac{a^4-1}{(a+1)(a^2+1)}\cdot\infty\text{''}=\boxed{\pm\infty\neq 0}$$

לכן הפונ' אינה רציפה כאשר $\boxed{a\neq 1}$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\overset{a=1:}{1^4-\cos^2(x)}}{x\left(1+\sqrt{\cos(x)}\right)\left(1+\cos(x)\right)}\right)\overset{\text{זהות}}{=}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin^2(x)}{x\left(1+\sqrt{\cos(x)}\right)\left(1+\cos(x)\right)}\right)$$

היות ו $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sqrt{}$ רציפות
[illegible] :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{\left(1+\sqrt{\cos(x)}\right)\left(1+\cos(x)\right)}\right)=1\cdot\frac{0}{\left(1+\sqrt{1}\right)\left(1+1\right)}=0$$

לכן הפונ' רציפה כאשר $a=1$

$\boxed{\text{סוף}}$

ii) לפי 7.9 אם $f(x)$ גזירה ב-0, היא חייבת להיות רציפה. לכן $\boxed{a=1}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{2} & x\le0\\[2mm] \dfrac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x} & x>0\end{cases}$$

נבדוק אם $f(x)$ גזירה ב-0 לפי משפט 7.12:

אבדוק אם: $f'_-(0)=f'_+(0)$ מתקיים

$$\lim_{h\to0^-}\left(\frac{f(h)-f(0)}{h}\right)=\lim_{h\to0^+}\left(\frac{f(h)-f(0)}{h}\right)$$

$\downarrow$

$$\lim_{h\to 0^-}\left(\frac{\frac{e^h-1}{2}-0}{h}\right)=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{\frac{1-\sqrt{\cos(h)}}{h}-0}{h}\right)$$

$$\lim_{h\to 0^-}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^h-1}{h}\right)=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1-\sqrt{\cos(h)}}{h^2}\right)=$$

לפי הסעיף הראשון

$$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0^-}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)=\frac{1}{2}$$

הכפלה בצמוד

$$=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{(1-\sqrt{\cos(h)})(1+\sqrt{\cos(h)})}{h^2(1+\sqrt{\cos(h)})}\right)=$$

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1-\cos(h)}{h^2(1+\sqrt{\cos(h)})}\right)=$$

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{(1-\cos(h))(1+\cos(h))}{h^2(1+\sqrt{\cos(h)})(1+\cos(h))}\right)=$$

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1-\cos^2(h)}{h^2(1+\sqrt{\cos(h)})(1+\cos(h))}\right)=$$

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{\sin^2(h)}{h^2(1+\sqrt{\cos(h)})(1+\cos(h))}\right)=$$

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{\sin^2(h)}{h^2}\cdot\frac{1}{(1+\sqrt{\cos(h)})(1+\cos(h))}\right)=$$

מפני שהפונ׳ רציפה, כאשר $h\to 0^+$:

$$1^2\cdot\frac{1}{(1+1)(1+1)}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{1}{2}\neq\frac{1}{4}$$

לכן, הפונ׳ לא גזירה ב- $x=0$, ולכן לא קיים ערך a אחד מתאים אשר עבורם לפונ׳ להיות גזירה.

$\boxed{\text{מש״ל}}$

שאלה 5 (15 נקודות)

הוכיחו שאם f היא פונקציה המקיימת $|f(x)| \le x^2$ לכל $x \in \mathbb{R}$, אז f גזירה ב $x = 0$.

נתון $|f(x)| \le x^2$

נסתכל על $f(0)$:

$-0^2 \le f(0) \le 0^2$

לכן $f(0) = 0$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h) - f(0)}{h} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h)}{h} \right)$$

ידוע ש $-x^2 \le f(x) \le x^2$, לכן:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{-h^2}{h} \right) \le \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h)}{h} \right) \le \lim_{h \to 0} \left(\frac{h^2}{h} \right)$$

$$\lim_{h \to 0} (-h) \le \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h)}{h} \right) \le \lim_{h \to 0} (h)$$

$$0 \le \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h)}{h} \right) \le 0$$

לכן,

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h)}{h} \right) = 0$$

$\downarrow$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h)}{h} \right) = 0$$

ולכן, הגבול קיים ולכן הי'א גזירה ב- $X=0$.

ושווה $\boxed{f'(0)=0}$