ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20281

תורת הקבוצות

חוברת הקורס - סתיו 2024א

כתב: עופר הדס

אוקטובר 2023 - סמסטר סתיו - תשפ״ד

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

שלום וברכה,

חוברת זאת כוללת פרטים שיש להכיר, כדי לבצע את הנדרש ולסיים בהצלחה את לימוד הקורס תורת הקבוצות. פרטים חשובים נוספים כלולים בחוברת "השלמות לחוברת הקורס", שניתן לצפות בתוכנה באתר הקורס באינטרנט.[1]

עם קבלת חומר הלימוד בקורס יש להתחיל בלימוד עצמי, בקצב המותאם ל**לוח הזמנים** שבהמשך חוברת זאת. בזמנים המומלצים בלוח הזמנים ללימוד כל פרק כלול גם הזמן הנדרש לפתרון המטלה הקשורה אליו ולהגשתה. חשוב לתכנן לוח זמנים אישי שיאפשר את לימוד החומר ופתרון והגשת המטלות במועדי ההגשה שנקבעו. מפגשי ההנחיה מתוכננים לפי לוח הזמנים וחשוב לעיין בחומר הלימוד המתאים לפני כל מפגש.

אתר הקורס באינטרנט מהווה ערוץ תקשורת עיקרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטיות וסטודנטים אחרים בקורס. זה המקום המתאים להעלות בו לדיון כל רעיון או שאלה בנושאי הלימוד**. הודעות, עדכונים ותיקונים למטלות, אם יהיו כאלה, יתפרסמו באתר הקורס.**

ספרי הקורס כוללים שני כרכים. כמה מהנושאים שבכרך הראשון ובמיוחד בשלושת הפרקים הראשונים מוכרים לך מלימודים קודמים, ולא יהוו קושי. הכרך השני כולל נושאים קשים יותר. בפרט, פרקים 7 ו־10 מהווים אתגר משמעותי. לוח הזמנים של הקורס נבנה בהתאם לכך.

חשוב להקדיש זמן לתרגול חומר הלימוד על ידי פתרון בעיות. המטלות להגשה שבחוברת זאת כוללות מגוון שאלות, אך אין די בהן. בחומרי הלימוד כלולה חוברת שאלות לתרגול ובה מגוון עשיר של בעיות ברמות שונות, ובפרט גם שאלות קלות משאלות המטלות שמיועדות לתרגול תוך כדי למידה. ב**אתר הקורס** באינטרנט יש חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה, ביניהם פתרונות לרוב השאלות שבחוברת השאלות לתרגול, וכן מטלות ובחינות משנים קודמות.

צוות הקורס מעוניין לעזור לך בלימודים. לכן, אם התעוררה בעיה או שאלה במהלך הלימוד, חשוב לא להסס ולפנות אלינו בהקדם. עומדות לרשותך דרכי ההתקשרות הבאות:

- קבוצת דיון באתר הקורס.
- דואר אלקטרוני למרכז ההוראה בכתובת oferh@openu.ac.il.
- טלפון למרכז ההוראה בקורס, ד"ר עופר הדס, בימי ב בין השעות 11:00-13:00.
- טלפון למנחה בשעת ההנחיה הטלפונית המפורטת יחד עם לוח המפגשים.
- פניה למנחה בדואר אלקטרוני.
- פניה למנחה במפגש ההנחיה.
- **שאילתא** - לפניות בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאילתא. לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות.

נאחל לכולנו סמסטר מהנה ומוצלח.

בברכה, צוות הקורס.

---

[1] פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס יש באתר שה"ם בכתובת http://www.openu.ac.il/shoham.
מידע על שירותי הספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותך תמצאו באתר הספרייה בכתובת http://www.openu.ac.il/Library.

לוח זמנים ופעילויות (20281 \ 2024א – מקוצר)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת (כולל פתרון המטלות בנושא)	מועדי משלוח המטלות	מפגשי הנחיה *
1	8.12.2023—3.12.2023 (ו חנוכה)	פרק 1		
2	15.12.2023—10.12.2023 (א–ו חנוכה)	פרק 2		
3	22.12.2023—17.12.2023	פרק 3	✉ הגישו את **ממ"ן 11** למנחה עד 20.12.2023	
4	29.12.2023—24.12.2023	פרק 4		
5	5.1.2024—31.12.2023	פרק 5 והנספח לכרך א	✉ הגישו את **ממ"ן 12** למנחה עד 7.1.2024	
6	12.1.2024—7.1.2024	פרק 6	הגישו את **ממ"ן 13** למנחה עד 18.1.2024	
7	19.1.2024—14.1.2024			
8	26.1.2024—21.1.2024	פרק 7		
9	2/2/2024—28.1.2024		✉ הגישו את **ממ"ן 14** למנחה עד 31.1.2024	
10	11/2/2024—4/2/2024	פרק 8	✉ הגישו את **ממ"ן 15** למנחה עד 11.2.2024	
		פרקים 9 ו־10 הם חומר רשות בסמסטר זה	✉ הגישו את **ממ"ן 16** למנחה עד 25.2.2024 (מטלת בונוס)	

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים, מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

התנאים לקבלת 4 נקודות זכות בקורס

יש לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל של 7 נקודות
ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.
ג. לקבל 60 לפחות בציון הסופי של הקורס.

הערות חשובות לתשומת לבך!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.
אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20281 – תורת הקבוצות | סמסטר: 2024א

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–3 | משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 6 | מועד אחרון להגשה: 20.12.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

בכל המטלות הקפידו לכתוב הוכחות מפורטות ומנומקות היטב לכל טענה!

שאלה 1 (20 נקודות)

יהיו A ו־B קבוצות. יהי n מספר טבעי. נתון שמתקיים $|\mathcal{P}(A)\setminus\mathcal{P}(B)|=2^n$.

הוכיחו כי A היא קבוצה סופית, כי $|A|=n+1$ וכי $|A\setminus B|=1$. האם גם B קבוצה סופית?

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי A קבוצה לא ריקה. לכל $n\in\mathbf{N}$ יהי R_n יחס שקילות על הקבוצה A.

תהי $R=\liminf R_n$. (ראו הגדרת $\liminf$ בעמוד 34 בכרך א'.)

א. הוכיחו ש־R יחס שקילות על A.

ב. יהי $a\in A$. לכל יחס שקילות E על הקבוצה A תהי $S_E(a)=\{x\in A \mid xEa\}$ מחלקת השקילות של a לפי יחס השקילות E. הוכיחו כי $S_R(a)=\liminf S_{R_n}(a)$.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה חלקית. אומרים ש־$a,b\in A$ ניתנים להשוואה (ביחס $\prec$) אם ורק אם מתקיים $a\prec b$ או $a\succ b$ או $a=b$.

א. הראו שאם $a,b\in A$ אינם ניתנים להשוואה ביחס $\prec$ אז היחס $\prec^+$ המוגדר על ידי

$$\prec^+ = \prec \cup \left\{ \langle x,y\rangle \,\middle|\, \begin{array}{l} x\preccurlyeq a \\ b\preccurlyeq y \end{array} \right\}$$

הוא יחס סדר חלקי על הקבוצה A, וש־a,b ניתנים להשוואה ביחס $\prec^+$.

(ראו הסבר לסימון $\preccurlyeq$ בתחתית עמוד 52).

ב. הראו שאם A קבוצה סופית, אז $\prec$ אינו סדר מלא על A אם ורק אם יש על A שני יחסי סדר מלא שונים זה מזה שמכילים את $\prec$.

ג. מצאו את כל יחסי הסדר המלא על $A=\{1,2,3,4\}$ המכילים את $\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$.

שאלה 4 (10 נקודות)

תהי $f: A \to B$ פונקציה. נניח ש־ $\langle A, \prec \rangle$ קבוצה סדורה ו־ $|B| \geq 2$.

נגדיר $\prec' = \{ \langle f(x), f(y) \rangle | x \prec y \}$.

הוכיחו כי $\langle B, \prec' \rangle$ היא קבוצה סדורה אם ורק אם f היא פונקציה הפיכה.

שאלה 5 (10 נקודות)

תהי A קבוצה. תהיינה f, g, h פונקציות מ־ A ל־ A כך ש־ $f \circ g \circ h$ פונקציה הפיכה.

הוכיחו או הפריכו את הטענות:

א. g פונקציה חד־חד־ערכית.

ב. g פונקציה על A.

שאלה 6 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ הפונקציה המוגדרת כך: $f(\langle m, n \rangle) = (2m+1) \cdot 2^n - 1$.

א. הוכיחו ש־ f חד־חד־ערכית ועל.

ב. הסבירו כיצד תוכלו למצוא את $f^{-1}(k)$, כאשר באפשרותכם להוסיף ולחסר 1, ולחלק ב־2.

ג. מצאו מהי הקבוצה $f[\{ \langle m, 0 \rangle | m \in \mathbf{N} \}]$.

ד. מצאו מהי הקבוצה $f^{-1}[\{ 2^n - 1 | n \in \mathbf{N} \}]$.

ה. תהי $f_1: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ פונקציית הזהות. לכל $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ אם $f_k: \bigtimes_{i=0}^{k-1} \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ הוגדרה, נגדיר

פונקציה $f_{k+1}: \bigtimes_{i=0}^{k} \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ על ידי $f_{k+1}(\langle a_0, a_1, \ldots, a_k \rangle) = f(\langle a_0, f_k(\langle a_1, \ldots, a_k \rangle) \rangle)$.

הוכיחו כי f_k פונקציה חד־חד־ערכית ועל לכל $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, והסיקו שקיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל $g_{k,m}: \bigtimes_{i=0}^{k-1} \mathbf{N} \to \bigtimes_{i=0}^{m-1} \mathbf{N}$ לכל $k, m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ (רשמו נוסחה ל־ $g_{k,m}$ באמצעות f_k, f_m).

סוף המטלה ►►►►

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20281 – תורת הקבוצות | סמסטר: 2024א
חומר הלימוד למטלה: פרקים 4–5 והנספח | משקל המטלה: 3 נקודות
מספר השאלות: 6 | מועד אחרון להגשה: 7.1.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (17 נקודות)

הוכיחו שאין שתי קבוצות A ו־B כך ש־$\left|\mathcal{P}(A)\vartriangle\mathcal{P}(B)\right|=\aleph_0$.

(הגדרת ההפרש הסימטרי $\vartriangle$ נמצאת בראש עמוד 28 בכרך א.)

שאלה 2 (17 נקודות)

תהי $A\subseteq\mathcal{P}(\mathbf{N})$ כך שבחיתוך של כל שניים מאיברי A יש לכל היותר 2023 איברים.

הוכיחו כי A בת מניה. (רמז: התבוננו ב־2024 האיברים הראשונים בכל איבר של A, אם יש כאלה.)

שאלה 3 (17 נקודות)

מהי עוצמת קבוצת כל המצולעים במישור? (מצולע: משולש, מרובע, מחומש וכן הלאה.)

שאלה 4 (16 נקודות)

תהי U קבוצה, תהיינה $A,B\in\mathcal{P}(U)$ ותהי C קבוצה נוספת בת לפחות שני איברים.

נגדיר פונקציה:

$$f:C^U\to C^A\times C^B$$
$$f(\varphi)=\langle\varphi|A,\varphi|B\rangle$$

($\varphi|A$ הוא הצמצום של הפונקציה φ לתת־קבוצה A. ראו הגדרה 3.14.)

א. הוכיחו כי f חד־חד־ערכית אם ורק אם $A\cup B=U$.

ב. הוכיחו כי f על אם ורק אם $A\cap B=\varnothing$.

ג. הסבירו איך משני הסעיפים הקודמים נובעת הטענה:

"אם α,β,γ עוצמות וכן $2\le\gamma$ אז $\gamma^{\alpha+\beta}=\gamma^\alpha\gamma^\beta$."

שאלה 5 (16 נקודות)

נגדיר סדרה אינסופית של עוצמות כך: $\beth_0 = \aleph_0$ ולכל n טבעי $\beth_{n+1} = 2^{\beth_n}$. הוכיחו:

א. לכל $n \in \mathbf{N}$ מתקיים $\beth_n < \sum_{k=0}^{\infty} \beth_k$.

ב. לכל $n \in \mathbf{N}$ מתקיים $\beth_n = \beth_n + \beth_n$.

ג. לכל $n \in \mathbf{N}$ מתקיים $\beth_n = \beth_n \cdot \beth_n$.

ד. לכל $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ מתקיים $\beth_n = \beth_n^{\aleph_0}$.

שאלה 6 (17 נקודות)

יהי R יחס סדר מלא על קבוצה A. הוכיחו כי אם $\beth_n = |A|$ אז $|R| = |A|$.

(הגדרת $\beth_n$ בשאלה הקודמת).

סוף המטלה ►►►

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20281 – תורת הקבוצות | סמסטר: 2024א
חומר הלימוד למטלה: פרק 6 | משקל המטלה: 3 נקודות
מספר השאלות: 5 | מועד אחרון להגשה: 18.1.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

הוכיחו שעוצמת קבוצת כל פונקציות הדמיון מ־$\langle \mathbf{R},<\rangle$ לעצמה היא א.

רמז: אם f פונקציית דמיון כזאת נצלו את הצמצום $f\,|\,\mathbf{Q}$.

שאלה 2 (24 נקודות)

נגדיר פונקציה $f:\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$ על ידי $f(\langle a,b\rangle)=a+b\sqrt{2}$ לכל $\langle a,b\rangle\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

א. הוכיחו ש־ f היא פונקציה חד־חד־ערכית. (היעזרו בעובדה ש־ $\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$.)

ב. בעזרת משפט 1.6 הוכיחו ש־ $\left(1+\sqrt{2}\right)^n>n$. הסיקו מכך ש־ $\left(\sqrt{2}-1\right)^n<\frac{1}{n}$, ומכך הסיקו שמתקיים $\left(0,\frac{1}{n}\right)\cap\operatorname{Im}f\neq\varnothing$. (זכרו ש־ $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$.)

ג. נגדיר יחס $\prec$ על $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ על ידי $\langle a,b\rangle\prec\langle c,d\rangle$ אם ורק אם $f(\langle a,b\rangle)<f(\langle c,d\rangle)$.

הוכיחו שזהו יחס סדר על $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ ושהקבוצה הסדורה $\langle\mathbf{Z}\times\mathbf{Z},\prec\rangle$ דומה ל־$\langle\mathbf{Q},<\rangle$.

ד. מהו טיפוס הסדר של הקבוצה הסדורה $\langle\mathbf{N}\times\mathbf{N},\prec\rangle$? (כאן $\prec$ הוא צמצום היחס מסעיף ג.)

שאלה 3 (20 נקודות)

כל אחת משתי הקבוצות $\mathbf{Z}\times\mathbf{Q}$ ו־$\mathbf{Q}\times\mathbf{Z}$ סדורה ביחס הסדר המילוני הימני (כאשר בכל רכיב הסידור הוא לפי יחס הסדר הרגיל). הוכיחו שבדיוק אחת משתי הקבוצות האלה דומה ל־$\mathbf{Q}$ (עם הסדר הרגיל עליהָ).

שאלה 4 (20 נקודות)

כל אחת משתי הקבוצות $\mathbf{Z}\times\mathbf{R}$ ו־$\mathbf{R}\times\mathbf{Z}$ סדורה ביחס הסדר המילוני הימני (כאשר בכל רכיב הסידור הוא לפי יחס הסדר הרגיל). הוכיחו ששתי הקבוצות האלה אינן דומות ל־$\mathbf{R}$ (עם הסדר הרגיל עליהָ). לכל אחת מהן ציינו אילו מדרישות משפט 6.19 מתקיימות בה ואילו אינן.

שאלה 5 (16 נקודות)

תהי B תת־קבוצה צפופה ובת־מניה ב־$\mathbf{R}$. הוכיחו שהקבוצה הסדורה $\langle B,<\rangle$ דומה ל־$\langle\mathbf{Q},<\rangle$.

סוף המטלה ►►►

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20281 – תורת הקבוצות | סמסטר: 2024א
חומר הלימוד למטלה: פרק 7 | משקל המטלה: 4 נקודות
מספר השאלות: 5 | מועד אחרון להגשה: 31.1.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (12 נקודות)

א. תהי $f:A\to B$ פונקציה. יהי $\prec$ סידור טוב של A. הוכיחו שהפונקציה f היא חד־חד־ערכית אם ורק אם לכל שתי רישות שונות C ו־D של $\langle A,\prec\rangle$ מתקיים $f[C]\neq f[D]$.

ב. תהי $f:A\to B$ פונקציה. יהי $\prec$ סידור טוב של B. הוכיחו ש־f היא פונקציה על B אם ורק אם לכל שתי רישות שונות C ו־D של $\langle B,\prec\rangle$ מתקיים $f^{-1}[C]\neq f^{-1}[D]$.

שאלה 2 (30 נקודות)

נגדיר יחס על קבוצת כל הסדרות הסופיות של מספרים טבעיים:

$\langle a_0,a_1,\ldots,a_{m-1}\rangle\prec\langle b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}\rangle$ אם ורק אם $m<n$ או לחילופין $m=n$ ויש $k<m$ כך ש־$a_k<b_k$ וכן $a_i=b_i$ עבור $i<k$.

א. הוכיחו שזה יחס סדר טוב על הקבוצה (בפרט יש להוכיח שזה יחס סדר).

ב. מצאו איבר של הקבוצה הנתונה שהסודר של הרֵישה הנקבעת על־ידו הוא:

$$\omega\cdot\omega\cdot\omega+\omega\cdot\omega\cdot 2+\omega\cdot 3+4$$

שאלה 3 (30 נקודות)

תהי $\langle A,\prec\rangle$ הקבוצה הסדורה היטב משאלה 2. תהי $f:A\to\mathbf{N}$ בעלת התכונות האלה:

- אם a האיבר הראשון ב־A אז $f(a)=1$.
- אם a העוקב המיידי של b ב־A אז $f(a)=2\cdot f(b)$.
- אם a גבולי אז $f(a)$ הוא המספר הראשוני הראשון שאינו בקבוצה $\{f(x)\mid x\prec a\}$, אם יש ראשוני כזה, ואחרת $f(a)=0$.

א. הסבירו בקצרה, בעזרת משפט 7.15, מדוע יש פונקציה כזאת, ומדוע רק אחת.

ב. חשבו את המספרים $f(\langle 1\rangle)$, $f(\langle 1,2\rangle)$ ו־$f(\langle 1,2,3\rangle)$.

ג. הוכיחו כי $18\notin f[A]$.

הערה: תוכלו להסתמך ללא הוכחה על העובדה שיש אינסוף מספרים ראשוניים.

שאלה 4 (12 נקודות)

תהי A קבוצה. הוכיחו שיש תת־קבוצה $B \subseteq A$ כך ש־$|A| = |B| = |A \setminus B|$ אם ורק אם A היא קבוצה אינסופית או קבוצה ריקה.

שאלה 5 (16 נקודות)

תהי B תת־קבוצה של H_1 שאינה חסומה מלעיל (הקבוצה H_1 והסדר עליה מוגדרת בעמוד 65 בספר).

הוכיחו כי $|B| = \aleph_1$.

סוף המטלה ►►►

מטלת מנחה (ממ״ן) 15

הקורס: 20281 – תורת הקבוצות
סמסטר: 2024א

חומר הלימוד למטלה: פרק 8
משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 3
מועד אחרון להגשה: 11.2.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ״ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (50 נקודות)

על קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbf{N}$ מגדירים יחס כך: $x \prec y$ אם ורק אם $x+4<y$.

א. הוכיחו ש־$\prec$ הוא יחס סדר חלקי.

ב. מהם האיברים המינימליים ב־$\langle \mathbf{N},\prec \rangle$? מהם האיברים המקסימליים ב־$\langle \mathbf{N},\prec \rangle$?

ג. תהי $C \subseteq \mathbf{N}$. הראו ש־C היא שרשרת ב־$\langle \mathbf{N},\prec \rangle$ אם ורק אם $\left|C \cap [m,m+4]\right| \le 1$ לכל $m \in \mathbf{N}$.

ד. הוכיחו שכל השרשרות המקסימליות ב־$\langle \mathbf{N},\prec \rangle$ דומות זו לזו ומצאו מהו טיפוס הסדר שלהן.

ה. מצאו שתי שרשרות מקסימליות שונות שמכילות את הקבוצה $\left\{ 3+5n^2 \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$.

ו. מהי עוצמת קבוצת כל השרשרות המקסימליות ב־$\langle \mathbf{N},\prec \rangle$?

שאלה 2 (25 נקודות)

הוכיחו שיש תת-קבוצה $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{N})$ שמכילה את כל התת־קבוצות הסופיות של $\mathbf{N}$, שהאיחוד של כל מספר סופי מאיבריה אינו $\mathbf{N}$, ולכל $B \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \setminus \mathcal{C}$ יש מספר סופי של קבוצות $C_1,\dots,C_n \in \mathcal{C}$ כך ש־$B \cup C_1 \cup \dots \cup C_n = \mathbf{N}$.

שאלה 3 (25 נקודות)

תהיינה $\langle A,\prec_A \rangle$ ו־$\langle B.\prec_B \rangle$ קבוצות סדורות חלקית שאינן ריקות. תהי $\mathcal{G}$ קבוצת כל הגרפים של פונקציות דמיון משרשרת של $\langle A,\prec_A \rangle$ על שרשרת של $\langle B.\prec_B \rangle$.

נגדיר יחס $\prec$ על $A \times B$ על ידי $\langle a,b \rangle \prec \langle a',b' \rangle$ אם ורק אם $a \prec_A a'$ וגם $b \prec_B b'$.

הראו ש־$\langle A \times B,\prec \rangle$ היא קבוצה סדורה חלקית, ש־$\mathcal{G}$ היא קבוצת כל השרשרות ב־$\langle A \times B,\prec \rangle$, והסיקו לפחות אחד מאיברי $\mathcal{G}$ אינו תת־קבוצה של של אף איבר אחר של $\mathcal{G}$.

סוף המטלה ►►►

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20281 – תורת הקבוצות | סמסטר: 2024א

חומר הלימוד למטלה: פרקים 9–10 | משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 7 | מועד אחרון להגשה: 25.2.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

חומר הלימוד למטלה זאת הוא חומר רשות בסמסטר הנוכחי, במסגרת ההקלות עקב קיצור הסמסטר. עם זאת תוכלו להגיש אותה כמטלת בונוס.

שאלה 1 (15 נקודות)

הוכיחו, תוך שימוש באקסיומות, משפטים ועובדות מפרק 9 אבל ללא שימוש באקסיומת הבחירה, שיש פונקציה $f:\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus\{\varnothing\}\to\mathbf{N}$ כך ש־$f(X)\in X$ לכל $X\in\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus\{\varnothing\}$.

שאלה 2 (10 נקודות)

תהיינה a ו־b קבוצות כלשהן. הוכיחו, תוך שימוש באקסיומות והמשפטים שבסעיף ב בפרק 9 בלבד, ש־$a=b$ אם ורק אם קיימת קבוצת כל הקבוצות ש־a איבר בהן ו־b אינו איבר בהן.

שאלה 3 (15 נקודות)

א. הוכיחו שלכל קבוצה A של סודרים יש סודר ראשון שאינו ב־A.

לכל קבוצה A כזאת נסמן ב־$\operatorname{mex}(A)$ את הסודר הראשון שאינו ב־A, ותהי f פונקציה מהסודרים לסודרים. (לאו דוקא עולה או רציפה.)

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל סודר α מתקיים $\operatorname{mex}(f[\alpha])\le\alpha$.

ג. הוכיחו או הפריכו: לכל סודר α מתקיים $|\operatorname{mex}(f[\alpha])|\le|\alpha|$.

שאלה 4 (15 נקודות)

יהי α סודר. הוכיחו ש-$\alpha+\omega=\omega+\alpha$ אם ורק אם יש $n\in\mathbf{N}$ כך ש-$\alpha=\omega\cdot n$.

עצה: היעזרו במשפט החילוק עם שארית.

שאלה 5 (15 נקודות)

הוכיחו שהסודר של הקבוצה משאלה 2 בממ"ן 14 הוא ω^{ω}.

שאלה 6 (15 נקודות)

בפרק 7 הוגדרו הסכום והמכפלה של זוג סודרים על ידי בניית קבוצות סדורות היטב שהסכום והמכפלה הן הסודרים שלהן. בדוגמה בעמוד 146 בכרך ב מוגדר הסכום של סדרת סודרים ברקורסיה, בלי להצביע על קבוצה סדורה היטב מסויימת שזה הסודר שלה. בשאלה זאת נבנה קבוצה כזאת. תהי $\langle \alpha_\mu \mid \mu < \lambda \rangle$ סדרת סודרים.

לכל $\gamma \leq \lambda$ תהי: $S_\gamma = \{\langle \alpha, \mu \rangle \mid \alpha < \alpha_\mu, \mu < \gamma\}$

הוכיחו ש־S_γ היא קבוצה סדורה היטב בסדר המילוני הימני, שהסודר שלה הוא: $\sum_{\mu<\gamma} \alpha_\mu$

שאלה 7 (15 נקודות)

תהי A קבוצה. הוכיחו כי $|\mathcal{P}(A)| \neq \aleph_{\varepsilon_0}$.

הסודר ε_0 מוגדר בעמוד 153 בכרך ב.

סוף המטלה ►►►