שאלה 1

מצאו את צורת ז'ורדן J של המטריצות

א. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$

ב. $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 3\\ -2 & -6 & 0 & 13\\ 0 & -3 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 0 & 8\end{pmatrix}$

בסעיף א' מצאו מטריצה P המקיימת $J=P^{-1}AP$.

א) נמצא את הפולי' המינ'-לי של A:

$$P(t)=|tI-A|=\begin{vmatrix}t-1 & 3 & -3\\ 2 & t+6 & -13\\ 1 & 4 & t-8\end{vmatrix}= \quad C_2\to C_2+C_3$$

$$\begin{vmatrix}t-1 & 0 & -3\\ 2 & t-7 & -13\\ 1 & t-4 & t-8\end{vmatrix}=$$

$$=(t-1)\big((t-7)(t-8)+13\cdot(t-4)\big)+(-3)\cdot\big(2(t-4)-(t-7)\big)=$$

$$=(t-1)(t^2-15t+56+13t-52)-3(t-1)$$

$$=(t-1)(t^2-2t+4-3)=(t-1)(t^2-2t+1)=$$

$$\boxed{P(t)=(t-1)^3}$$

לכן,

$$m_A(t)\in\{t-1,(t-1)^2,(t-1)^3\}$$

אך, ידוע כי $A-I\neq 0$,

ולכן $m_A(t)=t-1$

נבדוק את

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}^2=$$

$$\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overset{0}{\cancel{3}} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\neq 0$$

לכן, $m_A(t)\neq(t-2)^2$

$$\boxed{m_A(t)=(t-1)^3}$$

לפי טענה 11.3.2

נקבל $P_{J_3(3)}(t)=(t-1)^3$

ולכן, ל- $P_{J_3(1)}(t)=P_A(t)$ ולכן הן דומות

ולכן $J_3(1)$ היא הצורת Jordan של A.

נשים $P\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ הפיכה כך ש

$$P^{-1}AP=J_3(1)$$

ונקבל:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad / P\cdot$$

$$\cancel{P P^{-1}} AP = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$AP = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

ניקח $u,v,w \in \mathbb{R}^3$

$$P = (u, v, w)$$

ונקבל

$$A \cdot P = P \cdot J_3(1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot (u, v, w) = (u, v, w) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(Au, Av, Aw) = (u, u+v, v+w)$$

ונקבל:

$$\begin{cases} Au=u & (1) \\ Av=u+v & (2) \\ Aw=v+w & (3) \end{cases}$$

(1)

יהי: $(x,y,z)=u\in\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ונקבל

$$\begin{cases} x-3y+3z=x \\ -2x-6y+13z=y \\ -x-4y+8z=z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y=3z & I \\ 7y=13z-2x & II \\ 7z=x+4y & III \end{cases}$$

I:

$$3y=3z$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y=z \\ 7y=13z-2x \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$7z=13z-2x$$

$$2x=6z$$

III:

$$\begin{cases} x = 3z = 3y \\ 7z = x + 4y \end{cases}$$

$$7y = 3y + 4y$$

נכון תמיד. לכן, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$A\begin{pmatrix} 3x \\ x \\ x \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3x \\ x \\ x \end{pmatrix} = u}$$

② יהי $a \in \mathbb{R}$ $\qquad u = \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a \end{pmatrix}$

יהי $(x,y,z) = v \in \mathbb{R}^3$

$$Au = u + v$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3a \\ y+a \\ z+a \end{pmatrix}$$

* a פרמטר ל v

ונקבל:

$$\begin{cases} x + 3a = x - 3y + 3z \\ y + a = -2x - 6y + 13z \\ z + a = -x - 4y + 8z \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 3a = -3y + 3z & \mathrm{I} \\ a = -2x - 7y + 13z & \\ a = -x - 4y + 7z & \mathrm{III} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = z - a & \mathrm{IV} \\ a = -2x - 7y + 13z \end{cases}$$

$$a = -2x - 7(z - a) + 13z$$

$$a = -2x - 7z + 7a + 13z$$

$$-6a + 2x = 6z$$

$$\begin{cases} x = 3z + 3a & \\ a = -x - 4y + 7z & : \mathrm{III} \\ y = z - a & : \mathrm{IV} \end{cases}$$

$$a = \cancel{-3z} - 3a - \cancel{4z} + 4a + \cancel{7z}$$

$$4a = 4a$$

פסוק אמת

לכן, לכל $a,b \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\begin{cases} x = 3z + 3a \\ y = z - a \end{cases}$$

$$A\begin{pmatrix} 3b+3a \\ b-a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b+3a+3a \\ b-a+a \\ b+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a+3b \\ b \\ b+a \end{pmatrix} = u+v$$

והיגלנו לכל $a,b\in\mathbb{R}$

$$u = \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 3b+3a \\ b-a \\ b \end{pmatrix}$$

3. יהי $(x,y,z)=w\in\mathbb{R}^3$

$$Aw = v+w$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3b+3a \\ y+b-a \\ z+b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-3y+3z = x+3b+3a \\ -2x-6y+13z = y+b-a \\ -x-4y+8z = z+b \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 3z-3y=3b+3a \\ -2x-7y+13z=b-a \\ -x-4y+7z=b \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} z-y=b+a \\ -2x-\underline{7y+7z}+6z=b-a \\ -x-\underline{4y+4z}+3z=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x+(b+a)\cdot 7+6z=b-a \\ -x+(b+a)\cdot 4+3z=b \end{cases}$$

$$-2x+6z=-6b-8a$$

$$x=3z+3b+4a$$

$$-x+3z=-3b-4a$$

$$x=3z+3b+4a$$

$$z-y=b+a$$

$$\downarrow$$

$$y=z-b-a$$

לכן לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$A\cdot\begin{pmatrix}4a+3b+3c\\ c-a-b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a+3b+3c+3b+3a\\ c-a-b+b-a\\ c+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7a+6b+3c\\ c-2a\\ c+b\end{pmatrix}$$

$$=w+v$$

$a=b=c=1$ ניקח

ונקבל:

$$u=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\qquad v=\begin{pmatrix}6\\0\\1\end{pmatrix}\qquad w=\begin{pmatrix}16\\-1\\2\end{pmatrix}$$

וקיבלנו.

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}3&6&16\\1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}}$$

ב)

$$B=\begin{pmatrix}1&-3&0&3\\-2&-6&0&13\\0&-3&1&3\\-1&-4&0&8\end{pmatrix}$$

נמצא פולינום אופייני:

$$P_B(t)=\begin{vmatrix}t-1&3&0&-3\\2&t+6&0&-13\\0&3&t-1&-3\\1&4&0&t-8\end{vmatrix}=$$

$$= P_B(t) = (t-1) \cdot \begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ 2 & t+6 & -13 \\ 1 & 4 & t-8 \end{vmatrix}$$

$$(t-1) \cdot \Big((t-1) \cdot \big((t+6)(t-8) + 13 \cdot 4 \big) - 2 \cdot \big(3(t-8) + 12 \big) + 1 \cdot \big(-3 \cdot 13 + 3(t+6) \big) \Big)$$

$$= (t-1)\Big((t-1)(t^2 - 2t - 4) - 2 \cdot (3t-12) + (3t-21) \Big) =$$

$$(t-1)\Big((t-1)(t^2 - 2t + 4) - 6(t-4) + 3(t-7) \Big)$$

$$(t-1)\big(t^3 - 2t^2 + 4t - t^2 + 2t - 4 - 6t + 24 + 3t - 21 \big)$$

$$(t-1)(t^3 - 3t^2 + 3t - 1) = (t-1)^4$$

וקיבלנו:

$$P_B(t) = (t-1)^4$$

נניח וה"ם $m_B(t) \neq P_B(t)$.

כלומר, נניח ו-

$$m_B(t) \in \{ t-1, (t-1)^2, (t-1)^3 \}$$

לכן,

$$(B - I)^3 = 0$$

נבדוק:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(B - I)^3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 0$$

נחשב:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

ונחשב:

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 0$$

לכן $m_B(t)=(t-1)^3$

הגודל המקסימלי של בלוק Jordan ב- J הוא 3:

$$J=\begin{pmatrix} J_3(1) & \\ & J_1(1) \end{pmatrix}$$

או לחלופין:

$$J'=\begin{pmatrix} J_1(1) & \\ & J_3(1) \end{pmatrix}$$

שאלה 2

א. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות למטריצה שהפולינום האופייני שלה הוא $P(t)$ והפולינום המינימאלי הוא $M(t)$:

(1) כאשר $M(t)=(t+1)^2$, $P(t)=(t+1)^5$.

(2) כאשר $M(t)=(t+2)^2(t-3)^2$, $P(t)=(t+2)^4(t-3)^3$.

ב. מצאו את צורות ז'ורדן האפשריות לטרנספורמציה $T:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4$ המקיימת: $T^3=T^2$ ו- $rankT=1$.

א) 1) מפני ש $P(t)=(t+1)^5$, אז המטריצה היא 5×5

לפי $M(t)=(t+1)^2$,

הגודל המקסימלי של בלוק Jordan הוא 2

לכן, יש 2 אפשרויות: (לפי שאלה 11.3.2)

1)

$$J=\begin{pmatrix} J_2(1) & & & \\ & J_1(1) & & \\ & & J_1(1) & \\ & & & J_1(1) \end{pmatrix}$$

* סדר הבלוקים יכול להיות שונה

2)

$$J=\begin{pmatrix} J_2(1) & & \\ & J_2(1) & \\ & & J_1(1) \end{pmatrix}$$

* סדר הבלוקים יכול להיות שונה

2) א)

$$P(t)=(t+2)^4(t-3)^3$$

$$M(t)=(t+2)^2(t-3)^2$$

לפי $P(t)$, המטריצה היא מסדר 7×7

לפי מטריצת בלוקים (הכלל שלה) נקבל

כי:

הבלוק המקסימלי של $\lambda=3$ הוא 2

הבלוק המקסימלי של $\lambda=-2$ הוא 2

$$J_{7\times7}=\begin{pmatrix} J_2(3) & & & \\ & J_2(3) & & \\ & & J_2(-2) & \\ & & & J_1(-2) \end{pmatrix}$$

או

$$J_{7\times7}=\begin{pmatrix} J_2(3) & & & & \\ & J_1(3) & & & \\ & & J_1(3) & & \\ & & & J_2(-2) & \\ & & & & J_1(-2) \end{pmatrix}$$

$P(T)=1$ $\qquad T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $\qquad$ ב)

$$T^2 = T^3$$

$$T^2(T-I)=0$$

קיימים מס' אפשרויות של פול' מינימלי ל-T:

$\underline{m(t)=t}$: $\quad T \neq 0$ לכן סתירה

$\underline{m(t)=t-1}$: $\quad T \neq I$ לכן סתירה

$\underline{m(t)=t(t-1)}$: $\quad$ לכן T לכסינה מעל $\mathbb{R}$

$$J = \begin{pmatrix} J_1(1) & & & \\ & J_1(0) & & \\ & & J_1(0) & \\ & & & J_1(0) \end{pmatrix} \text{ונקבל}$$

$\underline{m(t)=t^2}$:

$$P(J) \neq 1 \Leftarrow J = \begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0) \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}$$

לכן, נקבל רק:

$$J = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_1(0) \end{pmatrix}$$

$m(t) = t^2(t-1)$:

$$\cancel{J = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_1(1) \end{pmatrix}}$$

ii

$$\cancel{J = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(1) & \\ & & J_1(1) \end{pmatrix}}$$

אך בשני המקרים נקבל $\rho(J) \neq 1$

לכן סתירה.

לכן הצורות האפשריות:

$$\boxed{J \in \left\{ \begin{pmatrix} J_1(1) & & & \\ & J_1(0) & & \\ & & J_1(0) & \\ & & & J_1(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_1(0) \end{pmatrix} \right\}}$$

שאלה 3

הראו כי שתי מטריצות נילפוטנטית מסדר 3 הן דומות אם ורק אם אינדקס הנילפוטנטיות שלהן שווה.

הראו שהטענה אינה נכונה למטריצות מסדר 4.

יהיו $A,B\in M_{k\times k}(\mathbb{F})$ מטריצות נילפ' דומות.

לכן, קיים $P\in M_{k\times k}(\mathbb{F})$ הפיכה כאשר:

$$B^n = P\cdot A^n P^{-1}$$

לכל $n\in N$

ניקח $A,B\in M_{3\times 3}(\mathbb{F})$

לכן, אם $A^n=0$ אז $B^n=0$ ולהפך.

לכן $\boxed{\text{אינדקס הנילפ' שווה אם״ם שהן דומות.}}$

לכן $P_A(t)=P_B(t)=t^3$

קיימות שלוש אפשרויות:

$\underline{m_B(t)=m_A(t)=t}$: ונקבל $A=B=0$ ולכן דומות

$\underline{m_B(t)=m_A(t)=t^2}$: ונקבל שמטריצת Jordan של שתיהן היא:

$$J=\begin{pmatrix}J_2(0) & \\ & J_1(0)\end{pmatrix}$$

*אפשר לשנות את סדר הבלוקים, אך מטריצות Jordan הללו תהיינה דומות.

ולכן A ו-B דומות ל-J ולכן A ו-B דומות

$m_B(t) = m_A(t) = t^3$:

קיימת 3 צורת Jordan .והת:

$$J = J_3(0)$$

ולכן A ו-B דומות ל-J ולכן A ו-B דומות

ולכן, A ו-B דומות $\boxed{\text{משל חלקה}}$

נסתכל על

$$C, D \in M_{4\times 4}(\mathbb{F})$$

אחת האפשרויות של הפולינום המינימלי הוא:

$$m_C(t) = m_D(t) = t^2$$

וקיימות 2 צורות Jordan אפשריות:

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0) \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_1(0) \end{pmatrix}$$

וידוע כי J_1, J_2 לא דומות ויכול

להתקיים מצב ש J_1 שייכת ל-C ו-J_2 ל-D.

ולכן C ו-D לא בהכרח דומות $\boxed{\text{משל חלקה}}$

לסיכום, שתי מטריצות נילפ' מסדר 3 דומות
אמ"מ האינדקס שלהם שווה.

אך כאשר שתי מטריצות מסדר 4 קיים מצב
שבו הן לא דומות גם אם האינדקס שלהם שווה

מגל סיכום

שאלה 4

א. הראו ש- $J_n(0)$ ו- $(J_n(0))^t$ דומות.

(להזכירכם: $J_n(0)$ הוא בלוק ז'ורדן מסדר $n\times n$ השייך לערך 0).

ב. העזרו בחלק א' ובצורת ז'ורדן כדי להוכיח כי כל מטריצה $A\in M^{\mathbb{C}}_{n\times n}$ דומה ל- A^t.

ידוע כי לכל λ $J_n(\lambda)$ מטריצה בעלת ע"ע אופייני יחיד λ.

לפי שאלה 11.9.5 א,

כל מטריצה כלשהי A דומה ל- A^t.

לכן קיים $P\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה כאשר

$$J_n(0)=P^{-1}\cdot(J_n(0))^t\cdot P$$

ב) ידוע שלכל מטריצה $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ הפולינום האופייני

מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$,

מפני שהשדה $\mathbb{C}$ הינו סגור אלגברית.

ניקח

$$p_A(t)=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{a_i}$$

כאשר

$$\sum_{i=1}^{k}a_i=n$$

לכן

$$m_A(t)=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{b_i}$$

כאשר לכל i $1\leq b_i\leq a_i$

לפי 10.2.10, נקבל שקיימת
מטריצה בלוקים אלכסונית כאשר:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{bmatrix}$$

כאשר B דומה ל- A.

נסתכל על B.

לפי מסקנה 10.2.10, נקבל שלכל i,

$$P_{B_i}(t) = (t-\lambda_i)^{a_i}$$

$$m_{B_i}(t) = (t-\lambda_i)^{b_i}$$

ולכן כל B_i דומה ל- B_i^t לפי המשפט
שהראינו בסעיף א.

לכן לכל B_i קיימת P_i הפיכה
כאשר

$$P_i^{-1} B_i P_i = B_i^t$$

ניקח

$$P=\begin{bmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_k \end{bmatrix}$$

ולכן

$$P^{-1}BP=\begin{bmatrix} P_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & P_k^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_k \end{bmatrix}$$

ונקבל

$$=\begin{bmatrix} P_1^{-1}B_1P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_k^{-1}B_kP_k \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} B_1^t & & \\ & \ddots & \\ & & B_k^t \end{bmatrix}=B^t$$

לכן B^t דומה ל B

ולכן A דומה B^t

מעולם לעברה לנכונות זו, אם A דומה ל-B,

אזי A^t דומה ל-B^t

ולכן קיבלנו כי A דומה ל- A^t

משל

שאלה 5

תהי $A \in M_{n\times n}^{\mathbf{F}}$ מטריצה, ויהי $p(x) \in \mathbf{F}[x]$ פולינום כלשהו.

הוכיחו ש- $\deg m_A(x) \geq \deg m_{p(A)}(x)$.

(מסמנים ב- $\deg m_B(x)$ את מעלת הפולינום המינימאלי $m_B(x)$ של המטריצה B).

<u>רמז</u> : התבוננו בתת-מרחב U של $M_{n\times n}^{\mathbf{F}}$ המוגדר כ : $U = Span\left(I, A, A^2, \ldots, A^k, \ldots\right)$

ומצאו את הקשר בין $\dim U$ ל- $\deg m_A(x)$.

יהי $P(x) \in \mathbb{F}[x]$

ניקח $a_0, \ldots a_k \in \mathbb{F}[x]$ כך ש

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_0$$

יהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$

ניקח $U = Span\left(\{I, A, \ldots A^k, \ldots\}\right)$

לפי משפט 9.5.3

$$P_A(A) = 0$$

כלומר, קיימים $\lambda_0, \ldots \lambda_j \in \mathbb{F}$

כאשר:

$$m_A(A) = 0 = \lambda_j A^j + \lambda_{j-1} A^{j-1} + \cdots \lambda_0 I$$

ולכן הקבוצה $\{I, A, \ldots A^n\}$ ת"ל

נסמן A $\quad U=\text{Span}(\{I,A,\dots,A^n,\dots\})$

ידוע כי

$$p(A)\in U$$

לכן,

$$V'=\text{Span}(\{I,p(A),p(A)^2,\dots\})\subseteq U$$

ולכן

$$\dim(V')\leq\dim(U)$$

ולכן קיים צירוף לינארי "קטן יותר" ב-V'

ולכן

$$\boxed{\deg(m_A(x))\geq\deg(m_{p(A)}(x))}$$

$\boxed{\text{מש"ל}}$