ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20224

חשבון אינפיניטסימלי 3

חוברת הקורס - 2025א/1

כתב: ד"ר עופר הדס

אוקטובר 2024 - סמסטר סתיו - תשפ"ה

משך זמן כפול

תוכן העניינים

שלום וברכה,

חוברת זאת כוללת פרטים שיש להכיר, כדי לבצע את הנדרש ולסיים בהצלחה את לימוד הקורס חשבון אינפיניטסימלי 3. פרטים חשובים נוספים כלולים בחוברת "השלמות לחוברת הקורס", שניתן לצפות בתוכנה באתר הקורס באינטרנט.[1]

עם קבלת חומר הלימוד בקורס יש להתחיל בלימוד עצמי, בקצב המותאם ל**לוח הזמנים** שבהמשך חוברת זאת. בזמנים המומלצים בלוח הזמנים ללימוד כל פרק כלול גם הזמן הנדרש לפתרון המטלה הקשורה אליו ולהגשתה. חשוב לתכנן לוח זמנים אישי שיאפשר את לימוד החומר ופתרון והגשת המטלות במועדי ההגשה שנקבעו. מפגשי ההנחיה מתוכננים לפי לוח הזמנים וחשוב לעיין בחומר הלימוד המתאים לפני כל מפגש.

הקורס נלמד במתכונת שנתית, מתחילת סמסטר א ועד תום סמסטר ב. הסיבה העיקרית לכך היא שמנסיוננו דרוש זמן ארוך מסמסטר אחד כדי להתרגל ולהפנים את הרעיונות והמושגים הנלמדים בקורס, ולתרגל את יישומם. התקופה שבין שני הסמסטרים כלולה בזמן לימוד הקורס. עם זאת, בתכנון לוח הזמנים נלקח בחשבון שחלק מתקופה זאת, אך לא כולה, יוקדש לבחינות בקורסים אחרים. יש אפשרות לבקש להִבחן בקורס בתום סמסטר א. אפשרות זאת אינה מומלצת. למידע על מימוש אפשרות זאת יש לפנות למרכז ההוראה במהלך השבועיים הראשונים של סמסטר א.

לקורס **אתר אינטרנט**. חלק מהמטלות להגשה יש לפתור באתר הקורס באינטרנט ("מטלות אופלי"). יש מטלת אופל אחת לכל פרק בספר הלימוד, והיא מיועדת לפתרון במקביל ללימוד הפרק המתאים בספר. מטלות המנחה (הממ"נים) נמצאות בחוברת זאת (שעותק שלה נמצא גם באתר הקורס). באתר גם חומרי תרגול נוספים, כגון מטלות ובחינות משנים קודמות.

אתר הקורס מהווה ערוץ תקשורת עיקרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטיות וסטודנטים אחרים בקורס.
זה המקום המתאים להעלות בו לדיון כל רעיון או שאלה בנושאי הלימוד.
הודעות, עדכונים ותיקונים למטלות, אם יהיו כאלה, יתפרסמו באתר הקורס.

צוות הקורס מעוניין לעזור לך בלימודים. לכן, אם התעוררה בעיה או שאלה במהלך הלימוד, חשוב לא להסס ולפנות אלינו בהקדם. עומדות לרשותך דרכי ההתקשרות הבאות:

- קבוצת דיון באתר הקורס.
- דואר אלקטרוני למרכז ההוראה בכתובת oferh@openu.ac.il.
- טלפון למרכז ההוראה בקורס, ד"ר עופר הדס, בימי ד בין השעות 12:00–14:00.
- טלפון למנחה בשעת ההנחיה הטלפונית המפורטת יחד עם לוח המפגשים.
- פניה למנחה בדואר אלקטרוני.
- פניה למנחה במפגש ההנחיה.
- **שאילתא** – לפניות בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאילתא (לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות).

נאחל לכולנו סמסטר מהנה ומוצלח.

בברכה, צוות הקורס.

[1] פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס יש באתר שה"ם שכתובתו: http://www.openu.ac.il/shoham
מידע על שירותי הספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותך יש באתר הספרייה שכתובתו:
http://www.openu.ac.il/Library

לוח זמנים ופעילויות (20224 \ 2025)

פרקי הלימוד	שבועות הלימוד	תאריכים	מועדי משלוח המטלות	הערות	מפגשי הנחיה*
פרק 1	1–2	29.10.2024–8.11.2024	**מטלה 01**: עד 8.11.2024	תחילת סמסטר א: 29.10	
פרק 2	3–4	10.11.2024–22.11.2024	**מטלה 02**: עד 22.11.2024 **ממ"ן 11**: עד 24.11.2024		
פרק 3	5–6	24.11.2024–6.12.2024	**מטלה 03**: עד 6.12.2024		
פרק 4	7	8.12.2024–13.12.2024	**מטלה 04**: עד 13.12.2024		
פרק 5	8	15.12.2024–20.12.2024	**מטלה 05**: עד 20.12.2024		
פרק 6	9–10	22.12.2024–3.1.2025	**מטלה 06**: עד 3.1.2025 **ממ"ן 12**: עד 5.1.2025	חנוכה: 26.12	
פרק 7	11–14	5.1.2025–31.1.2025		סיום סמסטר א: 3.2	
אתנחתא	15–19	2.2.2025–7.3.2025	את מטלות 07 ו־13 מומלץ להקדים ולפתור לפני תקופת הבחינות שבין הסמסטרים. תאריכי ההגשה המאוחרים נקבעו להן כדי לאפשר למאחרים להשלים פערים בלימוד הקורס לקראת תחילת סמסטר ב. **מטלה 07**: עד 7.3.2025 **ממ"ן 13**: עד 9.3.2025	את התקופה שבין הסמסטרים נצלו לחזרה על מה שלמדתם בסמסטר הראשון וחיזוק נושאים חשובים. השתדלו גם להתחיל ללמוד מהספר את תכני סמסטר ב.	
פרק 8	20–23	9.3.2025–4.4.2025	**מטלה 08**: עד 4.4.2025 **ממ"ן 14**: עד 6.4.2025	תחילת סמסטר ב: 9.3 פורים: 14.3	
פרק 9	24–29	6.4.2025–16.5.2025	**מטלה 09**: עד 16.5.2025 **ממ"ן 15**: עד 18.5.2025	פסח: 11.4–18.4 יום הזכרון לשואה: 23.4 יום הזכרון: 30.4 יום העצמאות: 1.5 ל"ג בעומר: 16.5	
פרק 10	30–34	18.5.2025–20.6.2025	**מטלה 10**: עד 20.6.2025 **ממ"ן 16**: עד 20.6.2025	שבועות: 1.6–2.6 סיום סמסטר ב: 20.6	

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים, מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים". אנא שבצו אותם בכתב ידכם.

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לעבור את הקורס ולקבל נקודות זכות יש לעמוד בכל התנאים האלה:

א. להגיש מטלות בהיקף של 15 נקודות לפחות (אפשר עד 30).
- חובה להגיש לפחות ממ״ן אחד מבין הממ״נים 11, 12 ו־13.
- חובה להגיש לפחות ממ״ן אחד מבין הממ״נים 14, 15 ו־16.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון לפחות 60.

ג. לקבל בציון הסופי לפחות 60.

פירוט המטלות ומשקליהן

סך הכל משקל המטלות 30 נקודות. מהן:

- עשר מטלות אופל, משקל כל אחת נקודה אחת, בסה״כ 10 נקודות.
- שישה ממ״נים, להלן משקליהם:

ממ״ן	משקל
11	2
12	2
13	4
14	4
15	4
16	4
סה״כ	20

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.
זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלות אופל

מטלת אופל נמצאות באתר הקורס. כדי להגיש מטלת אופל היכנסו אליה באתר הקורס, ומלאו אחר ההוראות בגוף המטלה.

יש עשׂר מטלות אופל, אחת לכל פרק. משקל כל מטלת אופל: נקודה אחת.

מטלות אלה מיועדות לפתרון תוך כדי לימוד הפרק מהספר, דהיינו במקביל לקריאת חומרי הלימוד. תוכלו לעזוב את המטלה ולחזור אליה באתר הקורס ולהמשיך לפתור אותה, כל עוד לא הגשתם אותה באמצעות כפתור ההגשה שבסוף המטלה. תשובותיכם נשמרות באתר הקורס.

המשוב על כל מטלת אופל פתוח רק למי שהגישו את המטלה. לכן מומלץ מאוד להגיש את כל המטלות האלה, גם כאלה שפתרתם חלקית בלבד.

לפני המועד האחרון להגשת כל מטלת אופל, יש להגיש אותה בעזרת כפתור ההגשה.

אחרי הגשת המטלה לא ניתן לשנות עוד את התשובות.

אחרי המועד האחרון לא ניתן להגיש את המטלה.

המועדים המדוייקים לפתרון כל מטלת אופל נמצאים בגוף המטלה באתר הקורס.

מטלת מנחה (ממ״ן) 11

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
סמסטר: 2025א1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–2
משקל המטלה: 2 נקודות

מספר השאלות: 5
מועד אחרון להגשה: 24.11.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ״ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $r>0$ ותהי $a\in\mathbf{R}^k$. תהי $\varphi:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^k$ פונקציה אפינית שמקיימת: $\varphi\left(B\left(0^{[k]};1\right)\right)=B(a;r)$

הוכיחו ש־ $\varphi\left(S\left(0^{[k]};1\right)\right)=S(a;r)$.

שאלה 2 (15 נקודות)

הוכיחו או הפריכו: אם A קבוצה ב־ $\mathbf{R}^k$ אז $\partial\left(A\setminus\partial A\right)\subseteq\partial A$.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה עולה במובן הרחב, דהיינו אם $x<y$ אז $f(x)\le f(y)$.

הוכיחו כי הקבוצה $U=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y>f(x)\right\}$ היא קבוצה פתוחה אם ורק אם לכל $a\in\mathbf{R}$ מתקיים $f(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}f(a)$.

שאלה 4 (15 נקודות)

יהי $\alpha>0$. האם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to 0^{[k]}}\dfrac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k}|x_i|\right)^{\alpha}}$?

שאלה 5 (30 נקודות)

א. הראו שהקבוצה $S=\left\{(x,y,z) \mid \left(x^2+y^2+z^2\right)^2=x^2+y^2\right\}\setminus\left\{(0,0,0)\right\}$ היא משטח.

הערה: למעשה אפשר להוכיח ש־ S היא טלאי דו־ממדי. שימוש בשיעורים קוטביים או גליליים יכול להועיל.

ב. הראו שלכל $r\in(0,1]$ הקבוצה $S\cap B\left((0,0,0);r\right)$ אינה קשורה־מסילתית ואילו הקבוצה $S\cap B\left((0,0,0);r\right)\cup\left\{(0,0,0)\right\}$ קשורה־מסילתית.

ג. הראו שהקבוצה $S\cup\left\{(0,0,0)\right\}$ אינה משטח.

סוף המטלה ◄◄◄

מטלת מנחה (ממ״ן) 12

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3 | סמסטר: 2025א1
חומר הלימוד למטלה: פרקים 3–6 | משקל המטלה: 2 נקודות
מספר השאלות: 7 | מועד אחרון להגשה: 5.1.2025

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ״ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

הפונקציה $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ נתונה עבור $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ על־ידי $(x,y,z)\mapsto\dfrac{x^2yz^2}{x^8+y^6+z^4}$

וכן $f(0,0,0)=0$. קבעו מהן כל הנקודות בהן f גזירה, ומהן הנקודות בהן היא אינה גזירה.

שאלה 2 (15 נקודות)

בשאלה זאת תוכיחו ״כלל גזירה״ עבור פעולת כפל מטריצות, המכליל את ״כלל המכפלה״ מהקורס חשבון אינפיניטסימלי 1: הנוסחה לנגזרת של מכפלת פונקציות גזירות.

יהיו k,l,m,n מספרים טבעיים, ותהי $a\in\mathbf{R}^k$.

תהי f פונקציה חלקית מ־ $\mathbf{R}^k$ ל־ $M_{l\times m}(\mathbf{R})$ שגזירה בנקודה a.

תהי g פונקציה חלקית מ־ $\mathbf{R}^k$ ל־ $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ שגזירה בנקודה a.

נגדיר $p:x\mapsto f(x)g(x)$ (הפעולה היא כפל מטריצות).

הפונקציה p היא פונקציה חלקית מ־ $\mathbf{R}^k$ ל־ $M_{l\times n}(\mathbf{R})$.

הוכיחו ש־ p גזירה בנקודה a ושמתקיים $Dp_a(h)=f(a)Dg_a(h)+Df_a(h)g(a)$ לכל $h\in\mathbf{R}^k$.

הדרכה: פעלו בדומה לפתרון חלק ג של שאלה 15.ז.3:

הגדירו את הפונקציה $\mu:M_{l\times m}(\mathbf{R})\times M_{m\times n}(\mathbf{R})\to M_{l\times n}(\mathbf{R})$ על־ידי $\mu:(X,Y)\mapsto XY$ (פעולת כפל מטריצות).

הראו שהיא גזירה ומצאו את $D\mu_{(A,B)}(H,K)$ עבור כל $A,H\in M_{l\times m}(\mathbf{R})$ וכל $B,K\in M_{m\times n}(\mathbf{R})$.

הראו ש־ $p=\mu\circ(f,g)$ והשתמשו בכלל השרשרת.

תוכלו להיעזר בדרך בנוסחה $|AB|\le|A|\cdot|B|$ עבור $A\in M_{l\times m}(\mathbf{R})$ ו־ $B\in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ שאינה מוכחת בספר (אינכם נדרשים לכלול הוכחה שלה במסגרת פתרון השאלה).

שאלה 3 (15 נקודות)

יהיו k ו־ n מספרים טבעיים ותהי $f:M_{k\times k}(\mathbf{R})\to M_{k\times k}(\mathbf{R})$ המוגדרת על ידי $X\mapsto X^n$.

מדוגמה 6.י.1 נובע שזאת פונקציה פולינומית ולכן היא ודאי גזירה ב־ $M_{k\times k}(\mathbf{R})$.

הראו ש־ $Df_X(I)=nX^{n-1}$ לכל $X\in M_{k\times k}(\mathbf{R})$, כאשר I היא מטריצת היחידה.

תוכלו להיעזר בשאלה הקודמת, או לחילופין לפעול בדרך ישירה יותר.

שתי השאלות הבאות מכלילות משפטים מסויימים מפרק 4.

שאלה 4 (20 נקודות)

א. תהי f פונקציה סקלרית המוגדרת ורציפה בקבוצה $\mathbf{R}\times[c,d]$. תהי $\varphi:\mathbf{R}\to[0,\infty)$ שעבורה

האינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$ מתכנס ולכל $(x,t)\in\mathbf{R}\times[c,d]$ מתקיים: $|f(x,t)|\le\varphi(x)$

הוכיחו שהפונקציה $F:t\mapsto\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)dx$ מוגדרת ורציפה בקטע $[c,d]$.

ב. תהי f פונקציה סקלרית המוגדרת ורציפה בכל המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^{k+1}=\mathbf{R}\times\mathbf{R}^k$.

תהי $\varphi:\mathbf{R}\to[0,\infty)$ שעבורה האינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$ מתכנס ולכל $x\in\mathbf{R}$ ו־ $y\in\mathbf{R}^k$

מתקיים: $|f(x,y)|\le\varphi(x)$

הוכיחו שהפונקציה $F:y\mapsto\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$ מוגדרת ורציפה בכל המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^k$.

הדרכה: אפשר לנסות לחקות את הוכחת טענה 3.ד.4. במקום לחזור על ההוכחה אפשר לנסות להיעזר בטענה 3.ד.4.
גם טענה 7.ח.2 יכולה להועיל.

שאלה 5 (רשות – 0 נקודות)

תהי f פונקציה סקלרית שמוגדרת וגזירה ברציפות בכל המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^{k+1}=\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}$,
ומתקיימים התנאים האלה:

- לכל $x\in\mathbf{R}^k$ האינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$ מתכנס.
- יש פונקציה $\psi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ כך שהאינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)dy$ מתכנס.
- לכל $x\in\mathbf{R}^k$ ו־ $y\in\mathbf{R}$ מתקיים $|\nabla f(x,y)|\le\psi(y)$.

הראו שבהנחות אלה הפונקציה $F:x\mapsto\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$ גזירה ברציפות ב־ $\mathbf{R}^k$ וכן לכל $x\in\mathbf{R}^k$

ולכל $i\in\{1,\dots,k\}$ מתקיים: $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)dy$

שאלה 6 (15 נקודות)

יהיו $a,b,u,v\in\mathbf{R}^3$, ונניח ששלושת הווקטורים $a-b,u,v$ הם בלתי־תלויים לינארית.

נסמן: $B=\left\{ b+tv \mid t\in\mathbf{R} \right\}$ $\quad$ $A=\left\{ a+tu \mid t\in\mathbf{R} \right\}$

הראו שיש נקודות יחידות $p\in A$ ו־ $q\in B$ כך שהקטע שקצותיו p ו־ q הוא הקטע הקצר ביותר שאחד מקצותיו בקבוצה A והקצה האחר בקבוצה B , והראו שאורכו של קטע זה הוא המספר:

$$\frac{\left|(a-b)\cdot(u\times v)\right|}{\left|u\times v\right|}$$

שאלה 7 (15 נקודות)

מִצאו את כל נקודות הקיצון המקומי של הפונקציה $f:(x,y)\mapsto x^4+y^4+(x-y)^3$. לכל אחת מהנקודות שמצאתם, קבעו אם היא נקודת מינימום מקומי או נקודת מקסימום מקומי של f , וכן אם היא נקודת מינימום או נקודת מקסימום של f ב־ $\mathbf{R}^2$.

סוף המטלה ►►►

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3 | סמסטר: 2025א1

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 | משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 5 | מועד אחרון להגשה: 9.3.2025

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה $\left\{A^2 \mid A \in M_{k\times k}(\mathbf{R})\right\}$ מכילה סביבה של מטריצת היחידה I.

(מרחב המטריצות $M_{k\times k}(\mathbf{R})$ מזוהה כרגיל עם המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^{k^2}$.)

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי F פונקציה חלקית מ־$\mathbf{R}^2$ ל־$\mathbf{R}$ שגזירה פעמיים ברציפות בסביבה של הנקודה (a,b).

נתון: $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b)\neq 0$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$ $\quad \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)=0$ $\quad F(a,b)=0$

הוכיחו שהמשוואה $F(x,y)=0$ אינה מגדירה באופן סתום בסביבת (a,b) את x כפונקציה של y. (שימו לב שהמשוואה כן מגדירה באופן סתום בסביבת (a,b) את y כפונקציה של x. הוכיחו זאת, היעזרו בנתונים כדי להסיק מסקנות על תכונות הפונקציה הזאת, ובעזרתן הוכיחו את הנדרש בשאלה).

שאלה 3 (20 נקודות)

נסמן:

$$S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^2\times\left(0,\tfrac{3}{2}\right) \mid z^2=3x^2+3y^2\right\}$$

$$S_2=\left(\mathbf{R}^2\times\left[\tfrac{3}{2},\infty\right)\right)\cap S\left((0,0,2);1\right)$$

הוכיחו שהקבוצה $S=S_1\cup S_2$ היא משטח חלק.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי S יריעה חלקה d־ממדית ב־$\mathbf{R}^k$, בעלת שתי תכונות:

1. כל קרן שקודקודה ב־$0^{[k]}$ מכילה לכל היותר נקודה אחת של S.
2. לכל נקודה $a\in S$ המרחב המשיק בנקודה a ל־S אינו מכיל את $0^{[k]}$.

תהי S' איחוד כל הקרניים שקודקודן ב־$0^{[k]}$ שמכילות נקודה מ־S, לא כולל $0^{[k]}$ עצמה, דהיינו:

$$S'=\bigcup_{a\in S}\{ta \mid t>0\}$$

הראו שאם $d=k-1$ (כלומר S היא משטח־על) אז S' היא קבוצה פתוחה.

שאלה 5 (20 נקודות)

יהי $\alpha > 0$ ותהי $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ שמוגדרת על ידי: $(x,y,z) \mapsto xyz$

הראו של- f יש ערך מזערי וערך מרבי בקבוצה

$$A = \left\{ (x,y,z) \in [0,\infty)^3 \;\middle|\; x \le \alpha y,\ x^6 + y^6 + z^6 \le 3 \right\}$$

ומצאו אותם ואת כל נקודות הקיצון של f בקבוצה זאת. (התוצאה תלויה במספר α.)

סוף המטלה ◄◄◄

מטלת מנחה (ממ״ן) 14

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3 | סמסטר : 2025א1

חומר הלימוד למטלה : פרק 8 | משקל המטלה : 4 נקודות

מספר השאלות : 5 | מועד אחרון להגשה : 6.4.2025

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ״ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $f:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}$ פונקציה רציפה ב־ $\mathbf{R}^k$ וגזירה ברציפות ב־ $\mathbf{R}^k\setminus\left\{0^{[k]}\right\}$. נניח ש־ $f\left(0^{[k]}\right)=0$ וכן $f(x)>0$ לכל $x\in\mathbf{R}^k\setminus\left\{0^{[k]}\right\}$. נניח גם ש־ $x\cdot\nabla f(x)>0$ לכל $x\in\mathbf{R}^k\setminus\left\{0^{[k]}\right\}$.

א. הוכיחו שהקבוצה $U=\left\{x\in\mathbf{R}^k \mid f(x)<1\right\}$ היא קבוצה כוכבית.

הערה : ניתן להוכיח זאת גם בהנחה החלשה יותר ש־ $x\cdot\nabla f(x)>0$ בנקודות בהן $f(x)=1$.

ב. אם $k=2$ והקבוצה U חסומה הראו שהקבוצה $S=\left\{x\in\mathbf{R}^2 \mid f(x)=1\right\}$ היא תמונת לולאה פשוטה וסדירה שמספר הליפוף שלה סביב ראשית הצירים הוא 1.

הדרכה : אפשר לרשום את נקודות S בצורה $x=(r\cos t, r\sin t)$, ולהיעזר במשפט ההגדרה הסתומה עם המשוואה $f(r\cos t, r\sin t)=1$.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}^k$ מסילה שאורכה סופי ומתקיים :

$$L(\varphi)\le\left|\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\right|$$

נתון גם ש־ φ אינה קבועה בשום קטע שהיא מוגדרת בו.

הראו ש־ φ היא מסילה פשוטה ששקולה למסילה אפינית.

הערה : מסילה אפינית היא צמצום של פונקציה אפינית מ־ $\mathbf{R}$ ל־ $\mathbf{R}^k$ לקטע סגור. ראו שאלה 8.ב.13.

שאלה 3 (20 נקודות)

הגרף של הפונקציה $f:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ הוא תמונת מסילה פשוטה וסדירה במישור. מצאו את המרכז הגיאומטרי של מסילה זאת.

הערה : הפונקציה הזאת נקראת קוסינוס היפרבולי, ונהוג לסמן $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

נגזרתָהּ נקראת פונקציית הסינוס ההיפרבולי ומסומנת $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

כל אחת משתי הפונקציות האלה היא הנגזרת של האחרת, ויש ביניהן קשרים רבים, כגון $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$.

שאלה 4 (20 נקודות)

הראו שהפונקציה $F:\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbf{R}^2$ המוגדרת על ידי: $(x,y)\mapsto\left(\dfrac{-2xy}{x^4+y^2},\dfrac{x^2}{x^4+y^2}\right)$

היא שׂדה משמר במישור הנקוב $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

שאלה 5 (20 נקודות)

מִצאו עבור אילו ערכים של $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ ו־ $r>0$ הקבוצה $U=B((a,b);r)\setminus\bar{B}((0,0);45)$

היא קבוצה לא ריקה שבה הפונקציה $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$

$$(x,y)\mapsto\frac{e^x}{x^2+y^2}(x\sin y-y\cos y,y\sin y+x\cos y)$$

היא שדה משמר.

סוף המטלה ►►►

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3 | סמסטר: 2025א1

חומר הלימוד למטלה: פרק 9 | משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: | מועד אחרון להגשה: 18.5.2025

תוכן המטלה יפורסם בהמשך הסמסטר

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3 | סמסטר: 2025א1

חומר הלימוד למטלה: פרק 10 | משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: | מועד אחרון להגשה: 20.6.2025

תוכן המטלה יפורסם בהמשך הסמסטר