שאלה 1 (20 נקודות)

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&a&1\\a&0&-1\\0&0&a\end{pmatrix}$, כאשר a מספר ממשי.

א. עבור אילו ערכי a המטריצה A לכסינה?

ב. **נקבע** $a=1$. מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש- $D=P^{-1}AP$.

השתמש במטריצה D כדי לחשב את A^{2021}.

א)

$$A=\begin{pmatrix}0&a&1\\a&0&-1\\0&0&a\end{pmatrix}$$

נמצא את הפולינום האופייני שלו:

$$\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda&-a&-1\\-a&\lambda&1\\0&0&\lambda-a\end{pmatrix}=$$

$$=(\lambda-a)(\lambda^2-a^2)=(\lambda-a)^2\cdot(\lambda+a)$$

לכן, הע״ע של מטריצה A הינם $\lambda\pm a$

נמצא את הריבוי הגאומטרי של $\lambda=a$:

ניקח $v\in\mathbb{R}^3$:

נמצא v שמקיים:

$$Av=av$$

ונקבל:

$$\begin{pmatrix}0&a&1\\a&0&-1\\0&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\\az\end{pmatrix}$$

ונקבל

$$\begin{pmatrix} ay+z \\ ax-z \\ az \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$$

כלומר,

$$\begin{cases} ay+z = ax \\ ax-z = ay \\ \cancel{az = az} \end{cases}$$

פסוק אמת

$$\Downarrow$$

ונקבל

$$\begin{cases} z = ax-ay \\ z = ax-ay \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$z = ax-ay$$

ונקבל שלכל $a,b \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ ax-ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ a(ax-ay) \end{pmatrix}$$

לכן, הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = a$ הוא 2.

לכן, הוא שווה לריבוי האלגברי שלו.

נ~3) שי שווים:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax \\ -ay \\ -az \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax \\ -ay \\ -az \end{pmatrix}$$

ונקבל

$$\begin{cases} ay + z = -ax \\ ax - z = -ay \\ az = -az \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -ax - ay \\ z = ax + ay \\ az = -az \end{cases}$$

ונקבל

$$\begin{cases} z = 0 \\ ax = -ay \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

ולכן הוקטורים המתקבלים הם: לכל $x \in R$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax \\ ax \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכן כאשר $\lambda=-a$, הריבוי האלגברי שלו הוא 1.
וגם הריבוי הגאומטרי.

$$a\neq -a \Updownarrow a\neq 0$$

לכן לפי 11.5.4', A לכסינה לכל $a\neq 0$

כאשר $a=0$, ניקח $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

והכל

$$\begin{pmatrix} z \\ -z \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו ש-(x,y,z) הוא וקטור עצמי אמ"מ

$$z=0.$$

כלומר לכל $(x,y)\in \mathbb{R}^2$ מתקיים

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכן הריבוי הגאומטרי (2) קטן מהריבוי האלגברי (3).

ולכן A לא לכסינה כאשר $a=0$.

לכן $\boxed{a\neq 0 \iff A \text{ לכסינה}}$

מש"ל

ב) ניקח $a=1$:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לפי הסעיף הראשון, A לכסינה $(a\neq 0)$

לכן, קיימת מטריצה הפיכה P כאשר

$$P^{-1}AP=diag(1,1,-1)$$

לכן לפי 11.3.7, P מורכבת מוקטורים עצמיים של A שהם בה"כ

ניקח את הוקטורים (מהסעיף הקודם):

$$V_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax \\ 0 \\ ax \end{pmatrix}$$ ביזונ עם a

$$V_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax \\ 0 \\ -ay \end{pmatrix}$$ ביזונ עם a

$$V_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax \\ -ax \\ 0 \end{pmatrix}$$ ביזונ עם a

ניקח את המטריצה

$$P = \left(v_1, v_2, v_3 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

אראה כי P הפיכה, ונמצא את P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2 - R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + R_3 \\ R_1 \to R_1 - R_3}]{R_3 \to -\frac{1}{2} R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

ולכן

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

נחשב את

$$P^{-1}AP$$

נתחיל נחשב את $P^{-1}A$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ידוע כי

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$D^n = \left(P^{-1} A P\right)^n$$

$$D^n = P^{-1} A \underbrace{P P^{-1}}_{=I} A P \cdots P^{-1} A P =$$

$$D^n = P^{-1} \cdot A^n P$$

$$D^{2021} = P^{-1} A^{2021} \cdot P$$

אך ידוע גם כי:

$$D^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{2021}$$

ונקבל

$$D^{2021} = \mathrm{diag}\left(1^{2021}, 1^{2021}, (-1)^{2021}\right) = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$$

לפי כפל מטריצות
אלכסוניות מאלגברה
לינארית 1.

ולכן

$$D^{2021} = D$$

ונקבל

$$P^{-1}A^{2021}P = P^{-1}AP \;/\; P\cdot \;,\; \cdot P^{-1}$$

$$\cancel{PP^{-1}}\,A^{2021}\,\cancel{PP^{-1}} = \cancel{PP^{-1}}\,A\,\cancel{PP^{-1}}$$

$$A^{2021} = A$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{2021} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

סוף

שאלה 2 (20 נקודות)

שאלה זו עוסקת בפולינום אופייני. אין קשר בין הסעיפים.

א. הוכיחו שלא קיימת מטריצה מדרגה 3 עם פולינום אופייני $p(x)=x^7-x^5+x^3$.

ב. תהי $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ העתקה לינארית עם פולינום אופייני $p(x)=x^2+2x-3$.

1. הוכיחו שההעתקה הלינארית $2T+I$ היא איזומורפיזם.
2. מהו הפולינום האופייני של T^3?

ג. תהי A מטריצה סינגולרית מסדר 4×4. ידוע שמתקיימים $\rho(A+2I)=2$ וגם $\det(A-2I)=0$. מהו הפולינום האופייני של A? האם A לכסינה?

א)

$$P(x)=x^7-x^5+x^3$$

$$P(x)=x^3(x^4-x^2+1)$$

$$P(x)=x^3(x^4-x^2+1)$$

יהי A שמייצג כאשר $\rho(A)=3$,
והפולינום האופייני שלה הוא

$$P(x)=x^3(x^4-x^2+1)$$

מפני שהמעלה הגבוהה ביותר ב- $P(x)$ הוא 7,
אז $A\in M_{7\times7}^{\mathbb{F}}$

מפני ש- $\rho(A)=3$ אז מרחב הפתרונות
של $Ax=0$
הוא 4 $(7-3=4)$.

אך לפי טענה כי הריבוי האלגברי של 0 ב- $P(x)$ הוא 3,

$\boxed{\text{לכן לא קיים מטריצה כזו.}}$ [illegible]

ב) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

כאשר

$p(x)=x^2+2x-3$

$p(x)=(x+3)(x-1)$

$x=-3 \qquad x=1$

$\lambda=-3 \qquad \lambda=1$

לכן קיימים 2 ע"ע ל־T : $1, -3$

נניח ו- $2T+I$ <u>לא</u> איזומורפיזם.

לכן $\dim(\ker(2T+I)) \neq 0$ מאלגברה לינארית 1

ולכן קיים v כך שלכל $\lambda \in \mathbb{F}$

מתקיים:

$$(2T+I)\cdot \lambda v = 0$$

$$2T\lambda v = -\lambda v$$

ניקח $u=\lambda v$:

$$(2T)(u) = -u$$

$$Tu = -\frac{1}{2}u$$

אך ידוע ש $-\frac{1}{2}$ <u>אינו</u> ע"ע של T

לכן קיבלנו סתירה.

ולכן,

$\boxed{2T+I \text{ הינו איזומורפיזם}}$

$\boxed{\text{מש"ל}}$

ג) נתון: $A\in M^{F}_{4\times4}$ כאשר A לא הפיכה

לכן $\rho(A)<4$ ש אלגברה לינארית 1

בנוסף, $\rho(A+2I)=2$

$$|A-2I|=0$$
$$\Downarrow$$
$$\rho(A-2I)<4$$

נסכם,

$$\begin{cases}\rho(A)<4\\ \rho(A+2I)=2\\ \rho(A-2I)<4\end{cases}$$

$$\rho(A+2I)=2<4$$

לכן, $\dim(\ker(A+2I))=4-2=2$

לכן, קיים תת מרחב V כאשר $\dim(V)=2$.
ולכל $v\in V$ שמקיים

$$(A+2I)v=0$$

$$Av=-2v$$

ולכן הריבוי הגיאומטרי של הע"ע -2 הוא 2.

יקויימו:
$\rho(A)<4$
$\rho(A-2I)<4$

לכן, קיימים מרחבים U_1, U_2 בהתאמה.
כאשר

$$\ker(A) = U_1$$

$$\ker(A-2I) = U_2$$

ומקיים

$$4 \geq \dim(U_1) \geq 1$$

$$4 \geq \dim(U_2) \geq 1$$

ולכן לכל $u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2$
מתקיים

$$Au_1 = 0 \qquad (A-2I)u_1 = 0$$

$$\downarrow \qquad Au_1 = 2u_1$$

$\lambda=0$ ע"ע של A $\qquad$ $\lambda = 2$ ע"ע של A

קיבלנו לפחות 4 ריבויים גיאומטריים.

2 ריבויים אלגבריים של $\lambda=-2$
לפחות אחד של $\lambda=0$
ולפחות אחד של $\lambda=2$

אך במטריצה 4×4 יכולים להתקיים במקסימום 4 ריבויים גיאומטריים.

לכן,
$\lambda=-2$ הוא ע"ע עם ריבוי גיאומטרי ואלגברי של 2

$\lambda=0$ הוא ע"ע עם ריבוי אלגברי 1

$\lambda=2$ הוא ע"ע עם ריבוי אלגברי 1.

ונקבל ש- A לכסינ.

ושגיים

$$\boxed{P(x) = x(x+2)^2(x-2)}$$

הפולינום האופייני של A

$\boxed{\text{שלב 2}}$

שאלה 3 (15 נקודות)

תהי A מטריצה **לכסינה** מסדר $n\times n$. נסמן $p(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1t+a_0$ את הפולינום האופייני שלה. נגדיר $p(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1A+a_0I$. זו מטריצה ריבועית מסדר n.

הוכיחו ש- $p(A)=0$.

נתון A מטריצה לכסינה

לכן, קיימת מטריצה D אשר דומה ל- A

נגדר

$$D=diag(b_1,b_2,\ldots b_n)$$

והפולינום האופייני הוא

$$p(x)=\prod_{n=1}^{n}(x-b_n)$$

לכן הפולינום

$$p(x)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_0$$

יכול להתפרק לגורמים באופן הבא:

$$p(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdot\ldots\cdot(x-b_n)$$

ולכן, הפולינום

$$p(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots a_0I$$

יכול להתפרק לגורמים כך:

$$p(A)=(A-b_1I)(A-b_2I)\cdot\ldots\cdot(A-b_nI)$$

ידוע כי קיימת P הפיכה כאשר

$$P^{-1}AP=D=diag(b_1,\ldots b_n)$$

נציב את

$$P(D)=$$

$$P(D) = (D-b_1 I)(D-b_2 I)\cdot \dots \cdot (D-b_n I)$$

$$P(D) = \mathrm{diag}(0, b_2-b_1, b_3-b_1, \dots, b_n-b_1)\cdot$$

$$\mathrm{diag}(b_1-b_2, 0, \dots, b_n-b_2)\cdot$$

$$\vdots$$

$$\cdot\, \mathrm{diag}(b_1-b_n, \dots, 0) =$$

$$P(D) = \mathrm{diag}(\underbrace{0, 0, \dots 0}_{n \text{ פעמים}})$$

לכל איבר אלכסוני של $P(D)$ היה גורם שהוא 0, ולכן האיבר שווה ל-0.

ולכן,

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_0 I = 0 =$$

$$P(D) = a_n (P^{-1}AP)^n + a_{n-1}(P^{-1}AP)^{n-1} + \dots + a_0 I = 0$$

$$\Big/\; P \cdot\ \cdot P^{-1}$$

$$P(D) = a_n \cdot P\cdot(P^{-1}AP)^n\cdot P^{-1} + a_{n-1}\cdot P(P^{-1}AP)^{n-1} P + \dots a_0 \cdot P \cdot I P^{-1} = 0$$

ונקבל

$$P^{-1} \cdot 0 \cdot P = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots a_0 \cdot I$$

וקיבלנו

$$\boxed{P(A) = a_n{}^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_0 I = 0}$$

$\boxed{\text{מש״ל}}$

שאלה 4 (20 נקודות)

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם למטריצות A ו- B יש אותו פולינום אופייני אז יש להן אותה דרגה.

ב. המטריצות $A=\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ דומות.

ג. המטריצות $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ דומות.

א)

ניקח

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(B)=0 \qquad \rho(A)=1$$

$$P(t)=t^2 \qquad P(t)=t^2$$

סתירה!

לכן הטענה לא נכונה

סוף א

ב)

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_B(t)=\underset{\lambda=1}{(t-1)}\underset{\lambda=-1}{(t+1)} = P_A(x)=(t-2)(t+2)+3=t^2-1$$

$\lambda=1,\ \lambda=-1$

כי לערכים ע״ע שונים, לכן A דומה לאלכסונית. ולכסונית B.

סוף ב

ד) נבדוק מה הע״ע של B.

$$B=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-1&0\\0&1&-4\end{pmatrix}$$

$$P(t)=\begin{vmatrix}t+4&0&0\\0&t+1&0\\0&-1&t+4\end{vmatrix}=(t+1)(t+4)^2$$

$\lambda=-1$ $\lambda=-4$

נבדוק את הריבוי הגיאומטרי של -4:

יהי $(x,y,z)\in R^3$:

$$\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-1&0\\0&1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x\\-4y\\-4z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-4x\\-1y\\1y-4z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x\\-4y\\-4z\end{pmatrix}$$

ונקבל

$$\cancel{-4x=-4x}$$

$$-y=-4y \Rightarrow y=0$$

$$1y-4z=-4z$$

$$\cancel{-4z=-4z}$$

פסוק וגו

לכן, לכל $(x,z)\in R^2$

מתקיים

$$B\cdot\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x\\0\\-4z\end{pmatrix}$$

ולכן הריבוי הגיאומטרי של -4 הוא 2.

בנוסף הריבוי האלגברי של -1 הוא 1 ולכן הריבוי הגיאומטרי שווה לו.

לכן המטריצה B לכסינה ל- $diag(-4,-1,-4)$

נסתכל על מטריצה A:

$$A=\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{pmatrix}$$

$$C_1\to C_1+C_2+C_3$$

$$P(t)=\begin{vmatrix}t+3&-1&-1\\-1&t+3&-1\\-1&-1&t+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t+1&-1&-1\\t+1&t+3&-1\\t+1&-1&t+3\end{vmatrix}=$$

מאלגברה לינארית 1

$$P(t)=(t+1)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&t+3&-1\\1&-1&t+3\end{vmatrix}\underset{\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3-R_1}}{=}(t+1)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&t+4&0\\0&0&t+4\end{vmatrix}=$$

$$P(t)=(t+1)\cdot(1\cdot(t+4)^2)=(t+1)(t+4)^2$$

$$\lambda=-1\qquad\lambda=-4$$

לכן למטריצה A יש אותם ע"ע כמו למטריצה B.

נבדוק את הריבוי הגיאומטרי של -4:

יהי $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

נבדוק מתי מתקיים:

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x\\-4y\\-4z\end{pmatrix}$$

נקבל:

$$\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x\\-4y\\-4z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3x+y+z\\x-3y+z\\x+y-3z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x\\-4y\\-4z\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}-3x+y+z&=-4x\\x-3y+z&=-4y\\x+y-3z&=-4z\end{aligned}$$

ונקבל

$$\begin{cases}x+y+z=0\\x+y+z=0\\x+y+z=0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x+y+z=0$$

$$\Downarrow$$

$$z=-x-y$$

ונקבל, שלכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ מתקיים

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x \\ -4y \\ 4x-4y \end{pmatrix}$$

ולכן הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 4- הוא 2.

לכן הע"ע של A זהים לע"ע של B

$\boxed{\text{ולכן הן דומות לאותה מטריצה, ולכן דומות מעצמן.}}$

$\boxed{\text{מש"ל}}$

שאלה 5 (13 נקודות)

תהי $T: M_{2\times2}^{\mathbf{R}} \to M_{2\times2}^{\mathbf{R}}$ הטרנספורמציה הלינארית המוגדרת על-ידי:

$$T(A) = A - A^t \quad \text{לכל} \quad A \in M_{2\times2}^{\mathbf{R}}$$

א. מצאו בסיס ל- $\ker T$. מהו המימד של $\mathrm{Im}T$? רשמו בסיס ל- $\mathrm{Im}T$.

ב. הוכיחו כי T היא טרנספורמציה לכסינה ורשמו מטריצה אלכסונית המייצגת את T וגם מטריצה P המלכסנת את $[T]_E$, כאשר E מסמן את הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times2}(\mathbf{R})$.

א) יהי $T: M_{2\times2}^{R} \to M_{2\times2}^{R}$

כאשר $T(A) = A - A^t$

נראה ש' $T(A) = 0$

נגדיר $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$T(A) = 0$$

$$A - A^t = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ולכן כאשר $b = c$

לכן, לכל $(x,y,z) \in R^3$

מתקיים:

$$T\left(\begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}\right)=0$$

לכן, הבסיס ל- $ker(T)$ הוא:

$$\boxed{B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}}$$

לכן, $dim(ker(T))=3$

מסל 1

ב)

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$$

ידוע כי הריבוי האלגברי של הע"ע 0 הוא לפחות 3 לפי הסעיף הראשון.

יהי $x\in R$

יהי $A=\begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$

$$T(A)=\begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו:

$$T(A)=2A$$

לכן, גם 2 הוא ע"ע של T

קיבלנו 4 ריבויים גיאומטריים ל-T

ולכן, המטריצה האלכסונית של T היא $\boxed{diag(2,0,0,0)}$

ונגדיר

$$E = \left\langle \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$[T]_E = \left([T(e_1)]_E, [T(e_2)]_E, [T(e_3)]_E, [T(e_4)]_E \right)$$

ונקבל:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ניקח וקטורים עצמיים של T לפי E

$$P = \left(\underset{0}{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_E}, \underset{0}{\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_E}, \underset{0}{\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_E}, \underset{2}{\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_E} \right)$$

וקיבלנו:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נמצא את P^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4}$$

P

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to \frac{R_4 - R_3}{-2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

וקיבלנו:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה האלכסונית המייצגת של T היא $diag(0,0,0,2)$

שאלה 6 (12 נקודות)

נתונה מטריצה A סינגולרית מסדר 3×3 המקיימת $\rho(A+3I)=2$, $\det(A-I)=0$.

א. רשמו את הפולינום האופייני של A . מהי העקבה של A ? האם A מטריצה לכסינה ?

ב. האם המטריצה $A-3I$ הפיכה? נמקו.

א) נתון:

$\rho(A)<3$ (1)

$\rho(A-I)<3$ (2)

$\rho(A+3I)=2$ (3)

(1) מפני ש- $\rho(A)<3$

לכן, קיים תת מרחב $U_1\subseteq F^3$ כאשר לכל $v\in U_1$

מתקיים

$$Av=0=0\cdot v$$

לכן 0 הינו ע"ע של A עם ריבוי גיאומטרי לפחות 1.

באופן דומה, מתייחסים לנתונים

$\rho(A-I)<3$

$\rho(A+3I)=2$

(2) $\rho(A-I)<3$

לכן קיים תת מרחב $U_2\subseteq F^3$ כאשר לכל $v\in U_2$

מתקיים

$$(A-I)v=0$$

$$Av=Iv$$

$$Av = v$$

לכן 1 הוא ע"ע של A עם ריבוי גיאומטרי שהוא לפחות 1.

3

$$\rho(A+3I)=2$$

לכן קיים תת מרחב $U_3 \subseteq \mathbb{F}^3$ כאשר לכל $v\in U_3$

מתקיים

$$(A+3I)v=0$$

$$Av+3Iv=0$$

$$Av=-3v$$

לכן -3 הוא ע"ע של A.

קיבלנו 3 ע"ע שונים: $0, 1, -3$

לכן, מאלגברה לינארית 1, A לכסינה, ובעלת פולינום אופייני:

$$p(t)=t(t-1)(t+3)$$

מאלגברה לינארית 1, למטריצות דומות אותה עקבה,

ולכן, $tr(A)=tr(diag(0,1,-3))=$

$$tr(A)=0+1-3=-2$$

$$\boxed{\text{כן, } A \text{ לכסינה.} \quad tr(A)=-2 \quad p(t)=t(t-1)(t+3)}$$

ב)

$$A-3I$$

נניח ו- $\rho(A-3I)<3$

כלומר, $A-3I$ לא הפיכה.

לכן, קיים תת מרחב $V_4 \subseteq \mathbb{F}^3$ כאשר

לכל $v \in V_4$ מתקיים

$$(A-3I)v=0$$

$$Av=3Iv$$

$$Av=3v$$

אבל זו סתירה, כי 3 אינו ע"ע של A

$\boxed{\text{לכן } A-3I \text{ הפיכה}}$

$\boxed{\text{מש"ל ב}}$