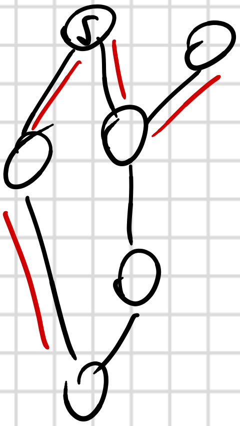
שאלה מס' 1 (33%)

עומק של עצי DFS/BFS. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם קדקוד מוצא $s \in V$. מובטח כי כל יתר הקדקודים ב- G נגישים מ- s. נסמן ב- T_{BFS}, T'_{BFS} שני עצי-BFS שרירותיים שונים של G שמושרשים ב- s, ונסמן ב- T_{DFS}, T'_{DFS} שני עצי-DFS שרירותיים שונים של G שמושרשים ב- s. הביטו בשתי הטענות הנפרדות הבאות (א,ב). לטענה אמתית הציגו הוכחה קצרה ומדויקת. לטענה שקרית הציגו דוגמא-נגדית של גרף עם מספר קדקודים n גדול כרצוננו, כך שהיחס $depth(T) / depth(T')$ בין העומקים של שני העצים יהיה גדול ככל האפשר. נדרשת תשובה של עד 4 משפטים לכל טענה. שימו לב שהגרפים בשאלה זו מכוונים.

(טענה א) לכל שני עצי BFS יש אותו עומק, כלומר $depth(T_{BFS}) = depth(T'_{BFS})$.

(טענה ב) לכל שני עצי DFS יש אותו עומק, כלומר $depth(T_{DFS}) = depth(T'_{DFS})$.



BFS:

יהי T_{BFS} , T'_{BFS} עצים שונים של G, שהשורש שלהם הוא s.

נניח כי $depth(T_{BFS}) \neq depth(T'_{BFS})$

לכן נניח כי $depth(T_{BFS}) < depth(T'_{BFS})$

*ללא הגבלת הכלליות

$d^{T}(u,v)$ הוא המרחק המינימלי בין u ל-v ב-T

לכן קיים $u \in V$ כאשר:

$$d^{T'_{BFS}}(s,u) > \max\{d^{T_{BFS}}(s,v) \mid v \in V\}$$

ניתן לכתוב $d^{T'_{BFS}}(s,u)$ מבחינ' אורך G

קשיר

לכן, נקבל: $d^{T'_{BFS}}(s,u) > d^{T_{BFS}}(s,u)$

ונקבל סתירה, היות והמרחק המינימאלי

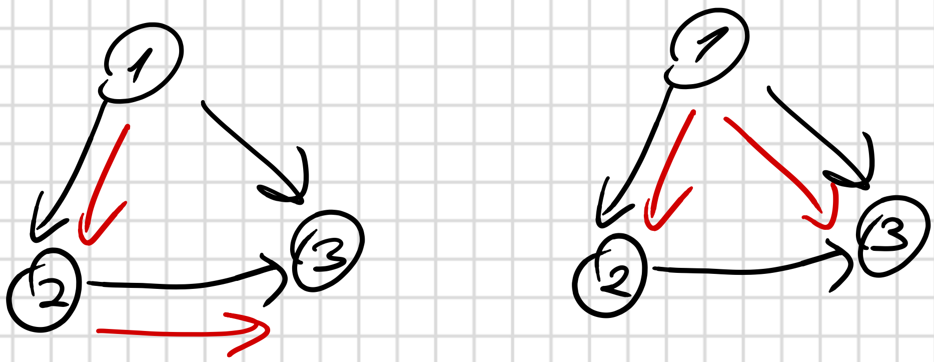
מ- s ל- u הוא לא מינימאלי ב- T'_{BFS}

לכן סתירה, ולכן הטענה שגויה!

ונקבל:

$$\boxed{depth(T'_{BFS}) = depth(T_{BFS})}$$

<u>DFS</u> העץ מסומן באדום!



לכן הטענה לא נכונה!

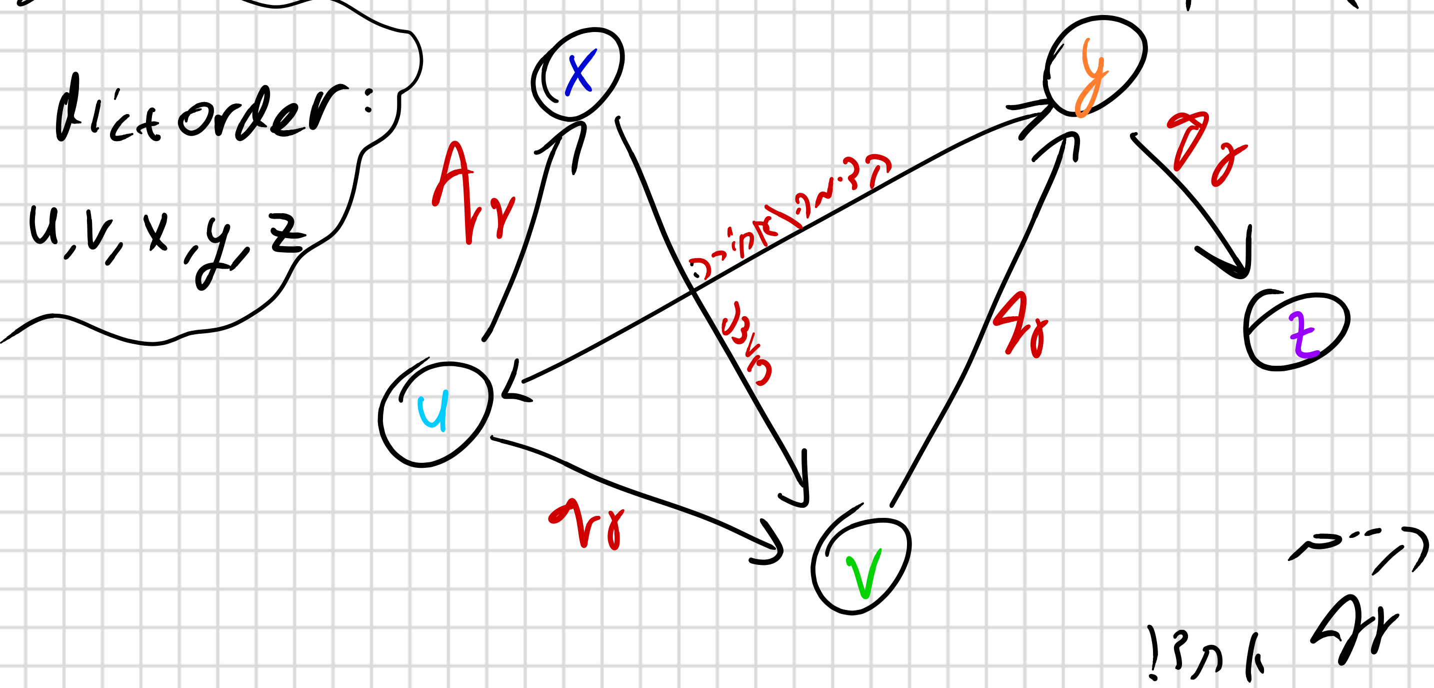
שאלה מס' 2 (33%)

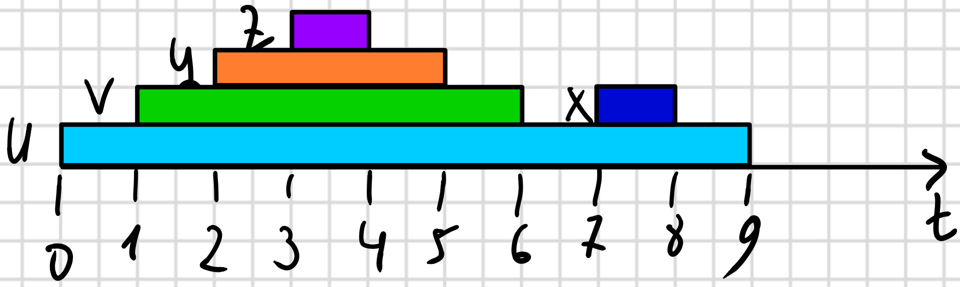
<u>הרצת סריקה לעומק</u>. הציגו שלוש הרצות-DFS שונות, לגילוי כל הקדקודים בגרף הקלט, שמורכב משבע הצלעות הבאות (y,z), (y,u), (x,v), (v,y), (u,y), (u,x), (u,v) (אין בגרף קדקודים או צלעות נוספות). בכל אחד מהסעיפים הבאים (א', ב', ג') נדרשת סריקה שונה, וזאת בהתאם לסדר הריצה על הקדקודים בלולאה החיצונית, ובלולאות הפנימיות.

(הרצה א) בכל הלולאות רצים על הקדקודים ב**סדר מילוני=לקסיקוגרפי**
(למשל, קדקוד a לפני קדקוד b).
(הרצה ב) בכל הלולאות רצים על הקדקודים בסדר **הפוך** לסדר מילוני.
(הרצה ג) בלולאה החיצונית רצים על הקדקודים בסדר מילוני,
ובלולאות הפנימיות רצים על הקדקודים בסדר הפוך לסדר מילוני.

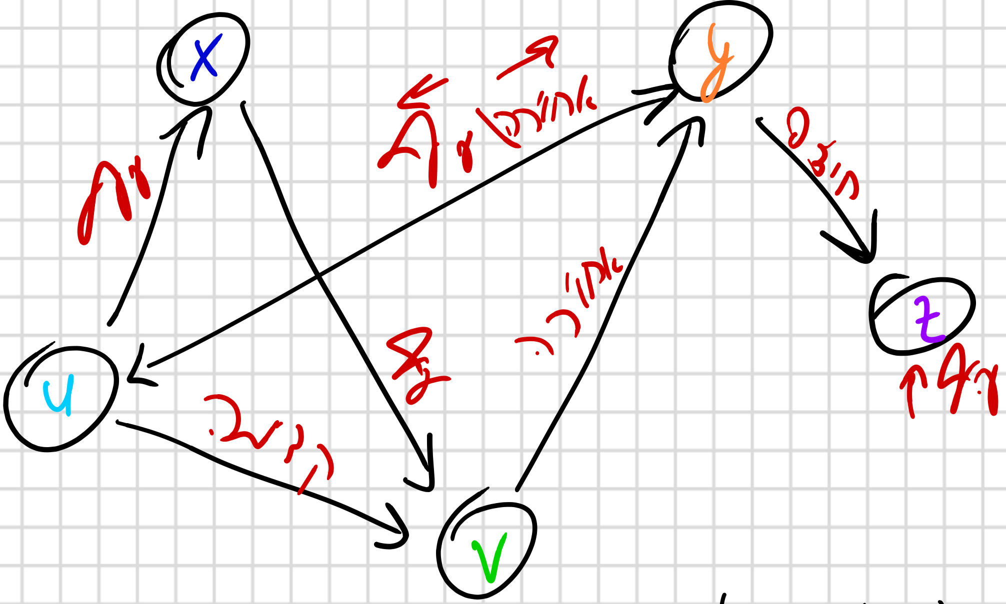
הגישו בכל סעיף **<u>ציור של הגרף</u>**, שבו (i) על כל צלע רשום הסיווג שלה (**עץ/קדימה/אחורה/חוצה**), (ii) לכל קדקוד רשומים **<u>זמן הגילוי וזמן העזיבה</u>** שלו, בנוסף, (iii) רישמו בכל סעיף כמה עצי-DFS נפרדים התקבלו. בבקשה לא לכתוב ולא לצייר שום פרטים נוספים.

א) נסמן את השלבים של ההרצה לפי מספרים

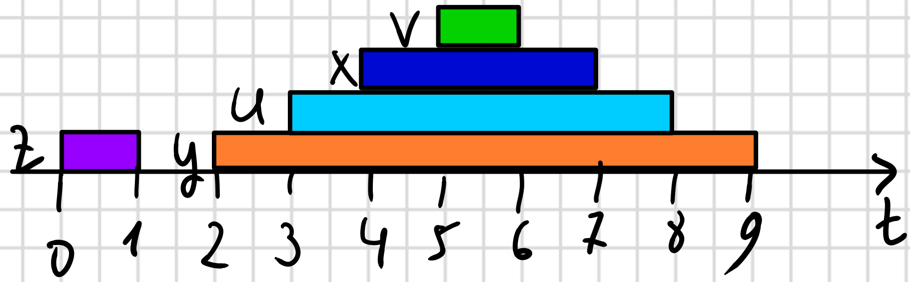




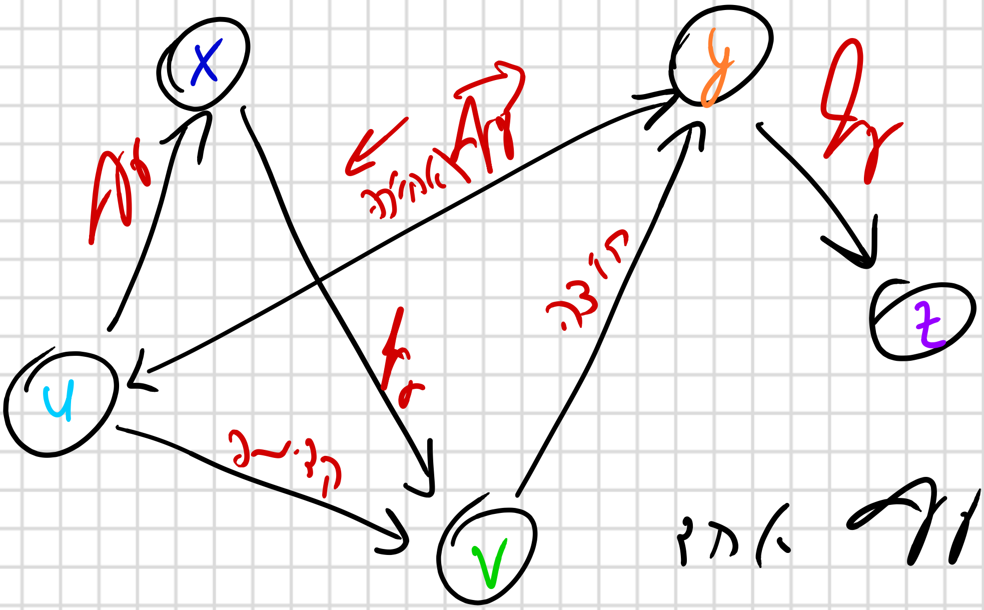
ב



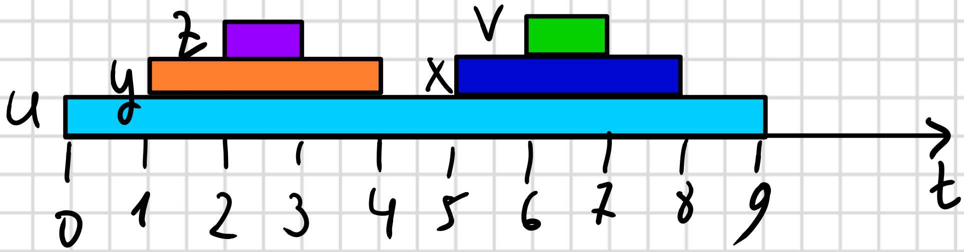
קיימים 2 עצים!



ג



קיים עץ אחד



שאלה מס׳ 4 (33%)

בעיית הספיקות (2-SAT). בשאלה זו נציג אלגוריתם יעיל, שבהינתן נוסחא φ בצורת 2-CNF מוצא עבורה השמה מספקת, וכשאין אף השמה מספקת מדווח, שהנוסחה אינה ספיקה.

(השערה מרכזית במדעי-המחשב, אגב, גורסת, שכשמגדילים את מספרם של הליטרלים בפסוקית מ-2 ל-3, אז נוצרת קפיצה דרמטית בקושי של הבעיה: משוער שלא קיים שום אלגוריתם, שמצליח להכריע ביעילות האם הנוסחא ספיקה. השערה זו נדונה בכל קורס במורכבות חישובים).

להלן תאור האלגוריתם עבור נוסחאות בצורת 2-CNF:

קל לוודא שניתן לממש את האלגוריתם ביעילות. הוכיחו את נכונותו בעזרת ההדרכה הבאה. (לכל אורך הדיון $\alpha,\beta,\gamma \in \{x_1,\ldots,x_n,\neg x_1,\ldots,\neg x_n\}$ מייצגים ליטרלים=קדקודים).

(i) הסבירו מה ידוע על נוסחת הקלט אם יש בגרף מסלול מהצורה $\alpha \longrightarrow \beta$.

(ii) הוכיחו שאם האלגוריתם עוצר בטענה שאין השמה מספקת, אז הנוסחא אכן איננה ספיקה.

(iii) יהיו α,β שני ליטרלים. אם יש בגרף מסלול מהצורה $\alpha \longrightarrow \beta$, רשמו איזה מסלול אחר חייב להופיע גם כן בגרף (אין צורך לנמק).

(iv) הוכיחו שאם האלגוריתם מוצא השמה (כלומר ממשיך מסעיף ב׳ לסעיף ג׳) אז ההשמה שמתקבלת "מוגדרת היטב", כלומר, באף שלב לא הגדרנו (*) גם $x_j \leftarrow T$ וגם $\neg x_j \leftarrow T$.

(v) הוכיחו שאם האלגוריתם מוצא השמה, אז ההשמה מספקת כל אחת מהפסוקיות $\alpha \vee \beta$.

i) האלגוריתם עובד באופן הבא:

לכל i, $C_i = (z_{i,1} \vee z_{i,2})$

מקיים

$$\neg z_{i,1} \to z_{i,2}$$

iff

$$\neg z_{i,2} \to z_{i,1}$$

מכיוון שהביטוי C_i הוא T אמ"מ שמתקיים:

$$\neg z_{i,1} \Rightarrow z_{i,2}$$

iff

$$\neg z_{i,2} \Rightarrow z_{i,2}$$

ואז, האלגוריתם בונה "רשימה" של גרירה בין $\{x_1,\neg x_1,\ldots x_n,\neg x_n\}$

לכן, אם קיים מסלול $\alpha \to \beta$

אז בקלוז קיים $C_i = (\alpha \vee \neg\beta)$ וגם $C_i = (\neg\alpha \vee \beta)$

*בנוסף מתקיים $\alpha \Rightarrow \beta$

ii) נניח בשלילה כי כאשר האלגוריתם עוצר,

אז הנוסחה ספיקה.

האלגוריתם עוצר אמ"ם קיים מסלול $x_i \to \neg x_i$

וגם $\neg x_i \to x_i$.

לפי האלגוריתם, כדי שהנוסחה תסופק חייב

להתקיים $x_i \Rightarrow \neg x_i$

וגם

$\neg x_i \Rightarrow x_i$

וזו סתירה

לכן, כאשר האלגוריתם עוצר, אז הנוסחה

אכן אינה ספיקה.

$\boxed{\text{מש"ל}}$

iii) $\neg\beta \to \neg\alpha$

iv) נניח בשלילה שדבר זה אכן מתקיים.

לכן, נניח שקבענו $x_j \leftarrow T$, $\neg x_j \leftarrow T$

עבור j כלשהו.

עושים את השיטה זו בי ל1 ו בל2

<u>נפריד למקרים:</u>

<u>ל1:</u>

צריך שיהיה קיים p_j^F וגם p_j^T

וזו ~~סתירה~~ כי חלק ב עוצר את ההרצה אם
דבר לא מתקיים.

<u>ל2:</u>

לכן, קיים i כאשר $\alpha_i \in \{x_i, \neg x_i\}$

$$x_j \in T(\alpha_i)$$

$$\neg x_j \in T(\alpha_i)$$

וזו סתירה כי $\alpha_i \Rightarrow \neg x_j$, $\alpha_i \Rightarrow x_j$

וקיבלנו סתירה בכל המקרים.

לכן, לא הוגדר ב4 שלב $x_j \to T$, $\neg x_j \to T$

מש"ל

ט) נניח בשלילה כי קיים $C_j=(\alpha \vee \beta)$

כאשר $C_j \leftarrow F$

אך (בהשמה של הנוסחה) שמובילה אות

$\neg\alpha \to \beta$

$\neg\beta \to \alpha$

ב- G עוברים A כל X_i (לכל i)

ומבצעים לו השמה על פי הכללים באלגוריתם:

נגדיר השמה ל- X_i:

אם קיים p_i^F אז: $X_i \leftarrow F$

אם קיים p_i^T אז: $X_i \leftarrow T$

אחרת נגדיר $X_i \leftarrow F$

לכן בוודאות עוברים על α ו-β

$\boxed{\text{מש"ל}}$