שאלה מס' 1 (35%).

<u>מסלולים כמעט מזעריים</u>. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים חיוביים $w(e)>0$ לכל אחת מהצלעות $e\in E$ ועם קדקוד מוצא s. נתון גם שלכל קדקוד v קיים מסלול $P_{s,v}$ מ-s ל-v בגרף. כרגיל, משקלו של מסלול מוגדר כסכום משקלי הצלעות $w(P)=\sum_{e\in P} w(e)$, ומסלול $P_{s,v}$ נקרא מזערי אם מתקיים $w(P_{s,v})\le w(P'_{s,v})$ עבור כל מסלול אחר $P'_{s,v}$. הגדרות חדשות: מסלול $P_{s,v}$ ייקרא **כמעט-מזערי**, אם משקלו קטן ביותר מבין כל המסלולים הלא מזעריים מ-s ל-v. כלומר, אם $w_1<w_2<\ldots<w_k$ הינה רשימת כל המשקלים האפשריים של מסלולים מ-s ל-v, אז למסלול מזערי מתקיים $w(P_{s,v})=w_1$ ולמסלול כמעט-מזערי מתקיים $w(P_{s,v})=w_2$. צלע $e=(u,v)\in E$ תיקרא **שימושית** אם היא צלע אחרונה באיזשהו מסלול מזערי $P_{s,v}$.

(א) הוכיחו שאם <u>כל</u> הצלעות ב-$P_{s,v}$ שימושיות, אז $P_{s,v}$ מסלול מזערי.

(ב) הוכיחו שאם יש צלע <u>לא</u> שימושית ב-$P_{s,v}$ (אחת או יותר), אז $P_{s,v}$ <u>איננו</u> מסלול מזערי.

(ג) הוכיחו שאם $P_{s,v}$ מסלול כמעט-מזערי אז מופיעה בו צלע לא שימושית <u>אחת ויחידה</u>.

(ד) תהי $e=(u_1,u_2)$ הצלע הלא שימושית היחידה במסלול כמעט-מזערי $P_{s,v}$. הוכיחו שהרישא של $P_{s,v}$ מ-s ל-u_1 מהווה מסלול מזערי, וגם שהסיפא של $P_{s,v}$ מ-u_2 ל-v מהווה מסלול מזערי.

(ה) הציגו בעזרת הסעיפים הקודמים אלגוריתם למציאת מסלול כמעט-מזערי מקדקוד מוצא נתון s לקדקוד יעד נתון t, בזמן $\Theta(|E|\cdot\log|V|)$. הניחו כי פעולות של חיבור/חיסור/השוואה של משקלים, כולן פעולות "אלמנטריות", שמתבצעות בזמן $\Theta(1)$.

אראה זאת בעזרת אינדוקציה:

<u>$n=1$:</u>

נסתכל על מסלול באורך צלע אחת שהינו שימושית. לפי ההגדרה הוא מזערי כי הינו באורך אחד.

נניח כי מתקיים שמסלול באורך n, עם n צלעות שימושיות הינו מזערי.

<u>$n+1$:</u>

יהי מסלול $P_{s,v}$ בעל $k+1$ צלעות שימושיות. נקרא את הצלע האחרונה $e=(u,v)$. אזי מתקיים:

$$w(P_{s,v}) = w(P_{s,u}) + w(P_{u,v}) = w(P_{s,u}) + w(e)$$

מפני שכל הצלעות שמשויות אני קיים $P'_{s,v}$
כאשר:

$$w(P'_{s,v}) = w(P'_{s,u}) + w(e)$$

מהנחת האינדוקציה

$$w(P_{s,u}) \leq w(P'_{s,u}) \; / +w(e)$$

$$w(P_{s,u}) + w(e) \leq w(P'_{s,u}) + w(e)$$

ונקבל

$$w(P_{s,v}) \leq w(P'_{s,v})$$

מפני ש- $P'_{s,v}$ מצלע. אז נקבל:

$$w(P_{s,v}) \geq w(P'_{s,v})$$

לפי [illegible]
לכן הם שווים!
ונקבל:

$$w(P_{s,v}) = w(P'_{s,v})$$

ולכן $P_{s,v}$ מינימלי!!!

מש"ל א)

ב) נזכיר $P_{s,v}$ מסלול בעל לפחות צלע לא מינימלית

שנקרא לה $e=(u,w)$. לכן $P_{s,w}$ לא מינימלי.

לכן $P_{s,v}$ לא מינימלי, כי מסלול שיש

בו מסלול לא מינימלי, גם הוא לא מינימלי.

מש"ל ב

ג) נניח כי קיים מסלול קצר מינימלי $P_{s,t}$

שיש בו לפחות 2 צלעות לא מינימליות.

נקרא להן

$e_1=(v_1,v_2)$

$e_2=(u_1,u_2)$

לכן נקבל כי

$$w(P_{s,t})=w(P_{s,v_1})+w(e_1)+w(P_{v_2,u_1})+w(e_2)+w(P_{u_2,t})$$

אך ידוע כי קיים לפחות 2 מסלולים זוג הצלעות במסלול

הבא:

$P'_{s,t}$ המסלול עם הצלע המינימלית בין u_1,u_2,

וי $P_{S,T}$ המסלול עם הצלעות המשותפות בין (u_1,u_2), (v_1,v_2)

לכן האורך של המסלולים האלה קטן יותר מהמסלול $P_{S,T}$.

לכן סתירה להנחה ולכן קיים צלע אחת משותפת!

ד) נזכיר שכל $P_{S,T}$ מכיל מעבר בכל צלע
אחת לפחות משותפת $e=(v,u)$

ונקבל:

$$w(P_{S,T}) = w(P_{S,v}) + w(e) + w(P_{u,T})$$

מפני שהיא הצלע הלא משותפת במסלול

אז לפי סעיף א היא היחידה.

לכן $P_{S,v}$ ו- $P_{u,T}$ מזעריים
שאלה ?

ה)

הסבר:

נשתמש ב-2 מערכים בגודל $|V|$, שהם המרחקים מ-s והמרחקים מ-t. נאפס ונכולם ב-∞.

1) נבצע הרצה של דייקסטרה מהנקודה s, נשמור את המרחקים במערך המרחקים מ-s.

2) נהפוך את הגרף.

3) נבצע הרצה של דייקסטרה מהנקודה t, נשמור את המרחקים במערך המרחקים מ-t.

4) נהפוך שוב את הגרף.

5) נמצא את הערכים הכי מינימליים של הגרף, ובכך את הערכים במקום ה-2 הכי מינימליים.

6) לפי הסעיפים הקודמים ניתן לבנות מסלול

מזערי באופן הבא: מינימלי שני $e=(u,v)$

$$w(P_{s,t}) = w(P_{s,u}) + w(e) + w(P_{v,t})$$

ולכן קיבלנו מסלול מזערי.

הסבר נכונות

משתמשים בדייקסטרה כדי לחשב מרחקים מ-s ומ-t.

ניתן לפרק כל מסלול לפי: קשת e כ-$P_{s,t}$

$$w(P_{s,t}) = w(P_{s,e_1}) + w(e) + w(P_{e_2,t})$$

ונקבל: $w(P_{s,e_1})$ הוא מרחק מינימלי מ-s

$w(P_{e_2,t})$ הוא מרחק מינימלי מ-t

$w(e)$ המרחק ה"כמעט מצער"

$w(e)$ המרחק בכמעט מצער לפי החיפוש של המינימלי הוא הכי נמוך.

לכן, לפי הסעיפים הקודמים נקבל כי המסלול הוא כמעט מצער.

$\boxed{\text{מש"ל}}$

שאלה מס׳ 2 (45%)

<u>**עצים פורשים מזעריים / עצי מסלולים מזעריים**</u>. נתון גרף קשיר ולא-מכוון $G=(V,E)$, עם קדקוד מוצא s ועם משקלי צלעות שלמים, חיוביים $w(e)>0$ ויחודיים (כלומר, לכל זוג של צלעות $w(e_1)\neq w(e_2)$). כזכור, עמ״מ T^1 הינו עץ של מסלולים מזעריים מהמוצא s לכל יתר הקדקודים בגרף, ואילו עפ״מ T^2 הינו עץ פורש, שמשקלו מזערי ביחס למשקלים של כלל העצים הפורשים. בשאלה זו נברר <u>**כמה צלעות משותפות**</u> עשויות להיות לשני העצים T^1,T^2.

(א) הוכיחו כי לכל עמ״מ T^1 ולכל עפ״מ T^2 יש לפחות צלע משותפת אחת.

נבנה עמ״מ. מהקודקוד $s\in V$. נקבל כי הצלע

הראשונה בעץ היא $e=(s,u)$ ל-u

מכל שכניו ב-V, כאשר לכל $v\in V$ מתקיים: $w(e)\leq w((s,v))$.

נבנה עפ״מ מ-s.* יתכן כי לא משנה איזה צומת התחלתי

לבנות, ותהיה עפ״מ מקבלת תוצאה זהה. הצלע הראשונה שנבחר היא $e=(s,u)$

כי המשקל שלה הוא הקטן מבין כולם. $\boxed{\text{מש״ל}}$

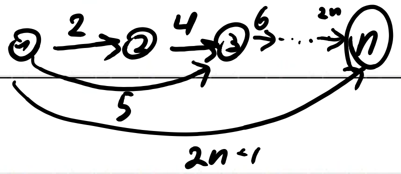
(ב) הציגו סדרה של גרפים $G_n=(V_n,E_n)$, עם מספר קדקודים $n=|V_n|$ הולך וגדל, ועם קדקוד מוצא ומשקלי צלעות שלמים, חיוביים ויחודיים, כך שלגרף G_n ישנו עמ״מ T_n^1 וישנו עפ״מ T_n^2, שמספר הצלעות המשותפות שלהם הוא בדיוק אחד.

נגדיר: $V_n=\{1,2,3,\ldots n\}$

$E_n=\{(\overbrace{w=2m}^{\text{משקל}},\overbrace{s=m}^{\text{צומת התחלה}},\overbrace{t=m+1}^{\text{צומת סוף}})\mid 0<m<n\}\cup$

$\cup\{(w=2m-1,s=1,t=m)\mid 1<m<n\}$

כלומר:



(3

$$(x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee x_4 \vee x_6) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5) \wedge$$
$$\wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_6) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee x_6) \wedge$$
$$\wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \neg x_3)$$

מפני שהאלגוריתם חמדן, הוא יציב

$x_1 \to T$
$x_2 \to T$
$x_3 \to T$

$\boxed{\text{ולכן האלגוריתם נכשל. משל}}$