שאלה 1 (15 נקודות)

תהיינה $A, C \in M_3(\mathbb{R})$ מטריצות ריבועיות המקיימות $CA = A^3 - 3A^2 - 4A$.

נתון כי 1 ו-2 הם ערכים עצמיים של המטריצה A. ו- C מטריצה סינגולרית.

הוכיחו שהמטריצות A ו- C לכסינות.

$$CA = A^3 - 3A^2 - 4A$$

$$CA = (A^2 - 3A - 4I)A$$

$$(C - (A^2 - 3A - 4I))A = 0$$

$$C = A^2 - 3A - 4I \qquad \cancel{A = 0}$$

סתירה לנתון, מפני שלכל הפיכה $P \in M_3(R)$ מתקיים

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = 0$$

בסתירה לנתון שקיימים הערכים העצמיים 1,2!

יהי $V \neq 0$ וקטור עצמי של A.

$$Av = \lambda v$$

ונסמן ב

$$Cv = ?$$

$$(A^2-3A-4I)v=$$

$$A(Av)-3Av-4Iv=$$

$$A\lambda v-3\lambda v-4v=$$

$$\lambda Av-3\lambda v-4v=$$

$$\lambda^2 v-3\lambda v-4v=$$

$$(\lambda^2-3\lambda-4)v=0$$

ניקח μ כאשר.

$$(\lambda^2-3\lambda-4)v=\mu v$$

$$\Downarrow$$

כלומר

$$\mu=\lambda^2-3\lambda-4$$

נסתכל על $\lambda_1=1, \lambda_2=2$ (נתון)

$\lambda_1=1$:

$$\mu_1=1-3-4=-6$$

$\lambda_2=2$

$$\mu_2=4-6-4=-6$$

ידוע כי C לא הפיכה (נתון). לכן, $|C|=0$

לפי שאלה 11.3.1, $\mu=0$ הינו ערך עצמי של C.

נסתכל על $\mu_3=0$:

$$0=\lambda^2-3\lambda-4$$

$$0=(\lambda-4)(\lambda+1)$$

לפי משפט 11.2.6: לכן, $\lambda_3=-1$ או $\lambda_3=4$, מפני שהמטריצה מסדר n, יש לכל היותר n ערכים עצמיים.

לכן, קיימים 3 ערכים, שהם ערכים עצמיים של A, לפי משפט 11.3.6, A לכסינה.

לפי משפט 11.5.4, נובע כי לכל שורש, הריבוי האלגברי שלו שווה לריבוי הגיאומטרי.

נסתכל על $\mu=-6$, ונמצא את מרחב הפתרונות של C:

ניקח V_1, V_2 תת מרחב של R^3, כאשר כל אחד מהם שווה למרחב העצמי של הערכים 2,1 בהתאמה.

ניקח $0\neq v\in V_1$

ידוע כי $AV=V$

לכן,

$$AV=V \;\Big/ A\cdot \qquad \Big/\cdot(-3)$$

$$AAv=v \qquad -3Av=-3v$$

בנוסף, ידוע כי $-4I\cdot V=-4V$

לכן,

$$Cv = (AA-3A-4I)v = AAv - 3Av - 4v =$$
$$v - 3v - 4v = -6v$$

ולכן, לכל $v \in V_1$, מתקיים $Cv = -6v$

ניקח $v \in V_2$:

$$Av = 2v$$

$$AAv = 4v \qquad -3A = -6v$$

ידוע כי $-4Iv = -4v$

נסתכל על:

$$Cv = (AA-3A-4I)v = AAv - 3Av - 4Iv =$$
$$4v - 6v - 4v = -6v$$

לכן, לכל $v \in V_2$, מתקיים $Cv = -6v$

מפני של-A קיימים 3 מרחבים עצמיים, המימד של כל אחד מהם הוא 1.

2 מרחבים עצמיים של A, (V_1, V_2) הינם מרחבים עצמיים של C, כאשר $V_{-6} = V_1 \cup V_2$, ומפני ששני מרחבים אלה שונים, ניתן להגדיר $V_{-6} = V_1 \oplus V_2$.

ולכן,

$$\dim(V_{-6}) = \dim(V_1) + \dim(V_2) = 2$$

לפי הגדרת $\oplus$

לכן, קיימים 2 ערכים עצמיים ל-C,
כאשר לערך העצמי 6 הריבוי הגאומטרי שלו
הוא 2, כמו הריבוי האלגברי שלו.
ל-C קיים ערך עצמי נוסף - 0.

לפי משפט 11.5.4', C מטריצה לכסינה

A מטריצה לכסינה

$\boxed{\text{מש"ל}}$

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונות המטריצות

$$B = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ a^2 & -a & 2 \end{pmatrix}$$

א. מצאו עבור אלו ערכים של a המטריצה B לכסינה?

ב. הציבו במטריצה B את ערכי a שקבלתם בסעיף א'. מבין המטריצות שמתקבלות קיימות שתי מטריצות שהן שקולות שורה, נסמן אותן ב A ו- C. רשמו את המטריצות A ו-C, הוכיחו שהן שקולות־שורה וחשבו $\frac{|A^3|}{|C^2|}$.

$$B = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ a^2 & -a & 2 \end{pmatrix}$$

נמצא את הפולינום האופייני:

$|tI-B|=$

$$\left|\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ a^2 & -a & 2 \end{pmatrix}\right| =$$

$$\left|\begin{pmatrix} t+a & -a & 0 \\ 0 & t-2 & 0 \\ -a^2 & a & t-2 \end{pmatrix}\right| \underset{\text{פיתוח לפי עמודה 3}}{=} (t-2)\cdot\left((t+a)(t-2) - 0\cdot(-a)\right)$$

$$= (t-2)(t+a)(t-2)$$

$t_{1,2}=2, \quad t_3=-a$

נמצא את מרחב הפתרונות של

נמצא $V \in R^3$

כאשר:

$$Bv = -aV$$

נפרק את V ל- $V=[x,y,z]^t$:

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ a^2 & -a & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} -ax \\ -ay \\ -az \end{pmatrix} =$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -ax+ay \\ 2y \\ a^2x-ay+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax \\ -ay \\ -az \end{pmatrix} \Big/ + \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} ay \\ (a+2)y \\ a^2x-ay+z(2+a) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

נהפוך למטריצת מקדמים:

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 2+a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 2+a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 2+a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2 \cdot \frac{a}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 2+a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ונקבל: $2y=0 \to y=0$

נסתכל על המשוואה הבאה: $a^2x+(2+a)z=0$

ונבדיל בין 3 מקרים: $a=-2$, $a=0$, $a\neq 2,0$

ונקבל: $\underline{a=-2}$

$Bv=2v$,

$4x+0=0$

אין הגבלה ל- z $x=0, y=0$

אז לכל $z\in\mathbb{R}$ $V=(0,0,z)^t$

$\Downarrow$

$V_2=Sp(\{(0,0,1)^t\})$

$\Downarrow$

$\dim(V_2)=1$

במקרה זה, לא קיימים עוד ערכים עצמיים למטריצה זו, ולכן, מפני שהריבוי האלגברי של 2 הוא 3 $(t-2)(t-2)(t-2)$ והריבוי הגיאומטרי הוא 1,

$(t-2)(t+a)(t-2)$

מטריצה B לא לכסינה לפי משפט 11.5.4'
כאשר $a=-2$

$\underline{a=0}$ נקבל:

$$Bv=0v=\underline{0}$$

$$y=0$$

$$0\cdot x+(+2)z=0$$

$$\downarrow$$

$z=0, y=0$ אין הגבלה על x.

לכן, לכל $x\in\mathbb{R}$, $v=(x,0,0)^t$

$$V_0=Sp(\{(1,0,0)^t\})$$

לכן, $\dim(V_0)=1$

ולכן, כאשר $a=0$, הריבוי הגיאומטרי של מרחב עצמי זה, הינו 1, כמו הריבוי הגיאומטרי שלו.
נמצא את הריבוי הגיאומטרי של 2 כאשר $a=0$:

(בעמוד הבא)

ניקח $x,y,z\in R$ $\quad V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftarrow Bv=2v$

$$\begin{pmatrix}-a & a & 0\\0 & 2 & 0\\a^2 & -a & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\2y\\2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2x\\0\\0\end{pmatrix}=0$$

$$\Downarrow$$

$$-2x=0$$
$$\Downarrow$$
$$x=0$$

לכן, לכל $y,z\in R$,

$$V=(0,y,z)$$

$$V_2=Sp(\{(0,1,0),(0,0,1)\})$$

$$||$$

$$\Downarrow$$

$$\dim(V_2)=2$$

הריבוי האלגברי של הערך העצמי 2 שווה לריבוי הגיאומטרי שלו: 2. הריבוי האלגברי של הערך העצמי 0 שווה לריבוי הגיאומטרי שלו: 1.

לכן, לפי משפט 11.5.4', B מטריצה לכסינה כאשר $a=0$.

(דרך <u>אחרת</u> להגיע למסקנה זו היא להציב $a=0$ ב-B, ולקבל מטריצה אלכסונית, ואז המטריצה ההפיכה תהיה I)

<u>$a\neq -2, 0$</u>

ונקבל:

$$Bv=-av$$

$$a^2x+(2+a)z=0 \qquad (y=0)$$

$$a^2x=-z(2+a)$$

$$(-2\neq a) \qquad \frac{a}{2+a}x=z$$

לכן, לכל $t\in\mathbb{R}$, $V=\left(t,0,\frac{a}{2+a}t\right)$

לכן,

$V_{-a} = Sp(\{(1, 0, \frac{a}{2+a})\})$

$\Downarrow$

$\dim(V_{-a}) = 1$

נסתכל B

$Bv = 2v$

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ a^2 & -a & 2 \end{pmatrix} v = 2v$$

ניקח $x, y, z \in R \Leftarrow v = (x, y, z)$:

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ a^2 & -a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -ax + ay \\ 2y \\ a^2x - ay + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ay - (a+2)x \\ 0 \\ a^2x - ay \end{pmatrix} = 0$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} ay = (a+2)x \\ a^2 x = ay \end{cases}$$

$\Downarrow$

$a \neq -2$, $a \neq 0$
$$\begin{cases} \frac{a}{a+2} y = x \\ ax = y \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\frac{a}{a+2} ax = x$$

$$x\left(\frac{a^2}{a+2} - 1\right) = 0$$

$x = 0$

$$\frac{a^2}{a+2} = 1$$

$$a^2 = a+2$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a-2)(a+1) = 0$$

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{1-4(-2)\cdot 1}}{2}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$a = 2, -1$$

$a=-1$ או $a=2$

$x=ay$ $\quad V=(t,at,z)$ $\quad$ לכל $t,z\in R$

לכן, $V_2=Sp(\{(1,a,0),(0,0,1)\})$

$\dim(V_2)=2$

$a\neq -1,2,-2,0$

$ay=x$ $\quad x=0$

$a\neq 0$ $\quad ay=0$ $\quad$ לכן, לכל $z\in R$,

$y=0$ $\quad V=(0,0,z)$

לכן, $V_2=Sp(\{(0,0,1)\})$

$\dim(V_2)=1$

כלומר, $a=-1$ או $a=2$,

$\dim(V_2)=2$, כמו הריבוי האלגברי

הערך העצמי 2. בן יחיד לכך, כאשר $a\neq-2,2,-1,0$:

$\dim(V_2)=1\neq2$

בניגוד לריבוי האלגברי.

לכן, כאשר $a=-1$ או $a=2$ לפי משפט 11.5.4'
מטריצה B לכסינה.

לסיכום,
כאשר $a=2$ או $a=1$ או $a=0$ המטריצה
B לכסינה.

ג) ניקח $a_1=2, a_2=1$:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to \frac{R_1}{2}} \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+3R_1-R_2}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}=C$$

$$|A^3|=|A|^3$$ לפי 4.5.1

$$|A|=2(2\cdot(-2)-2\cdot 0)=-8$$

פיתוח
לפי עמודה 3

לפי 4.5.1

$$|C^2| = |C|^2$$

$$|C| = 2\cdot(-1\cdot 2 - 1\cdot 0) = -4$$

פיתוח לפי שורה 3

נחשב:

$$\frac{|A^3|}{|C^2|} = \frac{|A|^3}{|C|^2} = \frac{(-8)^3}{(-4)^2} =$$

$$\frac{-512}{16} = \boxed{-32}$$

שאלה 3 (15 נקודות)

נתונות מטריצות A ו-B ריבועיות מסדר 3×3 כך שהמטריצות

$$A, \qquad B-A, \qquad 2B-A, \qquad 3B-A$$

הן מטריצות **לא** הפיכות. הוכיחו שהמטריצה B לא הפיכה.

לפי שאלה 11.3.1, ניתן להבין כי 0 הינו ערך עצמי של המטריצות הבאות:

$$A, \quad B-A, \quad 2B-A, \quad 3B-A$$

לכן לפי 11.4.1

$$0=|0I-A|=|0-B+A|=|0-2B+A|=|0-3B+A|$$

$$0=-|A|=-|B-A|=-|2B-A|=-|3B-A| \quad / \cdot(-1)$$

$$0=\underset{I}{|A|}=\underset{II}{|B-A|}=\underset{III}{|2B-A|}=\underset{IV}{|3B-A|}$$

$$\Downarrow$$

נניח כי B הפיכה. לכן,

$$II \qquad |B-A|=0 \quad / \cdot |B^{-1}|$$

$$|B-A|\cdot|B^{-1}|=0$$

$$|B B^{-1}-AB^{-1}|=0$$

$$|I - AB^{-1}| = 0$$

לפי 11.4.1 לכן, $\boxed{1}$ הינו ערך עצמי של AB^{-1}

III

$$|2B - A| = 0 \quad / \cdot |B^{-1}|$$

$$|2B - A| \cdot |B^{-1}| = 0$$

$$|2B \cdot B^{-1} - AB^{-1}| = 0$$

$$|2I - AB^{-1}| = 0$$

לפי 11.4.1 לכן, 2 הוא ערך עצמי של AB^{-1}

IV

$$|3B - A| = 0 \quad / \cdot |B^{-1}|$$

$$|3BB^{-1} - AB^{-1}| = 0$$

$$|3I - AB^{-1}| = 0$$

לפי 11.4.1 ולכן 3 הוא ערך עצמי של AB^{-1}

לפי שאלה 11.3.1, המטריצה AB^{-1}
הפיכה, כי אין לה 0 כערך עצמי.

לכן, $|AB^{-1}| \neq 0$ לפי 4.3.5

$|B^{-1}| \neq 0$:/ $|A||B^{-1}| \neq 0$ לפי 4.5.1

$|A| \neq 0$ בניגוד לנתון!

מפני ש- A אינה הפיכה! ולכן $|A|=0$.

סתירה, ולכן B לא יכולה להיות הפיכה.

לכן, B לא הפיכה

שאלה 4 (20 נקודות)

יהיו $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3} \in \mathbb{R}^n$ ונגדיר $U = \mathrm{Sp}(\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\})$. נתון $\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_3} = 0$ ו- $\boldsymbol{v_2} \cdot \boldsymbol{v_3} = 1$ וכן $\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{v_2} \cdot \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_3} \cdot \boldsymbol{v_3} = x$. מצאו בסיס אורתונורמלי ל-U (התשובה כוללת גם את x).

הערה: הבחינו בין 2 מקרים שונים בהתאם לממדו של U.

אחשב את הקבוצה האורתוגונלית:

הבסיס המקורי: $(v) = (v_1, v_2, v_3)$

הבסיס החדש: $(u) = (u_1, u_2, u_3)$

נקח $u_1 = v_1$

אחשב את השאר לפי תהליך גרם שמידט:

$$u_2 = v_2 - \sum_{i=1}^{1} \frac{v_2 \cdot u_i}{\|u_i\|^2} \cdot u_i$$

$u_1 = v_1$ *

$v_2 \cdot v_1 = 0$ נתון

$$u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 = v_2 - \frac{0}{\sqrt{v_1 \cdot v_1}} \cdot v_1 = \boxed{v_2}$$

$$u_3 = v_3 - \sum_{i=1}^{2} \frac{v_3 \cdot u_i}{\|u_i\|^2} u_i =$$

$V_1 = U_1 \quad V_2 = U_2$ *

$$U_3 = V_3 - \frac{V_3 \cdot V_1}{\|V_1\|^2} \cdot V_1 - \frac{V_3 \cdot V_2}{\|V_2\|^2} \cdot V_2$$

נתון $\quad V_1 \cdot V_3 = 0 \qquad V_3 \cdot V_2 = 1$

$$U_3 = V_3 - \frac{0}{\sqrt{V_1 \cdot V_1}^2} \cdot V_1 - \frac{1}{\left(\sqrt{V_2 \cdot V_2}\right)^2} \cdot V_2 =$$

$$U_3 = V_3 - \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot V_2 = V_3 - \frac{1}{x} V_2$$

$$(V) = (V_1, V_2, V_3)$$

$$(U) = \left(U_1 = V_1,\ U_2 = V_2,\ U_3 = V_3 - \frac{1}{x} V_2\right)$$

כאשר (V) קבוצה תלויה לינארית,

הוקטור V, כאשר $V = a - P(a)$

(כאשר $P(a)$ הינו ההיטל)

ישתווה ל-0, מפני שאז, ההטלה היא הוקטור עצמו,

מפני ש-a "נמצא בתוך" המרחב הנפרש ע"י

הבסיס הנוכחי, ולכן $P(a) = a$

$\rightarrow V = 0$

לכן, אבדוק מתי וקטורי הבסיס מתאפסים:

לא מתאפס $\quad u_1 = v_1 \neq 0$

לא מתאפס $\quad u_2 = v_2 \neq 0$

נבדוק: $\quad u_3 = v_3 - \frac{1}{x} v_2$

$x \geq 0$ לפי הנתון,

מפני ש- $x = v_1 \cdot v_1 = v_2 \cdot v_2 = v_3 \cdot v_3 > 0$ ← כי הוקטורים <u>שונים</u> מ-0

$$\downarrow$$

$$x > 0$$

$$\downarrow$$

$$v_3 - \frac{1}{x} v_2 = 0 \quad / \cdot (v_3)$$

$$v_3 \cdot v_3 - \frac{1}{x} \cdot v_2 \cdot v_3 = 0$$

$$x - \frac{1}{x} \cdot 1 = 0 \quad / \cdot x$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x+1) = 0$$

$$\boxed{x = 1} \qquad \cancel{x = -1} \qquad x > 0$$

כאשר $x = 1$, $\boxed{u_3 = 0}$

לכן, כאשר $x=1$, $(u)=(v_1,v_2,0)$

והבסיס יהיה:

$$\boxed{\begin{array}{l}(u)=(v_1,v_2)\\ \dim(U)=2\end{array}}$$

ולכן, כאשר $x>0$, $x\neq 1$

$$\boxed{\begin{array}{l}(u)=\left(v_1,v_2,v_3-\frac{1}{x}v_2\right)\\ \dim(U)=3\end{array}}$$

$\boxed{\text{מש״ל}}$

שאלה 5 (10 נקודות)

יהיו $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ כך ש $U_1^\perp + U_2^\perp = \mathbb{R}^n$. הוכיחו כי $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

נניח כי קיים $v \neq 0$ $v \in U_1 \cap U_2$

(היות ו- $U_1 \cap U_2$ תת מרחב של U_1 ו- U_2)

לכן, לפי הגדרת המשלים האורתוגונלי,

$U_1 \oplus U_1^\perp = R^n$, $U_2 \oplus U_2^\perp = R^n$

לכן, $v \notin U_2^\perp \cap U_1^\perp$

ולכן, $U_2^\perp \cap U_1^\perp \neq R^n$ בניגוד

לנתון. לכן, סתירה.

לכן, לכל $v \neq 0$, $v \in R^n$ מתקיים:

$v \notin U_1^\perp \cap U_2^\perp$

הסבר של $U_1^\perp \cap U_2^\perp$:

ניתן להגדיר כך:

$U_1^\perp \cap U_2^\perp = \{ v \in R^n \mid a \cdot v = 0,\ \text{לכל}\ a \in U_1 \cup U_2 \}$

אמרנו ש $0\in R^n$.

ידוע כי לכל $v\in R^n$ $0\cdot v=0$.

בפרט, לכל $a\in U_1\cup U_2$, $0\cdot a=0$

לכן $0\in U_1^\perp\cap U_2^\perp$

ולכן $U_1^\perp\cap U_2^\perp=\{0\}$

$\boxed{\text{מש"ל}}$

שאלה 6 (20 נקודות)

יהיו V_1,V_2,V_3 תת-מרחבים של $\mathbb{R}^n$.

א. הוכיחו שמתקיים $(V_1+V_2+V_3)^\perp=V_1^\perp\cap V_2^\perp\cap V_3^\perp$.

הסיקו מכך שמתקיים $(V_1\cap V_2\cap V_3)^\perp=V_1^\perp+V_2^\perp+V_3^\perp$.

ב. נתבונן במרחב $\mathbb{R}^5$ ויהיו $V_1,V_2,V_3\subset\mathbb{R}^5$ מרחבים לינאריים **שונים** זה מזה וכך ש $\dim V_i=4$ לכל $i=1,2,3$. בשאלה 7 בממ"ן 13 חשבנו את $\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)$ (ניתן להשתמש בתוצאה של ממ"ן 13 ללא חישוב). הוכיחו שאם מתקיים $V_1\cap V_2\not\subseteq V_3$ אז $V_3^\perp\not\subseteq V_1^\perp+V_2^\perp$.

א)

יהי $v\in R^n$. אראה ש $v\in(V_1+V_2+V_3)^\perp$

דבר זה מתקיים כאשר לכל $u\in(V_1+V_2+V_3)$

$$v\cdot u=0$$

נניח $u=u_1+u_2+u_3$ כאשר: $u_1\in V_1, u_2\in V_2, u_3\in V_3$

לפי הגדרת חיבור מרחבים 7.6.3

$$v\cdot(u_1+u_2+u_3)=0$$

$$vu_1 + vu_2 + vu_3 = 0$$

לכל u_1, u_2, u_3 (לפי הגדרתם)

בפרט, שאואר צומתיים כאשר:

$vu_1 = 0,\ vu_2 = 0,\ vu_3 = 0$

$\Downarrow$

$v \in V_1^\perp \quad v \in V_2^\perp \quad v \in V_3^\perp$

ולכן, $v \in V_1^\perp \cap V_2^\perp \cap V_3^\perp$

ולכן, $(V_1 + V_2 + V_3)^\perp \subseteq (V_1^\perp \cap V_2^\perp \cap V_3^\perp)$

יהי $u \in (V_1^\perp \cap V_2^\perp \cap V_3^\perp)$

לכן, $u \in V_1^\perp \quad u \in V_2^\perp \quad u \in V_3^\perp$

לכל $v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2,\ v_3 \in V_3$

לכן $u \cdot v_1 = 0 \quad u \cdot v_2 = 0 \quad u \cdot v_3 = 0$

חיבור משוואות

$$u \cdot v_1 + u \cdot v_2 + u \cdot v_3 = 0$$

$\Downarrow$

$$u(v_1+v_2+v_3)=0$$

לכל* v_1, v_2, v_3

כי רוצים לפי הגדרת חיבור מרחבים

$$V=V_1+V_2+V_3$$

לכל $v\in V_1+V_2+V_3$

$$u\cdot v=0$$

$$\Downarrow$$

$$u\in(V_1+V_2+V_3)^\perp$$

$$\Downarrow$$

ולכן, $(V_1^\perp\cap V_2^\perp\cap V_3^\perp)\subseteq(V_1+V_2+V_3)^\perp$

ולכן, הכלה דו כיוונית גוררת שוויון

ולכן,

$$(V_1+V_2+V_3)^\perp=(V_1^\perp\cap V_2^\perp\cap V_3^\perp)$$

ג)

$V_1,V_2,V_3\subseteq R^5$ תתי מרחב שונים כאשר,

$$\dim(V_1)=\dim(V_2)=\dim(V_3)=4$$

נתון: $V_1\cap V_2\nsubseteq V_3$

לפי שאלה 7 בממ"ן 13,

$$\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)=2$$

לפי משפט 12.3.2

$$\dim((V_1\cap V_2\cap V_3)^{\perp})=5-\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)=5-2=3$$

מס׳ 4 , ניתן להסיק:

$$(V_1\cap V_2\cap V_3)^{\perp}=(V_1^{\perp}+V_2^{\perp}+V_3^{\perp})$$

ולכן,

$$\dim(V_1^{\perp}+V_2^{\perp}+V_3^{\perp})=3$$

מכי׳ ש $\dim(V_i)=4$ לכל $1\le i\le 3$

$$\dim(V_i^{\perp})=5-\dim(V_i)=5-4=\boxed{1}$$

לכן,

$$\dim(V_1^\perp+V_2^\perp+V_3^\perp)=3=\dim(V_1^\perp+V_2^\perp)+\dim(V_3^\perp)-\dim(V_3^\perp\cap(V_1^\perp+V_2^\perp))$$

$$\dim(V_3^\perp\cap(V_1^\perp+V_2^\perp))=\dim(V_1+V_2)+1-3$$

$$\dim(V_3^\perp\cap(V_1^\perp+V_2^\perp))=\dim(V_1^\perp+V_2^\perp)-2$$ משוואה I

לכל מרחב V

$$\dim(V)\geq 0$$

לכן,

$$\dim(V_1^\perp+V_2^\perp)-2\geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dim(V_1^\perp+V_2^\perp)\geq 2}$$

מכך ש- $\dim(V_2^\perp)=\dim(V_1^\perp)=1$,

$$\Downarrow$$

חייב להתקיים:

$$\dim(V_1^{\perp}+V_2^{\perp}) \leq 1+1=2$$

לכן,

$$2 \leq \dim(V_1^{\perp}+V_2^{\perp}) \leq 2$$

ולכן,

$$\boxed{\dim(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})=2}$$

לפי משוואה (I)

$$\dim(V_3^{\perp}\cap(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})) = \dim(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})-2$$

$$\dim(V_3^{\perp}\cap(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})) = \dim(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})-2$$

$$\Downarrow$$

$$\dim(V_3^{\perp}\cap(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})) = 2-2=\boxed{0}$$

לכן, ניתן להבין בבירור כי קיים איבר יחיד - 0.

ולכן, $V_3^\perp \cap (V_1^\perp + V_2^\perp) = \{0\}$

(לפי הגדרה 8.3.3)

מפני ש- $\dim(V_3^\perp)=1$, קיים $u \in V_3^\perp$

כאשר $u \notin (V_1^\perp + V_2^\perp)$

ולכן, $V_3^\perp \not\subseteq (V_1^\perp + V_2^\perp)$

$\boxed{\text{משל}}$