שאלה 1 (25 נקודות)

א. הראו שלמשוואה $y''=2x+y\cos^2 x$ יש שני פתרונות שונים שלגרפים שלהם יש נקודת חיתוך. הראו שבנקודת חיתוך כזו אין משיק משותף לשני הגרפים.

ב. בדקו אם קיימת משוואה מהצורה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, כאשר q, p הן פונקציות רציפות בקטע פתוח (a,b), כך שהפונקציות $\sin x, \cos x, x$ נמנות עם פתרונותיה בקטע זה.

א)

נסתכל על המשוואה:

$$y''-y\cos^2(x)=2x$$

יהי $a,b,c\in\mathbb{R}$

לפי משפט הקיום והיחידות, קיים פתרון יחיד y_1 למשוואה:

$$\begin{cases} y''-y\cos^2(x)=2x \\ y'(a)=b \\ y(a)=c \end{cases}$$

נניח בשלילה כי קיים $y_1\neq y_2$ אשר מקיים

$$\begin{cases} y_2''-y_2\cos^2(x)=2x \\ y_2'(a)=b \\ y(a)=c \end{cases}$$

$$\boxed{\text{אך זו סתירה למשפט 2.3.5. לכן, קיים פתרון אחד כזה.}}$$

ג)

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$$

נניח בשלילה כי קיימות $P(x), q(x)$ כאשר

$y = x, \sin(x), \cos(x)$ הן פתרון.

לכן, אם נציב במשוואה, נקבל $P(x), q(x)$ כלומר.

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + q(x)y = 0 \\ y_1 = x \\ y_2 = \sin(x) \\ y_3 = \cos(x) \end{cases}$$

נקבל:

$$\begin{cases} -\sin(x) + \cos(x)P(x) + \sin(x)q(x) = 0 \\ -\cos(x) - \sin(x)P(x) + \cos(x)q(x) = 0 \\ 0 + P(x) + xq(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$P(x) = -xq(x)$$

ולכן:

$$\begin{cases} \sin(x) = q(x)(-x\cos(x) + \sin(x)) \\ \cos(x) = q(x)(x\sin(x) + \cos(x)) \end{cases}$$

ולכן

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sin(x)}{-x\cos(x)+\sin(x)} \\[2ex] y(x)=\dfrac{\cos(x)}{x\sin(x)+\cos(x)} \end{cases}$$

אך קיבלנו סתירה

לכן לא מתקיימת טענת המשפט

$\boxed{\text{מש״ל}}$

שאלה 2 (25 נקודות)

א. יהי $f(x)$ פתרון המשוואה $x^2y''+2xy'-2y=0$, המקיים $f(1)=2$ ו- $f'(1)=-1$.

חשב את $f(\frac{1}{2})$. (רמז: $y=x$ הוא פתרון של המשוואה).

ב. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+1)xy''+(x+2)y'-y=x$

אם ידוע שאחד הפתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה הוא פולינום.

נסתכל על המשוואה:

$$x^2y''+2xy'-2y=0$$

$$y''+\frac{2}{x}y'-\frac{2}{x^2}y=0$$

$$y''+\left(\frac{2}{x}y\right)'=0$$

$$y''=-\left(\frac{2}{x}y\right)' \quad \Big/\int dx$$

$$y'=-\frac{2}{x}y+C$$

$$y'+\frac{2}{x}y=C$$

נפתור את המשוואה ההומוגנית:

$$y'+\frac{2}{x}y=0$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{-2}{x}$$

$$(\ln(y))' = \frac{-2}{x} \quad \Big/ \int dx$$

$$\ln(y) = -2\ln|x|$$

$$y = \frac{1}{x^2}$$

נציב:

$$\begin{cases} y = f(x)\cdot\frac{1}{x^2} \\ y' + y\,\frac{2}{x} = c \end{cases}$$

$$f'(x)\frac{1}{x^2} \cancel{-2\frac{1}{x^3}\cdot f(x)} \cancel{+ f(x)\frac{1}{x^2}\cdot\frac{2}{x}} = c$$

$$f'(x) = cx^2 \quad \Big/ \int dx$$

$$f(x) = cx^3 + A$$

$$y = f(x)\cdot\frac{1}{x^2} = cx + A\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$\begin{cases} y(1) = 2 \\ y'(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} c + A = 2 \to & A = 2 - A \\ & \downarrow \\ c - 2A = -1 \to & 3c - 4 = -1 \\ & c = 1 \\ \Leftarrow & \downarrow \\ & A = 1 \end{matrix}$$

$$\boxed{y = x + \frac{1}{x^2}}$$

ב)

$$x(x+1)y''+(x+2)y'-y=x$$

נפתור את המשוו"א ההומוגנית לפי ניחוש:

נניח:

$$\begin{cases} x(x+1)y''+(x+2)y'-y=0 \\ y=Ax^2+Bx+C \end{cases}$$

$$y'=2Ax+B$$

$$y''=2A$$

$$x(x+1)2A+(x+2)(2A+B)-Ax^2-Bx-C=0$$

$$2Ax^2+2Ax+2Ax+\cancel{Bx}+4A+2B-Ax^2-\cancel{Bx}-C=0$$

$$Ax^2+4Ax+4A+2B-C=0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} A=0 \\ 4A=0 \\ 4A+2B-C=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} A=0 \\ C=2B \end{matrix}}$$

לכן, הניחוש:

$$\boxed{y=Bx+2B}$$

נניח:

$$y=f(x)\cdot(Bx+2B)$$

$$y'=f'(x)(Bx+2B)+B\cdot f(x)$$

$$y''=f''(x)(Bx+2B)+Bf'(x)+Bf'(x)$$

$$x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x$$

$$x(x+1)\left(f''(x)(Bx+2B) + 2Bf'(x)\right) + (x+2)\left(f'(x)(Bx+2B) + Bf(x)\right) - f(x)(Bx+2B) = x$$

$$(x^2+x)\left(f''(x)(Bx+2B) + 2Bf'(x)\right) + (x+2)\left(f'(x)(Bx+2B) \cancel{+Bf(x)}\right) \cancel{-f(x)(Bx+2B)} = x$$

$$f''(x)\cdot(x+1)^2x\cdot B + 2B(x+1)xf'(x) + f'(x)(x+2)(x+1)B = x$$

$$f''(x)(x+1)^2x\cdot B + f'(x)\cdot(x+1)(Bx+2B+2Bx) = x$$

$$f''(x)(x+1)^2xB + f'(x)\cdot(x+1)(3x+2)\cdot B = x$$

קיבלנו משוואה מפרדה!

$$f'(x) = z$$

$$B\cdot z'(x+1)^2x + B\cdot z(x+1)(3x+2) = x$$

נפריד את המשתנים לצדדים:

$$z'\cancel{B}(x+1)^2x = -z\cancel{B}(x+1)(3x+2)$$

$$(\ln(z))' = -\frac{3x+2}{x(x+1)} \quad / \int dx$$

$$-\int\frac{3x+2}{x(x+1)}dx = -\int\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x}\right)dx = -\ln|x+1| - 2\ln|x| + C$$

$$\Downarrow$$

$$z = \frac{1}{(x+1)\cdot x^2}\cdot e^C$$

$$z = g(x)\cdot\frac{e^C}{(x+1)x^2}$$

$$\left((x^3+x^2)^{-1}\right)' = -(3x^2+2x)(x^3+x^2)^{-2}$$

[illegible]

$$B\cdot z'(x+1)^2 x + B\cdot z(x-1)(3x+2) = x$$

$$Be^c(x+1)^2\left((-3x^2+2x)(x^3+x^2)^{-2}\cdot g(x) + g'(x)\,(x^3+x^2)^{-1}\right) + B\cdot g(x)\cdot \frac{e^c}{x^3+x^2}(x+1)(3x+2)$$

$$g(x)Be^c\left(\cancel{\frac{(x+1)^2(-3x^2+2x)x^2}{(x+1)^2\cdot x^4} - \frac{(x+1)(3x+2)}{x^2\cdot(x+1)}}\right) + Bg'(x)\frac{(x+1)^2}{x^3+x^2} = x$$

$$g'(x) = \frac{(x+1)x^3}{(x+1)^2} = \frac{x^3}{x+1} \quad \Big/ \int dx$$

$$g(x) = \int \frac{x^3}{x+1}dx$$

$u = x+1$ [illegible]

$du = dx$

$$g(x) = \int \frac{(u-1)^3}{u}du = \int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}du = \frac{u^3}{3} + \frac{3}{2}\cdot u^2 + 3u - \ln|u|$$

$$g(x) = \frac{(x+1)^3}{3} + \frac{3}{2}\cdot(x+1)^2 + 3(x+1) - \ln|x+1|$$

$$z = g(x)\cdot\frac{1}{(x+1)x^2} = \frac{x+1}{3x} + \frac{3(x+1)}{2x^2} + \frac{3}{x^2} - \frac{\ln|x+1|}{(x+1)x^2}$$

$$f(x) = \int z\,dx =$$

$$\int\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^2} - \frac{\ln|x+1|}{(x+1)x^2}\right)dx =$$

$$\frac{1}{(x+1)x^2} = \frac{1+x-x}{(x+1)x^2} = $$
$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)x} =$$
$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$
$$\left(-\frac{1}{x} - \ln x + \ln(x+1)\right)\frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x| - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x} - \int\frac{\ln|x+1|}{(x+1)x^2}dx$$

$$\frac{1}{x+1}\cdot\ln(x+1)$$

$$f(x) = \ln|x| + \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}\frac{1}{x^2} - 3\frac{1}{x^2} - \int \frac{\ln|x+1|}{(x-1)x^2}\,dx$$

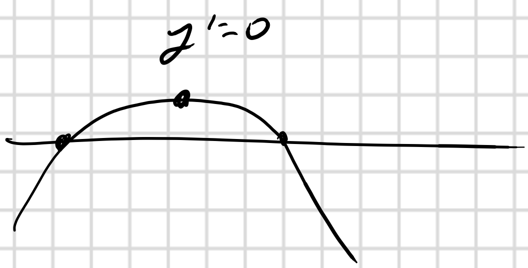
$$y = f(x)(2B + B) \qquad B \in \mathbb{R}$$

שאלה 3 (25 נקודות)

א. יהי $y(x)$ פתרון לא טריביאלי של המשוואה $y''+p(x)y=0$ ונניח ש- $p(x)$ היא פונקציה רציפה ו- $p(x)<0$ ב- R. הוכיחו כי $y(x)$ מתאפס בנקודה אחת לכל היותר.

(רמז: אם y מתאפס בשתי נקודות שונות, אז $y'\cdot y$ מתאפס בשתי נקודות שונות, ואז הנגזרת של $y'\cdot y$ מתאפסת באיזושהי נקודה ביניהן וזה היה רמז דק כמו פיל).

ב. בדקו אם הפונקציות x , e^{x^2} הן פתרונות של משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים: (i) בקטע $(0,1)$, (ii) בקטע $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.



$$y''=-p(x)y$$

$$(y'\cdot y)'=y''y+y'^2$$

נניח כי $y(x)$ מתאפס ב-2 נק', ו- $y\neq 0$

לכן גם הביטוי $y\cdot y'$ מתאפס בשתי הנק' הנ"ל.

לכן, לפי משפט רול, קיימת שלפחות:

$(y\cdot y')'$

מתאפס.

$$(y\cdot y')'=y\cdot y''+y'^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$y\cdot(-p(x))y+y'^2=0$$

לכן גם y וגם y' מתאפסים באותה נקודה.

$\boxed{\text{לכן, מתקיים } y=0 \text{. סתירה. מש"ל}}$

ג) סעיף א:

$$W(e^{x^2}, x, x) = \begin{vmatrix} e^{x^2} & x \\ 2xe^{x^2} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{x^2} - 2x^2e^{x^2} = e^{x^2}(1-2x^2)$$

ולכן, $W(x)$ מתאפס ב $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

לפי משפט 2.3.16, אז סתירה לכך שקיים מד"ר הומוגנית מסדר שני בקטע שכולל את $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

לכן בקטע $(0,1)$ לא קיים.

לפי שאלה 3.2.7, קיימת משוואה בקטע $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

סעיף ב

שאלה 4 (25 נקודות)

א. פתרו את המשוואה $y''-2y'-3y=e^{4x}$

ב. פתרו את המשוואה $y''+y=x\sin x$

א)

$$y''-2y'-3y=e^{4x}$$

נציב פיתרון: $y=P(x)e^{ax}$

$$y'=P'(x)e^{ax}+aP(x)e^{ax}$$

$$y''=P''(x)e^{ax}+a^2P(x)e^{ax}+2aP'(x)e^{ax}$$

נקבל:

$$P''(x)e^{ax}+a^2P(x)e^{ax}+2aP'(x)e^{ax}-2P'(x)e^{ax}-2aP(x)e^{ax}-3P(x)e^{ax}=e^{4x}$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{ax}\cdot\left(P''(x)+(2a-2)P'(x)+(a^2-2a-3)P(x)\right)=e^{4x}$$

ניקח $a=4$ מכנ׳ ש- $g(x)=e^{4x}$

$$\underbrace{\cancel{e^{4x}}}_{\neq 0}\left(P''(x)+6P'(x)+5P(x)-1\right)=0$$

$$\Downarrow$$

ונקבל

$$P''(x)+6P'(x)+5P(x)=1$$

$P(x) = Ax^2 + Bx + C$ ויקה

$P'(x) = 2Ax + B$

$P''(x) = 2A$

$2A + 12Ax + 6B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 1$

$2A + 6B + 5C = 1 \quad C = \frac{1}{5}$

$12A + 5B = 0 \quad B = 0$

$5A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$

$P(x) = \frac{1}{5}$ לכן, נכונה

$\boxed{y = \frac{1}{5} \cdot e^{4x}}$ ולכן

ב)

$$y'' + y = x\sin(x)$$

נפתור את המשוואה ההומוגנית:

$$y'' = -y$$

נציב $y = e^{\lambda x}$ ונקבל:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} = -e^{\lambda x}$$

נקבל

$$\lambda^2 = -1$$

ואז

$$\lambda = i$$

לכן

$$y = e^{ix}$$

נציב במשוואה הנתונה:

$$y = f(x)e^{ix}$$

$$f''(x)e^{ix} - \cancel{f(x)e^{ix}} + 2if'(x)e^{ix} + \cancel{f(x)e^{ix}} = x\sin(x)$$

$$f''(x)e^{ix} + 2if'(x)e^{ix} = x\sin(x)$$

ונקבל:

$$f''(x)+2if'(x)=\frac{x\sin(x)}{e^{ix}}$$

נפתור את המשוואה ההומוגנית:

$$f''(x)+2if'(x)=0$$

נציב $f'(x)=e^{\lambda x}$:

$$f''(x)=\lambda e^{\lambda x}$$

$$\lambda e^{\lambda x}+2ie^{\lambda x}=0$$

$$\lambda e^{\lambda x}=-2ie^{\lambda x}$$

$$\lambda=-2i$$

לכן קיבלנו

$$f'(x)=e^{-2ix}$$

נציב במשוואה הרגילה, ניקח:

$$f'(x)=g(x)e^{-2ix}$$

$$g'(x)e^{-2ix}-\cancel{2ig(x)e^{-2ix}}+\cancel{2ig(x)e^{-2ix}}=\frac{x\sin(x)}{e^{ix}}$$

$$\frac{g'(x)}{e^{2ix}}=\frac{x\sin(x)}{e^{ix}}\quad /\cdot e^{2ix}$$

$$g'(x)=x\sin(x)e^{ix}$$

$$\sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$ ידוע כי

נקבל:

$$g'(x) = x \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot e^{ix}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2i}\left(x e^{2ix} - x\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{2i}\left(\int x e^{2ix} dx - \frac{1}{2}x^2\right) + C_1$$

$$g(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{x e^{2ix}}{2i} - \int \frac{e^{2ix}}{2i} dx\right) + \frac{1}{4i}x^2$$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{4i}x^2 + \frac{1}{2i} \cdot \frac{x e^{2ix}}{2i} + \frac{1}{8i}e^{2ix} + C_1}$$

$$f'(x) = e^{-2ix} \cdot g(x)$$

$$= \frac{x^2}{4i} \cdot e^{-2ix} + \frac{x}{-4} + \frac{1}{8i} + C_1 e^{-2ix}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{4i}\int x^2 e^{-2ix} dx}_{\text{אינטגרציה בחלקים}} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{8i} + C_1 e^{-2ix}$$

$$\int x^2 e^{-2ix} dx = \frac{x^2 e^{-2ix}}{-2i} - \int \frac{x e^{-2ix}}{-i} dx$$

$$= \frac{x^2 e^{-2ix}}{-2i} - \left(x \frac{e^{-2ix}}{-2} - \int \frac{e^{-2ix}}{-2} dx\right) =$$

$$\frac{x^2 e^{-2ix}}{-2i} + \frac{x e^{-2ix}}{2} + \frac{1}{4i} e^{-2ix} + C_2$$

$$= e^{-2ix}\left(\frac{x^2}{-2i} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4i}\right) + C_2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{4i} e^{-2ix}\left(\frac{x^2}{-2i} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4i} + C_2\right) - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{8i} + C_1 e^{-2ix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4i} e^{-ix}\left(\frac{x^2}{-2i} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4i}\right) - \frac{x^2}{8} e^{ix} + \frac{1}{8i} x e^{ix} + C_1 e^{-ix}}$$