שאלה 1 (15 נקודות)

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $x^2+y^2=2xyy'$ ב- 3 דרכים:

א. בעזרת צורה הומוגנית

ב. כמשוואה מדוייקת

ג. בעזרת צורת ברנולי

א)

$$x^2+y^2=2xyy'$$

לפי ההגדרה ב- 1.2 עמ' 17.

$$y'+a(x)y=0$$

$$x^2+y^2=2xyy' \quad / : xy$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2y'$$

ניקח

$$f(t)=\frac{1}{t}+t$$

נקבל

$$2y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

נציב $z=\frac{y}{x}$

נקבל

$$y=zx$$

$$y'=z'x+z$$

נקבל:

$$2y' = f(z)$$

$$2z'x + 2z = f(z)$$

$$2z'x + 2z = z + \frac{1}{z}$$

$$2z'x + z = \frac{1}{z} \quad /:x$$

$$2z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{z \cdot x} \quad / \cdot z$$

$$2z'z + z^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$2z'z = \frac{1}{x}(1 - z^2)$$

$$\frac{2z'z}{1 - z^2} = \frac{1}{x}$$

$$z' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{2z \cdot \frac{dz}{dx}}{1 - z^2} = \frac{1}{x}$$

$$\int$$

$$\frac{2z}{1-z^2}\,dz = \frac{1}{x}\,dx \quad / \int$$

$$\int \frac{2z}{1-z^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\ln(1-z^2) = \ln(x) + C_1$$

$$\ln(1-z^2) = -\ln(x) + C_2$$

$$1-z^2 = \frac{1}{x}\cdot e^{C_2}$$

$$1-\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x}\cdot e^{C_2}$$

$$y^2 = xe^{C_2} + x^2$$

פיתרון סופי!! $\boxed{y^2 = x^2 + Cx \qquad C>0}$

$$y = \pm\sqrt{x^2 + \overset{*}{C}x}$$

ב)

$$x^2+y^2=2xyy'$$

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

ונקבל:

$$\underbrace{(x^2+y^2)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(-2xy)}_{N(x,y)}dy=0$$

נבדוק דיוק:

$$M_y=N_x$$

$$2y\neq -2y$$

לכן, נמצא גורם אינטגרציה $\mu(x)$:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{M_y-N_x}{N}$$

$$(\ln(\mu(x)))'=\frac{2y-(-2y)}{-2xy}$$ ונקבל

$$(\ln(\mu(x)))'=\frac{-2}{x} \quad / \int dx$$

נקבל

$$\ln(\mu(x)) = -2\ln(x)$$

$$\ln(\mu(x)) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2}$$ ונקבל

נכפול ב- $\mu(x)$:

$$\frac{1}{x^2}\left((x^2+y^2)dx + (-2xy)dy\right) = 0$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{\left(-\frac{2y}{x}\right)}_{N(x,y)}dy = 0$$

הגדרנו "מחדש":

נבדוק האם זו שוואה מדויקת:

$$M_y = \frac{2y}{x^2} = N_x$$

תהי פונ' כאשר

$$\Phi(x,y) = \int M(x,y)dx =$$

$$\phi(x,y) = \int\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)dx = x - \frac{y^2}{x}$$

נציב

$$\phi(x,y) = C_1$$

נקבל

$$C_1 = x - \frac{y^2}{x} \quad / \cdot x$$

$$x^2 - C_1 x = y^2$$

ונקבל

$$\boxed{y^2 = x^2 + Cx}$$

פיתרון סתום!!!

$$y = \pm\sqrt{x^2 + Cx}$$

ג)

$$x^2+y^2=2xyy'$$

נציב לפי שיטות בתרגול:

$$z=y^2$$

$$z'=2yy'$$

נקבל

$$x^2+z=xz' \;/:x^2$$

$$1+\frac{z}{x^2}=\frac{z'}{x}$$

$$1=\frac{z'}{x}-\frac{z}{x^2} \;/\int dx$$

$$\int dx=\int\left(z\cdot\frac{1}{x}\right)'dx$$

$$x+C=z\cdot\frac{1}{x} \;/\cdot x$$

$$x^2+Cx=z=y^2$$

פתרון כללי! $\boxed{y^2=x^2+Cx}$ או

$$y=\pm\sqrt{x^2+Cx}$$

שאלה 2 (20 נקודות)

א. פתרו את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = e^{x+y} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

ומצאו את תחום ההגדרה של הפתרון.

ב. הראו שלבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'\sin x + y\cos x = 1 \\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

יש פתרון יחיד בקטע $(0,\pi)$ ומצאו אותו. הראו שאין פתרון בשום קטע פתוח המכיל את π.

איך מתיישב הדבר עם משפט הקיום והיחידות?

(א

$$y' = e^x \cdot e^y \qquad y(1) = -1$$

$$y' e^{-y} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} e^{-y} = e^x$$

$$e^{-y} dy = e^x dx \quad / \int$$

$$\int e^{-y} dy = \int e^x dx$$

$$-e^{-y} = e^x + C_1$$

ניקח $C_2 = -C_1$

$$e^{-y} = C_2 - e^x \quad / \ln$$

$$-y = \ln(C_2 - e^x)$$

$$\begin{cases} y = -\ln(c_2 - e^x) \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

$$-1 = -\ln(c_2 - e^1)$$

$$e = c_2 - e$$

$$c_2 = 2e$$ ונקבל

ולכן

$$y = -\ln(2e - e^x)$$

ת״ה: (3ג)

$$2e - e^x > 0$$

$$2e > e^x \quad / \ln$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 + \ln(2) > x \\ y = -\ln(2e - e^x) \end{array}}$$

ונקבל:

ב)

$$\begin{cases} y'\sin(x)+y\cos(x)=1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$y'\sin(x)+y\cos(x)=1$$

נזכור כי $y'=\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}\sin(x)+y\cos(x)=1 \quad /\cdot dx$$

$$\underbrace{(y\cos(x)-1)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(\sin(x))}_{N(x,y)}dy$$

נבדוק האם המשוואה מדוייקת:

$$M_y=\cos(x) = \cos(x)=N_x$$

לכן המשוואה מדויקת!!

ניקח

$$\phi(x,y)=\int(y\cos(x)-1)dx$$

נקבל

$$\phi(x,y) = y\sin(x) - x = C$$

ניקח C_1 כאשר

$$-y\sin(x) - x = C$$

נקבל

$$\begin{cases} y = \dfrac{C+x}{\sin(x)} \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{C + \frac{\pi}{2}}{1}$$

$$C = 0$$

נקבל

ולכן

$$\boxed{y = \frac{x}{\sin(x)}} \quad \boxed{x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{N}}$$

נסמן A הפתרון:

של המשוואה:

$$y' \sin(x) + y\cos(x) = 1$$

נסדר את המשוואה לפי משפט היחידות:

$$y' + y\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\sin(x)}$$

המשוואה לא מוגדרת ב $x=\pi k$ לכל $k\in\mathbb{N}$

לכן, אין פתרון למשוואה בנקודות אלו,

לכן לא יכול להיות קטע שבו קיים פתרון.

משפט ב

שאלה 3 (25 נקודות)

פתרו כל אחת מן המשוואות הבאות (גם פתרון סתום מתקבל).

א. $(1+x^2)\,y^3 + x(1-y^2)\,y' = 0$

ב. $x^2\,\frac{dy}{dx} + 2xy - y^3 = 0$

ג. $(e^x \sin y - 2y\sin x)\,dx + (e^x \cos y + 2\cos x)\,dy = 0$

א')

$$(1+x^2)y^3 + x(1-y^2)y' = 0$$

נזכיר: $y' = \frac{dy}{dx}$

נכפול ב- dx:

$$(y^2-1)\,x\,dy = (1+x^2)y^3\,dx$$

$$\int \left(\frac{y^2}{y^3} - \frac{1}{y^3}\right)dy = \int \frac{1}{x} + \frac{x^2}{x}\,dx$$

ונקבל:

$$\boxed{\ln(y) - \frac{1}{2}y^{-2} = \ln(x) + \frac{1}{2}x^2}$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - y^3 = 0$$ ב)

$$y' + \frac{2y}{x} - \frac{y^3}{x^2} = 0$$

$$y' + y\cdot\frac{2}{x} = y^3\cdot\frac{1}{x^2} \quad / \cdot y^{-3}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-2y'\cdot y^{-3}\right) + y^{-2}\cdot\frac{2}{x} = \frac{1}{x^2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(y^{-2}\right)' + y^{-2}\cdot\frac{2}{x} = \frac{1}{x^2}$$

$$z = y^{-2}$$ ניקח

נקבל

$$-\frac{1}{2}z' + z\cdot\frac{2}{x} = \frac{1}{x^2} \quad / \cdot x^2$$

$$-\frac{1}{2}z'x^2 + z\cdot x = 1 \quad / \cdot(-2)$$

$$z'x^2 - 2xz = -2$$

$$\left(\frac{z}{x^2}\right)'\cdot x^4 = -2$$

$$\left(\frac{z}{x^2}\right)' = \frac{-2}{x^4} \quad / \int dx$$

$$\frac{z}{x^2} = -2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{x^3} + C$$

$$z = \frac{2}{3x} + Cx^2$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{2}{3x} + Cx^2$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{\frac{1}{\frac{2}{3x} + Cx^2}}}$$

ג)

$$\underbrace{\left(e^{x}\sin(y)-2y\sin(x)\right)}_{M}dx+\underbrace{\left(e^{x}\cos(y)+2\cos(x)\right)}_{N}dy=0$$

נבדוק האם המשוואה מדוייקת:

$$M_y=e^{x}\cdot\cos(y)-2\sin(x)$$

$$N_x=e^{x}\cos(y)-2\sin(x)$$

לכן המשוואה מדויקת!!

נירוח

$$\phi(x,y)=\int\left(e^{x}\sin(y)-2y\sin(x)\right)dx+C_1y+C_2$$

$$\phi(x,y)=\sin(y)e^{x}+2y\cos(x)+C_1y+C_2=0$$

פתרון למד"ר:

$$\boxed{\sin(y)e^{x}+2y\cos(x)+C_1y=-C_2}$$

ונקבל

לכל C_1, C_2.

שאלה 4 (20 נקודות)

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x-y^2)\,dx+2xy\,dy=0$

(רמז: השתמשו בהצבה $y^2=z$)

$$(x-y^2)dx+2xydy=0$$

$$(y^2-x)dx=2xydy \;/ :dx$$

ניקח $y^2=z$

ונקבל $z-x=xz'$

$$z-z'x=x$$

$$-\left(\frac{z}{x}\right)'\cdot x^2=x$$

$$-\left(\frac{z}{x}\right)'=\frac{1}{x} \;/\int dx$$

$$-\frac{z}{x}=\ln(|x|)+C$$

$$z=-x\ln(|x|)+Cx$$

$$y^2=-x\ln(|x|)+Cx$$

$$\boxed{y=\pm\sqrt{x(c-\ln(|x|))}}$$

תשובה הגדרה: $e^c>x>0$ או $x<-e^c$

$x<0,\; c-\ln(|x|)<0$ או $x>0 \;\; c-\ln(x)>0$

$c<\ln(|x|)$ $\quad$ $c>\ln(x)$

$\boxed{x<-e^c} \Leftarrow e^c<|x|$ $\quad$ $\boxed{e^c>x>0}$

שאלה 5 (20 נקודות)

א. פתרו את המשוואה $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$

ב. פתרו את המשוואה $\sin y\, y' = \cos x\,(2\cos y - \sin^2 x)$

(רמז: הציבו $v = \cos y$)

ג. פתרו את המשוואה $y' = y^4 \cos x + y\,\mathrm{tg}x$

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx \quad /:dx$$

$$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

ניקח $z = \frac{y}{x}$:

$$y' = z + \sqrt{1+z^2}$$

נסמן $z = \frac{y}{x}$

$$y = zx$$

$$\frac{dy}{dx} = z'x + z$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z$$

ונקבל:

$$z'x + \cancel{z} = \cancel{z} \pm \sqrt{1+z^2}$$

$$z' = \frac{\pm\sqrt{1+z^2}}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\pm\sqrt{1+z^2}}{x}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \pm\frac{dx}{x} \quad /\int$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,dz = \pm\int \frac{1}{x}\,dx$$

ונקבל

$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) = \pm\ln(|x|)+C$$

$$\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right) = \pm\ln\left(|x|\right)+C$$

$$\ln\left(\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2}}\right) = \pm\ln\left(|x|\right)+C$$

$$\ln\left(\frac{y\pm\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right) = \pm\ln\left(|x|\right)+C \quad /e^{\wedge}$$

$$\frac{y \pm \sqrt{x^2+y^2}}{x} = |x|^{\pm 1} \cdot e^c \quad / \cdot x$$

$$\frac{y \pm \sqrt{x^2+y^2}}{x} = |x|^{\pm 1} \cdot e^c$$

ונקבל: עבור $x>0$:

$$y \pm \sqrt{x^2+y^2} = x^2 e^c$$

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = x^2 e^c - y \quad /()^2$$

ניקח $b = e^c$

$$x^2 + \cancel{y^2} = b^2x^4 + \cancel{y^2} - 2yx^2b \quad / : x^2 \neq 0$$

$$1 = b^2x^2 - 2yb \quad / :(b \cdot 2) \neq 0$$

$$\frac{1}{2b} = \frac{1}{2}bx^2 - y$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2b} - \frac{1}{2}bx^2}$$

עבור שלו $x<0$:

$$y \pm \sqrt{x^2+y^2} = -e^c \quad / \cdot \left(y \mp \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

ניקח $b = e^c$

$-x^2 = by \pm \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad x<0$

לכל $b>0$ פתרון מתאים

$y = \frac{1}{2b} - \frac{1}{2} b x^2$ $\quad x>0$

ג)

$$\sin(y)y' = \cos(x)(2\cos(y) - \sin^2(x))$$

ניקח $z = \cos(y)$

ונקבל:

$$-z' = \cos(x)(2z - \sin^2(x))$$

$$z' = \cos(x)(\sin^2(x) - 2z)$$

$$z' + 2\cos(x)\cdot z = \cos(x)\sin^2(x)$$

נכפול בגורם אינטגרציה $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int 2\cos(x)dx}$$

$$\mu(x) = e^{2\sin(x)+c}$$

ונקבל:

$$z' e^{2\sin(x)+c} + 2\cos(x) e^{2\sin(x)+c}\cdot z = \cos(x)\cdot \sin^2(x)\cdot e^{2\sin(x)+c}$$

$$\Downarrow$$

$$(z\cdot e^{2\sin(x)+c})' = \cos(x)\sin^2(x)\cdot e^{2\sin(x)+c} \quad / \int dx$$

$$z \cdot e^{2\sin(x)+c} = \underbrace{\int \cos(x)\sin^2(x)\, e^{2\sin(x)+c}\, dx}$$

ניקח ונעשה הצבה:

$$u = \sin(x)$$

$$du = \cos(x)\, dx$$

$$\frac{du}{\cos(x)} = dx$$

ונקבל:

$$\int \cancel{\cos(x)}\, u^2 \cdot e^{2u+c} \frac{du}{\cancel{\cos(x)}} =$$

$$\int u^2 e^{2u+c} du =$$

נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\int \underbrace{u^2}_{f(x)} \underbrace{e^{2u+c}}_{g'(x)} du = u^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2u+c} - \int \cancel{2} u \frac{1}{\cancel{2}} e^{2u+c} du$$

$$= \frac{1}{2} u^2 e^{2u+c} - \int \underbrace{u}_{f(x)} \underbrace{e^{2u+c}}_{g'(x)} du =$$

נבצע שוב אינטגרל בחלקים:

ונקבל:

$$= \frac{1}{2}u^2 e^{2u+c} - \left(\frac{1}{2}u e^{2u+c} - \int \frac{1}{2} e^{2u+c} du\right)$$

$$= \frac{1}{2}u^2 e^{2u+c} - \frac{1}{2}u e^{2u+c} + \frac{1}{4} e^{2u+c} + C_1$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2(x) e^{2\sin(x)+c} - \frac{1}{2}\sin(x) e^{2\sin(x)+c} + \frac{1}{4} e^{2\sin(x)+c} + C_1$$

בחזרה למשוואה המקורית:

$$z \cdot e^{2\sin(x)+c} = \int \cos(x)\sin^2(x) e^{2\sin(x)+c} dx$$

ונקבל

$$z \cdot e^{2\sin(x)+c} = \frac{1}{2}\sin^2(x) e^{2\sin(x)+c} - \frac{1}{2}\sin(x) e^{2\sin(x)+c} + \frac{1}{4} e^{2\sin(x)+c} + C_1$$

$$z = \frac{1}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{4} + c_1 \cdot e^{-2\sin(x)-c}$$

ונקבל:

$$\boxed{\cos(y) = \frac{1}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{4} + c_1 \cdot e^{-2\sin(x)-c}}$$

לכל C_1, C

ג)

$$y' = y^4\cos(x) + y\,tg(x)$$

$$y' - tg(x)\,y = y^4\cos(x) \quad / \cdot y^{-4}$$

$$y'\cdot y^{-4} - tg(x)\cdot y^{-3} = \cos(x)$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\left(y^{-3}\right)' - tg(x)\,y^{-3} = \cos(x)$$

ניקח $z = y^{-3}$

$$-\frac{1}{3}z' - tg(x)\cdot z = \cos(x) \quad / \cdot(-3)$$

$$z' + 3\,tg(x)\cdot z = -3\cos(x)$$

נמצא $\mu(x)$ מקדם אינטגרציה:

$$\mu(x) = e^{\int 3tg(x)dx} =$$

$$\mu(x) = e^{-3\ln(\cos(x))+c}$$

ונקבל:

$$z' + 3\,tg(x)\cdot z = -3\cos(x) \quad / \cdot \mu(x)$$

$$z' \cdot e^{-3\ln(\cos(x))+c} + 3tg(x)\cdot e^{-3\ln(\cos(x))+c}\cdot z = -3\cos(x)\cdot e^{-3\ln(\cos(x))+c}$$

$$\left(z\cdot e^{-3\ln(\cos(x))+c}\right)' = -3\cos(x)\cdot e^{-3\ln(\cos(x))+c}$$

$$\int dx$$

$$z\cdot e^{-3\ln(\cos(x))+c} = \int -3\cos(x)\cdot e^{-3\ln(\cos(x))+c} =$$

$$= -3e^{c}\cdot\int \cos(x)\cdot\frac{1}{\cos^3(x)}dx = -3e^{c}\cdot\left(\tan(x)+C_2\right)$$

ונקבל:

$$z\cdot\frac{1}{\cos^3(x)}\cdot\cancel{e^{c}} = -3\cancel{e^{c}}\cdot\left(\tan(x)+C_2\right)$$

$$z = -3\left(\cos^2(x)\cdot\sin(x)+C_2\cdot\cos^3(x)\right)$$

$$\frac{1}{y^3} = -3\cos^2(x)\sin(x)-3C_2\cdot\cos^3(x)$$

$$\boxed{y = \sqrt[3]{\frac{1}{-3\cos^2(x)\sin(x)-3C_2\cdot\cos^3(x)}}}$$

$\boxed{\text{לכל } C_2.}$