Mamman 12

שאלה 1

שאלה 1 (20 נקודות)

הפונקציה $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ נתונה עבור $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ על־ידי $(x,y,z)\mapsto\dfrac{x^2yz^2}{x^8+y^6+z^4}$

וכן $f(0,0,0)=0$. קבעו מהן כל הנקודות בהן f גזירה, ומהן הנקודות בהן היא אינה גזירה.

נסתכל על נקודה 0. נבדוק האם היא גזירה בf.
נניח כי קיימת

$$\nabla f(0^{[3]})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(0^{[3]})\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0^{[3]})\\ \frac{\partial f}{\partial z}(0^{[3]})\end{pmatrix}$$

נחשב את הגבולות של הנגזרות החלקיות:

$$\lim_{h\to0}(\frac{f(h,0,0)-f(0)}{h})=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)=\lim_{h\to0}(\frac{f(h,0,0)-f(0)}{h})=\lim_{h\to0}(\frac{\frac{h^2*0*0^2}{h^8+0}-0}{h})=0$$

$$\lim_{h\to0}(\frac{f(0,h,0)-f(0)}{h})=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)=\lim_{h\to0}(\frac{f(0,h,0)-f(0)}{h})=\lim_{h\to0}(\frac{\frac{0^2*h*0^2}{0+h^6+0}-0}{h})=0$$

$$\lim_{h\to0}(\frac{f(0,0,h)-f(0)}{h})=\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=\lim_{h\to0}(\frac{f(0,0,h)-f(0)}{h})=\lim_{h\to0}(\frac{\frac{0^2*0*h^2}{0+h^4}-0}{h})=0$$

ונקבל לפי משפט 6.ג.3:

$$\nabla f(0^{[3]})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(0^{[3]})\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0^{[3]})\\ \frac{\partial f}{\partial z}(0^{[3]})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

לכן נקבל:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}(\frac{f(x,y,z)+f(0,0,0)-\nabla f(0,0,0)*\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})=$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}(\frac{\frac{x^2yz^2}{x^8+y^6+z^4}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$$

נמיר להצגה פולארית:

$$(x,y,z)\mapsto(r,\theta_1,\theta_2)$$

$$x\mapsto r\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)$$

$$y\mapsto r\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)$$

$$z\mapsto r\sin(\theta_1)$$

ונקבל:

$$\lim_{r\to0^+}\left(\frac{\frac{(r\cos(\theta_1)\cos(\theta_2))^2(r\cos(\theta_1)\sin(\theta_2))(r\sin(\theta_1))^2}{(r\cos(\theta_1)\cos(\theta_2))^8+(r\cos(\theta_1)\sin(\theta_2))^6+(r\sin(\theta_1))^4}}{\sqrt{(r\cos(\theta_1)\cos(\theta_2))^2+(r\cos(\theta_1)\sin(\theta_2))^2+(r\sin(\theta_1))^2}}\right)=$$

$$\lim_{r\to0^+}\left(\frac{\frac{r^5\cos^5(\theta_1)\cos^2(\theta_2)\sin(\theta_2)\sin^2(\theta_1)}{(r\cos(\theta_1)\cos(\theta_2))^8+(r\cos(\theta_1)\sin(\theta_2))^6+(r\cos(\theta_1))^4}}{\sqrt{(r\cos(\theta_1)\cos(\theta_2))^2+(r\cos(\theta_1)\sin(\theta_2))^2+(r\cos(\theta_1))^2}}\right)$$

נחלק בr^5 את המונה והמכנה:

$$\lim_{r\to0^+}\left(\frac{\cos^5(\theta_1)\cos^2(\theta_2)\sin(\theta_2)\sin^2(\theta_1)}{(r^3(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2))^8+r(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2))^6+(\cos(\theta_1))^4)(\sqrt{(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2))^2+(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2))^2+(\cos(\theta_1))^2}}\right)=$$

$$\frac{\cos^5(\theta_1)\cos^2(\theta_2)\sin(\theta_2)\sin^2(\theta_1)}{(\cos(\theta_1))^4)(\sqrt{(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2))^2+(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2))^2+(\cos(\theta_1))^2})}\neq0$$

לכן זו סתירה להגדרה ולכן הנקודה לא גזירה ב0.

נסתכל על הנקודות$(x,y,z)\neq(0,0,0)$.

לפי משפט 3.ג.6, נחשב:

$$\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2xyz^2(x^8+y^6+z^4)-8x^7x^2yz^2}{(x^8+y^6+z^4)^2}\\ \frac{x^2z^2(x^8+y^6+z^4)-6x^5x^2yz^2}{(x^8+y^6+z^4)^2}\\ \frac{2zyx^2(x^8+y^6+z^4)-4z^3x^2yz^2}{(x^8+y^6+z^4)^2}\end{pmatrix}$$

קיבלנו ש $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ פונ רציפות ב$(x,y,z)\neq(0,0,0)$ ולכן היא גזירה חלקית ברציפות בכל $\mathbb{R}^2\backslash\{0^{[3]}\}$ ולכן גזירה בכל $\mathbb{R}^2\backslash\{0^{[3]}\}$ לפי משפט 3.ד.2

לכן הפונ' גזירה בכל $\mathbb{R}^2\backslash\{0^{[3]}\}$

מש"ל

שאלה 2

שאלה 2 (15 נקודות)

בשאלה זאת תוכיחו "כלל גזירה" עבור פעולת כפל מטריצות, המכליל את "כלל המכפלה" מהקורס חשבון אינפיניטסימלי 1: הנוסחה לנגזרת של מכפלת פונקציות גזירות.

יהיו k,l,m,n מספרים טבעיים, ותהי $a \in \mathbf{R}^k$.

תהי f פונקציה חלקית מ־ $\mathbf{R}^k$ ל־ $M_{l\times m}(\mathbf{R})$ שגזירה בנקודה a.

תהי g פונקציה חלקית מ־ $\mathbf{R}^k$ ל־ $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ שגזירה בנקודה a.

נגדיר $p: x \mapsto f(x)g(x)$ (הפעולה היא כפל מטריצות).

הפונקציה p היא פונקציה חלקית מ־ $\mathbf{R}^k$ ל־ $M_{l\times n}(\mathbf{R})$.

הוכיחו ש־ p גזירה בנקודה a ושמתקיים $Dp_a(h) = f(a)Dg_a(h) + Df_a(h)g(a)$ לכל $h \in \mathbf{R}^k$.

ניקח פונקציות חלקיות שגזירות בנקודה a:

$$f(x) : \mathbb{R}^k \to M_{l\times m}(\mathbb{R}), g(x) : \mathbb{R}^k \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

ניקח:

$$p(x) : \mathbb{R}^k \to M_{l\times n}(\mathbb{R}),\ x \mapsto f(x)g(x)$$

לכן מתקיימת הגדרת הנגזרת:

$$\lim_{h\to 0^{[k]}} \frac{f(a+h) - f(a) - Df_a(h)}{|h|} = 0$$

$$\lim_{h\to 0^{[k]}} \frac{g(a+h) - g(a)) - Dg_a(h)}{|h|} = 0$$

ולכן, נקבל שמתקיים:

$$f(a+h) - f(a) = Df_a(h) + o(|h|)$$

$$g(a+h) - g(a) = Dg_a(h) + o(|h|)$$

ונקבל:

$$f(a+h) = f(a) + Df_a(h) + o(|h|)$$

$$g(a+h) = g(a) + Dg_a(h) + o(|h|)$$

נבדוק אם הגבול קיים ושווה ל-0 וקיימת פונקציה ליניארית כאשר:

$$\frac{p(a+h) - p(a) - Dp_a(h)}{|h|} \xrightarrow[h\to 0^{[k]}]{} 0$$

ונקבל:

$$\frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) - Dp_a(h)}{|h|} \xrightarrow[h\to 0^{[k]}]{} 0$$

$$\frac{(f(a)+Df_a(h)+o(|h|))(g(a)+Dg_a(h)+o(|h|))-f(a)g(a)-Dp_a(h)}{|h|}\xrightarrow[h\to 0^{[k]}]{}0$$

$$\frac{f(a)g(a)+f(a)Dg_a(h)+Df_a(h)g(a)+o(|h|)+o(|h|)-f(a)g(a)-Dp_a(h)}{|h|}\xrightarrow[h\to 0^{[k]}]{}0$$

ונקבל:

$$\frac{f(a)Dg_a(h)+Df_a(h)g(a)-Dp_a(h)}{|h|}+\frac{o(|h|)+o(|h|)}{|h|}\xrightarrow[h\to 0^{[k]}]{}0$$

$$\frac{f(a)Dg_a(h)+Df_a(h)g(a)-Dp_a(h)}{|h|}+0\xrightarrow[h\to 0^{[k]}]{}0$$

נראה שניתן להציב:

$$Dp_a(h)=f(a)Dg_a(h)+Df_a(h)g(a)$$

לכן הגבול מתקיים ושווה ל0

הרכבה וחיבור של פונקציות ליניאריות יוצרים פונ' ליניארית, לכן $Dp_a(h)$ היא פונ' לינארית.

לכן הנקודה גזירה וזו הנגזרת שלה. מש"ל

שאלה 3

שאלה 3 (15 נקודות)

יהיו k ו־n מספרים טבעיים ותהי $f:M_{k\times k}(\mathbf{R})\to M_{k\times k}(\mathbf{R})$ המוגדרת על ידי $X\mapsto X^n$.

מדוגמה 6.י.1 נובע שזאת פונקציה פולינומית ולכן היא ודאי גזירה ב־$M_{k\times k}(\mathbf{R})$.

הראו ש־$Df_X(I)=nX^{n-1}$ לכל $X\in M_{k\times k}(\mathbf{R})$, כאשר I היא מטריצת היחידה.

אראה זאת באינדוקציה.

ניקח $n=1$:

$$f(X)=X$$

נקבל:

$$\frac{f(X+H)-f(X)-Df_X(H)}{|H|}\xrightarrow[H\to 0^{[k^2]}]{}0$$

$$\frac{X+H-X-Df_X(H)}{|H|}\xrightarrow[H\to 0^{[k^2]}]{}0$$

ולכן:

$$\frac{H-Df_X(H)}{|H|}\xrightarrow[H\to 0^{[k^2]}]{}0$$

ולכן

$$Df_X(H)=IH$$

ונקבל:

$$Df_x(I) = I = 1X^0$$

לפי הנחת האינדוקציה:

$$g(x) = X^n, Dg_X(I) = nX^{n-1}$$

ניקח:

$$h(X) = X^{n+1} = h_1(X)h_2(X)$$

כאשר:

$$h_1(X) = X,\ h_2(X) = X^n$$

$$Dh_{1X}(I) = I,\ Dh_{2X}(I) = nX^{n-1}$$

לפי שאלה 2 (שניתן להתבסס עליה), נקבל:

$$Dh_X(H) = h_1(X)Dh_{2X}(H) + Dh_{1X}(H)h_2(X)$$

נציב $H = I$:

$$Dh_X(I) = h_1(X)Dh_{2X}(I) + Dh_{1X}(I)h_2(X)$$

$$Dh_X(I) = XnX^{n-1} + IX^n = nX^n + X^n = (n+1)X^n$$

$$Dh_X(I) = (n+1)X^n$$

ולכן האינדוקציה מתקיימת, לכל $n \in \mathbb{N}$. לכן טענת השאלה הראשונה נכונה.
מש"ל

שאלה 4

שאלה 4 (20 נקודות)

א. תהי f פונקציה סקלרית המוגדרת ורציפה בקבוצה $\mathbf{R}\times[c,d]$. תהי $\varphi:\mathbf{R}\to[0,\infty)$ שעבורה

האינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$ מתכנס ולכל $(x,t)\in\mathbf{R}\times[c,d]$ מתקיים: $|f(x,t)|\le\varphi(x)$

הוכיחו שהפונקציה $F:t\mapsto\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)dx$ מוגדרת ורציפה בקטע $[c,d]$.

ב. תהי f פונקציה סקלרית המוגדרת ורציפה בכל המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^{k+1}=\mathbf{R}\times\mathbf{R}^k$.

תהי $\varphi:\mathbf{R}\to[0,\infty)$ שעבורה האינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$ מתכנס ולכל $x\in\mathbf{R}$ ו-$y\in\mathbf{R}^k$

מתקיים: $|f(x,y)|\le\varphi(x)$

הוכיחו שהפונקציה $F:y\mapsto\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$ מוגדרת ורציפה בכל המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^k$.

סעיף א

ניקח:

$$G:t\mapsto F(t)=\int_0^{\infty}f(x,t)dx+\int_{-\infty}^{0}f(x,t)dx$$

ניתן גם לכתוב זאת:

$$G:t\mapsto\int_0^{\infty}(f(x,t)+f(-x,t))dx$$

נתסכל על φ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=\int_0^{\infty}(\varphi(x)+\varphi(-x))dx$$

נבדוק:

$$|f(x,t)+f(-x,t)|<\varphi(x)+\varphi(-x)$$

ידוע כי φ פונקציה עם ערכים חיוביים בלבד. לכן נקבל:

$$|f(x,t)+f(-x,t)|<|f(x,t)|+|f(-x,t)|<\varphi(x)+\varphi(-x)$$

פסוק אמת לפי הנתון.
לכן, מתקיים

$$|f(x,t)+f(-x,t)|<\varphi(x)+\varphi(-x)$$

לכן, לפי טענה 3.ד.4 נקבל כי G פונ' מוגדרת ורציפה בקטע $[c,d]$.
הפונ' G שווה לפונ' F. לכן F רציפה ומוגדרת בקטע $[c,d]$.
מש"ל א

סעיף ב

נסתכל על האינטגרל:

$$F(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=$$

$$F(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{-L}f(x,y)dx+\int_{L}^{-L}f(x,y)dx+\int_{L}^{\infty}f(x,y)dx$$

יהי $\varepsilon>0, y_0\in\mathbb{R}^k$. נמצא $\delta>0$ כאשר מתקיים לכל $|y-y_0|<\delta$:

$$|F(y)-F(y_0)|=|\int_{-\infty}^{-L}f(x,y)dx+\int_{L}^{\infty}f(x,y)dx+\int_{L}^{-L}f(x,y)dx-\int_{L}^{-L}f(x,y_0)dx-\int_{-\infty}^{-L}f(x,y_0)dx-\int_{L}^{\infty}f(x,y_0)dx|\leq$$

$$\leq|\int_{-\infty}^{-L}f(x,y)dx|+|\int_{-\infty}^{-L}f(x,y_0)dx|+|\int_{-L}^{-L}f(x,y_0)dx-\int_{L}^{-L}f(x,y)dx|+|\int_{L}^{\infty}f(x,y)dx|+|\int_{L}^{\infty}f(x,y_0)dx|$$

ידוע כי מתקיים:

$$\lim_{L\to\infty}\int_{L}^{\infty}\varphi(x)dx=0$$

לכן קיים L כאשר:

$$|\int_{L}^{\infty}\varphi(x)dx|<\frac{1}{10}\varepsilon$$

ללא הגבלה על y כלל.
ניקח L כזה, ונקבל:

$$|\int_{-\infty}^{-L}f(x,y)dx|+|\int_{-\infty}^{-L}f(x,y_0)dx|+|\int_{-L}^{-L}f(x,y_0)dx-\int_{L}^{-L}f(x,y)dx|+|\int_{L}^{\infty}f(x,y)dx|+|\int_{L}^{\infty}f(x,y_0)dx|\leq$$

$$\leq\frac{1}{10}\varepsilon+\frac{1}{10}\varepsilon+\frac{1}{10}\varepsilon+\frac{1}{10}\varepsilon+|\int_{-L}^{L}(f(x,y_0)-f(x,y))dx|$$

מפני ש f רציפה בכל $\mathbb{R}^{k+1}$ אזי היא רציפה במידה שווה ב$[-10L,10L]\times\bigtimes_{i=1}^{k}[y_i-10,y_i+10]$.
לכן, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כאשר לכל $|y-y_0|<\delta$ מתקיים $|f(y)-f(y_0)|<\varepsilon$.
לכן, קיים $\delta>0$ כאשר:

$$|\int_{-L}^{L}(f(x,y_0)-f(x,y))dx|\leq|\int_{-L}^{L}\frac{1}{4L}\varepsilon dx|\leq\frac{1}{2}\varepsilon$$

ונקבל:

$$\leq\frac{1}{10}\varepsilon+\frac{1}{10}\varepsilon+\frac{1}{10}\varepsilon+\frac{1}{10}\varepsilon+|\int_{-L}^{L}(f(x,y_0)-f(x,y))dx|<\frac{9}{10}\varepsilon<\varepsilon$$

לכל $|y-y_0|<\delta$.

לכן הפונ' רציפה.
מש"ל ב.

שאלה 6 (15 נקודות)

יהיו $a,b,u,v\in\mathbf{R}^3$, ונניח ששלושת הוקטורים $a-b,u,v$ הם בלתי־תלויים לינארית.

נסמן : $A=\{\,a+tu\,|\,t\in\mathbf{R}\,\}$ $\qquad B=\{\,b+tv\,|\,t\in\mathbf{R}\,\}$

הראו שיש נקודות יחידות $p\in A$ ו־ $q\in B$ כך שהקטע שקצותיו p ו־ q הוא הקטע הקצר ביותר שאחד מקצותיו בקבוצה A והקצה האחר בקבוצה B , והראו שאורכו של קטע זה הוא המספר :

$$\frac{|(a-b)\cdot(u\times v)|}{|u\times v|}$$

ניצור שני משטחים מקבילים:

$$A'=\{a+xu+yv|x,y\in\mathbb{R}\}$$

$$B'=\{b+xu+yv|x,y\in\mathbb{R}\}$$

נחשב את הגובה בניהם, שהוא בעצם יהיה המרחק בין הקבוצות.
נחשב את הנפח של המקבילון, נחשב את השטח של הבסיס של המקבילית, ואז אפשר לחשב את הגובה.
נגדיר P את המקבילון, C את המשטח וd את הגובה.

$$V(P)=dS(C)$$

ידוע כי הנפח של המקבילון הוא הדטרמנינטה של המטריצת וקטורים שלו.
בנוסף, השטח של C הוא הערך המוחלט של המכפלה הווקטורית של הוקטורי בסיס.
ונקבל:

$$V(P)=\begin{vmatrix} u & v & a-b \end{vmatrix}=(u\times v)*(a-b)$$

$$dS(C)=d|u\times v|$$

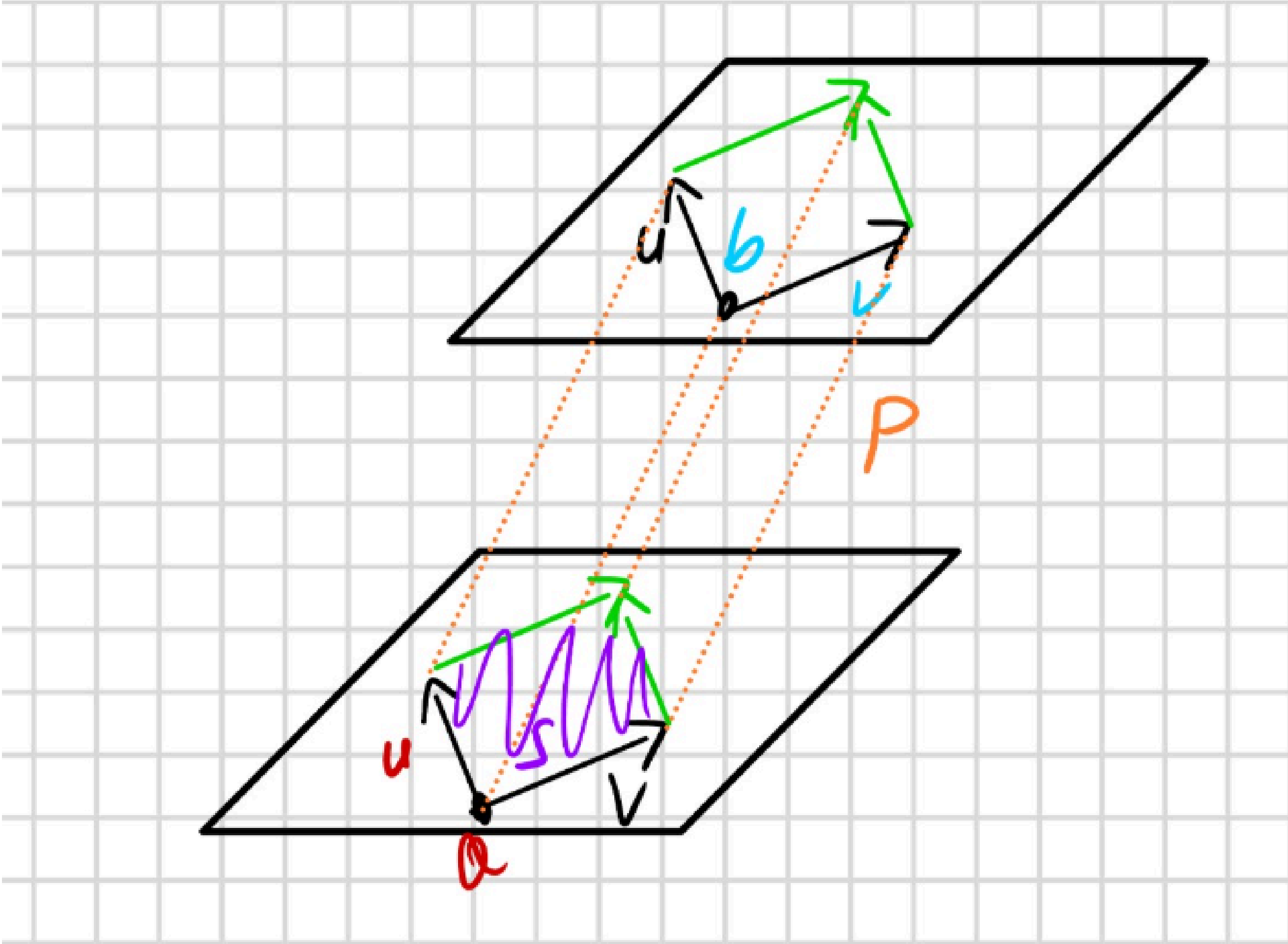
ולכן:

$$d|u\times v|=(u\times v)*(a-b)$$

ונקבל:

$$d=\frac{(u\times v)*(a-b)}{|u\times v|}$$

מש"ל



שאלה 7

שאלה 7 (15 נקודות)

מְצאו את כל נקודות הקיצון המקומי של הפונקציה $f:(x,y)\mapsto x^4+y^4+(x-y)^3$. לכל אחת מהנקודות שמצאתם, קבעו אם היא נקודת מינימום מקומי או נקודת מקסימום מקומי של f , וכן אם היא נקודת מינימום או נקודת מקסימום של f ב־$\mathbf{R}^2$.

תהי:

$$f:(x,y)\mapsto x^4+y^4+(x-y)^3$$

הפונ' רציפה וגזירה (מורכבת מפונ' גזירות ורציפות) ב $\mathbb{R}^2$.
נמצא מתי מתקיים $\nabla f(x,y) = 0$[2]:
לפי משפט 6.ג.3:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = (4x^3+3(x-y)^2 \quad 4y^3-3(x-y)^2)$$

$$\nabla f(x,y) = (4x^3+3x^2-6xy+3y^2 \quad 4y^3-3x^2+6xy-3y^2)$$

נציב:

$$\nabla f(x,y)=(4x^3+3x^2-6xy+3y^2 \quad 4y^3-3x^2+6xy-3y^2)=0^{[2]}$$

נקבל:

$$\begin{cases}4x^3+3x^2-6xy+3y^2=0\\4y^3-3x^2+6xy-3y^2=0\end{cases}$$

נחבר משוואות:

$$4x^3=-4y^3$$

ונקבל:

$$x=-y$$

נציב ב2 המשוואות:

$$\begin{cases}-4y^3+3y^2+6y^2+3y^2=0\\4y^3-3y^2-6y^2-3y^2=0\end{cases}$$

ונקבל:

$$\begin{cases}-4y^3+12y^2=0\\4y^3-12y^2=0\end{cases}$$

$$y^2(4y-12)=0$$

לכן קיבלנו את הנקודות הקריטיות הללו:

$$(0,0),(-3,3)$$

נחשב את:

$$Hf_{(x,y)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}$$

נקבל:

$$Hf_{(x,y)}=\begin{pmatrix}12x^2+6(x-y) & -6(x-y)\\ -6(x-y) & 12y^2+6(x-y)\end{pmatrix}$$

נציב את הנקודות:

$$Hf_{(0,0)}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},Hf_{(-3,3)}=\begin{pmatrix}72 & 36\\36 & 72\end{pmatrix},$$

לכן הנקודה $(0,0)$ היא נק' אוכף ולכן היא לא מינימום ולא מקסימום
נסתכל על $Hf_{(-3,3)}$:

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}72 & 36\\36 & 72\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}72x+36y\\36x+72y\end{pmatrix}=$$

$$=72x^2+72xy+72y^2=36(x^2+2xy+y^2)+36x^2+36y^2=36(x+y)^2+36x^2+36y^2>0$$

וקיבלנו שזאת מטריצה חיובית.

לכן, הנקודה $(-3,3)$ היא נק' מינימום
מש"ל.
נבדוק האם הנק' $(-3,3)$ היא מינימום של הפונ':
נמצא את הגובה של הנק':

$$f(-3,3) = (-3)^4 + 3^4 + (-3-3)^3 = -54$$

נסתכל על הטווח $[-10,10] \times [-10,10]$. לפי משפט 6.א.4:
קיימת נק' מינימום של כל הטווח הזה. $(-3,3,-54)$. נבדוק את הקצוות של הקטע

$$-10 \le y \le 10:$$

$$f(\pm 10, y) = 10^4 + y^4 + (\pm 10 - y)^3 > 10000 - 20^3 = 2000 > 0$$

$$-10 \le x \le 10:$$

$$f(x, \pm 10) = x^4 + 10^4 + (x \pm 10)^3 > 10000 - 20^3 = 2000 > 0$$

לכן נקודת המינימום בקטע היא $(-3,3,-54)$.
נבדוק את שאר הנקודות ב $\mathbb{R}^2$. ניקח:

$$|x| > 10, \ |y| > 10$$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + (y-x)^3$$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + (y-x)(y^2 - 2xy + x^2)$$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + y^3 - 2xy^2 + yx^2 - xy^2 + 2x^2y - x^3$$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + y^3 - 3xy^2 + 3x^2y - x^3$$

$$f(x,y) = x^2(x^2 - x + 3y) + y^2(y^2 + y - 3x)$$

ניקח $a = min\{x,y\}$:

$$a^2(a^2 - a + 3a) + a^2(a^2 + a - 3a) = a^4 > 0$$

לכן כל נקודה אחרת היא לא נמוכה יותר מהנק' מינימום $(-3,3)$. ולכן היא הנק' מינימום ב$\mathbb{R}^2$.
מש"ל