1)

שאלה 1 (15 נקודות)

חשבו את גבול הסדרה $a_n = \int_0^{\pi/4} \frac{x^n \tan^3 x}{\cos^2 x}\, dx$.

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^n \tan^3(x)}{\cos^2(x)}\, dx$$

היום נראה כי

$$f(x) = \frac{x^n \tan^3(x)}{\cos^2(x)}$$

אינטגרביליות: (בקטע $[0, \frac{\pi}{4}]$)

הן $\tan(x)$, ו- $f(x)$ מוגדרות

כאשר $\cos(x) \neq 0$.

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

וכן, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

לכן,

ידוע כי $\cos(x)$, $\tan(x)$, x^n $n\in\mathbb{N}$

כולן רציפות ב- $[0,\frac{\pi}{4}]$

ידוע כי $\cos(x)\neq 0$ בטווח $[0,\frac{\pi}{4}]$

ולכן, כאשר כופלים ומחלקים בפונ' רציפות,
מתקבלת פונ' רציפה

ולכן, $f(x)=\frac{x^n\tan^3(x)}{\cos^2(x)}$

רציפה ב- $[0,\frac{\pi}{4}]$

ולכן, $f(x)$ אינטגרבילית בקטע זה

לפי 1.18

נגדיר פונ' $g(x)$ כאשר $g(x)\geq f(x)$

לכל $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$

ונסמן ה $h(x)=\frac{\tan^3(x)}{\cos^2(x)}$

ב- $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$

ידוע כי $\tan(x)$ מונוטונית עולה בקטע $[0,\frac{\pi}{4}]$

ידוע כי $\cos(x)$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,\frac{\pi}{4}]$

לכן, $\tan^3(x)$ עולה בקטע $[0,\frac{\pi}{4}]$

ולכן, $\cos^2(x)$ יורדת בקטע $[0,\frac{\pi}{4}]$

לכן, $h(x)=\dfrac{\tan^3(x)}{\cos^2(x)}$ מונוטונית עולה בקטע $[0,\frac{\pi}{4}]$

לכן, הערך המקסימלי של $h(x)$ יהיה ב- $x=\frac{\pi}{4}$

$$h_{max}=h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan^3(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1^3}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\boxed{2}$$

לכן, אם ניקח $g(x)=2\cdot x^n$ $n\in\mathbb{N}$

(פונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}$, ובפרט ב- $[0,\frac{\pi}{2}]$ ולכן אינטגרבילית)

$$g(x)\geq f(x)$$

לכל $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ ולכל $n\in\mathbb{N}$

$g(x)=2x^n$ לכן, ניקח

$x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ לכל כזו $k(x)$ נמצא

$k(x)\le f(x)$ מתקיים

מפני e , $\cos^2(x)$, $x^n,\tan^3(x)$ מספרים חיוביים

$k(x)=0\le f(x)$ אז , $(x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ כי$)$

(הפונ' רציפה ב-$\mathbb{R}$ ובפרט ב-$[0,\frac{\pi}{4}]$ ולכן אינטגרבילית)

לפי משפט 1.26:

מכאן ש:

$$k(x)\le f(x)\le g(x)$$

אז:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} k(x)\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx \quad (\text{לכל } n)$$

$n\in N$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 0\,dx=0\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^n\tan^3(x)}{\cos^2(x)}\,dx\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}2x^n\,dx$$

יהי 2 סדרות נוספות:

$$c_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 0\,dx = 0 \qquad\qquad b_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x^n\,dx$$

נחשב את b_n:

$$b_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x^n\,dx \overset{\substack{1.24 \\ \text{לינאריות} \\ \text{האינטגרל}}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{x^n\,dx}_{\text{הפונ' הקדומה של } x^n} = 2\cdot\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$b_n = 2\cdot\left(\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{n+1} + \cancel{C} - \cancel{\frac{0^{n+1}}{n+1}} - \cancel{C}\right) =$$

$$\boxed{b_n = 2\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{n+1}}$$

ידוע כי $c_n \le a_n \le b_n$

לפי כלל הסנדוויץ' (אינפי 1) עם סדרות

מכיוון ש $c_n \le a_n \le b_n$

לכן:

$$\lim_{n\to\infty}(c_n) \le \lim_{n\to\infty}(a_n) \le \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

נחשב את c_n:

$$\lim_{n\to\infty}(c_n) = \lim_{n\to\infty}(0) = \boxed{0}$$

נחשב את b_n:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{n+1}\right)$$

ידוע כי $0<\pi<4$

לכן, $0<\frac{\pi}{4}<1$

ולכן,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}\right)=0$$

לפי 6.10 וני' 1

ולכן,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{n+1}\right)\underset{\text{מנין רציפה}}{=}\text{"}\frac{0}{\infty}\text{"}=\boxed{0}$$

לכן,

$$\lim_{n\to\infty}(c_n)=0=\lim_{n\to\infty}(b_n)$$

אך הראנו כי $\lim_{n\to\infty}(c_n)\le\lim_{n\to\infty}(a_n)\le\lim_{n\to\infty}(b_n)$

לפי כלל הסנדוויץ',

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=0$$

אז:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^n\tan^3(x)}{\cos^2(x)}dx\right)=0}$$

$\boxed{\text{מש"ל}}$

שאלה 2 (15 נקודות)

תהי $f(x) = 2x - \lfloor \sin x \rfloor$ (תזכורת: $\lfloor a \rfloor$ הוא חלק שלם של a).

מצאו את הביטוי המפורש עבור הפונקציה $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ בקטע $[0,2\pi]$.

האם ל- $f(x)$ יש פונקציה קדומה בקטע $[0,2\pi]$? נמקו היטב.

$$f(x) = 2x - \lfloor \sin(x) \rfloor$$

נסתכל על: $\lfloor \sin(x) \rfloor$

לפי הגדרת $\sin(x)$

$$\lfloor \sin(x) \rfloor = \begin{cases} 0 & if \quad 0\le x\le \pi,\ x\ne\frac{\pi}{2} \\ 1 & if \quad x=\frac{\pi}{2} \\ -1 & if \quad \pi<x<2\pi \\ 0 & if \quad x=2\pi \end{cases}$$

ידוע כי $2x$ פונ' רציפה

לכן, הנק' $x=\frac{\pi}{2}$ ו- $x=2\pi$ ו- $x=\pi$ לא רציפות

ב- $\lfloor \sin(x) \rfloor$, ולכן גם ב- $f(x)$.

לפי למה 1.19, $f(x)$ אינטגרבילית.

נפצל את $f(x)$ ל-:

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & if \quad 0\le x\le \pi \\ h_1(x) & if \quad \pi< x\le 2\pi \end{cases}$$

לכן,

$$[0,\pi]:\quad g_1(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{if } x=\frac{\pi}{2}\\ 2x & \text{else}\end{cases}$$

$$(\pi,2\pi]:\quad h_1(x)=\begin{cases}2x & \text{if } x=2\pi\\ 2x+1 & \text{else}\end{cases}$$

(הפונ' רציפות פרט לנק' אחת (בכל פונ') ולכן
לפי למה 1.19 הקרציפות נסקן)

לכן, לכל $c,d\in(\pi,2\pi]$ ו- $a,b\in[0,\pi]$, $c<d, a<b$

לפי 1.25 מתקיים:

$$\int_a^b g_1(x)\,dx=\int_a^b 2x\,dx$$

$$\int_c^d h_1(x)\,dx=\int_c^d (2x+1)\,dx$$

אלו הפונ' שמתלכדות עם
$g_1(x)$, $h(x)$ בהתאמה
פרט למספר סופי פונק'

לכן, ניקח:

$$g_2(x)=2x \qquad h_2(x)=2x+1$$

נרכיב את:

$$F(x)=\int_0^a f(x)\,dx \qquad a\in[0,2\pi]$$

לפי האינטגרלים שהבאנו:

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x g_2(t)\,dt=\int_0^x 2t\,dt & \underline{\text{if } x<\pi}\\ \underbrace{\displaystyle\int_0^\pi g_2(t)\,dt+\int_\pi^x h_2(t)\,dt}_{} =\int_0^\pi 2t\,dt+\int_\pi^x(2t+1)\,dt & \underline{\text{else}}\end{cases}$$

פירוק: משפט 1.23

נחשב את האינטגרלים:

$$k_1(x)=\int_0^x 2t\,dt=t^2+c\Big|_0^x=x^2+c-0-c=\boxed{x^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(t^2+c)'=2t \quad *\\ &(t^2+t+c)'=2t+1\end{aligned}}$$

$$k_2(x)=\int_\pi^x(2t+1)\,dt=t^2+t+c\Big|_0^x=x^2+x+c-\pi^2-\pi-c=\boxed{x^2+x}$$

$$F(x)=\begin{cases}x^2 & \text{if } 0\le x\le\pi\\ \pi^2+x^2+x-\pi^2-\pi= & \text{else}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}x^2 & \text{if } 0\le x\le\pi\\ x^2+x-\pi & \text{else}\end{cases}=\int_0^x f(t)\,dt$$

נניח שקיימת $G(x)$ כאשר:

$$G'(x) = f(x) = 2x - \lfloor \sin(x) \rfloor$$

לכן, חייב להתקיים $G(x)+c = F(x)$

(לפי 1.33)

אך $F(x)$ לא גזירה בקטע הנתון $[0,2\pi]$

מפני ש:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } 0 \le x \le \pi \\ x^2+x-\pi & \text{else} \end{cases}$$

ולכן:

$$F'(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \le x \le \pi \\ 2x+1 & \text{else} \end{cases}$$

כלומר

$$\overbrace{F'_-(\pi) = 2\pi}^{\text{משמאל}} \neq \overbrace{2\pi+1 = F'_+(\pi)}^{\text{מימין}}$$

$\boxed{\text{ולכן, } F'(\pi) \text{ לא מוגדר ולכן לא ניתן לגזור את הפונקציה בנקודה זו ולכן היא לא יכולה להיות קדומה}}$

$\boxed{\text{מש"ל}}$

שאלה 3 (15 נקודות)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ונניח שקיים זוג נקודות $a < x_1 < x_2 < b$ כך ש-

$$\int_a^{x_1} f(t)dt = x_2 \quad , \quad \int_a^{x_2} f(t)dt = x_1 .$$

הוכיחו כי קיימת נקודה c בקטע (a,b) כך ש- $f(c) = -1$.

$f(x)$ פונ׳ רציפה ב׳ $[a,b]$

לפי 1.18, $f(x)$ אינטגרבילית בקטע.

נתון:

$$\int_a^{x_1} f(t)dt = x_2 \quad , \quad \int_a^{x_2} f(t)dt = x_1$$

נתון: $a < x_1 < x_2 < b$

$$x_1 = \int_a^{x_2} f(t)dt \overset{\text{משפט 1.23}}{=} \int_a^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = x_2 + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = x_1 - x_2$$

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t) = -1$$

$$\Downarrow$$

לפי משפט 1.29

קיים c $x_1 < c < x_2$

כאשר:

$$f(c) = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = -1$$

ובפרט

$$f(c) = 1$$

$$a < x_1 < c < x_2 < b$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a < c < b \qquad f(c) = -1}$$

שאלה 4 (20 נקודות)

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. יהיו h,g,f פונקציות חסומות בקטע $[a,b]$ ומקיימות $f(x) \le g(x) \le h(x)$ לכל $x \in [a,b]$.
אם $f(x)$ ו- $h(x)$ אינטגרביליות ב- $[a,b]$ אז גם $g(x)$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

ב. תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$. אם קיימת חלוקה P של $[a,b]$ כך ש- $s(P) = S(P)$ אז f קבועה ב- $[a,b]$.

א)

טענה לא נכונה. קונטרה:

הקטע: $[0,1]$

$f(x) = -2$ $\qquad$ $h(x) = 2$

$$g(x) = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$h(x)$, $f(x)$ כולן רציפות ב- $[0,1]$

ולכן אינטגרביליות ב- $[0,1]$ לפי 1.18

בנוסף מתקיים תמיד $f(x) \le g(x) \le h(x)$

$-2 \le D(x) \le 2$

אך, לפי דוגמה 1.4 הפונק' $D(x)$

לא אינטגרבילית

$\boxed{\text{ולכן, מתקיימת סתירה לטענה, ולכן היא לא נכונה}}$

$\boxed{\text{מש"ל}}$

f פונ' חסומה בקטע $[a,b]$ לכן אינטגרבילית[1.18] ב)

קיימת חלוקה P כאשר : $S(P) = s(P)$

לכן: לפי הגדרות 1.2, 1.3

$$S(P) = s(P)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(P)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} m_i(P)\cdot\Delta x_i$$

$$\Downarrow$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\left(M_i(P) - m_i(P)\right)$$

יהי $i \geq 1$ ידוע כי $M_i(P) \geq m_i(P)$

לכן,

$$M_i(P) - m_i(P) \geq 0$$

לכן, $M_i(P) - m_i(P)$ <u>תמיד</u> אי שלילי

הוא ולכל i הסימן של Δx_i זהה,
אם קיים i כאשר $M_i(P) - m_i(P) > 0$ כל הביטוי
לא יוכל להתאפס.

לכן, <u>לכל</u> i מתקיים $\boxed{i \geq 1^*}$

$$M_i(P)=m_i(P)$$

ניקח $m_i(P)=M_i(P)=y_i$

יהי x כאשר $x_{i-1}<x<x_i$

ניקח $f(x)=y$

ידוע כי

$$y_i=M_i(P)\leq y\leq m_i(P)=y_i$$

$$y_1\leq y\leq y_1$$

לכן $f(x)=y_i$

אך אם ניקח $x=x_i$,
נראה כי $f(x)=y_i$

וגם $f(x)=y_{i-1}$

לכן $y_i=y_{i-1}$ לכל i

ניקח $y_n=\dots=y_2=y_1=c$

$$\boxed{\text{לכן, } f(x)=c \text{ (לכל } x\in[a,b]\text{)} \quad \text{ולכן } f(x) \text{ פונ' קבועה.}}$$

$\boxed{\text{מ.ש.ל}}$

שאלה 5 (15 נקודות)

תהי f פונקציה רציפה ב-$[0,1]$ ומקיימת $f(x) \le 2x$ לכל $x \in [0,1]$.

הוכיחו שאם $\int_0^1 f(t)dt = 1$, אז $f(x) = 2x$ לכל $x \in [0,1]$.

דרך פתרון אפשרית: הגדירו $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, הראו ש- $F(x) - x^2$ פונקציה קבועה ב-$[0,1]$, והסיקו מכך את טענת השאלה. קיימות דרכי פתרון נוספות, אך דרך זו היא היעילה ביותר.

$f(x)$ פונ' רציפה ב- $[0,1]$.

לכן אינטגרבילית ב- $[0,1]$ לפי 1.18

נניח:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

$$G(x) = F(x) - x^2$$

$$\Downarrow$$

$$G(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_0^x 2t\,dt$$

*

$$(x^2)' = 2x$$

$$\int_0^x 2t\,dt = t^2 \Big|_0^x = x^2 - 0^2 = x^2$$

$$G(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x 2t\,dt \overset{\text{טענה } 1.24}{=}$$

$$G(x)=\int_0^x f(t)\,dt+\int -2t\,dt \overset{\text{טענה } 1.24}{=}$$

$$G(x)=\int_0^x (f(t)-2t)\,dt$$

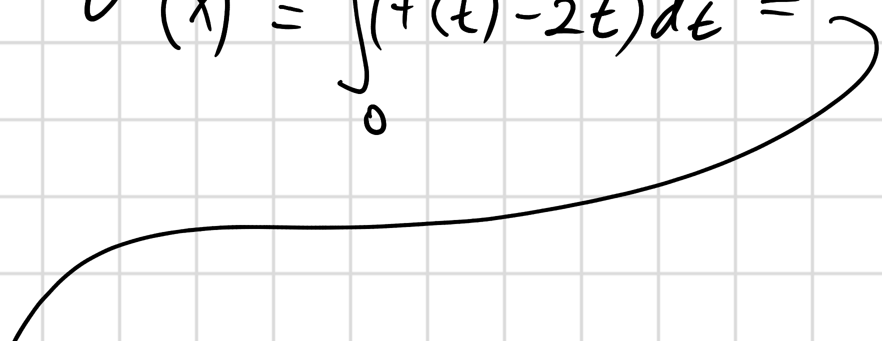
$$G(1)=\int_0^1 (f(t)-2t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^1 -2t\,dt=$$

$$1+\left(-t^2\Big|_0^1\right)=1+(-1-0)=\boxed{0}$$

$$G(0)=\int_0^0 (f(t)-2t)\,dt \overset{\text{טענה } 1.22}{=} 0$$

נצייר את $G(x)$:

$$G(x)=\int_0^x (f(t)-2t)\,dt=$$



$$G'(x) = \left(\int_0^x (f(t)-2t)\,dt\right)'$$

ידוע כי $f(x)$ רציפה, ולכן גם $f(x)-2x$ פונק' רציפה.

לכן, לפי משפט 1.33:

$* \leftarrow f(x) \leqslant 2x$

$$G'(x) = \left(\int_0^x (f(t)-2t)\,dt\right)' = f(t)-2t \leqslant 0$$

לכן, הפונק' יורדת במובן הרחב.

אך ידוע כי

$$G(0) = G(1) = 0$$

לכן, אם הפונקציה "תרד" בקטע $[0,1]$ $(G'(x)<0)$

$G(1)$ לא יוכל להיות 0. לכן,

$$G'(x) = 0 = f(x)-2x$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(x) = 2x}$$

מש"ל

שאלת רשות

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-שלילית בקטע $[0,1]$. נסמן $a_n = \int_0^1 \left(f(x)\right)^n dx$.

הוכיחו כי לסדרה (a_n) קיים גבול סופי אם ורק אם $f(x) \le 1$ לכל $x \in [0,1]$.

$$a_n = \int_0^1 (f(x))^n dx$$

אוכיח אם קיים $f(c) > 1$, $c \in [0,1]$

אז: $\lim_{n \to \infty} (a_n) = \infty$

$$a_n = \int_0^1 f(x) dx$$

ניקח את $f(x_2) > 1$ (כי קיים $f(x)>1$)

כאשר $f(x_2)$ הוא הערך המקסימלי ב- $[0,1]$

ניקח x_1 כאשר $x_1 < x_2$ וגם x_1 היא

הנקודה הקרובה ביותר משמאל ל- x_2 כאשר $f(x_1)=1$

אם נק' זו לא קיימת, נגדיר $x_1=0$

ניקח x_3 כאשר $x_3 > x_2$ וגם x_3 היא

הנקודה הקרובה ביותר מימין ל- x_2 כאשר $f(x_3)=1$

אם נק' זו לא קיימת נגדיר $x_3=1$

* אם $x_1=0$ אז: $f(0)\geq 1$ כי אחרת אין חיתוך עם הישר $y=1$

אם $x_3=1$ אז: $f(1)\geq 1$ כי אחרת אין חיתוך עם הישר $y=1$

חשוב לציין שהפונ' רציפה ולכן זו נובעת מתכונות הרציפות

קיבלנו: הקטע $[x_1, x_3]$,

כאשר לכל $x\in[x_1, x_3]$ מתקיים $f(x)>1$ (x_1, x_3 מ- 4 חי')

$$a_n = \int_0^1 (f(x))^n dx \underset{\text{משפט } 1.23}{=}$$

$$a_n = \int_0^{x_1} (f(x))^n dx + \int_{x_1}^{x_3} (f(x))^n dx + \int_{x_3}^{1} (f(x))^n dx$$

נסתכל על:

$$\int_{x_1}^{x_3} (f(x))^n dx$$

ידוע כי קיים $c\in[x_1, x_3]$ משפט 1.29

$$\frac{1}{x_3-x_1}\cdot\int_{x_1}^{x_3} (f(x))^n dx = (f(c))^n$$

נסתכל על a_n:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{x_1}^{x_3}(f(x))^n dx\right)=$$

לכן קיים c כאשר

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{x_1}^{x_3}(f(x))^n dx\right)\overset{\text{משפט } 1.29}{=}\lim_{x\to\infty}\left((f(c))^n\cdot(x_3-x_1)\right)$$

אך לכל $c\in(x_1,x_3)$ $f(c)>1$

* גם אם $f(x_1)=1$ או $f(x_3)=1$

האינטגרל

$$\frac{\int_{x_1}^{x_3}(f(x))^n dx}{x_3-x_1}$$

יהיה גדול מ-1.

לכן כאשר

$f(c)>1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(c)^n\right)=\infty$$

לכן.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(f(c)\right)^{n}\cdot(x_3-x_1)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(f(c)\right)^{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(x_3-x_1\right)=$$

$$\infty\cdot(x_3-x_1)=\boxed{\infty}$$

$x_3>x_1$ *

$$\infty=\lim_{n\to\infty}\left(\left(f(c)\right)^{n}\cdot(x_3-x_1)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{x_1}^{x_3}\left(f(t)\right)^{n}dx\right)$$

לכן,

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1\left(f(x)\right)^{n}dx\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{x_1}\left(f(x)\right)^{n}dx+\int_{x_1}^{x_3}\left(f(x)\right)^{n}dx+\int_{x_3}^{1}\left(f(x)\right)^{n}dx\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{x_1}(f(x))^n dx\right) + \infty + \lim_{n\to\infty}\left(\int_{x_3}^{1}(f(x))^n dx\right) =$$

$f(x) \geq 0$ לכן, הגבול גדול/שווה ל-0

$f(x) \geq 0$ לכן, הגבול גדול/שווה ל-0

לכן,

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\right) = \infty$$

הוכחנו כיוון אחד, עכשיו נוכיח את הכיוון השני.

נניח כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 (f(x))^n dx\right) = \infty$$

לכן, נסתכל על יחסים הדמיון, כאשר:

$$\overline{\int_0^1} (f(x))^n dx \geq \int_0^1 (f(x))^n dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\left(\int_0^1 (f(x))^n dx\right)} \geq \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 (f(x))^n dx\right) = \infty \quad \text{לכן,}$$

לכן,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{\int_0^1}(f(x))^n dx\right) = \infty$$

יהי P חלוקה של $[0,1]$ נבחר סכום:

ספציפי כך ש: P מחלקת את f

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{\int_0^1}(f(x))^n dx\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}(M_i(P))^n \Delta x_i\right) = \infty$$

*אנחנו מסתכלים

על $(f(x))^n$

לכן, חייב להיות איבר אחד לפחות,

כאשר

$$\lim_{n\to\infty}\left((M_i(P))^n \cdot \Delta x_i\right) = \infty$$

לכן חייב להיות $M_i(P) > 1$, כי:

דבר זה יתקיים (כי לכל $a>1$, $\lim_{n\to\infty}(a^n)=\infty$)

ולכן קיים $f(x) > 1$

מש"ל

שאלה 6 (20 נקודות)

שאלה זו ופתרונה באים להמחיש את השימוש באינטגרלים מסוימים ובהגדרתם לפי רימן לחישוב גבולות של סדרות מסוימות.

(8 נק׳) א. תהי $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$. הוכיחו כי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx \ .$$

(2 נק׳) ב. הביעו את $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ כאינטגרל מסוים בהנחה ש- $f(x)$ רציפה בקטע המתאים.

(10 נק׳) ג. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

(i) $$a_n=\frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{3^2}+\sqrt[n]{3^3}+\cdots+\sqrt[n]{3^{n-1}}\right) \ .$$

(ii) $$b_n=\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}+\frac{2}{n\sqrt{n^2+4}}+\frac{3}{n\sqrt{n^2+9}}+\cdots+\frac{n-1}{n\sqrt{n^2+(n-1)^2}}+\frac{1}{n\sqrt{2}} \ .$$

א) f רציפה ב- $[a,b]$,

לכן לפי 1.18, f אינטגרבילית בקטע.

נסתכל על הביטוי

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$$

וזה מציג סכום רימן לפי ביט' לה: החלוקה:

$$P=\left\{a, a+\frac{b-a}{n}, a+\frac{2b-2a}{n}, \ldots, b\right\}$$

נברור ξ_i לכל i:

$$\xi_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$$

וככה, גם ה-Δx קבוע:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right) \overset{\text{לפי חוק הפילוג של הכפל}}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} \overset{\text{הגדרת המשתנים}}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}_{\text{סכום רימן}} = \sigma$$

אך ידוע כי צריך להסתכל על הגבול כאשר $n \to \infty$

לכן, נסתכל על הגבול.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i)\Delta x_i\right)\right) = \sigma$$

ידוע כי הסכום רימן הנ"ל מוגדר של $f(x)$ בקטע $[a,b]$ (הגדרת הקטע עם ξ_i)

לכן, (מהגדרת הגבול והגדרה 1.39) לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$

כאשר קיים Δx:

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x_i < \delta \quad (\text{לכל } i)$$

(*כי בגבול, $\Delta x_i \to 0$ לכל i.)

לכן, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כאשר:

כאשר $\Delta x_i < \delta$ לכל i

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

ידוע כי $I = (R)\int_a^b f(x)dx$

אך לפי 1.42, $(R)\int_a^b f(x)dx = (D)\int_a^b f(x)dx$

לכן, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כאשר $\Delta x_i < \delta$

כאשר

$$\left|\sigma - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

יהי N כאשר לכל $N<n$ מתקיים $\left|\frac{b-a}{n}\right|<\delta$

לכן, לפי 1.39,

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sigma$$

$$\left|\sigma-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

קיבלנו את הגדרת הגבול מאינפי 1

ולכן

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(\sigma)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\right)=\int_a^b f(x)\,dx}$$

$\boxed{\text{מש״ל}}$

ב)

לפי סעיף א, כאשר $a=0,\ b=1$

נקבל:

$$\frac{1-0}{n}\cdot\sum f\left(0+\frac{k}{n}\right)=\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx}$$

מסך

(לכן f צריכה להיות רציפה ב- $[0,1]$)

2) i) לפי חוקי חזקות

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} \sqrt[n]{3^k} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} 3^{\frac{n}{k}}$$

ניתן להגיע מנוסחה בסעיף א' כאשר

$$a=0,\ b=1,\ f(x)=3^x$$

לכן,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \int_0^1 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln(3)}+C\Big|_0^1 =$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \frac{3}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(3)} = \frac{2}{\ln(3)}$$

ii)

$$b_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n\sqrt{n^2+j^2}} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{\sqrt{n^2+j^2}} = \begin{matrix}:n\\ :n\end{matrix}$$

$$b_n = \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{j}{n}}{\left(\frac{\sqrt{n^2+j^2}}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{j}{n}}{\sqrt{1+\frac{j^2}{n^2}}} =$$

כמו הבטן בסעיף A.א' כאשר

$a=0$

$b=1$

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

לכן,

$$\lim_{n\to\infty}(b_n)=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1$$

$*$

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)'=\frac{2x}{2\cdot\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\sqrt{1+1^2}-\sqrt{1+0}=\boxed{\sqrt{2}-1=\lim_{n\to\infty}(b_n)}$$

מש"ל