שאלה 1 (20 נקודות)

חשבו קירוב ל- $\sqrt{6}$ בעזרת פולינום טיילור מסדר מתאים כך שהשגיאה לא תעלה על $0.5 \cdot 10^{-2}$

(כלומר, בדיוק של 2 ספרות אחרי הנקודה).

פונ' לפיתוח: $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

נק' פיתוח: $a = 4$

סדר הפיתוח $n = 3$

נסתכל על:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f(4) = \boxed{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow f'(4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \rightarrow f''(4) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^3}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \boxed{-\frac{1}{32}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \rightarrow f'''(4) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^5}} = \frac{3}{256}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$$

נבנה פולינום טיילור בסביבת $a=4$ כאשר $n=3$:

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x-4) + \frac{-1}{32} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x-4)^2 + \frac{3}{256} \cdot \frac{1}{6} \cdot (x-4)^3$$

$$\boxed{P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3}$$

נסתכל על $R_3(6)$:

ידוע כי $n=3$, $a=4$, $x=6$, $4<c<6$, $f^{(4)}(x)=\frac{-15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$

ולכן, לפי 4.4:

$$R_3(6)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(6-4)^4$$

$$\Downarrow$$

$$R_3(6)=\frac{-15}{24\cdot\cancel{16}\cdot c^{\frac{7}{2}}}\cdot\cancel{2^4}=$$

$$R_3(6)=\frac{-15}{24c^{\frac{7}{2}}}$$

נסתכל על

* c מספר חיובי.

$$\boxed{|R_3(6)|}=\left|\frac{-15}{24c^{\frac{7}{2}}}\right|=\frac{15}{24\cdot c^{\frac{7}{2}}}<\frac{15}{24\cdot 4^{\frac{7}{2}}}$$

הקטנת המכנה $4<c<6$

$$\frac{15}{24\cdot 4^{\frac{7}{2}}}=\underbrace{\frac{5}{1024}<\frac{5}{1000}}_{\text{הקטנת המכנה}}=\frac{1}{200}=5\cdot 10^{-3}=\boxed{0.5\cdot 10^{-3}}$$

ולכן,

$$\boxed{|R_3(6)|<0.5\cdot 10^{-3}}$$

ולכן,

$$|P_3(6)-\sqrt{6}|<0.5\cdot 10^{-3}$$

ולכן, נחשב את $P_3(6)$:

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$$

$$P_3(6) = 2 + \frac{1}{4}(6-4) - \frac{1}{64}(6-4)^2 + \frac{1}{512}(6-4)^3$$

$$P_3(6) = 2 + \frac{1}{4}\cdot 2 - \frac{1}{64}\cdot 2^2 + \frac{1}{512}\cdot 2^3$$

$$P_3(6) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \boxed{\frac{154}{64} \approx 2.453}$$

* לפי המחשבון:

$\sqrt{6} = 2.449$

וההפרש בין המספרים הללו קטן

מ- $0.5\cdot 10^{-2}$

שאלה 2 (20 נקודות)

היעזרו בפיתוח מקלורן מסדר מתאים על מנת להוכיח כי לכל $x \in (0,1)$ מתקיים:

$$\sin x > \ln(1+x).$$

ידוע כי (פיתוח מקלורן):

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + R_{2n+2}(x)$$

* כדי שהם יהיו מאותו סדר

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + S_{2n+2}(x)$$

ניקח $n=0$ (סדר שני):

$$\sin(x) = x + R_2(x)$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + S_2(x)$$

ניקח $a,b \in (0,1)$ כאשר:

$$\begin{cases} R_2(x) = \dfrac{\sin^{(3)}(a)}{6} \cdot x^3 \\ S_2(x) = \dfrac{\ln^{(3)}(b+1)}{6} \cdot x^3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$R_2(x) = \frac{-\cos(a)}{6} \cdot x^3$$

$$S_2(x) = \frac{2 \cdot (b+1)^{-3}}{6} \cdot x^3 = \frac{x^3}{3(b+1)^3}$$

*

$$\left(\left(\left(\ln(x)\right)'\right)'\right)' = \left(\left(x^{-1}\right)'\right)' = \left(-x^{-2}\right)' = 2x^{-3}$$

נבדוק האם $\sin(x) > \ln(x)$ מתקיים:

$$\sin(x) > \ln(x)$$

$$\sin(x) - \ln(x) > 0$$

$$x + \frac{-\cos(a)}{6}\boxed{x^3} - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{\boxed{x^3}}{3(b+1)^3} > 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 + x^3\left(\frac{-\cos(a)}{6} - \frac{1}{3(b+1)^3}\right) > 0$$

אך ידוע כי: $x \in (0,1)$

$-\cos(a) \geq -1$ לכל a

$$\frac{1}{2}x^2 + x^3\left(\frac{-\cos(a)}{6} - \underbrace{\frac{1}{3(b+1)^3}}_{\text{הקטנת המכנה}}\right) \geq \frac{1}{2}x^2 + x^3\left(\frac{-1}{6} - \frac{1}{3\cdot 1^3}\right)$$

נבדוק האם

$$\frac{1}{2}x^2 - x^3\cdot\frac{1}{2} \overset{?}{>} 0$$

$\frac{1}{2}x^2 \geq \frac{1}{2}x^3 \quad / : \frac{x^2}{2}$ *ידוע כי $x>0$ ולכן $x \neq 0$

$$1 > x$$

$$\Downarrow$$

פסוק אמת

כי $x \in (0,1)$

לכן, $\frac{1}{2}x^2 - x^3\cdot\frac{1}{2} > 0$

ומכני ש

$$\frac{1}{2}x^2 + x^3\left(\frac{-\cos(a)}{6} - \frac{1}{3(b+1)^3}\right) \geq \frac{1}{2}x^2 - x^3\cdot\frac{1}{2}$$

אזי מתקיים:

$$\frac{1}{2}x^2 + x^3\cdot\left(\frac{-\cos(a)}{6} - \frac{1}{3(b+1)^3}\right) > 0$$

לפי הפיתוח בסעיפים הקודמים

ולכן

$$\sin(x) - \ln(x+1) > 0$$

$$\boxed{\sin(x) > \ln(x)}$$

כאשר $x \in (0,1)$

שאלה 3 (20 נקודות)

היעזרו בפיתוח מקלורן על מנת לחשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$

ב. $\lim\limits_{x\to\infty}\left((x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{1/x}-\sqrt{x^3+x^6}\right)$.

א) נסתכל על פיתוח מקלורן לפונ' הבאות:
(מעלה 4)

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{2}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+R_{2n}(x)=$$

$$\boxed{\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+R_4(x)}$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+S_n(x)$$

הצבה

$$e^{x^2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{k!}+S_{2n}(x)$$

המעלה היא 2n

נסמן את e^{x^2}, וניקח $S_{2n}(x)$ מתאים:

$$S_{2n}(x)=e^{x^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{k!}$$

לכן, ניקח $n=2$:

$$e^{x^2}=\sum_{k=0}^{2}\frac{x^{2k}}{k!}+S_4(x)=$$

$$\boxed{e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+S_4(x)}$$

נסתכל על הגבול:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}+2\cos(x)-3}{x^4}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{1}+\underline{x^2}+\boxed{\frac{x^4}{2}}+S_4(x)+\cancel{2}-\underline{x^2}+\boxed{\frac{x^4}{12}}+2R_4(x)-\cancel{3}}{x^4}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{7}{12}x^4+S_4(x)+2R_4(x)}{x^4}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{7}{12}\right)+\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{S_4(x)}{x^4}\right)+2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{R_4(x)}{x^4}\right)}_{\text{לפי משפט 4.7}}=$$

$$\frac{7}{12}+0+0=\boxed{\frac{7}{12}}$$

לפי משפט 4.7

* כאשר $a=0$ וידוע כי e^{x^2} גזירה 4 פעמים

ב)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\cdot e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^3+x^6}\right)=\left[t=\frac{1}{x}\right]=$$

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2t}\right)\cdot e^{t}-\sqrt{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^6}}\right)=$$

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1-t+\frac{1}{2}t^2}{t^3}\cdot e^t-\sqrt{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^6}}\right)$$

נסתכל על פיתוח מקלורן מסדר 2 של e^a:

$$e^a=1+a+\frac{a^2}{2}+R_2(a)$$

ולכן, כאשר ניקח e^{-t} נקבל:

$$e^{-t}=1-t+\frac{t^2}{2}+R_2(-t)$$

$$\boxed{e^{-t}-R_2(-t)=1-t+\frac{t^2}{2}}$$

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1-t+\frac{1}{2}t^2}{t^3}\cdot e^t-\sqrt{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^6}}\right)=$$

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{e^{-t}-R_2(-t)}{t^3}\cdot e^t-\sqrt{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^6}}\right)=$$

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1-e^t\cdot R_2(-t)}{t^3}-\sqrt{\frac{1}{t^6}(t^3+1)}\right)=$$

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1-e^t\cdot R_2(-t)-\sqrt{1+t^3}}{t^3}\right)=$$

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{-e^t\cdot R_2(-t)+1-\sqrt{1+t^3}}{t^3}\right)=$$

יהי $n\in\mathbb{N}$. ניקח שני פיתוחי מקלורן
ל- e^a. אחד ממעלה n והשני ממעלה $n+1$:

$$e^a=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_n(x)=\sum^{n+1}\frac{x^k}{k!}+R_{n+1}(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}+R_{n+1}(x)\ \Big/\ -\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

ונקבל

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+R_{n+1}(x)$$

ניקח $n=2$ ונקבל:

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{-e^t\cdot R_2(-t)+1-\sqrt{1+t^3}}{t^3}\right)=$$

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{-e^t\cdot\left(\frac{-t^3}{6}+R_3(-t)\right)+1-\sqrt{1+t^3}}{t^3}\right)=$$

נסתכל על פיתוח מקלורן של $(1+6)^\alpha$, כאשר $\alpha=\frac{1}{2}$

$$(1+b)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}b^{k}+S_n(b)$$

ובפרט, עם $\alpha=\frac{1}{2}$, $n=1$:

$$(1+b)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}b+S_1(b)$$

ולכן, אם נציב $b=t^3$, נקבל:

$$(1+t^3)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t^3+S_3(t)$$

החזקה המקסימ' היא 3 ולכן S_1 "הופך" ל- S_3

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{-e^{t}\cdot\left(\frac{-t^3}{6}+R_3(-t)\right)+1-\sqrt{1+t^3}}{t^3}\right)=$$

e^t פונ' רציפה

$$\lim_{t\to 0^+}\left(-1\cdot\left(-\frac{1}{6}+\frac{R_3(-t)}{t^3}\right)+\frac{1-1-\frac{1}{2}t^3-S_3(t)}{t^3}\right)=$$

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{6}-\underbrace{\frac{R_3(-t)}{t^3}}\right)+\lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}-\frac{S_3(t)}{t^3}\right)$$

כאשר $t\to 0^+$
מקיים $-t\to 0^-$

ולכן הגבול הוא משמאל
אך הערך נשמר כי הפונ' רציפה

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{6}\right) - \underbrace{\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{R_3(-t)}{t^3}\right)}_{\substack{=0 \\ 4.7\ \cdot\partial}} - \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\right) - \underbrace{\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{S_3(t)}{t^3}\right)}_{\substack{=0 \\ 4.7\ \cdot\partial}} =$$

$$= \frac{1}{6} - 0 - 0 - \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$ ומתקיים $f'(a) = f'(b) = 0$.

הוכיחו כי קיים $c \in (a,b)$ כך ש-

$$.\left|f''(c)\right| \geq \frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$$

נרשום פיתוח מקלורן ממעלה 1 בנקודות a,b :

<u>a</u>

$$f(x) = f(a) + \frac{\overset{=0}{\cancel{f'(a)}}}{1}\cdot(x-a) + R_1(x) = f(a) + R_1(x)$$

לפי לגרנז'. ניקח c_1 כאשר $a<c_1<x$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(c_1)}{2}\cdot(x-a)^2$$

<u>b</u>

$$f(x) = f(b) + \frac{\overset{=0}{\cancel{f'(b)}}}{1}\cdot(x-a) + R_1(x) = f(b) + R_1(x)$$

לפי לגרנז'. ניקח c_2 כאשר $x<c_2<b$:

$$f(x) = f(b) + \frac{f''(c_2)}{2}\cdot(x-b)^2$$

<u>ונקבל:</u>

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(c_1)}{2}\cdot(x-a)^2$$

$$f(x) = f(b) + \frac{f''(c_2)}{2}\cdot(x-b)^2$$

נבדוק מתי $(x-a)^2=(x-b)^2$:

$$(x-a)^2=(x-b)^2$$

$$\cancel{x^2}-2ax+\boxed{a^2}=\cancel{x^2}-2bx+\boxed{b^2}$$

$$x(2b-2a)=b^2-a^2$$

$$x=\frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cdot\cancel{(b-a)}}$$

$$\boxed{x=\frac{b+a}{2}}$$

$$f(x)=f(a)+\frac{f''(c_1)}{2}\cdot(x-a)^2$$

$$f(x)=f(b)+\frac{f''(c_2)}{2}\cdot(x-b)^2$$

נציב $x=\frac{b+a}{2}$:

$$f\left(\frac{b+a}{2}\right)=f(a)+\frac{f''(c_1)}{2}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$f\left(\frac{b+a}{2}\right)=f(b)+\frac{f''(c_2)}{2}\cdot\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

ונקבל:

$$f(a)+\frac{f''(c_1)}{2}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=f(b)+\frac{f''(c_2)}{2}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\downarrow$$

$$f(a)-f(b)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{f''(c_2)-f''(c_1)}{2}\right)$$

$$\frac{4}{(b-a)^2}\cdot\left(f(a)-f(b)\right)=\frac{f''(c_2)-f''(c_1)}{2}\quad /\cdot 2$$

$$\frac{8}{(b-a)^2}\cdot\left(f(a)-f(b)\right)=f''(c_2)-f''(c_1)\quad /\,|\;|$$

$$\frac{8}{(b-a)^2}\cdot\left|f(a)-f(b)\right|=\left|f''(c_2)-f''(c_1)\right|$$

א' שוויון המשולש

$$\left|f''(c_2)-f''(c_1)\right|\leq\left|f''(c_1)\right|+f''(c_2)$$

ונקבל

$$2\cdot\left(\frac{4}{(b-a)^2}\cdot\left|f(a)-f(b)\right|\right)\leq\left|f''(c_1)\right|+\left|f''(c_2)\right|$$

ולכן

$$\frac{4}{(b-a)^2}\cdot\left|f(a)-f(b)\right|\leq\frac{\left|f''(c_1)\right|+\left|f''(c_2)\right|}{2}$$

$\downarrow$

קיבלנו את ממוצע של $|f''(c_1)|$ ו-$|f''(c_2)|$

גדול מהביטוי הנ"ל, ולכן אחד מהם חייב להיות גדול יותר, או שווה לביטוי זה.

לכן, $\frac{4}{(b-a)^2}|f(a)-f(b)| \leq \max(\{|f''(c_1)|, f''(c_2)\})$

ומכן: לכל x מתקיים $|x| = |-x|$

נקבל:

$$\boxed{\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)| \leq \max(\{|f''(c_1)|, f''(c_2)\})}$$

ולכן קיים $c \in [a,b]$ המקיים תכונה זו.

מש"ל

שאלה 5 (20 נקודות)

תהיינה $f(x)$, $g(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בנקודה a ומתקיים:

$f(a)=g(a)=f'(a)=g'(a)\neq 0$, $f''(a)=g''(a)+g(a)$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^2(x)-g^2(x)}{\left(f(x)-f(a)\right)^2}=1$.

נעזר פיתוח טילור לפונ' $f(x), g(x)$ בנק' a

$$f(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2+R_2(x)$$

$$g(x)=g(a)+g'(a)\cdot(x-a)+\frac{g''(a)}{2}\cdot(x-a)^2+S_2(x)$$

נציב $f''(a)=g''(a)+g(a)$,

$$A=f(a)=g(a)=f'(a)=g'(a)$$

ונקבל

$$f(x)=A+A\cdot(x-a)+\frac{g''(a)+A}{2}\cdot(x-a)^2+R_2(x)$$

$$g(x)=A+A\cdot(x-a)+\frac{g''(a)}{2}\cdot(x-a)^2+S_2(x)$$

נסתכל בגבול:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f^2(x)-g^2(x)}{(f(x)-f(a))^2}\right)$$

נציב לפי מה שהגעתי:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{(f(x)+g(x))(f(x)-g(x))}{(f(x)-A)^2}\right)$$

נחלק את הנוסחה לכמה חלקים:

* תזכורת:

$$f(x) = A + A\cdot(x-a) + \frac{g''(a)+A}{2}\cdot(x-a)^2 + R_2(x)$$

$$g(x) = A + A\cdot(x-a) + \frac{g''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 + S_2(x)$$

$$f(x) - g(x) = 0 + 0 + A\cdot(x-a)^2 + R_2(x) - S_2(x) =$$

$$\boxed{f(x) - g(x) = \frac{A}{2}\cdot(x-a)^2 + R_2(x) - S_2(x)}$$

$$\boxed{f(x) - A = A\cdot(x-a) + \frac{g''(a)+A}{2}(x-a)^2 + R_2(x)}$$

נציב בגבול:

$$= \lim_{x\to a}\left(\frac{(f(x)+g(x))\left(\frac{A}{2}\cdot(x-a)^2 + R_2(x) - S_2(x)\right)}{\left(A\cdot(x-a) + \underbrace{\frac{g''(a)+A}{2}(x-a)^2 + R_2(x)}_{R_1(x)}\right)^2}\right) =$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{A}{2}\cdot(x-a)^2 + R_2(x) - S_2(x)}{(A\cdot(x-a) + R_1(x))^2}\right) =$$

רציפות ב- $x=a$

$$= \left(f(a)+g(a)\right)\cdot \lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{A}{2}+\frac{R_2(x)}{(x-a)^2}-\frac{S_2(x)}{(x-a)^2}}{\left(A+\frac{R_1(x)}{(x-a)}\right)^2}\right)=$$

* לפי משפט 4.7

* הרכבה של פונ' רציפה ב-a

* $A\neq 0$ נתון

$$=2A\cdot\frac{\frac{A}{2}+0-0}{(A+0)^2}=2A\cdot\frac{1}{2A}=\boxed{1}$$