

### שאלה 1 (25 נקודות)

א. מה מספר ההשווויות המבוצעות בשגרת בניית-ערמת-מקסימום (עמוד 111) עבור מערך

קלט בן  $n$  אברים שכל אבריו שוים זה לזה ? יש לתת ביטוי מדויק ולא אומדן אסימפטוטוי.

ב. נתונה עירימת מינימום שבה בכל רמה כל האברים זהים. לדוגמה העירימה :

[1,2,2,5,5,5,7,7,7,7,7]. כתבו שגרה בפסאודו-קוד המקבלת כקלט עירימה כניל ואיבר נוסף  $x$  ומוכיחו אינדקט של מופיע כלשהו של  $x$  בעירימה או 1 - אם הוא לא קיים. זמן הריצה צריך להיות לוגרייתי בגודל העירימה.

ג. נתון מערך בגודל  $n$  המכיל עירימות מקסימום בגודל לא ידוע. כולם אמורים תואם הראות של המערך הם עירימה תקנית ושאר התאים מכילים את הערך אינסופי (וכאמור  $\infty$  לא ידוע). עליכם לקבוע את ערכו של  $x$  בזמן לוגרייתי ב- $A$ . כולם אם  $=2^{100}$  למשל וגודל העירימה הסתבר  $C=30$  אז יש לבצע כ-5 פעולות ולא כ-100 פעולות.

BUILD-MAX-HEAP( $A$ )

```

1 heap-size[ $A$ ]  $\leftarrow$  length[ $A$ ]
2 for  $i \leftarrow \lfloor \text{length}[A]/2 \rfloor$  downto 1
3   do MAX-HEAPIFY( $A, i$ )

```

MAX-HEAPIFY( $A, i$ )

```

1  $l \leftarrow \text{LEFT}(i)$ 
2  $r \leftarrow \text{RIGHT}(i)$ 
3 if  $l \leq \text{heap-size}[A]$  and  $A[l] > A[i]$ 
4   then largest  $\leftarrow l$ 
5 else largest  $\leftarrow i$ 
6 if  $r \leq \text{heap-size}[A]$  and  $A[r] > A[\text{largest}]$ 
7   then largest  $\leftarrow r$ 
8 if largest  $\neq i$ 
9   then exchange  $A[i] \leftrightarrow A[\text{largest}]$ 
10  MAX-HEAPIFY( $A, \text{largest}$ )

```

הערכות:

$x \in N$

$\text{length}[A]=n$   $\rightarrow A = [x, x, \dots, x]$

רשותן לא חזקוניה

Max-Heapiify( $A, i$ )

הערכות כפולה כ- $A[i] - A[i]$  הינה גודלה  
לעת גג סוף, וכך גם גג נמוך 6

largest = i  
e.g., 1, 2, 3, 4, 5

Max-Heapify(A, i) -> largest = i

Max-Heapify(A, i) -> largest = i

Build-Max-Heap(A)

Max-Heapify(A, i) -> largest =  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot 2 = \begin{cases} n & \text{if } n \text{ is even} \\ n-1 & \text{else} \end{cases}$$

Find-in-Min-Heap( $A, z$ ) (2)

$n \leftarrow 1$

while  $n \leq \text{length}[A]$  do

if  $A[n] = z$  do

return  $n$

else if  $A[n] > z$  do

return  $-1$

else do

$n \leftarrow \text{Left}(n)$

return  $-1$

Find-Actual-Heap( $A$ ) (R)

$x \leftarrow \text{Right}(1)$

while  $x \leq \text{length}[A]$  and  $A[\text{Parent}(x)] \leq A[x]$

$x \leftarrow \text{Right}(x)$

while  $A[\text{Parent}(x)] \geq A[x]$

$x \leftarrow x - 1$

return  $x$

**שאלה 2 (25 נקודות)**

- א. הוכחו שכל מילון מבוסס השוואות חייב לבצע לפחות 7 השוואות (במקרה הגרוע) על מערך בגודל 5.

ב. כמו השוואות מבוצעים כל אחד מהמיונים שלמדו בקורס (הכנסה, מיזוג, עירימה, מהיר) על מערך בגודל 5 במקרה הטוב ובמקרה הגרוע?

ג. כתבו שגרה הממיינת מערך בגודל 5 ע"י 7 השוואות במקרה הגרוע.

ବିଦ୍ୟାର ପରିଷଦ୍ ଓ ମନ୍ତ୍ରାଳୟ

(1c)

בכדי

$$S/g(S) = 11.609 > 7$$

lc 

$$\text{def} \quad f^{-n} \quad (1)$$

(2)

5 २१२० A प्रभा

הנִזְקָנָה כְּבָבָה:

לפָרְמַנְדִּיָּה כִּי מֵתָה שֶׁלְמַנְדִּיָּה וְלֹא  
לְמַנְדִּיָּה כִּי מֵתָה שֶׁלְמַנְדִּיָּה וְלֹא

$$n = 5^{\star}$$

$$4 = n - 1$$

✓ 27/1

תְּהִלָּה אַגְּדָה

$$2 \div 3^4 = \boxed{10}$$

```

MERGE-SORT( $A, p, r$ )
1  if  $p < r$ 
2    then  $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$ 
3    MERGE-SORT( $A, p, q$ )
4    MERGE-SORT( $A, q+1, r$ )
5    MERGE( $A, p, q, r$ )

```

215. N | II. N (2

: 2'10" x 11'2"

```

MERGE( $A, p, q, r$ )
1    $n_1 \leftarrow q - p + 1$ 
2    $n_2 \leftarrow r - q$ 
3   create arrays  $L[1..n_1 + 1]$  and  $R[1..n_2 + 1]$ 
4   for  $i \leftarrow 1$  to  $n_1$ 
5     do  $L[i] \leftarrow A[p + i - 1]$ 
6   for  $j \leftarrow 1$  to  $n_2$ 
7     do  $R[j] \leftarrow A[q + j]$ 
8    $L[n_1 + 1] \leftarrow \infty$ 
9    $R[n_2 + 1] \leftarrow \infty$ 
10   $i \leftarrow 1$ 
11   $j \leftarrow 1$ 
12  for  $k \leftarrow p$  to  $r$ 
13    do if  $L[i] \leq R[j]$ 
14      then  $A[k] \leftarrow L[i]$ 
15           $i \leftarrow i + 1$ 
16      else  $A[k] \leftarrow R[j]$ 
17           $j \leftarrow j + 1$ 

```

: Merge  $\Rightarrow$   $\sigma_{210}$

לעתה נסמן את המרחב כטבלה של  $n \times m$  משבצות.

, Merge-Sort  $\Theta(n \log n)$

סוכן של מיליטריה צבאיות מיליטריה צבאיות מיליטריה צבאיות

and  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ .

גָּדוֹלָה הַיְלָדֶת בְּמִזְרָחָה וְבְמִזְרָחָה בְּמִזְרָחָה וְבְמִזְרָחָה

• 2016 10 20

•  $\lim_{n \rightarrow \infty} n/g(n) = e$ .  $\Rightarrow$   $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \infty$ .

סבירות נמוכה

$$P=1, R=5 \quad \text{perm, } n=5$$

✓ ✓ ✓

$$(P+R)/2 = \frac{6}{2} = 3$$

Merg-Sort յութ անգամ բարելի

✓ ✓ ✓

անգամ 4

$$P=1, R=5, Q=3$$



անգամ 2  $P=1, R=3, Q=2$

2x1x1  
1x1x1

$$P=3, R=5, Q=4$$

2x1x1  
1x1x1

$$4 \leftarrow L \leftarrow 2 = 8$$

5x3x1 1x3x1

HEAPSORT( $A$ )

```

1 BUILD-MAX-HEAP( $A$ )
2 for  $i \leftarrow \text{length}[A]$  downto 2
3   do exchange  $A[1] \leftrightarrow A[i]$ 
4     heap-size[ $A$ ]  $\leftarrow$  heap-size[ $A$ ] - 1
5   MAX-HEAPIFY( $A$ , 1)

```

העתקה זיהוי (3)

העתקה זיהוי:

: Build-Max-Heap  $\Rightarrow$  גורף גראף  
 Max-Heapify -> יזק אפקט  
 largest  $\rightarrow$  נציגו ציריך גב  
 $\rightarrow$   $i$  נציגו ציריך גב  
 כוונת מטריצת נורמצ.

$(n/\lg(n)) \ll 1$   $n$   $\gg 1$

HeapSort יוזם פולני

Max-Heapify יזק אפקט נורמצ  
 () מילויים וריאנטים מינימום  
 (לכזב, גורף, גב, גב, גב, גב)

$n \cdot n/\lg(n) \rightarrow$

$n/\lg(n) \rightarrow$  מה

העתקה זיהוי:

מיון,  $n/\lg(n) \rightarrow$  נורמצ. יזק.

מיון,  $n/\lg(n) \rightarrow$  יזק. HeapSort( $A$ ) =  $O(n/\lg(n))$  יזק.

מיון,  $n/\lg(n) \rightarrow$  יזק. יזק.

הנתקה (4)

**QUICKSORT**( $A, p, r$ )

```

1 if  $p < r$ 
2   then  $q \leftarrow \text{PARTITION}(A, p, r)$ 
3    $\text{QUICKSORT}(A, p, q - 1)$ 
4    $\text{QUICKSORT}(A, q + 1, r)$ 

```

PARTITION( $A, p, r$ )

```

1   $x \leftarrow A[r]$ 
2   $i \leftarrow p - 1$ 
3  for  $j \leftarrow p$  to  $r - 1$ 
4      do if  $A[j] \leq x$ 
5          then  $i \leftarrow i + 1$ 
6          exchange  $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
7  exchange  $A[i + 1] \leftrightarrow A[r]$ 
8  return  $i + 1$ 

```

הנראה כמו בQUIKSORT, ומגניט (בכל מקרה)

מִזְרָחַ 8 מִזְרָחַ 19

## וְנִזְמָן

$$\sum_{i=1}^4 5-i = 4+3+2+1 = \boxed{10}$$

# Order-Array-Of-5(A)

(2)

if  $A[1] < A[2]$  then ①

$A[1] \leftrightarrow A[2]$

if  $A[3] < A[4]$  then ②

$A[3] \leftrightarrow A[4]$

if  $A[1] < A[3]$  then ③

$A[1] \leftrightarrow A[3]$

if  $A[5] < A[3]$  then ④

if  $A[5] < A[4]$  then ⑤

$A[5] \leftrightarrow A[4]$

else then

$A[5] \leftrightarrow A[3]$

if  $A[2] < A[5]$  then ⑥

if  $A[2] < A[3]$  then ⑦

$A[2] \leftrightarrow A[3]$

$A[3] \leftrightarrow A[4]$

else

$A[2] \leftrightarrow A[4]$

שאלות 3 (25 נקודות)

**הוכיחו/הפריכו (בקצרה):**

- א. ניתן למין ערים מינימום בזמן לינארי.
  - ב. ניתן למצוא ולמיון את  $log/n$  האיברים הקטנים במערך כלשהו בזמן לינארי.
  - ג. ניתן למין מערך בגודל  $n$  שערך כל מספר בו הוא לכל היותר  $\sqrt{n}$  בזמן לינארי.
  - ד. נתנו מערך בגודל  $n$  שבו מאוחסנים השלמים מ-0 ל- $n$  פרט לאחד. ניתן למצוא את המספר החסר בזמן לינארי.

$O(n \lg(n))$  איננו סדר מילוי כפוי.

۱۳۰۲ تاریخ نویسندگان این مقاله را در کتابخانه ملی ایران مشاهده کنید.

! **MNS** **μνσ** **μ'** **ν'** **σ'**

$$: \frac{n}{\lg(n)} \quad \text{for } n \quad \text{now} \quad \text{and} \quad n^3 \quad (?)$$

$I_C = \frac{V}{R}$ ,  $I_C/g(\mu)$  ~ 2230 : 10, 11, 10

$$\frac{n}{l^g(n)} \cdot l^g\left(\frac{n}{l^g(n)}\right) = \frac{n}{l^g(n)} \left( l^g(n) - l^g(l^g(n)) \right) =$$

$$n = \frac{n}{lg(n)} lg(lg(n))$$

$\lg(\lg(n)) \leq \lg(n) \in \Theta(n)$

$$\frac{n}{\lg(n)} \lg(\lg(n)) \leq n$$

$$n - \frac{n}{\lg(n)} \lg(\lg(n)) \rightarrow n$$

$$n \cdot \frac{n}{\lg(n)} = \frac{n^2}{\lg(n)} \quad \text{מזהה את שורש השתק}$$

!break .טראנספורם

$$n \lg(n) \text{ מוגדר בזאת } n \text{ כפנית גזורה ריבועית}$$

!break .טראנספורם

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \text{ מוגדר כטראנספורם}$$

לפנינו ישנו אוסף של  $n$  אובייקטים ורשות לנו לסדר אותם בהתאם לערך  $i$ .

כדי לעשות

**שאלה 4 (25 נקודות)**

**בשני הסעיפים הבאים נתייחס לבעיה הבאה : הקלט הוא מערך A בן n מספרים בו כל אבר הוא**

אחד משלווה ערכיים : 2,1,0. נדון באפניהם שונים למילון המערך A.

א. מה המקורה הגורע ביותר ומה המקורה הטוב ביותר של מילון הכנסה על קלט מסווג זה?

## הסבירו.

ב. מיפויו את המערך A ע"י שתי קריאות ל-Partition(A,p,r). לפני כל קריאה מותר לכם

לעשות מעבר ייחיד על הקלט בכדי להחליט על איבר שיהיה במקום האחרון במערך

(ב) אינדקס 2. קבעו מוחם האינדקסים ק ו-ז שעיליכם לשולח בכל פעם. השבירו בקצרה את תשובתכם.

ג. השתמשו במילון מנייה. מה גודל מערכו העוזר (B ו-C) בהם עלייכם להשתמש? מה זמן

הרייצה המתקבל?

ד. איזה מבין המינויים שלעיל יציב?

1c

רַגְלֵי כָּבֵד נִזְבֵּחַ :

$$A = \begin{bmatrix} 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2 \end{bmatrix}$$

*labeled*

$$\text{השאלה היא שאלת אגדה ורשותה לארון}$$

סמלים וסימנים

ל'א מילא נסח' נסח'

$$A = \begin{bmatrix} 2, \dots, 2, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}$$

3- ג' יוניסטרס אוניברסיטאות ו- 2- ג' אוניברסיטאות טכניות

Worstcase  $\approx$   $\Theta(n^2)$

$\Theta(n^2)$

PARTITION( $A, p, r$ )

```

1    $x \leftarrow A[r]$ 
2    $i \leftarrow p - 1$ 
3   for  $j \leftarrow p$  to  $r - 1$ 
4       do if  $A[j] \leq x$ 
5           then  $i \leftarrow i + 1$ 
6               exchange  $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
7   exchange  $A[i + 1] \leftrightarrow A[r]$ 
8   return  $i + 1$ 

```

Partition( $A, 1, n$ )

Analysing social

Partition(A, 1, m)

2- מילוי הדרישות המבוקש

לעומת נסיעות מושג של מילון מילון נסיעות

COUNTING-SORT( $A, B, k$ )

```

1  for  $i \leftarrow 0$  to  $k$ 
2      do  $C[i] \leftarrow 0$ 
3  for  $j \leftarrow 1$  to  $\text{length}[A]$ 
4      do  $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$ 
5   $\triangleright C[i]$  now contains the number of elements equal to  $i$ .
6  for  $i \leftarrow 1$  to  $k$ 
7      do  $C[i] \leftarrow C[i] + C[i - 1]$ 
8   $\triangleright C[i]$  now contains the number of elements less than or equal to  $i$ .
9  for  $j \leftarrow \text{length}[A]$  downto 1
10     do  $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$ 
11      $C[A[i]] \leftarrow C[A[i]] - 1$ 

```

2

סבבון נס

$$3^+ n^- 3^- n = 2n^- 3 = \textcircled{2c}(n)$$

מיצג גלובלי ייכוח : Partition נפרק ל-Partition (?)

do if  $A[j] \leq x$

parallel גולש און ה貫תן גודלה נסמן

!> 3. ה-Partition ה-Partition

: Do for while

: פול. מילוי גולש און נסמן

while  $i > 0$  and  $A[i] > key$

לפ. מילוי גולש און נסמן ה-Partition ה-Partition

!> 3. ה-Partition ה-Partition

, 141. סדר כבוי, ס. 1.1.1. Swap

!> 3. Swap Swap Swap