ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20109

אלגברה לינארית 1

חוברת הקורס - קיץ 2023ג

כתב: נתנאל רגב

יולי 2023 - סמסטר קיץ - תשפ"ג

תוכן העניינים

אל הסטודנטים

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם ללומדי הקורס "אלגברה לינארית 1".

כדי להקל עליכם את לימוד הקורס, שאינו קל, השקענו מאמץ ניכר בבניית מערכת מסייעת ללימוד העצמי. תיאור המערכת כלול בחוברת זו. אנו ממליצים שתקראו את החוברת עוד בטרם תיגשו ללימוד עצמו.
בהמשך תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת:
http://www.openu.ac.il/shoham.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכז ההוראה של הקורס הוא נתנאל רגב. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 09-7781423, בימי א', בין השעות 11:00-12:00.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני - netanr@openu.ac.il
- פקס: 09-7780631.
- **שאילתא** - לפניות בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאילתא. לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת **בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות.**

אנו מאחלים לכם הצלחה בלימודיכם.

ב ב ר כ ה ,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20109 / 2023ג)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי הנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה)
1	14.7.2023-9.7.2023	פרקים 1, 5, 2			
2	21.7.2023-16.7.2023	פרקים 2, 3		מומלץ להתחיל לפתור ממ"ן 11 וממ"ח 01	
3	28.7.2023-23.7.2023 (ה צום ט' באב)	פרקים 3, 4			ממ"ן 11 30.7.2023
4	4.8.2023-30.7.2023	פרקים 4, 6, 7			
5	11.8.2023-6.8.2023	פרקים 7, 8			ממ"ן 12 13.8.2023
6	18.8.2023-13.8.2023	פרק 8		ממ"ח 01 19.8.2023	
7	25.8.2023-20.8.2023	פרק 9			ממ"ן 13 27.8.2023
8	1.9.2023-27.8.2023	פרקים 10, 11		ממ"ח 02 30.8.2023	ממ"ן 14 6.9.2023
9	8.9.2023-3.9.2023	פרקים 11, 12		ממ"ח 03 17.9.2023	ממ"ן 15 15.9.2023

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

על מנת לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם :

1. להגיש מטלות במשקל כולל של **11 נקודות לפחות**.
2. לקבל בבחינת הגמר ציון **60 לפחות**.
3. לקבל בציון הסופי של הקורס **60 נקודות לפחות**.

פירוט המטלות בקורס

בקורס אלגברה לינארית 1, **3** ממ״חים ו-**5** ממ״נים.
תאריכי הגשת המטלות מופיעים בלוח זמנים ופעילויות וכן על גבי המטלות עצמן. שימו לב כי תאריכים אלה הם תאריכים אחרונים למשלוח. מטלות שיישלחו לאחר המועד שנקבע בלוח הזמנים של הקורס, לא תילקחנה בחשבון בחישוב הציון הסופי. המטלות תיבדקנה על ידי המנחים כדי שהסטודנטים יוכלו לקבל משוב על עבודתם. במקרים מיוחדים של אי עמידה בלוח הזמנים, ניתן לפנות אל מרכז ההוראה.

המטלה	הפרקים אליהם היא מתייחסת	משקל המטלה
ממ״ח 01	פרקים 1 - 4	1
ממ״ח 02	פרקים 6 - 8	1
ממ״ח 03	פרקים 9 - 12	1
ממ״ן 11	פרקים 1 – 2 ופרק 5 סעיפים 5.1 – 5.2	3
ממ״ן 12	פרקים 3 – 4	3
ממ״ן 13	פרקים 6 – 8.3 (כולל)	4
ממ״ן 14	פרקים 8.4 – 10	4
ממ״ן 15	פרקים 11 – 12	3
		סה״כ 20 נקודות

חשוב לדעת!

- **למפגש הראשון** יש לקרוא באופן מעמיק את **פרק 1 של כרך א' וסעיפים 5.1 ו- 5.2 בכרך ב'.**

- **החוברת "פרקי ההכנה בקורס"** מיועדת ללימוד עצמי. לא יהיה תרגול על החומר הזה במסגרת המפגש . **<u>אין צורך</u>** לקרוא את כל החוברת בתחילת הסמסטר.
הנחיות בנושא זה יופיעו באתר הקורס בלשונית : פרקי הכנה.

- **פתרון המטלות** הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

  כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן :
  בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר.
  ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
  ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.
  ראו הסבר מפורט באתר הקורס בלשונית "מידע כללי על הקורס".

  זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

- **מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.**

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20109 – אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 – 2 ופרק 5 סעיפים 5.1 – 5.2

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2023ג **מועד אחרון להגשה:** **30.7.2023**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

פתרו את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2x+2y+6z=1 \\ 3x-2y-z=-11 \\ -x+4y+2z=12 \\ 4x-2y+6z=1 \end{cases}$$

1) מעל $\mathbb{R}$ **2)** מעל $\mathbb{Z}_7$ **3)** מעל $\mathbb{Z}_5$

בכל אחד מהמקרים ציינו מהו מספר הפתרונות, ובמקרה שיש יותר מפתרון אחד רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} (a+1)x_1+(a+1)x_2-ax_3=1 \\ (a+1)x_1+(a+1)^2x_2-a(a+2)x_3=1 \\ 2(a+1)x_1+(a+1)(a+2)x_2-2ax_3=a+3 \end{cases}$$

קבעו את ערכי a עבורם למערכת יש:

1. פתרון יחיד. במקרה זה רשמו את הפתרון היחיד של המערכת.

2. אינסוף פתרונות. במקרה זה, רשמו את הפתרון הכללי של המערכת.

3. אין פתרון.

שאלה 3 (15 נקודות)

נתונות שתי מערכות לינאריות (M) ו - (N) ב- n משתנים מעל אותו שדה.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית כל אחת מהטענות הבאות :

א. אם המערכות (M) ו - (N) שקולות זו לזו אז ל-2 המערכות יש אותו מספר משוואות.

ב. אם למערכות (M) ו - (N) יש אותה מטריצת מקדמים מצומצמת והמערכת (M) היא מערכת הומוגנית בעלת פתרון יחיד, אז למערכת (N) יש פתרון יחיד.

ג. אם מטריצות המקדמים המצומצמות של (M) ו- (N) שקולות־שורה ונתון שה- n-יה $(x_1, \dots, x_n)$ היא פתרון המתאים לשתי המערכות אז שתי המערכות (M) ו-(N) שקולות.

שאלה 4 (20 נקודות)

א. נתונה התת-קבוצה $A = \{u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (1,2,3)\}$ של $\mathbb{R}^3$.
באיזה תנאי על המספרים הממשיים (a, b, c) הווקטור $v = (a, b, c)$ הוא צירוף לינארי של וקטורי הקבוצה A? האם הקבוצה A פורשת את $\mathbb{R}^3$.

ב. נתונה התת-קבוצה $B = \{w_1 = (1,1,-1),\ w_2 = (2,3,1)\ \ w_3 = (1,2,2)\}$ של $\mathbb{R}^3$.
באיזה תנאי על המספרים הממשיים (a, b, c) הווקטור $v = (a, b, c)$ הוא צירוף לינארי של וקטורי הקבוצה B? האם הקבוצה B פורשת את $\mathbb{R}^3$?

ג. מצאו את אוסף כל הווקטורים ב- $\mathbb{R}^3$ שניתן לרשום אותן כצירוף לינארי של איברי הקבוצה A וגם של איברי הקבוצה B.

ד. האם הווקטור $v = (2,6,10)$ הוא צירוף לינארי של איברי הקבוצה A ו- B? אם כן, מצאו בכמה צירופים לינאריים ניתן להביע את v

1. בעזרת איברים מתוך הקבוצה A.

2. בעזרת איברים מתוך הקבוצה B.

נמקו היטב את תשובתכם. אין צורך למצוא את הצירופים הלינאריים.

שאלה 5 (15 נקודות)

תהי $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ קבוצת וקטורים בלתי תלויה לינארית ב- $\mathbb{R}^3$. ותהי B הקבוצה הבאה :

$$B = \{t\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3}, \qquad \boldsymbol{v_1} + t\boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3}, \qquad \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} + t\boldsymbol{v_3}\}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

א. מצאו עבור אלו ערכי t הקבוצה B תלויה לינארית.

ב. נתון ש- v_1 הוא צירוף לינארי של איברי הקבוצה B הוכיחו שהקבוצה B בסיס של $\mathbb{R}^3$.

שאלה 6 (10 נקודות)

נתונים הווקטורים $v_1, \dots, v_m, w \in \mathbb{R}^n$. הוכיחו שאם הקבוצה $\{v_1, \dots, v_m\}$ בלתי תלויה לינארית ואילו הקבוצה $\{v_1 - w, v_2 - w, \dots, v_m - w\}$ תלויה לינארית, אז ניתן להביע את w כצירוף לינארי של איברי הקבוצה $\{v_1, \dots, v_m\}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: **20109 – אלגברה לינארית 1**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 3 – 4

מספר השאלות: 6   **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2023ג   **מועד אחרון להגשה:** **13.8.2023**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

נתונות מטריצות ריבועיות $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ כך שמתקיים $A - A^2B - I = O$ (O היא מטריצת האפס).

א. הוכיחו ש- A ו- B מתחלפות (בכפל).

ב. נתון בנוסף שמתקיים $4BA^2 + A^2 - 4A = O$. הוכיחו ש- B מטריצה הפיכה.

ג. חשבו $\det A$.

שאלה 2 (15 נקודות)

נתונה מטריצה ריבועית מסדר 4×4 המקיימת $A = 4A^4A^t - 4A(A^t)^4$.

א. הוכיחו ש- A מטריצה אנטיסימטרית.

ב. נתון בנוסף ש- A מטריצה הפיכה. חשבו $|A|$.

שאלה 3 (15 נקודות)

הביעו בעזרת b, a ו-n (n סדר המטריצה) את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b & a & a & \cdots & a & a \\ a & b & a & \cdots & a & a \\ a & a & b & \ddots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & b & a \end{vmatrix} , \qquad d_{ij} = \begin{cases} 1 \ , & i = 1 \\ b \ , & i = j + 1 \\ a \ , & else \end{cases}$$

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי A מטריצה ריבועית מסדר 3×3 המקיימת

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\t-2\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\t-3\\2\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+5\\6\\-2\end{pmatrix}$$

א. עבור אלו ערכי $t \in \mathbb{R}$ המטריצה A הפיכה.

יש לענות על סעיף זה ללא חישוב ישיר של המטריצה A.

הדרכה: העזרו בלמה 3.4.3.

ב. הביעו את המטריצה A בעזרת t. הוכיחו ישירות בעזרת חישוב הדטרמיננטה של A את מה שנתבקשתם להוכיח בסעיף א׳.

שאלה 5 (15 נקודות)

תהיינה A ו- B מטריצות ריבועיות מאותו הסדר.

א. נתון שהמטריצה A הפיכה. הוכיחו שמתקיים $|I+BA|=|I+AB|$.

ב. נתון בנוסף ש $|A|=|B|$. הוכיחו שמתקיים. $|B^{-1}+A|=|A^{-1}+B|$.

שאלה 6 (15 נקודות)

תהי A מטריצה ריבועית מסדר n שבה סכום של כל עמודה שווה ל - n. יהי $v=(1,\dots,1)$ וקטור שורה באורך n שכל איבריו הם 1. נסמן ב- A_i את המטריצה המתקבלת מ- A ע״י החלפת השורה ה- i בווקטור v.

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: במקרה שמתואר בשאלה מתקיים

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|$$

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20109- אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 – 4

מספר השאלות: 17 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2023ג **מועד אחרון להגשה:** **19.8.2023**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמנו:

א – אם רק טענה 1 נכונה.
ב – אם רק טענה 2 נכונה.
ג – אם שתי הטענות נכונות.
ד – אם שתי הטענות לא נכונות.

שאלה 1

נתונה המערכת הלינארית ב-3 נעלמים מעל $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 3 \\ -x + y + z = -3 \\ 3x - 2y + 5z = 1 \\ x + 2y - 2z = 4 \end{cases}$$

1. למערכת זו יש פתרון יחיד.

2. אם מוחקים את המשוואה הראשונה יש אינסוף פתרונות למערכת המתקבלת.

שאלה 2

נתונה המערכת הלינארית ב-4 נעלמים מעל $\mathbf{Z}_{11}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

1. למערכת זו 11 פתרונות.

2. למערכת זו אין פתרון.

שאלה 3

נתונה מערכת לינארית ב-3 נעלמים מעל $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

1. אם $5a - 2b - c = 0$, אז למערכת הנתונה יש אינסוף פתרונות.

2. ניתן למצוא a,b,c שעבורם למערכת אין פתרון.

שאלה 4

למערכת הלינארית ב-3 נעלמים מעל $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} 4ax + 2a^2 y - z = 4 \\ 4ay - z = a \\ -4a^2 y + (4 - 3a^2)z = 4a - 5 \end{cases}$$

1. לכל $a \neq 1, -\frac{4}{3}$ יש פתרון יחיד.

2. קיים a עבורו אין פתרון למערכת.

בשאלות 5 ו-6 השדה הוא $\mathbf{R}$

שאלה 5

תהי מערכת משוואות הומוגנית של k משוואות ב- n נעלמים.

1. אם $k > n$, אז למערכת יש הפתרון הטריוויאלי בלבד.

2. אם $k \leq n$, אז למערכת יש אינסוף פתרונות.

שאלה 6

תהי מערכת לינארית (M) של k משוואות ב- n נעלמים. נניח כי ל-(M) קיים פתרון אחד לפחות.

1. אם $k < n$, אז למערכת יש אינסוף פתרונות.

2. אם $k = n$ אז לכל מערכת לינארית עם אותה מטריצת מקדמים מצומצמת קיים פתרון.

שאלה 7

תהי מערכת משוואות אי-הומוגנית של k משוואות ב- n נעלמים, אשר מטריצת המקדמים המצומצמת שלה היא מטריצת מדרגות בלי שורות אפסים.

1. $k \leq n$.

2. אם יש פתרון יחיד, אז $k = n$.

שאלה 8

תהי $A=\{(1,0,1,0),(0,1,1,1),(2,3,5,3),(0,0,1,0),(1,1,3,1)\}$ מוכלת ב- $\mathbf{R}^4$.

1. הקבוצה A פורשת את $\mathbf{R}^4$.

2. $(1,1,1,1)$ הוא צרוף לינארי של הווקטורים $(1,1,3,1),(0,0,1,0),(2,3,5,3),(0,1,1,1)$.

שאלה 9

תהי $A=\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3,\ldots,\underline{a}_k\}$ קבוצת וקטורים תלויה לינארית ב- $\mathbf{R}^n$, $k\geq 2$.

1. אם $\underline{a}_1$ צירוף לינארי של $\underline{a}_2,\underline{a}_3,\ldots,\underline{a}_k$ אז $A'=\{\underline{a}_2,\underline{a}_3,\ldots,\underline{a}_k\}$ בלתי תלויה לינארית.

2. אם A פורשת את $\mathbf{R}^n$ אז $k>n$.

בשאלות 10- 14 , המטריצות מעל שדה F.

שאלה 10

תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.

1. אם קיים מספר k טבעי כך ש- A^k רגולרית אז A רגולרית.

2. אם $A^2=O$ אז $A=O$.

שאלה 11

תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.

1. אם $A+A^2=I$ אז A הפיכה.

2. אם A סינגולרית אז A^3+A^2+A סינגולרית.

שאלה 12

תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.

1. אם A סינגולרית, אז יש בה שורת אפסים.

2. אם יש ב- A עמודת אפסים, אז A שקולת שורות למטריצה בעלת שורת אפסים אחת לפחות.

שאלה 13

יהיו A ו- B מטריצות מסדר $n\times n$.

1. אם לכל $\underline{c}\in F^n$ יש פתרון למערכת $AB\underline{x}=\underline{c}$, אז לכל $\underline{c}\in F^n$ יש פתרון למערכת $B\underline{x}=\underline{c}$.

2. אם A,B מטריצות סימטריות אז גם AB סימטרית.

שאלה 14

1. אם קבוצת העמודות של מטריצת המקדמים של מערכת משוואות לינארית היא בלתי תלויה לינארית, אז למערכת פתרון יחיד.
2. אם למערכת משוואות לינאריות יש יותר מפתרון אחד, אז קבוצת העמודות של מטריצת המקדמים המצומצמת שלה תלויה לינארית.

שאלה 15

1. המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbf{Z}_7$ היא סינגולרית.
2. מעל $\mathbf{R}$, אם $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 2$ אז $\begin{vmatrix} f & k-4c & 2k+f \\ d & g-4a & 2g+d \\ e & h-4b & 2h+e \end{vmatrix} = -16$.

בשאלות 16 ו- 17, המטריצות מעל שדה המספרים הממשיים $\mathbf{R}$.

שאלה 16

1. נניח כי C, B מטריצות ריבועיות מסדר 5 כך ש- $|B| = \frac{1}{2}, |C| = 4$. אז $\left|-2B^t(C^{-1})^2\right| = -1$.
2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & n-1 \end{vmatrix} = -(n-2)!$.

שאלה 17

תהיינה A, B מטריצות ריבועיות מסדר 3 כך ש- $\det A = 3$ ו- $\det B = \frac{1}{2}$. אז:

1. $\det(2BA)^2 = 9$.
2. $\det(A + B^{-1}) = 5$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20109 – אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 6 – 8.3 (כולל)

מספר השאלות: 7   **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2023ג   **מועד אחרון להגשה:** **27.8.2023**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10 נקודות)

נתון מספר $z \in \mathbb{C}$ המקיים $|z| = 1$. פתרו את המשוואה $2z \cdot \bar{z} = z + \bar{z} - i(z - \bar{z})$.

שאלה 2 (15 נקודות)

נתונה הדטרמיננטה הבאה:

$$D = \begin{vmatrix} a^3 - a^2 & -a^3 - 1 & -a^2 - 1 \\ a^2 - 1 & a^3 + 1 & a^3 + a^2 \\ a^2 - 1 & a^3 + a^2 & a^3 + 2a^2 \end{vmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטה בעזרת פעולות אלמנטריות, ומצאו את כל ערכי $a \in \mathbb{C}$ עבורם הדטרמיננטה מתאפסת. אתם יכולים להשאיר את הפתרון בהצגה הטריגונומטרית.

שאלה 3 (10 נקודות)

בדקו האם הקבוצה $V = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{C}\}$ מהווה מרחב לינארי מעל השדה $\mathbb{R}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר המוגדרות באופן הבא: לכל $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ ו- $\lambda \in \mathbb{R}$.

חיבור – $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$

כפל בסקלר – $\lambda \odot (a,b) = i\lambda(a,b)$

שאלה 4 (15 נקודות)

בדקו, האם כל אחת מהקבוצות הבאות היא מרחב לינארי, ביחס לפעולות הרגילות:

א. $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-y)^2 + (y-z)^2 = 0\}$ מעל $\mathbb{R}$.

ב. $V = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a + b + c = 1\}$ מעל $\mathbb{R}$.

ג. $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^2\}$ מעל $\mathbb{R}$.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהיינה $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}_4[x]$ המוגדרות באופן הבא:

$$V_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \mid p(1) = p(0)\}$$

$$V_2 = \{a + bx - (a+b)x^2 + ax^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

א. הוכיחו ש-V_1 תת־מרחב של $\mathbb{R}_4[x]$ בעזרת המבחן לתת-מרחב של משפט 7.3.2.

ב. הוכיחו ש-V_2 תת־מרחב של $\mathbb{R}_4[x]$ בעזרת מציאת קבוצה סופית K, כך ש- $V_2 = \mathrm{Sp}(K)$.

ג. האם הפולינום $p(x) = 3 - 2x - x^2 + 3x^3 \in V_2$. אם כן, מצאו לו צירוף לינארי של איברי הקבוצה K שמצאתם בסעיף ב׳.

ד. האם $\mathbb{R}_4[x] = V_1 + V_2$? אם כן, האם $\mathbb{R}_4[x] = V_1 \oplus V_2$? אם הסכום אינו סכום ישר מצאו קבוצה פורשת סופית עבור $V_1 \cap V_2$.

הערה: יש לפתור את סעיפים ב׳ ו-ג׳ ללא שימוש בחומר של פרק 8.

שאלה 6 (15 נקודות)

יהיו $v_1, v_2, \dots, v_k, w$ וקטורים **שונים** במרחב לינארי V.

נתון ש $w \in \mathrm{Sp}\{v_1 - w, v_2 - w, \dots, v_k - w\}$. הוכיחו שאם הקבוצה $\{v_1, \dots, v_k\}$ בלתי תלויה לינארית אז הקבוצה $\{v_1 - w, v_2 - w, \dots, v_k - w\}$ בלתי תלויה לינארית.

שאלה 7 (15 נקודות)

יהי V מרחב לינארי כך ש $\dim V = 5$. יהיו $V_1, V_2, V_3 \subset V$ מרחבים לינאריים **שונים** זה מזה וכך ש $\dim V_i = 4$ לכל $i = 1,2,3$. נתון ש $V_1 \cap V_2 \not\subseteq V_3$. חשבו את $\dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$.

הדרכה: התבוננו במרחב $(V_1 \cap V_2) + V_3$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20109- אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 6 – 8

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2023ג **מועד אחרון להגשה:** 30.8.2023

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמנו:

א – אם רק טענה 1 נכונה. **ב** – אם רק טענה 2 נכונה.

ג – אם שתי הטענות נכונות. **ד** – אם שתי הטענות לא נכונות.

שאלה 1

.1 הקבוצה $\{a+bi \mid a,b \in \mathbf{Q}\}$ היא שדה ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות.

.2 קבוצת כל המטריצות ההפיכות מסדר $n \times n$ מעל $\mathbf{R}$ היא שדה ביחס לפעולות החיבור והכפל של מטריצות.

שאלה 2

לכל מספר מרוכב z מתקיים:

.1 המספר $z^3\bar{z} + \bar{z}^3 z$ הוא מספר ממשי.

.2 $|1+iz| = |1-iz|$.

שאלה 3

.1 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{16} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

.2 $\left|\frac{(3+i)^4}{(1-2i)^5}\right| = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

שאלה 4

.1 ההצגה הטריגונומטרית של $-1+i\sqrt{3}$ היא $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

.2 $\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$.

שאלה 5

.1 אם $w\in\mathbf{C}$ הוא פתרון של המשוואה $z^4+2z^3+2z+6=0$ אז גם $\bar{w}$ הוא פתרון של המשוואה.

.2 אם w הוא פתרון של המשוואה $z^2+iz=0$ אז גם $\bar{w}$ הוא פתרון שלה.

שאלה 6

.1 ההצגה הטריגונומטרית של $\sin\alpha-i\cos\alpha$ היא $\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})+i\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})$.

.2 ההצגה הטריגונומטרית של $-1+i$ היא $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

שאלה 7

.1 כל הפתרונות של המשוואה $z^4=-4$ הם $1+i$, $1-i$, $-1+i$ ו- $-1-i$.

.2 כל הפתרונות של המשוואה $z^3=i$ הם $-i$, $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ ו- $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

שאלה 8

.1 הקבוצה $\mathbf{R}^2$ הוא שדה עבור הפעולות הבאות:

חיבור: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ כפל: $(a,b)(c,d)=(ac,bd)$.

.2 הקבוצה $\mathbf{R}^2$ הוא מרחב לינארי מעל $\mathbf{R}$ ביחס לפעולות הבאות:

לכל $(a,b),(c,d)\in\mathbf{R}^2$ ו- $k\in\mathbf{R}$

החיבור מוגדר ע"י $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$ והכפל בסקלר ע"י $k*(a,b)=(ka,b)$.

שאלה 9

.1 אם U ו- W הם מרחבים לינאריים מעל שדה F אז $V=\{(u,w)|\,u\in U,\ w\in W\}$ הוא מרחב לינארי ביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר המוגדרים על-ידי:

$(u_1,w_1)+(u_2,w_2)=(u_1+u_2,\ w_1+w_2)$ ו- $\lambda(u,w)=(\lambda u,\lambda w)$

.2 $W=\{p(x)\in\mathbf{R}_5[x]\,|\,p(-1)=p(1)=2\}$ הוא תת-מרחב של $\mathbf{R}_5[x]$.

שאלה 10

1. $v=(a,b,c)\in Sp\{(1,-2,0),(0,2,-1)\}$ אם ורק אם $2a+b=0$ וגם $c=0$.

2. $Sp\{(1,-1,2,1),(3,-1,0,1),(0,-1,3,1)\}=Sp\{(1,0,-1,0),(1,-3,8,3)\}$.

שאלה 11

1. קבוצת המטריצות $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}$ תלויה לינארית.

2. הקבוצה $\{x^3+x^2, x^3+1, x^2-x+1, x^3-2x^2+2x-1, 2x^2-3x+4\}$ פורשת את $\mathbf{R}_4[x]$.

שאלה 12

יהיו $v_1,v_2,...,v_n,u$ וקטורים במרחב לינארי V, $n\geq 2$.

1. אם הקבוצה $\{v_1,...,v_n\}$ היא בלתי תלויה לינארית ו- $u\notin Sp\{v_1,...,v_n\}$, אז גם הקבוצה $\{v_1,v_2,...,v_n,u\}$ בלתי תלויה לינארית.

2. אם $u\in Sp\{v_1,v_2,...,v_n\}$ אך $u\notin Sp\{v_1,v_2,...,v_{n-1}\}$, אז קיים סקלר λ כך ש- $u=\lambda v_n$.

שאלה 13

תהיינה A,B תת-קבוצות של מרחב לינארי V.

1. אם $A\subset B$ (חלקית ממש) ו- $Sp(A)=Sp(B)$ אז B תלויה לינארית.

2. אם $A+A=A$ אז A תת-מרחב של V.   (<u>תזכורת</u>: $A+A=\{a_1+a_2 \mid a_1,a_2\in A\}$)

שאלה 14

1. אם U תת-מרחב של מרחב לינארי נוצר סופית V אז קיים תת-מרחב יחיד W של V כך ש- $U\oplus W=V$.

2. אם $A=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של V ו- U תת-מרחב של V ממימד k, $0<k<n$, אז קיימים k וקטורים ב- A המהווים בסיס ל- U.

שאלה 15

1. מתקיים $\mathbf{R}^3=\{(\alpha,\alpha-2\beta,\beta)\mid \alpha,\beta\in\mathbf{R}\}\oplus\{(3\delta,-\delta,2\delta)\mid \delta\in\mathbf{R}\}$.

2. נתונים התת-מרחבים $W_1=\left\{\begin{pmatrix}a+b&b\\a&0\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbf{R}\right\}$ ו- $W_2=\left\{\begin{pmatrix}c&0\\d&d-c\end{pmatrix}\middle| c,d\in\mathbf{R}\right\}$.

אז $M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}=W_1\oplus W_2$.

שאלה 16

יהיו W, U תת-מרחבים של $\mathbf{R}^8$.

.1 אם $\dim U = 6$ ו- $\dim W = 4$ אז $\dim(U \cap W) \geq 2$.

.2 אם $\dim U = 3, \dim W = 5$ ו- U לא מוכל ב- W אז $\dim(U \cap W) = 2$.

שאלה 17

.1 וקטור הקואורדינטות של $(1,0,3,2)$ בבסיס הסדור

$((1,0,1,1),\ (1,1,0,1),\ (1,1,1,0),\ (0,1,1,1))$ הוא $(2,-1,0,1)^t$.

.2 מטריצת המעבר מהבסיס $(x^2-1, x+1, 3)$ לבסיס $(x^2, x, 1)$ של $\mathbf{R}_3[x]$ היא $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

שאלה 18

.1 יהיו $B = ((1,2),(3,-1))$ ו- $C = ((0,1),(1,0))$ בסיסים של $\mathbf{R}^2$.

אם $[u]_B = (3,4)^t$ אז $[u]_C = (15,2)^t$.

.2 מטריצת המעבר מהבסיס $(v_1+v_2,\ v_2+v_3,\ v_3+v_1)$ לבסיס $(v_1,\ v_2,\ v_3)$ של מרחב לינארי

ממימד 3 היא $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 19

.1 אם A ו- B מטריצות מסדר $n \times n$ אז מרחב העמודות של AB מוכל במרחב העמודות של A.

.2 מרחב העמודות של מטריצה ריבועית שווה למרחב השורות שלה.

שאלה 20

.1 אם A, B מטריצות ריבועיות מסדר n אז $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$.

.2 אם A מטריצה מסדר 5×7 אז מימדו של מרחב הפתרונות של המערכת $A\underline{x} = \underline{0}$ גדול או שווה ל- 2.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20109 – אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 8.4 – 10

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2023ג **מועד אחרון להגשה:** **6.9.2023**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15 נקודות)

תהי $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ סדרת וקטורים בלתי תלויה לינארית ב- $\mathbb{R}^4$. ותהי A הקבוצה הבאה:

$$A = \{v_1 + tv_2 + v_3, \quad v_2 + tv_3 + v_4, \quad v_3 + tv_4 + v_1, \quad v_4 + tv_1 + v_2\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

א. עבור אלו ערכי הפרמטר $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathrm{Sp}(A) = \mathbb{R}^4$?

ב. מצאו בסיס וממד ל- $\mathrm{Sp}(A)$ עבור ערכי t שבהם $\mathrm{Sp}(A) \neq \mathbb{R}^4$.

שאלה 2 (15 נקודות)

תהי $U \subseteq \mathbb{R}_4[x]$ המוגדרת באופן הבא:

$$U = \{2(b+c) + 2(a-c)x + (a+3b+2c)x^2 + 2(b+c)x^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- U (אין צורך להוכיח ש- U תת־מרחב).

ב. הוכיחו שהקבוצה $B = (u_1 = 1 - x + x^2 + x^3,\ u_2 = 2x + x^2)$ בסיס (סדור) של U.

ג. האם הפולינום $p(x) = 2 + 4x + 5x^2 + 2x^3$ שייך לתת-מרחב U? אם כן, מצאו $[p(x)]_B$.

שאלה 3 (10 נקודות)

תהיינה A, B מטריצות ריבועיות מסדר n המקיימות $\rho(AB) < \rho(BA)$.

א. הוכיחו שהמטריצות A ו- B הן מטריצות **לא** הפיכות.

ב. נתון בנוסף ש- $n = 3$ ו- $\rho(B) < \rho(BA)$. חשבו $\rho(A)$, $\rho(B)$, $\rho(BA)$ ו- $\rho(AB)$.

שאלה 4 (15 נקודות)

עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבעו האם היא לינארית. אם היא לינארית, הוכיחו. אם לא, הסבירו מדוע.

א. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ המוגדת על ידי $T(x,y)=(x,xy,y)$.

ב. $T: M_{3\times 3}^{\mathbb{R}} \to M_{2\times 2}^{\mathbb{R}}$ המוגדרת על ידי $T(X)=X_{11}^{M}$.

להזכירם, A_{ij}^{M} היא המטריצה המינורית ה- i,j. ראו הגדרה 4.1.3.

ג. $T:\mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ המוגדרת על ידי $T\big(p(x)\big)=p(x)-x^2p''(x)$.

שאלה 5 (15 נקודות)

נתונה העתקה לינארית $T: M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$ המוגדרת באופן הבא:

עבור $A \in M_n(\mathbb{R})$ קבועה נתונה, לכל $X \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מתקיים $T_A(X)=XA$.

א. הוכיחו שההעתקה T איזומורפיזם אם ורק אם A מטריצה הפיכה.

ב. נתון $\rho(A)=m$ ו-$n=m+1$ ותהי $O \neq B \in \mathrm{Ker}T$. חשבו $\rho(B)$.

שאלה 6 (15 נקודות)

נתונה העתקה $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת $T(1,1,0)=(1,2,3)$, $T(0,1,1)=(0,1,2)$.

נגדיר $T(2\alpha,\alpha^3,-\alpha^2)=(2,3,4\alpha^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

א. מצאו את ערכי α כך שההעתקה T לינארית.

ב. מצאו את הערך של α כך שלא ניתן להגדיר העתקה T שהיא חד-חד ערכית עבורו, ומצאו נוסחה מפורשת להעתקה $T(x,y,z)$.

שאלה 7 (15 נקודות)

יהיו $U,W \subseteq M_n(\mathbb{R})$ תת המרחבים הבאים:

$$U=\left\{A\in M_n(\mathbb{R}) \mid [A]_{ij}=0 \ \text{ if } \ i>j\right\}$$

$$W=\{A\in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t=A\}$$

כלומר, $A\in U$ היא מטריצה משולשית עילית ו- $A\in W$ היא מטריצה סימטרית.

נגדיר העתקה $T:U\to W$ באופן הבא: לכל $X\in U$, $T(X)=X+X^t$.

א. הוכיחו שההעתקה T מוגדרת היטב. כלומר, שתמונות ההעתקה שייכות ל-W.

ב. הוכיחו שההעתקה T איזומורפיזם.

ג. עבור $n=2$ נגדיר בסיס B לתת המרחב U ובסיס C לתת המרחב W –

$$B=\left(u_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad u_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$C=\left(w_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad w_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad w_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$$

חשבו את $[T]_C^B$, המטריצה המייצגת את ההעתקה T לפי הבסיסים B ו- C.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20109 – אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 11 – 12

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2023ג **מועד אחרון להגשה:** 15.9.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15 נקודות)

תהיינה $A, C \in M_3(\mathbb{R})$ מטריצות ריבועיות המקיימות $CA = A^3 - 3A^2 - 4A$.

נתון כי 1 ו-2 הם ערכים עצמיים של המטריצה A. וש- C מטריצה סינגולרית.

הוכיחו שהמטריצות A ו- C לכסינות.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונות המטריצות

$$B = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ a^2 & -a & 2 \end{pmatrix}$$

א. מצאו עבור אלו ערכים של a המטריצה B לכסינה?

ב. הציבו במטריצה B את ערכי a שקבלתם בסעיף א'. מבין המטריצות שמתקבלות קיימות שתי מטריצות שהן שקולות שורה, נסמן אותן ב A ו- C. רשמו את המטריצות A ו-C, הוכיחו שהן שקולות־שורה וחשבו $\dfrac{|A^3|}{|C^2|}$.

שאלה 3 (15 נקודות)

נתונות מטריצות A ו-B ריבועיות מסדר 3×3 כך שהמטריצות

$$A, \qquad B - A, \qquad 2B - A, \qquad 3B - A$$

הן מטריצות **לא** הפיכות. הוכיחו שהמטריצה B לא הפיכה.

רמז: משפט 11.4.1.

שאלה 4 (20 נקודות)

יהיו $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3} \in \mathbb{R}^n$ $\boldsymbol{0} \neq$ ונגדיר $U = \mathrm{Sp}(\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\})$. נתון $\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_3} = 0$ ו- $\boldsymbol{v_2} \cdot \boldsymbol{v_3} = 1$ וכן $\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{v_2} \cdot \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_3} \cdot \boldsymbol{v_3} = x$. מצאו בסיס אורתונורמלי ל-U (התשובה כוללת גם את x).

הערה: הבחינו בין 2 מקרים שונים בהתאם לממדו של U.

שאלה 5 (10 נקודות)

יהיו $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ כך ש $U_1^\perp + U_2^\perp = \mathbb{R}^n$. הוכיחו כי $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

שאלה 6 (20 נקודות)

יהיו V_1, V_2, V_3 תת-מרחבים של $\mathbb{R}^n$.

א. הוכיחו שמתקיים $(V_1 + V_2 + V_3)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp \cap V_3^\perp$.
הסיקו מכך שמתקיים $(V_1 \cap V_2 \cap V_3)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp + V_3^\perp$.

ב. נתבונן במרחב $\mathbb{R}^5$ ויהיו $V_1, V_2, V_3 \subset \mathbb{R}^5$ מרחבים לינאריים **שונים** זה מזה וכך ש $\dim V_i = 4$ לכל $i = 1,2,3$. בשאלה 7 בממ"ן 13 חשבנו את $\dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$ (ניתן להשתמש בתוצאה של ממ"ן 13 ללא חישוב). הוכיחו שאם מתקיים $V_1 \cap V_2 \not\subseteq V_3$ אז $V_3^\perp \not\subseteq V_1^\perp + V_2^\perp$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20109- אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 9 – 12

מספר השאלות: 17 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2023ג **מועד אחרון להגשה:** **17.9.2023**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמנו:

א – אם רק טענה 1 נכונה. **ב** – אם רק טענה 2 נכונה.
ג – אם שתי הטענות נכונות. **ד** – אם שתי הטענות לא נכונות.

שאלה 1

.1 $T:\mathbf{R}_3[x]\to\mathbf{R}_4[x]$ המוגדרת על-ידי $T(f(x))=xf(x)+2$ היא העתקה לינארית.

.2 נסתכל על $\mathbf{C}$ כמרחב לינארי מעל עצמו.
אז $T:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ המוגדרת על-ידי $T(z)=\bar{z}$ היא העתקה לינארית.

שאלה 2

.1 קיימת העתקה לינארית $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ כך ש- $T(1,2,3)=(0,1,2)$, $T(2,3,1)=(1,1,1)$
ו- $T(1,0,1)=(1,0,2)$.

.2 קיימת העתקה לינארית $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ כך ש- $T(1,-1,1)=(1,0)$, $T(-1,1,1)=(0,1)$
ו- $T(1,-1,-5)=(2,1)$.

שאלה 3

תהי $A=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ קבוצת וקטורים במרחב לינארי V, ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית.

.1 אם הקבוצה $\{Tv_1,Tv_2,\ldots,Tv_n\}$ פורשת את V, אז T היא חד-חד-ערכית.

.2 אם הקבוצה $\{Tv_1,Tv_2,\ldots,Tv_n\}$ בלתי תלויה לינארית אז A בלתי תלויה לינארית.

שאלה 4

יהי V מרחב לינארי ויהיו $S,T \in \mathrm{Hom}(V,V)$ העתקות לינאריות.

.1 אם $ST=0$ אז $TS=0$

.2 אם $\ker S = \ker T$ ו- $\mathrm{Im} S = \mathrm{Im} T$, אז $S=T$.

שאלה 5

יהיו $S,T \in \mathrm{Hom}(V,V)$.

.1 אם V ממימד סופי ו- $\dim \ker S = 0$ אז $\dim \mathrm{Im} TS = \dim \mathrm{Im} T$.

.2 $\ker TS \subseteq \ker S$.

שאלה 6

.1 קיימת מטריצה A מסדר 2×2 כך שההעתקה הלינארית $T: M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י $T(X) = AX - XA$ לכל $X \in M_2(\mathbf{R})$ היא איזומורפיזם.

.2 תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית שמטריצת הייצוג שלה ביחס לבסיס B של V היא $[T]_B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. אז קיים וקטור $v \in V$, $v \neq \underline{0}$ כך ש- $T(v) = 2v$.

שאלה 7

תהי $T: \mathbf{R_4}[x] \to \mathbf{R_4}[x]$ המוגדרת על-ידי $T(f(x)) = f(x+1)$.

.1 המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס $B = (1, x, x^2, x^3)$ היא $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

.2 T היא איזומורפיזם.

בשאלות 8-9, נתייחס להעתקה הלינארית $T: \mathbf{M}_{2\times 2}^{\mathbf{R}} \to \mathbf{M}_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$ המוגדרת על-ידי:

$T(X) = X + X^t$, לכל $X \in \mathbf{M}_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$.

שאלה 8

.1 $\ker T = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

.2 $\mathrm{Im} T = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

שאלה 9

יהיו $B=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ ו- $C=\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$

בסיסים ל- $\mathbf{M}_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$.

1. $[T]_B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

2. $\left[T\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

שאלה 10

יהיו A ו- B מטריצות ריבועיות מסדר $n\times n$.

1. אם A ו- B סינגולריות אז A ו- B דומות.

2. אם A רגולרית אז AB דומה ל- BA.

שאלה 11

יהי V מרחב לינארי ממימד n מעל $\mathbf{R}$ ויהיו $S,T:V\to V$ העתקות לינאריות.

1. אם v הוא וקטור עצמי של S ושל T אז v הוא גם וקטור עצמי של $S+T$.

2. אם λ_1 הוא ערך עצמי של S ו- λ_2 הוא ערך עצמי של T
אז $\lambda_1+\lambda_2$ הוא ערך עצמי של $S+T$.

שאלה 12

יהיו A ו- B מטריצות מסדר $n\times n$.

1. אם A ו- B לכסינות ויש להן אותו פולינום אופייני אז A ו- B דומות.

2. אם A ו- B שקולות שורות ו- A לכסינה אז B לכסינה.

שאלה 13

1. המטריצות $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ ו- $\begin{bmatrix}2&0\\0&-2\end{bmatrix}$ דומות.

2. המטריצות $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ ו- $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ דומות.

שאלה 14

תהי $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

.1 A לכסינה מעל $\mathbf{C}$.

.2 A לכסינה מעל $\mathbf{R}$.

שאלה 15

.1 אם K היא קבוצה לא ריקה של וקטורים ב- $\mathbf{R}^n$, אז $(K^{\perp})^{\perp}=K$.

.2 תהי $A=\{v_1,v_2\}$ קבוצת וקטורים ב- $\mathbf{R}^4$.

אם $\left(\mathrm{Sp}(A)\right)^{\perp}=\mathrm{Sp}\{(1,2,1,1),(2,2,2,2),(2,1,2,2)\}$, אז A תלויה לינארית.

שאלה 16

.1 יהיו $u,v\in\mathbf{R}^n$.

$\|u\|=\|v\|$ אם ורק אם $u+v$ ו- $u-v$ אורתוגונליים.

.2 לכל $u,v\in\mathbf{R}^n$ ולכל $c\in\mathbf{R}$ מתקיים $\|cu+v\|^2=c^2\|u\|^2+2c(u\bullet v)+\|v\|^2$.

שאלה 17

.1 $\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ הוא וקטור יחידה האורתוגונלי ל- $\mathrm{Sp}(\{(1,-1,-1),(2,7,4)\})$.

.2 אם $U=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid x+2y+3z=0\}$ אז $U^{\perp}=\mathrm{Sp}(\{(2,4,6)\})$.