שאלה 1 (12 נקודות)

א. תהי $f:A\to B$ פונקציה. יהי $\prec$ סידור טוב של A. הוכיחו שהפונקציה f היא חד־חד־ערכית אם ורק אם לכל שתי רישות שונות C ו־D של $\langle A,\prec\rangle$ מתקיים $f[C]\neq f[D]$.

ב. תהי $f:A\to B$ פונקציה. יהי $\prec$ סידור טוב של B. הוכיחו ש־f היא פונקציה על B אם ורק אם לכל שתי רישות שונות C ו־D של $\langle B,\prec\rangle$ מתקיים $f^{-1}[C]\neq f^{-1}[D]$.

יהי C ו־D רישות שונות של A.

נגדיר: $(n\geq 0,\ k\geq 1)$.

*כאשר $n=0$, C היא רישה ריקה

$$C=\{a_1,a_2,\dots a_n\}$$

$$D=\{a_1,a_2,\dots a_{n+k}\}$$

*מפני שהרישות שונות, אחת מהן צריכה להיות ארוכה יותר, ובחרתי שרישה D תהיה ארוכה יותר, אך כמובן, ניתן גם לבחור את C.

לכן, קיים $a_{n+k}\in D,\ a_{n+k}\notin C$

<u>כיוון 1</u> - f חח"ע:

נניח כי f חח"ע. ניקח b_n כאשר:

$f(a_j)=b_j$ לכל j

לכן, נניח כי $b_{n+k} \in f[C]$

מפני ש f חח"ע, קיים a יחיד כאשר

$f(a) = b_{n+k}$,

לפי הגדרת b_{n+k}, ידוע כי $f(a_{n+k}) = b_{n+k}$

לכן, $a_{n+k} \in C$, וזו סתירה

ולכן $b_{n+k} \notin f[C]$

ידוע כי $a_{n+k} \in D$ ולכן $b_{n+k} = f(a_{n+k}) \in f[D]$

$$\boxed{\text{ולכן } f[C] \neq f[D]}$$

<u>כיוון 2:</u>

נניח כי $f[C] \neq f[D]$ לכל רישות שוויות C, D

ניקח
$$C_n = \{a_1, \dots a_n\}$$
$$D_n = \{a_1, \dots a_{n+1}\}$$

לפי הנתונים, לכל n, $f[C_n] \neq f[D_n]$

אך מפנע $C_n \subseteq D_n$,

ניתן להבין ש $f[C_n] \subseteq f[D_n]$

* מפני שלכל $a \in C_n$ מתקיים $a \in D_n$
ולכן לכל $f(a) \in f[C_n]$ מתקיים $f(a) \in f[D_n]$

אך ידוע כי $f[C_n] \neq f[D_n]$, לכן,

$$f[C_n] \subset f[D_n]$$

ונקבל:

$$\{f(a_1), \dots f(a_n)\} \subset \{f(a_1), \dots f(a_n), f(a_{n+1})\}$$

נניח ש- $f(a_{n+1}) \in \{f(a_1), \dots f(a_n)\}$

ונקבל

$$\{f(a_1), \dots f(a_n), f(a_{n+1})\} = \{f(a_1), \dots f(a_n)\}$$

$$\Downarrow$$

$$\{f(a_1), \dots f(a_n)\} \subset \{f(a_1), \dots f(a_n)\}$$

אך זו סתירה לפי הנתון.

לכן, $f(a_{n+1}) \notin \{f(a_1), \dots f(a_n)\}$ לכל $n \geq 1$

נניח כי f לא חח"ע.

לכן, קיימים $k,j\in N$ כאשר $f(a_k)=f(a_j)$

אך לפי הנתון, $f(a_{max\{k,j\}}) \neq f(a_{min\{k,j\}})$ לכל k,j

$\boxed{\text{לכן, סתירה, ולכן } f \text{ חח"ע}}$

$\boxed{\text{משל א}}$

ב)

שאלה 2 (30 נקודות)

נגדיר יחס על קבוצת כל הסדרות הסופיות של מספרים טבעיים:

$\langle a_0,a_1,\ldots,a_{m-1}\rangle \prec \langle b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}\rangle$ אם ורק אם $m<n$ או לחילופין

$m=n$ ויש $k<m$ כך ש־ $a_k<b_k$ וכן $a_i=b_i$ עבור $i<k$.

א. הוכיחו שזה יחס סדר טוב על הקבוצה (בפרט יש להוכיח שזה יחס סדר).

ב. מצאו איבר של הקבוצה הנתונה שהסודר של הרישה הנקבעת על־ידו הוא:

$\omega\cdot\omega\cdot\omega+\omega\cdot\omega\cdot2+\omega\cdot3+4$

א) נראה כי $\prec$ יחס סדר מלא:

<u>טרנזיטיביות:</u>

ניקח

$a=\langle a_1,\ldots a_n\rangle$

$b=\langle b_1,\ldots b_k\rangle$

$c=\langle c_1,\ldots c_j\rangle$

כאשר $a\prec b,\ b\prec c$.

לכן, ידוע כי:

1) $n<k$ או $k=n$ וגם קיים i כאשר $a_i<b_i$
ו $a_m=b_m$ לכל $m<i$

וגם

2) $k<j$ או $k=j$ וגם קיים j כאשר $b_i<c_i$
ו $b_m=c_m$ לכל $m<i$

נוכיח על a, c.

אם $n<k$ או $k<j$

אזי מתקיים $n<j$ $\boxed{\text{ולכן } a \prec c}$

אם לא, אז $n=k=j$

וקיים i_1 כאשר $a_{i_1}<b_{i_1}$ כאשר לכל $m<i_1$

מתקיים $a_m=b_m$

וגם

קיים i_2 כאשר $b_{i_2}<c_{i_2}$ כאשר לכל $m<i_2$

מתקיים $a_m=b_m$

ניקח $i=\min\{i_1,i_2\}$

$a_m=c_m$

ינבע כי לכל $m<i$ מתקיים $a_m=b_m=c_m$

ומתקיים $b_i<c_i$ וגם $a_i\leq b_i$

או

כאשר אם $b_i\leq c_i$ וגם $a_i<b_i$

ולכן בכל מקרה $a_i<c_i$

ולכן $a \prec c$

ולכן יחס זה טרנזיטיבי.

אי רפלקסיבי:

ניקח $a=\langle a_1,\dots a_n\rangle$

נבדוק האם $a \prec a$:

$n=n$, לכן צריך להיות i כאשר

לכל $i<m$ שמתקיים $\underbrace{a_m=a_m}_{\text{פסוק אמת}}$

וגם

$\underbrace{a_i<a_i}_{\text{פסוק שקר}}$

לכן $a \not\prec a$

$\boxed{\text{לכן אי רפלקסיבי}}$

יחס משווה:

ניקח $a=\langle a_1,\dots a_n\rangle$

$b=\langle b_1,\dots b_k\rangle$

נניח כי $a\neq b$. נראה כי $a\prec b$ או $b\prec a$

נבדיל בין מקרים שונים:

$k>n$: במקרה זה: $\boxed{a \prec b}$

$k<n$: במקרה זה: $\boxed{b \prec a}$

$k=n$: (כאשר לכל $i<m$ מתקיים $a_m=b_m$)

מפני ש $a \neq b$ קיים i מינימלי כאשר $a_i \neq b_i$

לכן מתקיים $a_i<b_i$ או $a_i>b_i$.

ולכן מתקיים $a \prec b$ או $b \prec a$ בהתאם

ניקח הקבוצה של סדרות $A=\{a,b,c,d,\ldots\}$

ניקח את התת קבוצה עם הסדרות באורך הקצר ביותר: * כל איבר שלא בקבוצה זו "גדול" מכל האיברים הללו

$$A_i = \{a \in A \mid len(a)=i\}$$

כאשר:

$$i_{min} = min\{i \mid A_i \neq \phi\}$$

וניקח:

$$A_{min} = A_{i_{min}}$$

נגדיר: $k = i_{min}$ $B = A_{min}$

נגדיר:

B_1: קבוצת הסדרות בהן האיבר הראשון הקטן ביותר, באיברי B. ונקרא לו n_1

B_2: קבוצת הסדרות בהן האיבר השני הקטן ביותר באיברי B_1, ונקרא לו n_2

⋮

B_j: קבוצת הסדרות בהן האיבר ה-j הקטן ביותר מאיברי B_{j-1} ונקרא לו n_j

נסמן בה B_k: קיים איבר אחד בקבוצה זו

קיים סדרה C כאשר:

$$C=(n_1,n_2,\dots n_k)\in A_{min}$$

וקיבלנו את האיבר הקטן ביותר בקבוצה זו.

ולכן, לכל קבוצת סדרות קיים מינימום לפי $\prec$
ולכן היא מסודרת היטב לפי $\prec$ ולכן הזוג
יחס סדר טוב

משל א

ב) $\boxed{* \; w^k = \underbrace{w\cdot w\cdot \ldots \cdot w}_{\text{k פעמים}}}$

נמצא סידור A כאשר:

$$\overline{\langle A,<\rangle} = w^3+2\cdot w^2+3\cdot w+4$$

נפרק ל 4 קבוצות כאשר:

$\overline{\langle A_1,<\rangle} = 4$ $\qquad$ $\overline{\langle A_3,<\rangle} = 2\cdot w^2$

$\overline{\langle A_2,<\rangle} = 3\cdot w$ $\qquad$ $\overline{\langle A_4,<\rangle} = w^3$

ננסה למצוא קבוצות מתאימות:

נגדיר "תבנית" לכל תתקבוצה של הרישא: $(n,j,k\in\mathbb{N})$

$$\langle n\rangle \to w$$
$$\langle n,j\rangle \to w^2$$
$$\langle n,j,k\rangle \to w^3$$

$$\langle 0,0,j,k\rangle \to w^2$$
$$\langle 0,1,0,n\rangle \to w$$
$$\langle 0,1,1,n\rangle \to w$$
$$a\in\{0,1,2,3\} \quad \langle 0,1,2,a\rangle \to 4$$

ה"סכום" של האורדינלים הוא:

$\omega^3 + 2\cdot\omega + 3\cdot\omega + 4$ כמו שביקשו!

וניתן להבין שהאיבר של הרישא הוא:

$$\boxed{\langle 0,1,2,4 \rangle}$$

מש"א

ולכן הרישא A היא: $A=\{a \mid a \prec \langle 0,1,2,4 \rangle\}$

שאלה 3 (30 נקודות)

תהי $\langle A,\prec\rangle$ הקבוצה הסדורה היטב משאלה 2. תהי $f: A\to \mathbf{N}$ בעלת התכונות האלה:

- אם a האיבר הראשון ב־A אז $f(a)=1$.
- אם a העוקב המיידי של b ב־A אז $f(a)=2\cdot f(b)$.
- אם a גבולי אז $f(a)$ הוא המספר הראשוני הראשון שאינו בקבוצה $\{f(x)\mid x\prec a\}$, אם יש ראשוני כזה, ואחרת $f(a)=0$.

א. הסבירו בקצרה, בעזרת משפט 7.15, מדוע יש פונקציה כזאת, ומדוע רק אחת.

ב. חשבו את המספרים $f(\langle 1\rangle)$, $f(\langle 1,2\rangle)$ ו־$f(\langle 1,2,3\rangle)$.

ג. הוכיחו כי $18\notin f[A]$.

הערה: תוכלו להסתמך ללא הוכחה על העובדה שיש אינסוף מספרים ראשוניים.

א)

נגדיר $C=\bigcup_{i=1}^{\infty}\times_{k=1}^{i} N$

נגדיר פונ' $g: C\to N$ כאשר:

ניקח $B\in C$:

* הגדרת עזר: (n הוא טבעי) $B_n=\{b \mid b\in B,\ \frac{b}{n}\in N\}$

n הוא גורם לאיבר B

$$g(B)=\begin{cases} \text{ניקח } B_n \text{ כאשר } n \text{ הוא המספר הגדול ביותר כאשר } B_n\neq\emptyset \\ \text{1) אם } m=\max\{B_n\} \text{ קיים, נחזיר } (m\cdot 2) \\ \text{2) אם } \max\{B_n\} \text{ לא קיים, נחזיר את המספר הראשוני הבא אחרי } n. \end{cases}$$

לכן, לפי משפט 7.15 קיימת פונ' 1 ויחידה $f:A\to N$ כאשר

$f(a)=g(f(\langle f(x) \mid x\prec a\rangle))$

וקיבלנו את הפונ' המבוקשת. $\boxed{\text{מש"ל}}$

* בניתי את g בצורה מתאימה ל-f

ב)

$f(<1>)$

$<1>$ עוקב מיידי ל- $<0>$

ומפני ש $<0>$ איבר ראשון ב-A, $f(<0>)=1$

ולכן $\boxed{f(<1>)=2\cdot 1=2}$

$f(<1,2>)$

$$f(<1,2>) = 2\cdot f(<1,1>) = 4\cdot f(\underbrace{<1,0>}_{\text{איבר גבולי}})$$

ידוע כי $<0,0>$ איבר גבולי. לכן $f(<0,0>)=3$

מפני שהוא לא "מבוסס" ע"י האיברים הקודמים

לכן, $f(<1,0>)=5$, מפני שהוא האיבר הראשון הבא.

ונקבל $\boxed{f(<1,2>)=4\cdot 5=20}$

$f(<1,2,3>)$

ידוע שלכל $n\in N$ מתקיים:

$<n,0>$ איבר גבולי

לכן, "כל" המספרים הראשוניים קיימים ב:

$$\{f(x) \mid x < <1,2,3>\}$$

לכן, לא קיימים מספרים טבעיים שלא נמצאים בקבוצה זו, ולכן

$$\boxed{f(<1,2,3>)=0}$$

$$\boxed{\text{ורק לכל סדרה } a=(a_1,a_2,\dots a_n) \text{ לכל } n\geq 3}$$

2)

נניח כי קיים $18 \in f[A]$ ולכן קיים $a \in A$

כאשר $f(a) = 18$

מפני ש 18 לא ראשוני, קיים קודם מיידי ל-a. נקרא לו b

לכן,

$$f(a) = 2f(b)$$

$$18 = 2f(b)$$

$$f(b) = 9$$

המס' 9 לא ראשוני, אבל גם לא זוגי, ולכן $9 \notin f[A]$

$\boxed{\text{ולכן, גם } 18 \notin f[A]}$

$\boxed{\text{מש"ל}}$

שאלה 4 (12 נקודות)

תהי A קבוצה. הוכיחו שיש תת־קבוצה $B \subseteq A$ כך ש־$|A|=|B|=|A \setminus B|$ אם ורק אם A היא קבוצה אינסופית או קבוצה ריקה.

2 אפשרויות:

A סופית:

כיוון 1:

תהי $B \subseteq A$. לכן $|A \setminus B| = |A|-|B|$

נסתכל ע השוויון:

$$|A| = |B| = |A|-|B|$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} |A|=|B| \\ |A|-|B|=|A| \\ |A|-|B|=|B| \end{cases}$$

ונקבל:

$$|A| = |A|-|A| = |B| = 0$$

ולכן $|A|=\emptyset$, $|B|=0$

$$\boxed{\text{ונקבל } A=\emptyset=B}$$

כיוון 2:

נניח כי $A=\emptyset$. נקבל באופן ברור שאם $B \subseteq A$,

$$B=\emptyset$$

ולכן, $|A|=|B|=0=|\emptyset|$

ידוע כי $A\setminus B = \emptyset\setminus\emptyset = \emptyset$ ולכן $|A\setminus B| = \emptyset$

ונקבל $\boxed{0 = |A| = |B| = |A\setminus B|}$

A אינסופית:

כיוון 1:

תהי A קבוצה אינסופית, לפי 7.38,

אז יחס $<$ על A יחס סדר היטב.

ונסדר:

$$A=\{a_0,a_1,\dots\}$$

כאשר לכל n מתקיים $a_n < a_{n+1}$ (היות ו-A סדורה היטב)

ניקח $B=\{a_0,a_2,a_4,\dots\}$

נגדיר פונק' דמיון: $f:A\to B$

$f(a_n) = a_{2n}$ $^*a_n\in A$ לכל n

וכך ($f^{-1}(a_{2n}) = a_n$) $^*a_{2n}\in B$ לכל n

לכן, $|A|=|B|$ שקולות

נסתכל על $A\setminus B$:

$$A\setminus B=\{a_0,a_1,\dots\}\setminus\{a_0,a_2,a_4,\dots\}$$

ונקבל הקבוצה C:

$$A\setminus B=\{a_1,a_3,a_5,\dots\}=C$$

נמצא $g:A\to C$:

$g(a_n)=a_{2n+1}$ ($a_n\in A$* לכל n)

ונקבל $g^{-1}(a_{2n+1})=a_n$ ($a_{2n+1}\in C$ לכל n)

וקיבלנו פונ' הפיכה מ A ל C ולכן הן דומות

ולכן שקולות:

$$|A|=|A\setminus B|$$

$$\boxed{\text{ולכן קיבלנו}\quad |A|=|B|=|A\setminus B|}$$

כיוון 2:

נתון כי:

$$|A|=|B|=|A\setminus B|$$

נניח כי $A\neq\emptyset$ סופית. לכן, גם $B\subseteq A$ סופית

ונקבל:

$$|A|=|B|=|A\setminus B|$$

ולכן

$$|A| = |B| = |A|-|B|$$

ונקבל

$|A| = 0 = |B| = |A \setminus B|$ בסתירה ל- $A \neq \emptyset$

לכן A לא סופית.

ומכיוון ש $|A|=|B|$ גם B לא סופית.

לסיכום

הוכחנו כי אם $A=\emptyset$ קיים $B \subseteq A$ $(B=\emptyset)$
כאשר $0=|A|=|B|=|A \setminus B|$,

הוכחנו כי אם A אינסופית קיים $B \subseteq A$
כאשר $|A|=|B|=|A \setminus B|$

הראנו כי אם $|A|=|B|=|A \setminus B|$ אז $A=\emptyset$, או A אינסופית

ולכן קיים $B \subseteq A$ כאשר $|A|=|B|=|A \setminus B|$ אם"ם $A=\emptyset$ או A אינסופית

מש"ל

שאלה 5 (16 נקודות)

תהי B תת־קבוצה של H_1 שאינה חסומה מלעיל (הקבוצה H_1 והסדר עליה מוגדרת בעמוד 65 בספר).

הוכיחו כי $|B|=\aleph_1$.

ניקח λ מס' לוב של H_1, כאשר B אינה חסומה

ידוע כי $B \subseteq H_1$ ולא חסומה.

ידוע ש $|H_1|=\aleph_1$

ידוע כי $B \subseteq H_1$. לכן

$|B| \leq \aleph_1$

מפני שהקבוצה B לא חסומה מלעיל, B אינסופית

נניח כי $|B| \leq \aleph_0$

מפני ש B אינסופית, ניתן להניח כי $|B|=\aleph_0$

היות ו $\aleph_0$ היא העוצמה של קבוצות אינסופיות

בנות מניה ($|\mathbb{N}|=\aleph_0$ לדוגמא)

אז ניתן להגיד גם כי B בת מניה.

לפי הנתונים B לא חסומה מלעיל. לכן