שאלה 1

יהי $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס אורתונורמלי במרחב $\mathbf{R}^n$.

הוכיחו ש- $\sum_{i=1}^{n} v_i^t \cdot v_i = I_{n\times n}$, כאשר v_i הוא וקטור שורה.

$$v_i = \left(b_1^i, b_2^i, \dots b_n^i\right)$$

נגדיר A_i:

$$A = \sum_{i=1}^{n} v_i^t v_i = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

$$[A_i]_{jk} = b_j^i b_k^i$$

לכן

$$[A]_{jk} = \sum_{i=1}^{n} b_j^i b_k^i$$

נסתכל על המטריצה

$$B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} =$$

* כאשר v_i הוא וקטור שורה.

$$= \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & & \\ b_1^n & b_2^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix} = B = \left(v_1', v_2', \dots v_n'\right)$$

נקרא:

מאלגברה לינארית 1 ידוע כי מרחב השורות שווה למרחב העמודות. לכן גם מרחב העמודות הוא בסיס ל- R^n

לפי משפט 2.3.3 שניתן לבנות

העתקה לינארית באופן הבא:
לכל

$0<j\le n$

$$T(v_j)=v_1'$$

ולכן $\{v_1',v_2'\dots v_n'\}$ בסיס אורתונורמלי

ונקבל:

$$[A]_{jk}=\sum_{i=1}^{n} b_j^i b_k^i=\begin{cases}0 & \text{if } j\neq i\\ 1 & \text{if } j=i\end{cases}$$

וקיבלנו:

$$\boxed{A=I_{n\times n}}$$

מש"ל

שאלה 2

יהי V מרחב אוניטרי ממימד סופי, ויהיו x ו- y שני וקטורים ב- V המקיימים

$\|x\|=\|y\|=1;\ (x,y)=0$.

הוכיחו כי קיימת טרנספורמציה אוניטרית $T:V\to V$ כך ש- $T(3x+4y)=3x-4y$.

$$\|x\| = \|y\|$$

$(x,y)=0 \Rightarrow$ הקבוצה $\{x,y\}$ אורתונורמלית

נגדיר

$$a_1 = 3x+4y$$

$$b_1 = 3x-4y$$

נחשב את הנורמות הללו:

$$\|a_1\| = \|3x+4y\| =$$

$$\sqrt{(3x+4y,3x+4y)} = \sqrt{(3x,3x+4y)+(4y,3x+4y)} =$$

$$\sqrt{(3x,3x)+\underbrace{\cancel{(3x,4y)}}_{=0}+\underbrace{\cancel{(4y,3x)}}_{=0}+(4y,4y)} =$$

אורתוגונליים

$$\sqrt{(3x,3x)+(4y,4y)} = \sqrt{9\cdot 1+16\cdot 1} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

$$\|b_1\| = \sqrt{(3x-4y,\ 3x-4y)} =$$

$$\sqrt{(3x,\ 3x-4y)+(-4y,\ 3x-4y)} = \sqrt{(3x,3x)+\underbrace{\cancel{(3x,-4y)}}_{0}+\underbrace{\cancel{(-4y,3x)}}_{0}+(-4y,-4y)}$$

$$= \sqrt{(3x,3x)+(-4y,-4y)} = \sqrt{9\cdot 1+16\cdot 1} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

לכן, מתקיים

$$\|a_1\| = 5$$

$$\|b_1\| = 5$$

לכן, בשביל הנוחות, נגדיר "מחדש" את a_1, b_1:

$$a_1 = \frac{3x+4y}{5}$$

$$b_1 = \frac{3x-4y}{5}$$

יהי 2 בסיסים אורתונורמלים ל- V: $n=\dim(V)^*$

$$a = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$$

$$b = \{b_1, b_2, \dots b_n\}$$

מאלגברה לינארית 1, ניתן לבנות
את טרנספורמציה לינארית T באופן הבא:

$$\forall i_{0<i\leq n}\left(T(a_i) = b_i \right)$$

ולכן, נקבל

$$T\left(\frac{3x+4y}{5}\right) = \frac{3x-4y}{5}$$

ניקח

$$5T\left(\frac{3x+4y}{5}\right) = 3x-4y$$

לפי הגדרה הומוגניות לינארית

$$\boxed{T(3x+4y) = 3x-4y}$$

$\boxed{\text{משל}}$

שאלה 3

א. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי $w_0 \in V$ וקטור המקיים $\|w_0\| = 1$.

נגדיר העתקה $T : V \to V$ כך:

$Tv = v - 2(v, w_0)w_0$ לכל $v \in V$.

הוכיחו כי T טרנספורמציה לינארית, צמודה לעצמה ואוניטרית.

ב. האם קיימת מטריצה אורתוגונלית בעלת שורה ראשונה $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$?

אם כן – מצאו אחת כזאת.

א)

$$w_0 \in V$$

$$\|w_0\| = 1$$

ההעתקה T:

$$Tv = v - 2(v, w_0)w_0$$

לינאריות: נראה כי מתקיים לכל $v_1, v_2 \in V$, $\lambda_1, \lambda_2 \in F$:

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 Tv_1 + \lambda_2 Tv_2$$

$$\Downarrow ?$$

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - 2(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w_0) w_0$$

*לפי הגדרת המכפלה הפנימית

$$= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - 2\big((\lambda_1 v_1, w_0) + (\lambda_2 v_2, w_0)\big) w_0 =$$

$$= \lambda_1 v_1 - 2(\lambda_1 v_1, w_0) w_0 + \lambda_2 v_2 - 2(\lambda_2 v_2, w_0) w_0 =$$

$$= \lambda_1 (v_1 - 2(v_1, w_0) w_0) + \lambda_2 (v_2 - 2(v_2, w_0) w_0) \doteq$$

$$= \lambda_1 Tv_1 + \lambda_2 Tv_2 = T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$$

לכן T העתקה לינארית.

נראה כי

$$\forall_{u,v\in V}\big((Tv,u)=(v,Tu)\big)$$

יהי $u,v\in V$:

$$(Tv,u)=\big(v-2(v,w_0)w_0,u\big)=$$

$$=(v,u)+(-2(v,w_0)w_0,u)=$$

$$=(v,u)-2(v,w_0)\cdot(w_0,u)=$$

$$=\overline{(u,v)}-2\overline{(u,w_0)}\cdot\overline{(w_0,v)}=$$

מתכונות 1

$$=\overline{(u,v)-2(u,w_0)\cdot(w_0,v)}=$$

$$=\overline{(u,v)+(-2(u,w_0)w_0,v)}=$$

$$=\overline{(u-2(u,w_0)w_0,v)}=$$

$$=\overline{(Tu,v)}=\boxed{(v,Tu)=(Tv,u)}$$

לפי הגדרת המכפלה הפנימית

לכן T העתקה צמודה לעצמה

יהי $u,v \in V$:

$$\|T(v)\| = \|v - 2(v,w_0)w_0\| =$$

$$= \sqrt{(v-2(v,w_0)w_0,\ v-2(v,w_0)w_0)} =$$

$$= \sqrt{(v,\ v-2(v,w_0)w_0) + (-2(v,w_0)w_0,\ v-2(v,w_0)w_0)} =$$

$$= \sqrt{(v,v) + (v,\ -2(v,w_0)w_0) + (-2(v,w_0)w_0,\ v) + (-2(v,w_0)w_0,\ -2(v,w_0)w_0)}$$

$$= \sqrt{(v,v) - 2\overline{(v,w_0)}\cdot(v,w_0) - 2(v,w_0)\cdot(w_0,v) + \|-2(v,w_0)w_0\|^2}$$

$$= \sqrt{(v,v) - 2\overline{(v,w_0)}\cdot(v,w_0) - 2(v,w_0)\cdot\overline{(v,w_0)} + \|-2(v,w_0)w_0\|^2}$$

$$= \sqrt{(v,v) - 4(w_0,v)\cdot(v,w_0) + \|-2(v,w_0)w_0\|^2}$$

$$= \sqrt{(v,v) - 4(w_0,v)\cdot(v,w_0) + (-2(v,w_0)w_0,\ -2(v,w_0)w_0)}$$

$$= \sqrt{(v,v) - 4(w_0,v)(v,w_0) + 2(v,w_0)\cdot 2\overline{(v,w_0)}\cdot\underbrace{\cancel{(w_0,w_0)}}_{=1}}$$

$$= \sqrt{(v,v) - \cancel{4(w_0,v)(v,w_0)} + \cancel{4(v,w_0)\cdot(w_0,v)}}$$

$$= \sqrt{(v,v)} = \|v\|$$

ולכן $\|T(v)\| = \|v\|$

ולפי 2.3.2 לפי צ׳ שקילה

$\boxed{\text{לכן ש } T \text{ העתקה אוניטרית}}$

$\boxed{\text{לכן } T \text{ העתקה לינארית, שמשמרת לעצמה והעתקה אוניטרית}}$

ג) יהי $A \in M_{3\times3}^{R}$

כאשר
$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

והאורי אורכי $v_1, v_2, v_3 \in R^3$

$$A^t = \left[v_1^t \; , \; v_2^t \; , \; v_3^t \right]$$

$$\left[A \cdot A^t\right]_{ij} = v_i \cdot v_j^t$$

כאשר
$$v_j \cdot v_j^t = \left[A A^t\right]_{ij} = \begin{cases} 0 & if\ i \neq j \\ 1 & if\ i = j \end{cases}$$

לכן
$$v_j \cdot v_j^t = \begin{cases} 0\ if & i \neq j \\ 1\ if & i = j \end{cases}$$

אראה כי:

$$V_i \cdot V_j^t = (V_i, V_j)$$

$$V_i = (a_1, a_2, a_3) \qquad V_j = (b_1, b_2, b_3)$$

$$V_i \cdot V_j^t = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$(V_i, V_j) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

לכן $V_i \cdot V_j^t = (V_i, V_j)$

בהגדרה למטריצה,

$$[A \cdot A^t]_{ij} = V_i \cdot V_j^t = (V_i, V_j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}$$

לכן $\{v_1, v_2, v_3\}$ קבוצה אורתוגונלית.

ומכיוון ש $(V_i, V_i) = 1$, היא קבוצה אורתונורמלית.

$$V_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

לפי תהליך גרם שמידט ולפי הבסיס הסטנדרטי של R^3

נבנה בסיס: $E_3 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

$$u_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

נגדיר $V = Sp(\{u_1\})$

$$U^{\perp}=\{v \mid (v,u_1)=0\}$$

ונקבל

$$v=(a,b,c)$$

$$(v,u_1)=0$$

$$\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c=0$$

$$a=-2b-2c$$

$$U^{\perp}=\{(-2b,-2c,b,c) \mid b,c\in\mathbb{R}\}$$

ונקבל

$$U^{\perp}=Sp(\{(-2,0,1),(-2,1,0)\})$$

ונקבל בסיס ל- $U^{\perp}$:

$$\{\underset{u_1}{(-2,0,1)},\underset{u_2}{(-2,1,0)}\}$$

$$\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{u_1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\left(-\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)$$

$$\frac{u_2}{\|u_2\|}=\frac{u_2}{\sqrt{2^2+1^2}}=\left(-\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0\right)$$

ונקבל בסיס אורתונורמלי של $U^{\perp}$:

$$\left\{\left(-\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0\right)\right\}$$

ומכיוון ש- $\left(\frac13,\frac23,\frac23\right)$ אורתוגונלי לכולם, ונורמתו 1

מתקיים:

$$\left\{\overset{v_1}{\left(\frac13,\frac23,\frac23\right)},\overset{v_2}{\left(-\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)},\overset{v_3}{\left(-\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0\right)}\right\}$$

בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^3$.

אפשר לבנות מטריצה A:

$$\boxed{A=\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\frac13 & \frac23 & \frac23\\ -\frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt5}\\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} & 0\end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{מש"ל}}$

ולכן קיימת מטריצה אשר מספקת את דרישות השאלה

שאלה 4

יהי V מרחב אוניטרי ממימד סופי ויהיו L_1 ו- L_2 תתי-מרחב שלו כך ש- $V = L_1 \oplus L_2$.

א. תהי P טרנספורמציית ההיטל על L_1 במקביל ל- L_2.

הוכיחו כי P צמודה לעצמה אם ורק אם $L_2 = L_1^{\perp}$.

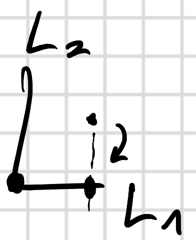
ב. תהי A העתקת השיקוף ביחס ל- L_1 במקביל ל- L_2.

הוכיחו כי A צמודה לעצמה אם ורק אם $L_2 = L_1^{\perp}$.

א) יהי $v \in V$. $L_1 \oplus L_2$

לכן קיימים 2 וקטורים יחידים $v_1 \in L_1, v_2 \in L_2$

כאשר $v = v_1 + v_2$



$$P(v_1+v_2) = v_1$$

יהיו

$$v = \underset{L_1}{v_1} + \underset{L_2}{v_2}$$

$$u = \underset{L_1}{u_1} + \underset{L_2}{u_2}$$

כיוון 1:

נניח שמתקיים $L_2 = L_1^{\perp}$

$$(P(v), u) = (v, P(u))$$

$$(P(v_1+v_2), u_1+u_2) = (v_1+v_2, P(u_1+u_2))$$

$$(v_1, u_1+u_2) = (v_1+v_2, u_1)$$

$$\cancel{(v_1, u_1)} + (v_1, u_2) = \cancel{(v_1, u_1)} + (v_2, u_1)$$

$$0 = \overset{\text{מאונכים}}{(v_1, u_2)} = \overset{\text{מאונכים}}{(v_2, u_1)} = 0$$

קיבלנו פסוק אמת

לכן: P צמודה לעצמה $\Leftarrow L_2=L_1^{\perp}$

כיוון 2:

נניח כי P צמודה לעצמה.

יהי

$$v\in L_1$$
$$u\in L_2$$

לכן

$$P(v)=v$$
$$P(u)=0$$

ונקבל

$$(v,u)=(P(v),u)=(v,P(u))=(v,0)=0$$

לכן

$$(v,u)=0$$

ונקבל

$$u\in L_1^{\perp}$$

ולכן

$$L_2\subseteq L_1^{\perp}$$

אך ידוע כי מתקיים

$$\dim(L_2)+\cancel{\dim}(L_1)=\dim(V)=\cancel{\dim}(L_1)+\dim(L_1^{\perp})$$

$$\dim(L_2)=\dim(L_1^{\perp})$$

מטענה 1, כאשר

$$\dim(L_2)=\dim(L_1^{\perp})$$
$$L_2\subseteq L_1^{\perp}$$

מתקיים $L_2=L_1^{\perp}$

לכן מתקיים

$$\boxed{L_1^{\perp}=L_2 \Longleftarrow \text{P צמודה לעצמה}}$$

וקיבלנו:

$$\boxed{L_1^{\perp}=L_2 \Longleftrightarrow \text{P צמודה לעצמה}}$$

$\boxed{\text{משל}}$

ב) יהי $v\in V$

לפי הגדרת $L_1\oplus L_2=V$.

לכל $v\in V$ קיימים $v_1\in L_1, v_2\in L_2$ יחידים

כך ש $v_1+v_2=v$

נגדיר העתקה שיקוף A באופן הבא:

$$Av=A(v_1+v_2)=v_1-v_2$$

כיוון 1:

נניח כי $A=\bar{A}$.

ניקח $u\in L_2$

$v\in L_1$

ידוע כי $Au=-u, Av=v$

$$(v,u)=(Av,u)=(v,Au)$$

$$(v,u)=(v,-u)$$

$$(v,u)=-1\cdot(v,u)$$

$$2(v,u)=0$$

$$(v,u)=0$$

וקיבלנו ש $u\in L_1^\perp$

ולכן

$$L_2\subseteq L_1^\perp$$

ידוע ש $L_1\oplus L_2=V$

$$\dim(L_1)+\dim(L_2)=\dim(V)=\dim(L_1)+\dim(L_1^\perp)$$

$$\dim(L_2)=\dim(L_1^\perp)$$

מלינאריות 1 $L_2\subseteq L_1^\perp$

נקבל $L_2=L_1^\perp$

וקיבלנו

A צמודה לעצמה $\Longrightarrow$ $L_2=L_1^\perp$

כיוון 2:

נניח כי מתקיים $L_2=L_1^\perp$

ניקח $u_1,v_1\in V$

$$u_2,v_2\in V_2$$

כאשר $v=v_1+v_2$ $u=u_1+u_2\in$ $Pv=v_1$, $Pu=u_1$

* $v,u\in V$

נבדוק האם מתקיים

$$(Pv, u) = (v, Pu)$$

$$(v_1, u_1+u_2) = (v_1+v_2, u_1)$$

$$\cancel{(v_1, u_1)} + (v_1, u_2) = \cancel{(v_1, u_1)} + (v_2, u_1)$$

$$0 = \underbrace{(v_1, u_2)}_{\text{אורתוגונאלי}} = \underbrace{(v_2, u_1)}_{\text{אורתוגונאלים}} = 0$$

קיבלנו פסוק אמת, לכן A צמודה לעצמה

ונקבל

$$\boxed{L_1^{\perp} = L_2 \;\Leftarrow\; \text{צמודה לעצמה } A}$$

וקיבלנו

$$\boxed{L_1^{\perp} = L_2 \;\Longleftrightarrow\; \text{צמודה לעצמה } A}$$

$\boxed{\text{משל}}$

שאלה 5

יהי $V = M_{4\times4}^{\mathbf{R}}$ ותהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. האם קיים תת-מרחב של V ,

כך שאורך ההיטל האורתוגונלי של A עליו הוא 6.01 ? הוכיחו את טענתך.

תחילה נמצא את הנורמה של המטריצה A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|^2 = \underbrace{(A,A)}_{\text{המכפלה הסטנדרטית למטריצות}} = tr(A^t A) = tr\begin{bmatrix} 2^2+2^2+1 & & & * \\ & 2^2+2^2+1 & & \\ & & 1^2+2^2+2^2 & \\ * & & & 1^2+2^2+2^2 \end{bmatrix} =$$

$$tr\left(\begin{pmatrix} 9 & & & * \\ & 9 & & \\ & & 9 & \\ * & & & 9 \end{pmatrix}\right) = 36 = \|A\|^2 \qquad \|A\| \geq 0^*$$

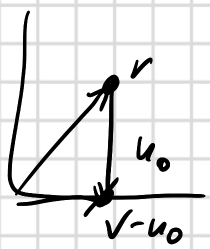
$$\|A\| = 6$$

יהי U תת-מרחב של $M^{\mathbb{R}}_{4\times4}$

לפי 1.4.3

קיים וקטור $0 = u_0 \in U$

כך שלכל $u_0 \neq u_1 \in U$ מתקיים



$$\|A-u_1\| > \|A-u_0\|$$

ניקח $u_1 \in U$

$$\|A-u_1\| > \|A-u_0\| \geq 0 \;/\; (\;)^2$$

נקבל $(A-u_1, A-u_1) > (A-u_0, A-u_0)$

$$(A, A-u_1)+(-u_1, A-u_1) > (A, A-u_0)+(-u_0, A-u_0)$$

$$(A, A-u_1)+(-u_1, A-u_1) > (A, A)+(A, -u_0)+(-u_0, A)+(-u_0, -u_0)$$

$$\cancel{(A,A)}+(A,-u_1)+(-u_1,A)+(-u_1,-u_1) > \cancel{(A,A)}-(A,u_0)-(u_0,A)+(u_0,u_0)$$

$$-2\cdot(A, u_1)+(u_1, u_1) > -2(A,u_0)+(u_0,u_0)$$

$$2(A,u_0)+(u_1,u_1) > 2(A,u_1)+(u_0,u_0)$$

$a\in\mathbb{R}$ ניקח $u_1=au_0$: ושקב״ס ($u_0\neq 0$ בגלל*)

$$2(A,u_0)+a^2\|u_0\|^2 > 2a(A,u_0)+\|u_0\|^2$$

$$(2-2a)\|A,u_0\|^2 > (1-a^2)\|u_0\|^2$$

$$(2-2a)(\|A\|\cdot\|u_0\|) > (1-a^2)\|u_0\|^2 \;/ : \|u_0\|\neq 0$$

$$(2-2a)6 > (1-a^2)\|u_0\|$$

$a\neq 1$ כי $u_1\neq u_0$

$$\frac{2\cancel{(1-a)}}{\cancel{(1-a)}(1+a)}\cdot 6 > \|u_0\|$$

$$\frac{12}{1+a} > \|u_0\|$$

ניקח $a=2$

ונקבל $4 > \frac{12}{3} > \|u_0\|$

ולכן לא קיים היטל כאשר הוא גדול יותר מ- $\|A\|=6$!

שלב