ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20474

חשבון אינפיניטסימלי 1

חוברת הקורס - קיץ 2023ג

כתב: יונתן כהן

יולי 2023 - סמסטר קיץ תשפ״ג

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים

אנו שמחים לברך אתכם עם הצטרפותכם אל תלמידי הקורס "חשבון אינפיניטסימלי 1".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

לתשומת ליבכם:
סמסטר הקיץ נמשך 9 שבועות בלבד ולכן יידרש מכם מאמץ ניכר לעמוד בעומס ובלוח הזמנים של הקורס. חשוב להקפיד על לימוד החומר והגשת מהטלות בקצב שנקבע, כדי להבטיח סיום מוצלח של הקורס. בגלל משך הסמסטר הקצר, אין אפשרות לפגר בהגשת מטלות.

לקורס קיים אתר אינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
מידע על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת:
http://www.openu.ac.il/shoham.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכז ההוראה בקורס הוא יונתן כהן. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 09-7781419, בימי ב' בשעות 14-15 (ניתן גם לנסות בימים אחרים).
- בדואר אלקטרוני jonathanc@openu.ac.il.
- בפקס 09-7780631.

לפניות בנושאים אקדמיים שונים (כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד), אנא עשו שימוש במערכת הפניות דרך שאילתא.
לחצו על הכפתור פניה חדשה, ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים בחרו את הפניה המתאימה. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות.

אנו מאחלים לכם בהצלחה בלימודים.

בברכה,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20474 / 2023ג)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי הנחיה*	תאריך אחרון למשלוח	
				ממ״ח (לאו״פ)	ממ״ן (למנחה)
1	14.7.2023-9.7.2023	יחידה 1			
2	21.7.2023-16.7.2023	יחידה 2			ממ״ן 11 20.07.23
3	28.7.2023-23.7.2023 (ה צום ט׳ באב)	יחידה 3		ממ״ח 01 25.07.23	ממ״ן 12 28.07.23
4	4.8.2023-30.7.2023	יחידה 3 יחידה 4			
5	11.8.2023-6.8.2023	יחידה 4 יחידה 5			ממ״ן 13 10.08.23
6	18.8.2023-13.8.2023	יחידה 5		ממ״ח 02 13.08.23	ממ״ן 14 17.08.23
7	25.8.2023-20.8.2023	יחידה 6 יחידה 7		ממ״ח 03 22.08.23	
8	1.9.2023-27.8.2023	יחידה 8		ממ״ח 04 31.08.23	ממ״ן 15 29.08.23
9	8.9.2023-3.9.2023	יחידה 8			ממ״ן 16 07.09.23
10					ממ״ן 17 14.09.23

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* *התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

התנאים לקבלת נקודות זכות

על מנת לקבל נקודות זכות בקורס עליכם לעמוד בתנאים הבאים:

1. להגיש מטלות במשקל של 10 נקודות לפחות.
2. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.
3. לקבל בציון הסופי ציון 60 לפחות.

תיאור המטלות

בחוברת המטלות יש שבעה ממ"נים וארבעה ממ"חים.
יש להגיש מטלות במשקל של 10 נקודות לפחות.
אנו ממליצים להגיש את כל המטלות על מנת שתחשפו למגוון גדול של שאלות.

תאריכי הגשת המטלות מופיעים ב'לוח זמנים ופעילויות' וכן על גבי המטלות עצמן. שימו לב כי תאריכים אלה הם תאריכים אחרונים למשלוח. מטלות שיישלחו לאחר המועד שנקבע בלוח הזמנים של הקורס, לא ייבדקו ולא יילקחו בחשבון בחישוב הציון הסופי.
במקרים מיוחדים של אי עמידה בלוח הזמנים – ניתן לנסות ולבקש דחייה בהגשת ממ"ן מהמנחים שלכם, ודחייה בהגשת ממ"ח ממרכז ההוראה בקורס.
מטלות המנחה יבדקו על ידי צוות הקורס וישלחו בדוקות, עם הערות, לבתיכם.
באתר הקורס יפורסמו פתרונות לרוב המטלות, זמן מה לאחר מועד הגשתן (הודעה על היום המדויק תופיע ב'לוח המודעות' שבאתר). מובן מאליו שבשום מקרה אי אפשר להגיש את המטלה לאחר שפתרונה פורסם.

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ להשתדל ולהגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן הצלחתם להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודד הגשת מספר רב של מטלות, הנהגנו הקלה כדלהלן:
בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות שמשקלן 10 נקודות ומעלה.

מותר, ואפילו מומלץ, לדון עם עמיתים ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש, היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.
אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

בערכת הלימוד של הקורס תמצאו חוברת דקה ובה סיכום ההגדרות והמשפטים בקורס. חוברת זו היא חומר העזר היחיד המותר בשימוש בבחינת הסיום של הקורס, ובלבד שלא כתוב בה שום דבר נוסף, ולכן הקפידו שלא לכתוב על גבי חוברת זו. אין לכתוב בעט/עפרון בתוך החוברת, כולל קוים תחתונים, כוכביות, מסגרות, למרקר, להוסיף לשוניות סימון וכו'.
אסור למרקר.
נא להקפיד על כך. חוברת שנכתב בה הינה עילה לפסילת בחינה ודין משמעתי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1
חומר הלימוד למטלה: יחידה 1
מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 2 נקודות
סמסטר: 2023ג **מועד אחרון להגשה:** 20.07.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

קראו בעיון באתר הקורס את ההנחיות לגבי אופן הגשת מטלות.

שאלה 1 (25 נקודות)

א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\binom{2n}{n} \le 4^n$.

רמז: הסתמכו על כך ש $4^n = (1+1)^{2n}$.

ב. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים $\binom{2n}{n} \ge \frac{4^n}{2n+1}$.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהיו a,b שני מספרים ממשיים, $b \ne 0$.

א. הוכיחו שאם $|a-b| \le b^2$, אז $\left|\frac{a}{b}\right| \le |b|+1$.

ב. הוכיחו: $\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2 = a^2$.

שאלה 3 (25 נקודות)

להזכירכם: $\lfloor x \rfloor$ הוא החלק השלם של x (ראו הגדרה 1.63).

א. פתרו את האי-שוויון $\lfloor |x+1|-|x| \rfloor \ge x^2$.

ב. פתרו את המשוואות:

(i) $\lfloor x \rfloor^2 = 16$

(ii) $\lfloor x^2 \rfloor = 3$

הקפידו לנמק את כל טענותיכם.

שאלה 4 (30 נקודות)

נגדיר: קבוצה A של מספרים ממשיים נקראת **צפופה בקטע I** אם לכל $x, y \in I$ כך ש $x < y$

קיים $a \in A$ כך ש $x < a < y$ (ראו שאלה 64)

א. תהי A קבוצה של מספרים ממשיים הצפופה בקטע $(1,\infty)$.

הוכיחו שהקבוצה $B = \left\{ \frac{a}{n} \;\middle|\; a \in A , n \in \mathbb{N} \right\}$ צפופה בקטע $(0,1)$.

ב. נסחו: A אינה צפופה בקטע I.

הדרכה: יש לנסח את השלילה של ההגדרה 'A צפופה בקטע I' הרשומה לעיל,
באמצעות המילים 'לכל' ו'קיים', ובלי ביטויים כגון "לא נכון ש" או "לא קיים".
אפשר להיעזר בסעיף 2.1.3 ושאלה 11 ביחידה 2.

ג. תהי A קבוצה של מספרים ממשיים המוכלת בקטע $(1,\infty)$ וצפופה בו.

הוכיחו שהקבוצה $C = \left\{ \frac{a}{n^2(a+1)} \;\middle|\; a \in A , n \in \mathbb{N} \right\}$ אינה צפופה בקטע $[0,1]$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידה 1 ויחידה 2 עד סעיף 2.2

מספר השאלות: 10 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2023ג **מועד אחרון להגשה:** 25.07.2023

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות.

סמנו : **א** - אם רק טענה 1 נכונה,

ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות,

ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

1. $\{x \mid -2<|x|<4\}=\{x \mid 4<x^2<16\}$

2. $\{x \mid |x-1|+|x-2|+|x-3|\geq 2\}=\mathbb{R}$

שאלה 2

1. $\{x \mid 1<x^2<4\}=\{x \mid 1<x<2\}$

2. $\{x \mid |x^2-3|<2\}=\{x \mid 1<|x|<\sqrt{5}\}$

שאלה 3

1. $\min\{-a,-b\}=-\max\{a,b\}$.

2. לכל ארבעה מספרים ממשיים a_1,a_2,b_1,b_2 מתקיים

$\min\{a_1+a_2,b_1+b_2\}\leq\min\{a_1,b_1\}+\min\{a_2,b_2\}$.

שאלה 4

יהיו a,b מספרים ממשיים.

1. $\sqrt{a^2+a^2b^4+2(ab)^2}+1+b^2=(a+1)(1+b^2)$

2. אם $b\neq 0$ ו $|a|<b^2$, אז $-b<\frac{a}{b}<b$.

שאלה 5

יהי $L\neq 0$ ותהי (a_n) סדרה כך ש $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$.

1. קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n>\frac{|L|}{2}$.

2. קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל N טבעי יש $n>N$ כך ש $|a_n-2L|\geq\varepsilon$.

שאלה 6

יהי L מספר ממשי ותהי (a_n) סדרה כך ש $a_n\neq L$ לכל n.

1. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$, אז קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ ולכל $\varepsilon>0$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$.

2. קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ ולכל $\varepsilon>0$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$.

שאלה 7

יהיו (a_n) ו (b_n) סדרות כך ש $a_nb_n\notin\mathbb{Q}$ כמעט לכל n.

1. ($a_n\notin\mathbb{Q}$ כמעט לכל n) או ($b_n\notin\mathbb{Q}$ כמעט לכל n).

2. ($a_n\notin\mathbb{Q}$ או $b_n\notin\mathbb{Q}$) כמעט לכל n.

שאלה 8

תהי (a_n) סדרה.

1. אם (na_n) חסומה, אז (a_n) אפסה.

2. אם $\left(n(a_{n+1}-a_n)\right)$ חסומה, אז (a_n) אפסה.

שאלה 9

תהי (a_n) סדרה.

1. אם $(a_n\,a_{n+1})$ מתכנסת, אז (a_n) מתכנסת.
2. אם $(a_n\,a_{n+1})$ אפסה ו $a_n > 0$ לכל n, אז (a_n) אפסה.

שאלה 10

1. אם $a_1, a_2, \ldots, a_k$ הם מספרים ממשיים חיוביים,

אז $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{{a_1}^n + {a_2}^n + \ldots {a_k}^n}{k}}$.

2. אם $a_1, a_2, \ldots, a_k$ הם מספרים ממשיים חיוביים,

אז $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{{a_1}^n + {a_2}^n + \ldots {a_k}^n}{n}}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידה 2

מספר השאלות: 3 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2023ג **מועד אחרון להגשה:** 28.07.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות :

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

קראו בעיון באתר הקורס את ההנחיות לגבי אופן הגשת מטלות.

הערה חשובה:

בעמוד 92 ביחידה 2 מופיעה ההגדרה הזאת לגבול של סדרה :

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי N , כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

להגדרה זו אנו קוראים 'הגדרת הגבול בלשון ε, N'.

שאלה 1 (30 נקודות)

בשאלה זו יש להוכיח/לנסח בלשון ε, N , ובלי להסתמך על אף משפט או טענה אחרת מיחידה 2, אין להוכיח בדרך השלילה.

א. הוכיחו ישירות מהגדרת הגבול בלשון ε, N : $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4}{n^2-4} = 3$.

ב. (i) תהי (a_n) סידרה ויהי L מספר ממשי. נסחו בלשון ε, N : $\lim_{n\to\infty} a_n \neq L$.

כלומר, עליכם לשלול בלשון ε, N את הטענה : $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

הערה : התבוננו בשאלה 17 מיחידה 2.

(ii) נסחו בלשון ε, N : הסדרה (a_n) מתבדרת.

ג. הוכיחו בלשון ε, N שהסדרה $a_n = \langle \sqrt{n} \rangle$ מתבדרת.

להזכירכם : ב $\langle x \rangle$ הכוונה לחלק השברי של x , $\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$.

רמז : הוכיחו שלכל $k > 1$ טבעי מתקיים $\sqrt{k^2-1} > k - \frac{1}{2}$.

שאלה 2 (25 נקודות)

חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים. בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, הוכיחו זאת.

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-5n^5+9}{2n^4-4n^7-\pi}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-5n^5+9}{2n^4-4n^5-\pi}$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}$

ד. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n-n^2}$

ה. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{k+3}$

שאלה 3 (45 נקודות)

יהיו (a_n) ו (b_n) סדרות כך שמתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=1$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:

א. אם כמעט כל אברי (a_n) חיוביים, אז כמעט כל אברי (b_n) חיוביים.

ב. אם (a_n) ו (b_n) סדרות חיוביות, אז (a_n) מתכנסת או (b_n) מתכנסת.

ג. אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

ד. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$.

ה. אם (a_n) סדרה חיובית, אז קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ מתקיים $b_n>\dfrac{1}{2a_n}$.

ו. אם (a_n) חיובית ואפסה, אז $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$.

ז. אם $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=1$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1
חומר הלימוד למטלה: יחידה 3
מספר השאלות: 3 **משקל המטלה:** 2 נקודות
סמסטר: 2023ג **מועד אחרון להגשה:** 10.08.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות :

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

קראו בעיון באתר הקורס את ההנחיות לגבי אופן הגשת מטלות.

שאלה 1 (25 נקודות)

נגדיר : $a_1=\sqrt{2}$ לכל n $a_{n+1}=1-\dfrac{5}{4a_n+8}$.

א. הוכיחו שהסדרה מוגדרת היטב, כלומר לכל n, קיים המספר a_n.

ב. הוכיחו שלכל n, a_n הוא מספר אי-רציונלי חיובי.

ג. הוכיחו שהסדרה (a_n) מתכנסת וחשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

שאלה 2 (35 נקודות)

חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים. בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע, וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^{n+1}-(-2)^n+5}{3^{n+2}+2^n-5}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^{n+1}-4^n+5}{3^{n+2}+2^n-5}$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}2\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor-n$

ד. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

הדרכה : הגדירו $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$, חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ והיעזרו בשאלה מיחידה 2.

שאלה 3 (40 נקודות)

תהי $a_n = n - \sqrt{n}\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$.

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה מלרע.

ב. הוכיחו ש 0 הוא גבול חלקי של (a_n).

ג. חשבו את $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

ד. מצאו את $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מינימום, ואם כן מצאו אותו . נמקו את תשובתכם.

ה. יהי t מספר טבעי. הוכיחו שכמעט לכל n טבעי מתקיים $n < \sqrt{n^2 + 2t} < n+1$.

ו. יהי t מספר טבעי. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2 + 2t} - n) = t$.

ז. היעזרו בטענת סעיף ו' כדי להוכיח שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של (a_n).

ח. האם (a_n) חסומה מלעיל? נמקו את תשובתכם.

ט. חשבו את $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

י. קבעו האם קיים $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ והאם לקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מקסימום, מצאו אותם במידה והם קיימים. נמקו את תשובתכם.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 2, 3

מספר השאלות: 10 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2023ג **מועד אחרון להגשה:** 13.08.2023

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות.

סמנו: **א** - אם רק טענה 1 נכונה,

ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות,

ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

הערה: $a_n \to L$ פרושו $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

שאלה 1

יהיו (a_n) ו (b_n) סדרות כך ש $a_n \to \infty$ ו $b_n \to \infty$.

1. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

2. אם $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$.

שאלה 2

יהיו (a_n) ו (b_n) סדרות כך ש $a_n \to \infty$.

1. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$, אז $b_n > 0$ כמעט לכל n.

2. אם $b_n > 0$ כמעט לכל n, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

שאלה 3

לכל $a>0$ מתקיים:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}=1$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}=a$

שאלה 4

תהי (a_n) סדרה חיובית.

1. אם קיים k טבעי כך ש $\sqrt[n]{a_n}>1+\frac{1}{k}$ כמעט לכל n, אז $a_n\to\infty$.
2. אם $a_n\to\infty$, אז קיים k טבעי כך ש $\sqrt[n]{a_n}>1+\frac{1}{k}$ כמעט לכל n.

שאלה 5

תהי (a_n) סדרה אפסה.

1. אם (a_n) יורדת ממש, אז (a_n) חיובית.
2. אם (a_n) חיובית, אז קיים N טבעי כך ש (a_{N+n}) יורדת.

שאלה 6

תהי (a_n) סדרה.

1. אם $(a_{2n}-a_n)$ אפסה, אז (a_n) מתכנסת.
2. אם (a_n) מתכנסת, אז $(a_{2n}-a_n)$ אפסה.

שאלה 7

תהי (a_n) סדרה כך ש $a_n\to a$ ותהי $b_n=\max\left\{a_n,{a_n}^2\right\}$.

1. אם $a>1$, אז $b_n\to a^2$.
2. אם $a=1$, אז $b_n\to 1$.

שאלה 8

תהי (a_n) סדרה.

1. אם (a_{2n}) ו (a_{3n}) מתכנסות, אז $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{3n}$.
2. (a_n) מתכנסת אם ורק אם (a_{2n-1}), (a_{2n}) ו (a_{3n}) מתכנסות.

שאלה 9

תהי (a_n) סדרה.

1. אם $\left|a_{n+1}-a_n\right| < \frac{1}{2^n}$ לכל n, אז (a_n) היא סדרת קושי.
2. אם $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}-a_n = 0$ ו $\left|a_{n+2}-a_n\right| < \frac{1}{2^n}$ לכל n, אז (a_n) מתכנסת.

   רמז: התבוננו ב (a_{2n}) וב (a_{2n-1}).

שאלה 10

תהי (a_n) סדרה.

1. אם כל $L\in(a,b)$ הוא גבול חלקי של (a_n), אז $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ צפופה ב (a,b).

   כלומר, לכל $x,y\in(a,b)$ כך ש $x<y$ קיים n כך ש $x<a_n<y$.
2. אם (a_n) חסומה ואם $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \in (a,b)$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \in (a,b)$, אז $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}\subseteq(a,b)$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 14

הקורס:	20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1		
חומר הלימוד למטלה:	יחידה 4		
מספר השאלות:	4	**משקל המטלה:**	2 נקודות
סמסטר:	2023ג	**מועד אחרון להגשה:**	17.08.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״.

קראו בעיון באתר הקורס את ההנחיות לגבי אופן הגשת מטלות.

שאלה 1 (25 נקודות)

יהיו f ו g פונקציות מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם הפונקציה $f \circ g$ היא על $\mathbb{R}$, אז f היא על $\mathbb{R}$.

ב. אם הפונקציה $f \circ g$ היא על $\mathbb{R}$, אז g היא על $\mathbb{R}$.

ג. אם הפונקציה $f \circ g$ היא על $\mathbb{R}$ ו f היא חד-חד-ערכית, אז g היא על $\mathbb{R}$.

ד. אם הפונקציה $f \circ g$ היא מונוטונית עולה ב $\mathbb{R}$, אז g היא מונוטונית ב $\mathbb{R}$.

ה. אם הפונקציה $f \circ g$ היא מונוטונית עולה ב $\mathbb{R}$ ו f היא מונוטונית יורדת ב $\mathbb{R}$,
אז g היא מונוטונית יורדת ב $\mathbb{R}$.

שאלה 2 (20 נקודות)

בשאלה זו יש להוכיח בלשון ε,δ (ניסוח Cauchy), ובלי להסתמך על אף משפט או טענה אחרת מיחידה 4, אין להוכיח בדרך השלילה.

א. הוכיחו ישירות לפי הגדרת הגבול בלשון ε,δ (הגדרה 4.28): $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{2x^2-7}=5$.

ב. הוכיחו ישירות לפי הגדרת הגבול בלשון ε, M (הגדרה 4.54): $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{\lfloor x\rfloor}=1$.

שאלה 3 (25 נקודות)

א. תהי f פונקציה המוגדרת בקטע (M_0,∞).

נסחו את הטענה "לא קיים ל f גבול סופי כש $x\to\infty$" בשתי דרכים:

(i) בלשון ε, M (ניסוח Cauchy).

(ii) בלשון סדרות (ניסוח Heine).

ב. הוכיחו כי $L=\frac{1}{2}$ אינו הגבול של $f(x)=\langle x\rangle$ כש $x\to\infty$ בלשון ε, M.

ג. הוכיחו כי לא קיים ל $f(x)=\langle x\rangle$ גבול סופי כש $x\to\infty$ בשתי דרכים:

(i) ישירות לפי ההגדרה של סעיף א' (i) (ניסוח Cauchy).

(ii) ישירות לפי ההגדרה של סעיף א' (ii) (ניסוח Heine).

שאלה 4 (30 נקודות)

בכל אחד מהסעיפים הבאים חשבו את הגבול, או הוכיחו שאינו קיים.

א. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}$.

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\cos x}{x^2}$.

ג. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-5x^4+x\cos x}{3x^2-5x^3+x\sqrt{x}}$.

ד. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x^2+\sin^2 x}$.

ה. $\lim\limits_{x\to x_0}\lfloor \tan x\rfloor\cos x$, $x_0=0,\frac{\pi}{2}$ (כלומר יש לחשב שני גבולות).

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס:	20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1		
חומר הלימוד למטלה:	יחידה 4 ויחידה 5 עד סעיף 5.2.1		
מספר השאלות:	10	**משקל המטלה:**	1 נקודה
סמסטר:	2023ג	**מועד אחרון להגשה:**	22.08.2023

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות.

סמנו : **א** - אם רק טענה 1 נכונה,

ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות,

ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

1. הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x-2}$ היא פונקציה חד-חד-ערכית מ $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ על $\mathbb{R}$ (כלומר מ $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ל $\mathbb{R}$, והינה על).
2. הפונקציה $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}$ היא פונקציה חד-חד-ערכית מ $(\frac{1}{2},\infty)$ על $(0,\infty)$.

שאלה 2

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה.

1. אם f אינה על, אז קיים y כך שלכל x $f(x)\neq y$.
2. אם f אינה על, אז קיים x כך שלכל y $f(x)\neq y$.

שאלה 3

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}=-6$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+7x-2x^7}{1+x^8+2x^7}=-1$.

שאלה 4

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x \sin\frac{1}{x}$ אינו קיים.
2. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cos x = \infty$.

שאלה 5

יהיו f, g פונקציות המוגדרות בסביבת x_0 . נניח ש f רציפה ב x_0 וש $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

1. אם $f(x_0) > 0$, אז $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$.
2. אם $f(x_0) = 0$ וקיימת סביבה נקובה של x_0 שבה $\frac{g(x)}{f(x)}$ מוגדרת,

   אז $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$ או $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.

שאלה 6

תהי f פונקציה המוגדרת ב $\mathbb{R}$ כך ש $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

1. אם f מונוטונית ב $\mathbb{R}$, אז f רציפה ב x_0 .
2. אם $f(x) > 0$ לכל $x < x_0$ ו $f(x) < 0$ לכל $x > x_0$, אז $L = 0$.

שאלה 7

1. אם f, g הן פונקציות רציפות ב $\mathbb{R}$ ואם לכל $x \neq x_0$ מתקיים $f(x) > g(x)$,

   אז $f(x_0) > g(x_0)$.
2. אם f רציפה ב a ואם $f(a) \geq 0$,

   אז קיימת סביבה של a כך שלכל x בסביבה זו מתקיים $f(x) \geq 0$.

שאלה 8

1. הסדרה $\left(\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

2. הסדרה $\left(\sqrt{n}\cos\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

שאלה 9

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה.

1. אם f רציפה ב $\mathbb{R}$ ואינה חסומה מלעיל ומלרע, אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ או $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.

2. אם f מונוטונית עולה ואינה חסומה מלרע, אז $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

שאלה 10

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ כך ש $f(0)=f(1)$.

1. אם $a_n=\frac{n(1+\cos(\pi n))}{2n+1}$, אז הסדרה $f(a_n)$ מתכנסת.

2. אם $f(x)=f(x^2)$ לכל $x\in[0,1]$, אז f קבועה ב $[0,1]$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידה 5

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2023ג **מועד אחרון להגשה:** 29.08.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות :

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

קראו בעיון באתר הקורס את ההנחיות לגבי אופן הגשת מטלות.

שאלה 1 (10 נקודות)

מצאו את נקודות הרציפות והאי-רציפות של הפונקציה $f(x)=\lfloor \cos x \rfloor \cos\frac{x}{2}$ בקטע $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. מיינו את נקודות האי-רציפות.

שאלה 2 (20 נקודות)

א. תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת x_0.

(i) נסחו בלשון ε, δ : f אינה רציפה ב x_0 (כלומר, נסחו את שלילת טענה 5.3).

(ii) נסחו בלשון סדרות : f אינה רציפה ב x_0 (כלומר, נסחו את שלילת טענה 5.4).

סעיפים ב'-ה' מתייחסים לפונקציה $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

ב. הוכיחו כי f רציפה ב $x_0=1$.

ג. הוכיחו כי f אינה רציפה ב $x_0=0$ בשתי דרכים שונות :

(i) ישירות לפי ההגדרה של סעיף א' (i).

(ii) ישירות לפי ההגדרה של סעיף א' (ii).

ד. הוכיחו שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=1+(x-1)D(x)$, כאשר $D(x)$ היא פונקציית דיריכלה (ראו הגדרה 5.8 ביחידה 5).

ה. תהי $x_0\neq 1$. הוכיחו כי f אינה רציפה ב x_0 בעזרת סעיף ד'.

לשם כך הניחו בשלילה ש f רציפה ב x_0.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,\infty)$ המקיימת $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0)$.

הוכיחו כי f אינה חד-חד-ערכית בקטע $[0,\infty)$.

הדרכה: כדאי להפריד לשני מקרים: f קבועה בקטע, f אינה קבועה בקטע.

שאלה 4 (25 נקודות)

יהיו $f(x) = \dfrac{(x+1)\sin x}{x}$ ו $g(x) = \dfrac{x\sin x}{x+1}$. הוכיחו:

א. f חסומה בקטע $(0,\infty)$.

ב. f מקבלת מקסימום בקטע $(0,\infty)$.

הדרכה: הראו תחילה שקיים $N > 0$ כך שלכל $x > N$ מתקיים $f(x) < f(\tfrac{1}{2}\pi)$.

ג. $\sup g\left((0,\infty)\right) = 1$.

ד. g אינה מקבלת מקסימום בקטע $(0,\infty)$.

שאלה 5 (25 נקודות)

א. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ רציפה במידה שווה ב $[0,\infty)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = (1-\cos x)\sin\dfrac{1}{x}$ רציפה במידה שווה ב $(0,\infty)$.

ג. הוכיחו שלכל $y \ge x \ge 1$ מתקיים $y^2 \arctan y - x^2 \arctan x \ge (y^2 - x^2)\arctan x$,

היעזרו בכך כדי להוכיח שהפונקציה $f(x) = x^2 \arctan x$ אינה רציפה במידה שווה ב $[1,\infty)$.

רמז: התבוננו בדיון (ביחידה 5) על האי-רציפות במידה שווה של x^2 ב $\mathbb{R}$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 5, 6

מספר השאלות: 10 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2023ג **מועד אחרון להגשה:** 31.08.2023

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות.

סמנו : **א** - אם רק טענה 1 נכונה,

ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות,

ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(xD(\sqrt{2}x))}{x^2}=0$ ‏($D(x)$ היא פונקציית דיריכלה).
2. אם f היא פונקציה רציפה בנקודה x_0, אז יש סביבה של x_0 שבה f רציפה.

שאלה 2

1. הפונקציה $2x+\sin x$ היא על $\mathbb{R}$.
2. תהי f פונקציה רציפה בקטע הפתוח (a,b).

   אם f מקבלת מקסימום בקטע (a,b), אז היא אינה חח"ע בקטע (a,b).

שאלה 3

תהי f פונקציה רציפה ב $\mathbb{R}$.

1. אם $|f(x)-x|<1$ לכל x ב $\mathbb{R}$, אז f מקבלת ב $\mathbb{R}$ כל ערך ממשי.
2. אם $|f(x)-x|>1$ לכל x ב $\mathbb{R}$, אז f מקבלת ב $\mathbb{R}$ כל ערך ממשי.

שאלה 4

תהי f פונקציה המקיימת $f(x) > x$ לכל $x \in [0,1]$.

1. אם f רציפה בקטע $(0,1)$, אז $\inf f((0,1)) > 0$.
2. אם f רציפה בקטע $[0,1]$, אז $\inf f([0,1]) > 0$.

שאלה 5

1. תחום ההגדרה של הפונקציה $\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$ הוא $\mathbb{R}$.
2. תחום ההגדרה של הפונקציה $\tan(2x+1)+\sqrt{\sin x}+\sqrt{1-x^2}$ הוא $\{x \mid x \in [0,1], x \neq \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\}$.

שאלה 6

1. הפונקציה $\frac{(x+1)\arctan x}{x}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,\infty)$.
2. אם f חסומה, רציפה ומונוטונית בקטע (a,b), אז היא רציפה במידה שווה בקטע (a,b).

שאלה 7

1. אם f רציפה וחסומה ב $\mathbb{R}$, אז f רציפה במידה שווה ב $\mathbb{R}$.
2. אם f חסומה ב $\mathbb{R}$ ורציפה במידה שווה בכל קטע סופי, אז f רציפה במידה שווה ב $\mathbb{R}$.

שאלה 8

1. הפונקציה $\sin\frac{1}{x}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$.
2. אם f רציפה וחסומה בקטע (a,b), אז היא גם רציפה במידה שווה בקטע (a,b).

שאלה 9

1. $f(0)$ הוא מינימום של הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2\left(1+\sin\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

2. אם f רציפה בקטע I , x_0 נקודה פנימית של I , ו $f(x_0)$ הוא מינימום של f , אז קיימת סביבה ימנית של x_0 שבה f עולה במובן הרחב.

הערה: פונקציה f נקראת **עולה במובן הרחב** בקטע I אם לכל x ו y בקטע מתקיים: אם $x>y$ אז $f(x)\geq f(y)$.

שאלה 10

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

2. הפונקציה $\frac{\ln(x+1)}{x}$ חסומה ב $(0,\infty)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 6, 7

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2023ג **מועד אחרון להגשה:** 07.09.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

קראו בעיון באתר הקורס את ההנחיות לגבי אופן הגשת מטלות.

שאלה 1 (20 נקודות)

חשבו את הגבולות (אם הם לא קיימים הוכיחו זאת).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}}$

ב. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+e^{-x}\right)^{x^2}$

שאלה 2 (20 נקודות)

הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x+e^x(1-\cos x)$ היא על $\mathbb{R}$.

שאלה 3 (20 נקודות)

לכל אחת מהפונקציות הבאות מצא את תחום ההגדרה, תחום הרציפות ותחום הגזירות. כמו כן לכל נקודה בתחום הגזירות, מצאו את הנגזרת המתאימה. נמקו את תשובותיכם.

א. $f(x)=\sqrt{|x|}\sin x$

ב. $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

שאלה 4 (25 נקודות)

א. הוכיחו כי $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

רמז: הסתמכו על הגדרת הנגזרת של e^x ב $x=0$.

ב. יהי $a\in\mathbb{R}$ ותהי $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{2} & x\le 0\\ \frac{a-\sqrt{\cos x}}{x} & x>0\end{cases}$.

(i) מצאו את כל הערכים של a שעבורם f רציפה ב $x=0$.

רמז: הפרידו למקרים: $a=1$, $a\neq 1$.

(ii) מצאו את כל הערכים של a שעבורם f גזירה ב $x=0$.

שאלה 5 (15 נקודות)

הוכיחו שאם f היא פונקציה המקיימת $|f(x)|\le x^2$ לכל $x\in\mathbb{R}$, אז f גזירה ב $x=0$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס:	20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1		
חומר הלימוד למטלה:	יחידה 8		
מספר השאלות:	7	**משקל המטלה:**	3 נקודות
סמסטר:	2023ג	**מועד אחרון להגשה:**	14.09.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

קראו בעיון באתר הקורס את ההנחיות לגבי אופן הגשת מטלות.

שאלה 1 (12 נקודות)

תהי f פונקציה רציפה ב $\mathbb{R}$.

הוכיחו שאם אין ל f נקודות קיצון, אז f היא חד-חד-ערכית.

(שימו לב שלא נתון ש f גזירה!).

שאלה 2 (13 נקודות)

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה פעמיים בקטע (a,b). נניח כי $f(a)=f(b)=0$ וכי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש $f(c)>0$. הוכיחו כי קיימת נקודה $t\in(a,b)$ כך ש $f''(t)<0$.

שאלה 3 (10 נקודות)

תהי f פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$ המקיימת $0\le f'(x)\le 2$ לכל $x\in[0,1]$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $x\in[0,1]$ כך ש $f'(x)=x^2+x$.

שאלה 4 (10 נקודות)

הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$ רציפה במידה שווה בקטע $[1,\infty)$.

שאלה 5 (20 נקודות)

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b)$ הגזירה פעמיים בקטע (a,b), כך שמתקיים $f''(x)>0$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו שאם $\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty$ אז $\lim_{x\to b^-} f'(x)=\infty$.

רמז: בעזרת משפט הערך הממוצע (משפט לגרנז') הראו שאם f' חסומה מלעיל ב (a,b) אז גם f חסומה מלעיל ב (a,b).

ב. הראו כי טענת סעיף א' אינה נכונה אם מחליפים את b ב ∞.

רמז: התבוננו בפונקציה $f(x)=x-\ln x$.

שאלה 6 (15 נקודות)

חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שאינם קיימים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}$

ב. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}$

ג. $\lim_{x\to 0}\left(1+\arctan x\right)^{\frac{1}{x}}$

שאלה 7 (20 נקודות)

א. הוכיחו שלכל $x>-1$, $x\neq 0$ מתקיים $x-(x+1)\ln(x+1)<0$.

ב. הוכיחו שלמשוואה $\frac{\ln(x+1)}{x}=\arctan x$ יש פתרון יחיד.

הערה: מותר להסתמך על טענת סעיף א' גם אם לא הצלחתם להוכיח אותה.