ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20475

חשבון אינפיניטסימלי 2

חוברת הקורס - סתיו א2024

כתב: ד"ר ודים גרינשטיין

אוקטובר 2023- סמסטר סתיו תשפ"ד

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים

אנו מקדמים את פניכם עם הצטרפותכם אל הלומדים את הקורס "**חשבון אינפיניטסימלי 2**".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

באתר האינטרנט של הקורס תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה, כולל גישה לשיעורי וידאו. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת:
http://www.openu.ac.il/shoham.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכז ההוראה של הקורס הוא ד"ר ודים גרינשטיין. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 09-7781424 בימי ה', בין השעות 16:30-18:00.
- בפקס 09-7780631.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני - vadimg@openu.ac.il
- **שאילתא** - לפניות בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאילתא. לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות.

אנו מאחלים לכם הצלחה בלימודיכם.

ב ב ר כ ה,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20475 /2024א)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה)
1	03.12.2023-08.12.2023 (ו חנוכה)	יחידה 1	
2	10.12.2023-15.12.2023 (א-ו חנוכה)	יחידות 1,2	ממ"ן 11 16.12.2023
3	17.12.2023-22.12.2023	יחידות 2,3	ממ"ן 12 23.12.2023
4	24.12.2023-29.12.2023	יחידה 3	
5	31.12.2023-05.01.2024	יחידות 3,4	ממ"ן 13 06.01.2024
6	07.01.2024-12.01.2024	יחידה 4	
7	14.01.2024-19.01.2024	יחידות 4,5	ממ"ן 14 20.01.2024
8	21.01.2024-26.01.2024	יחידה 5	
9	28.01.2024-2.02.2024	יחידות 5,6	ממ"ן 15 3.02.2024
10	4.02.2024-11.02.2024	יחידה 6	ממ"ן 16 12.02.2024

התנאים לקבלת 7 נקודות זכות

על מנת לקבל נקודות זכות בקורס עליכם לעמוד בתנאים הבאים:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של **10 נקודות לפחות**.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון **60 לפחות**.

ג. לקבל ציון סופי בקורס **60 נקודות לפחות**.

תיאור המטלות

בחוברת הקורס 6 מטלות מנחה (ממ"נים) במשקל כולל של 20 נקודות. **עליכם להגיש במהלך הקורס מטלות שמשקלן הכולל 10 נקודות לפחות.** אנו ממליצים מאוד להגיש את כל המטלות על מנת שתיחשפו למגוון גדול של שאלות.

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 1

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2024א **מועד אחרון להגשה:** 16.12.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

<u>לתשומת לבכם:</u>

בממ"ן זה יש שאלת רשות. שאלה זו קשה יותר ומיועדת לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. שאלת רשות היא שאלה חלופית: היא יכולה להחליף כל אחת <u>משאלות 1 - 5 בממ"ן</u>.

שאלה 1 (15 נקודות)

חשבון את גבול הסדרה $a_n = \int_0^{\pi/4} \frac{x^n \tan^3 x}{\cos^2 x} dx$.

שאלה 2 (15 נקודות)

תהי $f(x) = 2x - \lfloor \sin x \rfloor$ (תזכורת: $\lfloor a \rfloor$ הוא חלק שלם של a).

מצאו את הביטוי המפורש עבור הפונקציה $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ בקטע $[0,2\pi]$.

האם ל- $f(x)$ יש פונקציה קדומה בקטע $[0,2\pi]$? נמקו היטב.

שאלה 3 (15 נקודות)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ונניח שקיים זוג נקודות $a < x_1 < x_2 < b$ כך ש-

$$\int_a^{x_1} f(t)dt = x_2 \quad , \quad \int_a^{x_2} f(t)dt = x_1 .$$

הוכיחו כי קיימת נקודה c בקטע (a,b) כך ש- $f(c) = -1$.

שאלה 4 (20 נקודות)

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. יהיו h, g, f פונקציות חסומות בקטע $[a,b]$ ומקיימות $f(x) \le g(x) \le h(x)$ לכל $x \in [a,b]$.
אם $f(x)$ ו- $h(x)$ אינטגרביליות ב- $[a,b]$ אז גם $g(x)$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

ב. תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$. אם קיימת חלוקה P של $[a,b]$ כך ש- $s(P) = S(P)$
אז f קבועה ב- $[a,b]$.

שאלה 5 (15 נקודות)

תהי f פונקציה רציפה ב- $[0,1]$ ומקיימת $f(x) \le 2x$ לכל $x \in [0,1]$.

הוכיחו שאם $\int_0^1 f(t)dt = 1$, אז $f(x) = 2x$ לכל $x \in [0,1]$.

דרך פתרון אפשרית: הגדירו $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, הראו ש- $F(x) - x^2$ פונקציה קבועה ב- $[0,1]$,
והסיקו מכך את טענת השאלה. קיימות דרכי פתרון נוספות, אך דרך זו היא היעילה ביותר.

שאלת רשות

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-שלילית בקטע $[0,1]$. נסמן $a_n = \int_0^1 \left(f(x)\right)^n dx$.

הוכיחו כי לסדרה (a_n) קיים גבול סופי אם ורק אם $f(x) \le 1$ לכל $x \in [0,1]$.

שאלה 6 (20 נקודות)

שאלה זו ופתרונה באים להמחיש את השימוש באינטגרלים מסוימים ובהגדרתם לפי רימן לחישוב גבולות של סדרות מסוימות.

(8 נק') א. תהי $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$. הוכיחו כי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx .$$

(2 נק') ב. הביעו את $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ כאינטגרל מסוים בהנחה ש- $f(x)$ רציפה בקטע המתאים.

(10 נק') ג. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

(i) $$a_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{3^2} + \sqrt[n]{3^3} + \cdots + \sqrt[n]{3^{n-1}}\right) .$$

(ii) $$b_n = \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{n\sqrt{n^2+4}} + \frac{3}{n\sqrt{n^2+9}} + \cdots + \frac{n-1}{n\sqrt{n^2+(n-1)^2}} + \frac{1}{n\sqrt{2}} .$$

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידות 2,1

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2024א **מועד אחרון להגשה:** 23.12.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

<u>לתשומת לבכם:</u>

בממ"ן זה יש סעיפי רשות. סעיפים אלה קשים יותר ומיועדים לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. סעיף רשות הוא סעיף חלופי, כלומר הוא יכול להחליף כל סעיף אחר באותה שאלה.

שאלה 1 (30 נקודות)

חשבון:

א. $\int \frac{x^3}{x^2-6}dx$ ב. $\int x\sqrt{2-x}\,dx$ ג. $\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2}$ ד. $\int \cos x \cdot \ln(\tan x)\,dx$

ה. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}dx$ ו. $\int \frac{e^x+2}{e^x+4+6e^{-x}}dx$ ז. $\int e^{\arcsin x}dx$

ח. **(רשות)** $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}dx$

שאלה 2 (20 נקודות)

חשבון:

א. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$ ב. $\int_{1}^{2} \frac{x}{\left(x^2-2x+4\right)^{3/2}}dx$

ג. $\int_{0}^{\pi/3} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$ ד. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^2}dx$

ה. **(רשות)** $\int_{a}^{b} \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$ כאשר $b>a$

שאלה 3 (20 נקודות)

א. מצאו את כל הערכים של α עבורם $\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{(x^2+\alpha)^2}dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{(x^2+\alpha)^2}dx=\frac{1}{4}$.

ב. תהי $f(x)$ פונקציה בעלת נגזרת רציפה בקטע $[0,1]$ ומקיימת $f(1)=1$ ו- $\int_0^1 xf'(x)dx=1$.
הראו כי קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)=0$.

ג. **(רשות)** הוכיחו כי אם פונקציה f רציפה ואי-שלילית בקטע $[0,1]$ ו- $f(x)\cdot f(1-x)=1$
לכל $x\in[0,1]$, אז $\int_0^1 f(x)dx\ge 1$.

שאלה 4 (20 נקודות)

א. מצאו את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)=x^3$ ו- $g(x)=\sqrt{x}$.

ב. מצאו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)=x\sin(\pi x)$ ובין ציר ה-x בקטע $[0,2]$.

שאלה 5 (10 נקודות)

חשבו את נפחו של גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב סביב ציר ה-x של השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $f(x)=\sin x-\cos x$ וציר ה-x בין הישרים $x=\pi/2$ ו- $x=-\pi/2$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 3

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2024א **מועד אחרון להגשה:** 6.1.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

לתשומת לבכם:

בממ"ן זה יש שאלת רשות. שאלה זו קשה יותר ומיועדת לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. שאלת רשות היא שאלה חלופית: היא יכולה להחליף כל אחת משאלות 2 - 5 בממ"ן.

שאלה 1 (20 נקודות)

לגבי כל אחד מהאינטגרלים הבאים קבעו אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

א. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1-\frac{1}{x}}}$.

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin x \cdot \ln x}{\sqrt{x^4+x}}\,dx$.

ג. $\int_{-\pi}^\infty x^2\cos(x^5)dx$.

שאלה 2 (20 נקודות)

מצאו את כל הערכים של α ו- β עבורם $\beta > \alpha$ והאינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^\alpha + x^\beta}\,dx .$$

הדרכה: הראו כי לביטוי $\frac{x-\sin x}{x^3}$ יש גבול סופי שונה מ-0 כאשר $x \to 0$ והשתמשו בעובדה זו כדי לטפל ב"נקודה בעייתית" $x = 0$ של האינטגרל.

שאלה 3 (20 נקודות)

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. אם פונקציה $f(x)$ רציפה ב- $[1,\infty)$ והאינטגרל $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס

אז גם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ מתכנס.

ב. קיימות פונקציות $f(x)$, $g(x)$ כך ש- $\int_a^\infty f(x)dx$ ו- $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנסים בתנאי, אך

$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס בהחלט.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה וחסומה ב- $\mathbb{R}$ שמקיימת $\lim_{x\to\infty} e^{2x}f(x) = \sqrt{2}$.

הוכיחו כי האינטגרל $\int_0^\infty f(\ln x)dx$ מתכנס.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $f(x)$ פונקציה יורדת וחיובית בקטע $(0,1]$ וקיים $\alpha \geq 0$ כך שהאינטגרל $\int_0^1 x^\alpha f(x)dx$ מתכנס.

הראו כי $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+1}f(x) = 0$.

__הדרכה__ : מבחן קושי להתכנסות אינטגרלים מוכללים יכול לעזור לפתור את השאלה.

שאלת רשות

תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית ב-$[0,t]$ לכל $t > 0$ והאינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס.

האם נובע מכך כי קיימת סדרת נקודות (x_n) כך ש- $x_n \to \infty$ ו- $f(x_n) \to 0$?

אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 4

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2024א **מועד אחרון להגשה:** 20.1.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

<u>לתשומת לבכם:</u>

בממ"ן זה יש שאלת רשות. שאלה זו קשה יותר ומיועדת לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. שאלת רשות היא שאלה חלופית, כלומר היא יכולה להחליף כל שאלה אחרת בממ"ן.

שאלה 1 (20 נקודות)

חשבו קירוב ל- $\sqrt{6}$ בעזרת פולינום טיילור מסדר מתאים כך שהשגיאה לא תעלה על $0.5\cdot 10^{-2}$ (כלומר, בדיוק של 2 ספרות אחרי הנקודה).

שאלה 2 (20 נקודות)

היעזרו בפיתוח מקלורן מסדר מתאים על מנת להוכיח כי לכל $x\in(0,1)$ מתקיים:

$$\sin x > \ln(1+x).$$

שאלה 3 (20 נקודות)

היעזרו בפיתוח מקלורן על מנת לחשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$

ב. $\lim\limits_{x\to\infty}\left((x^3-x^2+\dfrac{x}{2})e^{1/x}-\sqrt{x^3+x^6}\right)$.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$ ומתקיים $f'(a) = f'(b) = 0$.

הוכיחו כי קיים $c \in (a,b)$ כך ש-

$$\left|f''(c)\right| \geq \frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b) - f(a)\right| .$$

שאלה 5 (20 נקודות)

תהיינה $f(x)$, $g(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בנקודה a ומתקיים:

$$f(a) = g(a) = f'(a) = g'(a) \neq 0 \quad , \quad f''(a) = g''(a) + g(a) .$$

הוכיחו כי $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f^2(x) - g^2(x)}{\left(f(x) - f(a)\right)^2} = 1$.

שימו לב: לא נתון ש- f , g גזירות פעמיים בנקודות שונות מ- a .

שאלת רשות

נניח כי לפונקציה $f(x)$ נגזרת שנייה חסומה בקטע $[0,\infty)$, ולכל n טבעי בקטע $[n, n+1]$ יש אפס של $f(x)$.

הוכיחו כי $f(x)$ חסומה ב- $[0,\infty)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 5

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2024א **מועד אחרון להגשה:** 3.2.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

לתשומת לבכם:

בממ"ן זה יש סעיפי רשות. סעיפים אלה קשים יותר ומיועדים לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. סעיף רשות הוא סעיף חלופי, כלומר הוא יכול להחליף כל סעיף אחר באותה שאלה.

שאלה 1 (25 נקודות)

קבעו לגבי כל אחד מהטורים הבאים אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

א. (12 נקודות) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}+\frac{\cos n}{n\ln n}\right)$.

ב. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^3}\cdot\cos^3 n$.

ג. (6 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+10+\ldots+10^{n-1}}{10^n}$.

ד. **(רשות)** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ כאשר $a_n=\int_1^{\infty}e^{-x^n}dx$.

שאלה 2 (15 נקודות)

תהי (a_n) סדרה של מספרים חיוביים.

נגדיר $u_n=\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)}$ לכל $n\geq 1$.

הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ מתכנס.

שאלה 3 (25 נקודות)

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. קיימים סדרה (a_n) ומספר $\alpha \le 1$ כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln n)^{\alpha} a_n = A > 0$ והטור $\sum a_n$ מתכנס.

ב. אם $\sum a_n$ טור מתכנס אז גם הטור $\sum a_n a_{n+1}$ מתכנס.

ג. אם $\sum a_n$ טור מתכנס אז גם הטור $\sum \frac{a_n\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$ מתכנס.

ד. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \cosh 1$ (**תזכורת**: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$).

ה. בהינתן טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, נסמן $x_n = \sum_{k=n}^{2n} a_k$. אם הסדרה (x_n) אינה אפסה, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

ו. (**רשות**) אם $a_n > 0$ לכל n והטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $na_n \to 0$.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ וגזירה פעמיים ב- 0. נסמן $u_n = (-1)^n f(1/n)$.

הוכיחו:

א. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס אז $f(0) = 0$.

ב. אם $f(0) = f'(0) = 0$ אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס בהחלט.

ג. אם $f(0) = 0$ אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס.

ד. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס בהחלט אז $f(0) = f'(0) = 0$.

__הדרכה__: רשמו את $f(1/n)$ בעזרת פיתוח מקלורן מסדר 2 של $f(x)$.

הערה: בכל סעיף אתם יכולים להסתמך על הסעיפים הקודמים, גם אם לא הוכחתם אותם.

שאלה 5 (15 נקודות)

תהי E תת-קבוצה של קטע $[0,1]$ המקיימת את התכונה הבאה:

לכל סדרה (a_n) שאיבריה שונים זה מזה וכולם שייכים ל- E, הטור $\sum a_n$ מתכנס.

הוכיחו כי E בת מנייה.

תזכורת: קבוצה E נקראת בת מנייה אם היא סופית או אם קיימת העתקה חח"ע מ- $\mathbb{N}$ על E.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 6

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2024א **מועד אחרון להגשה:** 12.2.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

<u>לתשומת לבכם:</u>

בממ"ן זה יש שאלת רשות. שאלה זו קשה יותר ומיועדת לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. שאלת רשות היא שאלה חלופית, כלומר היא יכולה להחליף כל שאלה אחרת בממ"ן.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $\left(f_n(x)\right)$ סדרת פונקציות המתכנסת במידה שווה בקטע $[a,b]$ לפונקציה רציפה $f(x)$.

נניח גם ש- (x_n) סדרת נקודות בקטע $[a,b]$ המתכנסת לנקודה x_0.

הראו כי $f_n(x_n) \to f(x_0)$.

תנו דוגמה המראה שאם נוותר על התכנסות במ"ש של $\left(f_n(x)\right)$ ונסתפק בהתכנסות נקודתית לפונקציה רציפה $f(x)$ בקטע $[a,b]$, אז ייתכן ש- $f_n(x_n) \not\to f(x_0)$.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $f(x)$ גזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}$ (כלומר, f בעלת נגזרת רציפה ב- $\mathbb{R}$).

נגדיר $f_n(x) = n\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \mathbb{R}$.

מצאו את $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ והוכיחו שבכל קטע $[a,b]$ סדרת הפונקציות $\left(f_n(x)\right)$ מתכנסת במידה שווה.

שאלה 3 (20 נקודות)

קבעו לגבי כל אחד מטורי הפונקציות הבאים האם הוא מתכנס במידה שווה :

א. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^n\ln^2 n}$ בתחום התכנסותו.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{\big((n-1)x+1\big)\cdot(nx+1)}$ ב- $[0,\infty)$.

שאלה 4 (20 נקודות)

נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

הראו כי f גזירה ב- $[0,\infty)$ וחשבו את $f'(0)$ ואת $f'(1)$.

שאלה 5 (20 נקודות)

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

א. אם $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=|x|$ לכל x בתחום התכנסות הטור, אז רדיוס ההתכנסות של הטור שווה ל- 0.

ב. $\int_1^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(x^n)}{n^2+x\ln n}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^{\pi}\frac{\cos(x^n)}{n^2+x\ln n}dx$.

שאלת רשות

לכל $k\geq 0$ שלם נגדיר $f_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^k x^n$. הראו כי לכל x בתחום התכנסות הטור מתקיים $f_k(x)=\frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ כאשר P_k פולינום ממעלה k בעל מקדם מוביל 1 ומקיים $P_k(1)=k!$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 7

מספר השאלות: 6 **לא לשקלול**

סמסטר: 2024א **לא להגשה**

מטלה זו לא להגשה אלא לבדיקה עצמית בלבד, על סמך הפתרון שיתפרסם באתר הקורס

שאלה 1

חשבו את הגבולות הבאים, או הראו שאינם קיימים:

א. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{\sqrt{2x^2+x^4y^4+\pi y^2}}$

ב. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \exp\left(-\frac{1}{x^2+2y^2}\right)$

הערה: פירוש הביטוי $\exp(A)$ הוא e^A

ג. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^4+y^4}$

ד. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2|x|}{\left(2|x|+3y^2\right)^2}$

שאלה 2

א. על גרף הפונקציה $f(x,y)=x^2+2y^2+4$ מצאו את כל הנקודות בהן מישור משיק לגרף הפונקציה עובר דרך ראשית הצירים.

ב. נתונה הפונקציה $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.
עבור כל נקודה (x_0,y_0) מצאו את הנגזרות החלקיות f_y, f_x בנקודה זו או הסבירו מדוע הן לא קיימות (יש להבדיל בין המקרים $x_0\neq -y_0$, $x_0=-y_0\neq 0$ ו- $x_0=y_0=0$).
האם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$?
<u>שימו לב</u>: הביטוי $\sqrt[3]{a}$ מוגדרת היטב לכל a ממשי.

שאלה 3

תהי $A\subset\mathbb{R}^2$ קבוצה חסומה ולא פתוחה. אילו מהטענות הבאות נכונות? נמקו היטב!

א. קיימת $p\notin A$ וקיים $\varepsilon>0$ כך ש- $N_\varepsilon(p)\cap A=\varnothing$.

ב. קיימת $p\in A$ כך שלכל $\varepsilon>0$ מתקיים $N_\varepsilon(p)\cap A\neq N_\varepsilon(p)$.

ג. לכל $\varepsilon>0$ ולכל $p\in A$ קיימת $q\in A$ כך ש- $p\notin N_\varepsilon(q)$.

שאלה 4

א. מצומת דרכים יוצאים שני כבישים ישרים, הזווית בין הכבישים 60°. באחד הכבישים נוסעת משאית, ובכביש האחר נוסע אופנוע. בזמן מסוים המשאית נמצאת במרחק 3 ק"מ מהצומת ומתרחקת ממנו במהירות של 50 ק"מ לשעה, והאופנוע נמצא במרחק 1 ק"מ מהצומת ומתרחק ממנו במהירות של 260 ק"מ לשעה. באיזה קצב משתנה המרחק בין המשאית לבין האופנוע בנקודת הזמן הזאת? (**שימו לב**: מהנתון לא נובע שכלי הרכב נוסעים במהירות קבועה, יש לנו מידע רק על מהירויותיהם בנקודת הזמן הנדונה).

ב. תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית ב- $\mathbb{R}^2$.
נניח ש- x ו- y הם פונקציות של שני משתנים u ו- v ונגדיר $z(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$.
לכל $u,v > 0$ מצאו את f_y, f_x כפונקציות של משתנים u ו- v אם ידוע כי $x = u + \ln v$; $y = v - \ln u$, $z(u,v) = 2u + v$.

ג. נתונה פונקציה $f(x,y)$ שהיא בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר שני במישור כולו.
נניח שהמשתנים x ו- y תלוים במשתנים t ו- s באופן הבא: $x = e^s \cos t$, $y = e^s \sin t$.
נגדיר פונקציה $g(t,s) = f\left(x(t,s), y(t,s)\right)$.
הראו כי $f_{xx} + f_{yy} = e^{-2s}\left(g_{tt} + g_{ss}\right)$.

שאלה 5

שלוש מפיאותיה של תיבה פתוחה (כלומר, תיבה בלי הפיאה העליונה) מונחות על מישורי הקואורדינטות (כלומר, על המישורים $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$), ואחד מקדקודיה שייך למישור $x + y + z = 1$ ונמצא בתומן הראשון (כלומר, בתחום $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).
בין כל התיבות כאלה מצאו את התיבה בעלת שטח הפנים המקסימלי.

שאלה 6

תהי $f(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$.

א. הוכיחו: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ לכל (x,y).

ב. מהו הכיוון בו נגזרת כיוונית בנקודה $(1,0)$ מקבלת את הערך המינימלי? חשבו את הערך המינימלי הזה.

ג. בדקו כי לפונקציה $f(x,y)$ אין נקודות קיצון.