שאלה 1 (20 נקודות)

לגבי כל אחד מהאינטגרלים הבאים קבעו אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

א. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1-\frac{1}{x}}}$.

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin x \cdot \ln x}{\sqrt{x^4+x}}\, dx$.

ג. $\int_{-\pi}^\infty x^2 \cos(x^5) dx$.

1) $\int_0^\infty x^{\frac{1}{x}-1} dx$

ניקח פונ׳ $f(x)$:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}-1}$$

$f(x)$ מוגדרת לכל $x>0$.

$f(x)$ רציפה לכל $x>0$ (מורכבת מפונ׳ רציפות)

לכן, $f(x)$ אינטגרבילית לכל $t>0$
ב- $[0,t]$ לפי משפט 1.19

נפרק את האינטגרל:

$$\int_0^\infty x^{-1+\frac{1}{x}} dx = \underbrace{\int_0^1 x^{-1+\frac{1}{x}} dx}_{I} + \underbrace{\int_1^\infty x^{-1+\frac{1}{x}} dx}_{II}$$

נסתכל על II:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{x}}}\,dx$$

נסתכל על $f(x) = \frac{1}{x^{1-\frac{1}{x}}}$

ניקח $x>1$

ויודע כי $1-\frac{1}{x}<1$ לכל $x>1$

לכן, כאשר $x>1$,

$$x^{1-\frac{1}{x}} < x^{1}$$

$$\Downarrow$$

$\frac{1}{x} < \frac{1}{x^{1-\frac{1}{x}}}$ לכל $x>1$

* $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^{1-\frac{1}{x}}}$ פונ' חיוביות

נסתכל על

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^{\infty} = \text{"}\ln(\infty) - \ln(0)\text{"} = \boxed{\infty}$$

לכן, מפני ש $\frac{1}{x} < \frac{1}{x^{1-\frac{1}{x}}}$, לפי 3.16

מתקיים:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1-\frac{1}{x}}}\,dx = \infty$$

$$\boxed{\text{לכן, גם האינטגרל הנתון } \int_0^\infty \frac{1}{x^{1-\frac{1}{x}}}\,dx \text{ מתבדר}}$$

$\boxed{\text{משל}}$

ב) $$\int_0^\infty \frac{\sin(x)\cdot\ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}\,dx$$

הפונ' רציפה ומוגדרת לכל $x>0$ פרט ל- $x=0$

לכן לפי 1.19 הפונ' אינטגרבילית

קיימות 2 נקודות בעייתיות $x=0,\ x=\infty$

אזי נחלק את האינטגרל:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)\cdot\ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin(x)\cdot\ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}\,dx}_{I} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\sin(x)\cdot\ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}\,dx}_{II}$$

ניקח I:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)\cdot \ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)\cdot \ln(x)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3+1}}\,dx$$

ניקח $f(x)$

$$f(x) = \frac{\sin(x)\cdot \ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}$$

לכן

$$|f(x)| = \frac{\sin(x)\cdot |\ln(x)|}{\sqrt{x^4+x}}$$

ולכן

$$|f(x)| = \frac{-\sin(x)\cdot \ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}$$

כי: $\sqrt{x^4+x},\ \sin(x),\ -\ln(x) \geq 0$

כאשר $x\in(0,1]$

נמצא את

$$\lim_{x\to 0^+}\left(|f(x)|\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\left|\frac{\sin(x)\cdot \ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}\right|\right) =$$

לכל $x>0$ $\sqrt{x^4+x} \geq x^2$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\left|\frac{\sin(x)\cdot \ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}\right|\right) \leq \lim_{x\to 0^+}\left(\left|\frac{\sin(x)\cdot \ln(x)}{x^2}\right|\right)$$

$|\sin(x)| \leq 1$ אי שוויון לגבולות (לינ׳ פ׳ 1)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\left|\frac{\sin(x)\cdot \ln(x)}{x^2}\right|\right) \leq \lim_{x\to 0^+}\left(\left|\frac{\ln(x)}{x^2}\right|\right) \underset{\text{לופיטל}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\left|\frac{\frac{1}{x}}{2x}\right|\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\left|\frac{1}{2x^2}\right|\right) = \text{"}\frac{1}{\infty}\text{"} = 0$$

לכן, ידוע כי: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

לפי כלל הסנדוויץ׳,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-|f(x)|\right) \leq \lim_{x\to 0^+}\left(f(x)\right) \leq \lim_{x\to 0^+}\left(|f(x)|\right)$$

$$0 \leq \lim_{x\to 0^+}\left(f(x)\right) \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)\right) = 0$$

לכן, הפונקציה חסומה בקטע $(0,1]$ ולכן האינטגרל סופי

לכן קיים $I\in\mathbb{R}$ כאשר:

$$\underline{I}=\int_0^1 \frac{\sin(x)\cdot\ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}$$

<u>נסתכל II:</u>

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)\cdot\ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}dx$$

ניקח

$$f(x)=\frac{\sin(x)\cdot\ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}$$

$|\sin(x)|\le 1$

$$|f(x)|=\frac{|\sin(x)|\cdot\ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}\le\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}\underset{\text{הקטנת המכנה}}{\le}\frac{\ln(x)}{x^2}$$

*

$\sqrt{x^4+x}\ge0$

$\ln(x)\ge0$

לכל $x\ge1$

יהי $\alpha>0$.

נבדוק האם $x^\alpha>\ln(x)$

כאשר $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^\alpha}{\ln(x)}\right)\underset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\alpha x^{\alpha-1}\cdot x\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\alpha x^\alpha\right)=\text{“}\alpha\cdot\infty^\alpha\text{”}=\infty$$

$$\Downarrow$$

$x^\alpha>\ln(x)$ כאשר $x\to\infty$

לכן:

נוסף: ניקח $\alpha=\frac{1}{2}$

$$|f(x)|=\frac{|\sin(x)|\cdot\ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}\leq\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}\leq\frac{\ln(x)}{x^2}\leq\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}=\frac{1}{x^{1.5}}$$

לכן,

$$|f(x)|\leq\frac{1}{x^{1.5}}$$

ידוע כי $f(x)$, $x^{-1.5}$ אינטגרביליות לכל $t>1$ בקטע $[1,t]$

לפי למה 3.12: $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1.5}}dx$ מתכנס (ולכן מתכנס בהחלט, כי הפונ' תמיד חיובית)

(נבדוק את הגבול)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{|f(x)|}{x^{-1.5}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{|\sin(x)|\cdot\ln(x)}{\sqrt{x^4+x}\cdot x^{-1.5}}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{|\sin(x)|\cdot\ln(x)}{\sqrt{\frac{x^4+x}{x^3}}}\right)\leq\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}}\right)\leq\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$|\sin(x)|\leq 1$

לכל x

$\ln(x)\leq x^{\frac{1}{4}}$

כאשר $x\to\infty$.

הראינו זאת

בעזרת הקודם

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}}\right)\leq\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)=\text{"}\frac{1}{\infty}\text{"}=0$$

הקטנת

מכנה

לכן

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{|f(x)|}{x^{-1.5}}\right)\leq 0$$

מפני ש $\frac{|f(x)|}{x^{-1.5}}$ אי-שלילי, אז:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{|f(x)|}{x^{-1.5}}\right)=0$$

לפי משפט 3.16, מכיוון ש $\int_1^\infty x^{-1.5}dx$, אזי

$$\int_0^1 \frac{|\sin(x)|\cdot\ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}dx$$ מתכנס,

$$\boxed{\text{לכן, } \int_0^1 \frac{\sin(x)\cdot\ln(x)}{\sqrt{x^4+x}}dx \text{ מתכנס בהחלט}}$$

$\boxed{\text{מש"ל}}$

ג) $\int_{-\pi}^{\infty} x^2\cos(x^5)dx$:

נסתכל על הפונק' $f(x)=x^2\cos(x^5)$:

היא רציפה לכל $x\geq-\pi$

לכן, לכל $t>\pi$ מתקיים ש f רציפה ב- $[-\pi,t]$

לכן, f אינטגרבילית - משפט 1.19 ב- $[-\pi,\infty)$.

קיימת נק' בעייתית אחת, כאשר $x\to\infty$:

$$\int_{-\pi}^{\infty} x^2\cos(x^5)dx=\left\{\begin{array}{ll} t=x^5 & dt=5x^4dx \\ x=\sqrt[5]{t} & dx=\frac{1}{5}t^{-\frac{4}{5}} \\ x=-\pi\Rightarrow t=-\sqrt[5]{\pi} & \\ x\to\infty\Rightarrow t=\infty & \end{array}\right\}=$$

$$\left(t^{\frac{1}{5}}\right)'=\frac{1}{5}t^{-\frac{4}{5}}$$

$$\int_{-\sqrt[5]{\pi}}^{\infty} t^{\frac{2}{5}}\cdot\cos(t)\,dt\cdot\left(\frac{1}{5}t^{-\frac{4}{5}}\right)=\int_{-\sqrt[5]{\pi}}^{\infty}\frac{\cos(t)}{5t^{\frac{2}{5}}}dt=\frac{1}{5}\int_{-\sqrt[5]{\pi}}^{\infty}\frac{\cos(t)}{t^{\frac{2}{5}}}dt$$

לפי משפט 3.19 - מבחן דיריכלה

ניקח $g(t)=\cos(t)$, $f(t)=\frac{1}{t^{\frac{2}{5}}}$

תנאים:

1) $f(x)$:

א) $\lim_{t\to\infty}\left(f(t)\right)="\frac{1}{\infty^{\frac{2}{5}}}"="\frac{1}{\infty}"=0$

ב) $f(t)=t^{-\frac{2}{5}} \to f'(t)=-\frac{2}{5}\cdot t^{-\frac{7}{5}}$

הפונ' יורדת כאשר $t>0$.

לכן, נסתכל על $\boxed{[1,\infty)}$

ג) $f'(t)=-\frac{2}{5}t^{-\frac{7}{5}}$ רציפה לכל $t\geq 1$.

2) $g(t)$:

$g(t)=\cos(t)$

ניקח $G(x)=\int_1^x \cos(t)\,dt=$

$G(x)=\sin(t)\Big|_1^x=\sin(1)-\sin(x)=$

$|\sin(x)|\leq 1$

$|G(x)|=|\sin(1)-\sin(x)|\leq|\sin(1)|+|\sin(x)|\leq 1+1=2$

$\Downarrow$

$|G(x)|\leq 2$

לכן $G(x)$ חסומה

לכן, לפי משפט דיריכלה,

$$\int_1^\infty f(x)\cdot g(x)\,dx$$ מתכנס.

לכן,

$$\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^{\frac{2}{5}}}\,dx$$ מתכנס

ולכן,

$$\int_1^\infty x^2\cos(x^5)\,dx$$ מתכנס

ולכן

$$\boxed{\int_{-\pi}^\infty x^2\cos(x^5)\,dx \text{ מתכנס}}$$

מפני ש- $\int_{-\pi}^{1} x^2\cos(x^5)\,dx$ אינטגרל שערכו סופי.

נבדוק:

$$\int_{-\pi}^\infty |x^2\cdot\cos(x^5)|\,dx = \int_{-\pi}^\infty x^2\cdot|\cos(x^5)|\,dx$$

$x^2 \geq 0^*$ לכל x

$$x^2\cdot|\cos(x^5)| \geq x^2\cdot\cos^2(x^5)$$

(מש' נפ' 1) $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$ *

$$\Downarrow$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\cos(2\alpha) + \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{x^2}_{\text{חיוב.}}\underbrace{|\cos(x^5)|}_{\text{אי שלילי}} \geq \underbrace{x^2}_{\text{חיוב.}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x^5)\right)}_{\text{אי שלילי}}$$

נבדוק את

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x^5)\,dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{2}x^2\,dx + \int^{\infty}\frac{1}{2}x^2\cos(x^5)\,dx$$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{2}x^2\,dx = x\Big|_1^{\infty} = \text{"}\infty - 1\text{"} = \boxed{\infty}$$

לכן $\int_1^{\infty}\frac{1}{2}x^2\,dx$ מתבדר

ולכן $\int_1^{\infty}\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2\cos(2x^5)\,dx$ מתבדר

נבדוק את הגבול:

$$f(x) = x^2\cdot|\cos(x^5)|$$
$$g(x) = x^2\cdot\cos^2(x^5) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2\cos(2x^5)$$

נניח כי $\int_1^{\infty} g(x)\,dx$ מתכנס.

לכן, $\int_1^{\infty} x^2\cdot\cos^2(x^5)\,dx$ מתכנס, ונקבל:

$$\int_1^{\infty} x^2\cdot\cos^2(x^5)\,dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{2}x^2\,dx + \int_1^{\infty}\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x^5)\,dx$$

מכאן ניתן להסיק כי קיים $I\in\mathbb{R}$ כאשר:

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{2}x^2\,dx = \int_1^\infty x^2\cdot\cos^2(x^5)\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x^5)\,dx$$

אך לא קיים $I\in\mathbb{R}$ כזה, מפני ש $\int_1^\infty \frac{1}{2}x^2\,dx = \infty$

וקיבלנו סתירה.

ולכן, $\int_1^\infty g(x)\,dx$ מתבדר

ולכן לפי 3.16 $|f(x)|$ מתבדר.

לכן, $\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס בתנאי,

ולכן,

$\int_{-\pi}^\infty x^2\cdot\cos(x^5)\,dx$ מתכנס בתנאי

משל

שאלה 2 (20 נקודות)

מצאו את כל הערכים של α ו- β עבורם $\beta > \alpha$ והאינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^\alpha + x^\beta}\, dx .$$

ניקח: $f(x) = \frac{x - \sin(x)}{x^\beta + x^\alpha}$

$$\int_0^\infty \frac{x - \sin(x)}{x^\beta + x^\alpha}\, dx$$

$x^\alpha \left(x^{\beta - \alpha} + 1 \right)$

$\beta > \alpha$

הפונ' $f(x)$ רציפה לכל $t > 0$ לכן הפונ' אינטגרבילית (1.19)

הנק' הבעייתיות הן $x = 0$, $x \to \infty$:

לכן, נפרק

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{I} + \underbrace{\int_1^\infty f(x)\,dx}_{II}$$

נתחיל עם I:

$$\int_0^1 \frac{x - \sin(x)}{x^\beta + x^\alpha}\, dx$$

נבדוק מתי היא מתכנס:

ניקח $g(x) = x^{3-\alpha}$

$$g(x) = \frac{1}{x^{\alpha - 3}}$$

$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-3}}\,dx$ מתכנס אמ"מ $\alpha - 3 < 1$ לפי למה 3.12

כלומר $\alpha < 4$

נשווה את $f(x)$ מתכנס לפי $g(x)$

נשווה את:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{x-\sin(x)}{x^{\beta}+x^{\alpha}}}{\frac{x^3}{x^{\alpha}}}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-\sin(x)}{x^3}\right)\cdot \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}+x^{\alpha}}\right)$$

לופיטל

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\cos(x)}{3x^2}\right) \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin(x)}{6x}\right) = \boxed{\frac{1}{6}}$$

לופיטל

לפי אינפי 1

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}+x^{\alpha}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{1+x^{\beta-\alpha}}\right) = \text{"}\frac{1}{1+0^+}\text{"} = \boxed{1}$$

לכן,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-\sin(x)}{x^3}\right)\cdot \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}+x^{\alpha}}\right) = \frac{1}{6}\cdot 1 = \boxed{\frac{1}{6}}$$

לכן, לפי 3.16^* $\int_0^1 f(x)$ מתכנס אמ"מ $\int g(x)dx$ מתכנס

$$\boxed{\text{לכן, } \int_0^1 f(x) \text{ מתכנס אמ"מ } \alpha < 4}$$

נסתכל על II:

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{x-\sin(x)}{x^\alpha + x^\beta}dx$$

ניקח $g(x)=x^{1-\beta}$.

נשים לב ש: $\int_1^\infty \frac{x-\sin(x)}{x^\alpha+x^\beta}dx$ מתכנס.

ידוע כי $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\beta-1}}dx$ מתכנס אמ"מ $\beta-1>1$

$$\boxed{\beta>2}$$

נשים לב ש:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-\sin(x)}{x^\alpha+x^\beta}\cdot\frac{x^\beta}{x}\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-\sin(x)}{x}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^\beta}{x^\beta+x^\alpha}\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{\sin(x)}{x}}{1}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}}\right) = \text{"}\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{\infty}}\text{"} = \boxed{1}$$

ידוע כי:

$$^{*}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \text{"}0\text{"} = 0$$

לכן, לפי 3.16^*, $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס אמ"מ $\int_1^\infty g(x)dx$ מתכנס

לכן, $\boxed{\int_1^\infty f(x)dx}$ מתכנס אמ"מ $\beta>2$

לכן,

$$\int_0^\infty f(x)dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{I} + \underbrace{\int_1^\infty f(x)dx}_{II}$$

מתכנס אמ"מ I, II מתכנסים. לכן,

כאשר $\beta>2$, $\alpha<4$, $\beta>\alpha$ $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס

משל

שאלה 3 (20 נקודות)

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם פונקציה $f(x)$ רציפה ב-$[1,\infty)$ והאינטגרל $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס

אז גם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ מתכנס.

ב. קיימות פונקציות $f(x)$, $g(x)$ כך ש- $\int_a^\infty f(x)dx$ ו- $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנסים בתנאי, אך

$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס בהחלט.

א) אם $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס

ידוע כי $F(x)=\int_1^x f(x)dx$ פונק' חסומה ב- $[1,\infty)$

כי $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס.

נסתכל על $g(x)=\frac{1}{x}$.

הפונק' רציפה לכל $x>1$, ולכן גם נגזרתה

$g'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$

לכל x

בנוסף, ידוע כי $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$

לכן, לפי מבחן דיריכלה (3.19), נקבל כי

$\int_1^\infty g(x)\cdot f(x)dx$ מתכנס

$$\boxed{\text{ולכן, } \int_1^\infty \frac{f(x)}{x}dx \text{ מתכנס} \quad \boxed{\text{מש"ל א}}}$$

ג)

$a=1 \qquad f(x)=\frac{\sin(x)}{x} \qquad g(x)=\frac{\cos(x)}{x}$

פונ' רציפות ב- $[1,\infty)$ ולכן אינטגרביליות (1.18)

$$\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x}dx$$

מבחן דיריכלה

$f(x)=\frac{1}{x}$ - פונ' מונוטונית יורדת כאשר $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$

$g(x)=\cos(x)$ $\quad G(x)=\int_1^x \cos(x)dx$ פונ' חסומה:

$$|G(x)|=|\sin(x)-\sin(1)|\leq 2$$

לכן, $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x}dx$ מתכנס

נבדוק גם

$|\cos(x)|\leq 1$

$$\int_1^\infty \frac{|\cos(x)|}{x}dx \geq \int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x}dx$$

$$\int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x}dx=\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{2x}dx+\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx$$

מתבדר $\Leftarrow \alpha=1$ לפי למה 3.12 לכן $\int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x}dx$ מתבדר

לכן, לפי 3.16, $\int_1^\infty \frac{|\cos(x)|}{x}dx$ מתכנס, ו- $\boxed{\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x}dx \text{ מתכנס בתנאי}}$

נסתכל על

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$$

ניקח $f(x)=\frac{1}{x}$; פונ' מונוטונית יורדת, אשר נגזרת רציפה לכל אורך הגדרתה, כאשר

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

ניקח $g(x)=\sin(x)$

$$G(x)=\int_1^x \sin(x)dx$$

$$|G(x)| = |-\cos(x)+\cos(1)| \leq 2$$ פונ' חסומה

לכן, לפי מבחן דיריכלה (3.19).

$$\int_1^\infty f(x)g(x)dx = \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$$ מתכנס

נסתכל על האינטגרל המקורי:

$$\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}dx \geq \int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x}dx$$

$|\sin(x)|\leq 1$

$$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2(\alpha)$$
$$\Downarrow$$
$$\sin^2(\alpha)=\frac{1}{2}-\cos(2\alpha)$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x}dx = \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx}_{} + \int_1^\infty \frac{-\cos(2x)}{2x}dx$$

מתבדר - $\alpha=1$ לפי למה 3.12

לכן, $\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x}dx$ מתבדר

ולכן, $\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}dx$ מתבדר לפי 3.16

$\boxed{\text{ולכן } \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx \text{ מתכנס בתנאי}}$

כעת, נסתכל על

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{x^2}\,dx$$

ידוע כי

$$0 \leq |\sin(\alpha)| \leq 1$$

$$0 \leq |\cos(\alpha)| \leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$|\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)| \leq 1$$

נסתכל על הפונ' האי שלילית:

$$\int_1^\infty \frac{|\cos(x)\cdot\sin(x)|}{x^2}\,dx \leq \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx}$$

מתכנס, $\alpha < 1$ לפי למה 3.12

לכן, לפי 3.16, נקבל כי $\int_1^\infty \frac{|\cos(x)\cdot\sin(x)|}{x^2}\,dx$ מתכנס,

ולכן $\int_1^\infty \frac{\cos(x)\cdot\sin(x)}{x^2}$ מתכנס בהחלט

סעיף ב

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה וחסומה ב- $\mathbb{R}$ שמקיימת $\lim_{x\to\infty} e^{2x} f(x) = \sqrt{2}$.

הוכיחו כי האינטגרל $\int_0^\infty f(\ln x)\,dx$ מתכנס.

ניקח $h(x)=e^{x}f(x)$, $g(x)=e^{-x}$, כאשר $f(x)$ רציפה וחסומה ב- R.

קיימות 2 נקודות בעייתיות: $x=0$, $x\to\infty$:

$$\int_0^\infty f(\ln(x))\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(\ln(x))\,dx}_{I} + \underbrace{\int_1^\infty f(\ln(x))\,dx}_{I}$$

<u>I:</u>

$$\int_1^\infty f(\ln(x))\,dx = \left\{\begin{array}{l} t=\ln(x) \\ x=e^t \to dx=dt\cdot e^t \\ x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{array}\right\} =$$

$$\int_0^\infty f(x)\cdot e^x\,dx$$

ניקח $h(x)=f(x)\cdot e^x$

$g(x)=e^{-x}$

לפי משפט 3.16^* נבדוק:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(e^{2x}\cdot f(x)\right)=\sqrt{2}$$

נתון

לכן, $\int_0^\infty e^{-x}dx$ מתכנס אם״ם $\int_M^\infty e^{x}f(x)dx$ מתכנס

ידוע כי:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^t\right) = "-e^{-\infty}+e^{0}" = \boxed{1}$$

לכן $\int_0^\infty e^{-x}dx$ מתכנס,

ולכן גם $\int_0^\infty e^{x}f(x)dx$ מתכנס

$$\int_0^\infty e^{x}f(x)dx = \int_1^\infty f(\ln(x))dx$$

$\boxed{\text{ולכן, } \int_1^\infty f(\ln(x))dx \text{ מתכנס}}$

II:

$\int_0^1 f(\ln(x))dx$: ידוע כי $f(x)$ חסומה

ורציפה לכל R.

לכן, ניתן להסיק ש $f(\ln(x))$ רציפה וחסומה

לכל $x>0$.

לכן אינטגרבילית בקטע $(0,1]$

ולכן אינטגרבילית ב $[0,1]$ לפי 1.19

ולכן $\int_0^1 f(\ln(x))\,dx$ מתכנס.

לכן, $\int_1^\infty f(\ln(x))\,dx$, $\int_0^1 f(\ln(x))\,dx$ מתכנסים.

ולכן, $\int_0^\infty f(\ln(x))\,dx$ מתכנס

משל

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $f(x)$ פונקציה יורדת וחיובית בקטע $(0,1]$ וקיים $\alpha \ge 0$ כך שהאינטגרל $\int_0^1 x^\alpha f(x)dx$ מתכנס.

הראו כי $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+1} f(x) = 0$.

לפי מבחן קושי,

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כאשר שלכל $t \in (0,\delta)$ מתקיים:

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t} x^\alpha f(x)dx < \varepsilon$$

– אי שלילי*, כי:

$x^\alpha f(x)$

אי שלילי לכל x ; חיובית

וגם $t > \frac{t}{2}$

נסתכל על הקטע $[\frac{t}{2}, t]$:

$f(x)$ יורדת, לכן, $f(x) > f(t)$ כאשר $x \in [\frac{t}{2}, t)$

x^α עולה, לכן $x^\alpha > (\frac{t}{2})^\alpha$ כאשר $x \in (\frac{t}{2}, t]$

לכן, לכל $x \in [\frac{t}{2}, t]$ מתקיים:

$$x^\alpha \cdot f(x) \ge \frac{t^\alpha}{2^\alpha} \cdot f(t)$$

לפי שאלה 4ג, מתקיים:

$$\varepsilon > \int_{\frac{t}{2}}^{t} x^\alpha \cdot f(x)dx \ge (t - \frac{t}{2}) \cdot \frac{t^\alpha}{2^\alpha} \cdot f(t) = \frac{t^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}} \cdot f(t)$$

$$\varepsilon > \frac{t^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}} \cdot f(t)$$

$$\varepsilon \cdot 2^{\alpha-1} > \overbrace{t^{\alpha-1} \cdot f(t)}^{\text{תמיד חיובי}} \geq 0$$

ולכן, קיבלנו שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כאשר:

לכל $t \in (0,\delta)$ מתקיים:

$$\Big| \underbrace{t^{\alpha-1} \cdot f(t) - 0}_{\text{תמיד חיובי בכל מקרה!}} \Big| < \varepsilon$$

$$\boxed{\text{ולכן, } \lim_{t \to 0^+} \left(t^{\alpha-1} \cdot f(t) \right) = 0}$$

$\boxed{\text{מש"ל}}$