Mamman 13

שאלה 1

שאלה 1 (20 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה $\left\{A^2 \mid A \in M_{k\times k}(\mathbf{R})\right\}$ מכילה סביבה של מטריצת היחידה I.

(מרחב המטריצות $M_{k\times k}(\mathbf{R})$ מזוהה כרגיל עם המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^{k^2}$.)

נגדיר f:

$$f : M_{k\times k}(\mathbb{R}) \to M_{k\times k}(\mathbb{R})$$
$$f(X) = X^2$$

ניקח V סביבה פתוחה של I.

נמצא את Df_X:

$$\frac{f(X+H) - f(X) - Df_X(H)}{|H|} \xrightarrow[H->0^{[k^2]}]{} 0$$
$$\frac{X^2 + XH + HX + H^2 - X^2 - Df_X(H)}{|H|} \xrightarrow[H->0^{[k^2]}]{} 0$$
$$\frac{XH + HX - Df_X(H)}{|H|} + \frac{o(|H|)}{|H|} \xrightarrow[H->0^{[k^2]}]{} 0$$

ונקבל:

$$Df_X(H) = XH + HX$$

מהקורס אלגברה ליניארית 1, נקבל כי הפונ' הפיכה ב $X = I$.

לפי משפט 4.א.7 (משפט הפונ' ההופכית) נקבל כי קיים כדור פתוח B סביב I כאשר $f(B)$ קבוצה פתוחה.

לכן קיימת סביבה סביב $I = I^2$ כאשר הסביבה הנ"ל פתוחה

מש"ל.

שאלה 2

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי F פונקציה חלקית מ־$\mathbf{R}^2$ ל־$\mathbf{R}$ שגזירה פעמיים ברציפות בסביבה של הנקודה (a,b).

נתון: $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b)\neq 0$ $\quad$ $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$ $\quad$ $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)=0$ $\quad$ $F(a,b)=0$

הוכיחו שהמשוואה $F(x,y)=0$ אינה מגדירה באופן סתום בסביבת (a,b) את x כפונקציה של y. (שימו לב שהמשוואה כן מגדירה באופן סתום בסביבת (a,b) את y כפונקציה של x. הוכיחו זאת, היעזרו בנתונים כדי להסיק מסקנות על תכונות הפונקציה הזאת, ובעזרתן הוכיחו את הנדרש בשאלה).

תהי סביבה A של (a,b).
נניח בשלילה שהפונ' כן מוגדרת באופן סתום את x כפונקציה של y.
נקבל שלפי מסקנה 8.ב.7, $F(x,y)$ מגדירה את y כפונקציה של x.
נקבל כי קיים g כאשר:

$$y=g(x)$$

לכל $(y,x)\in A$.
לפי הנחת השלילה, נקבל כי קיים h כאשר מתקיים:

$$x=h(y)$$

ונקבל:

$$x=h(g(x))$$

לכל x בA.
לכן, g ו f הופכיות, ולכן הן חח"ע בסביבת A.
לפי הנתונים, ידוע כי:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)=0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b)\neq 0$$

ולכן, לפי מסקנה 8.ב.7, נקבל כי:

$$g'(x)=\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,g(x))}$$

לפי הנתונים:

$$g'(a)=\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a,g(a))}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,g(a))}=0$$

נמצא את $g''(x)$:

$$g''(x)=\left(\frac{F_x(x,g(x))}{F_y(x,g(x))}\right)'=$$

$$g''(x)=\frac{(F_{xx}(x,g(x))+F_{xy}(x,g(x))g'(x))F_y(x,g(x))-(F_{yx}(x,g(x))+F_{yy}(x,g(x))g'(x))F_x(x,g(x))}{(F_y(x,g(x)))^2}=$$

נציב $x=a$:

$$g''(a)=\frac{(F_{xx}(a,b)+F_{xy}(a,b)g'(a))F_y(a,b)-(F_{yx}(a,b)+F_{yy}(a,b)g'(a))F_x(a,b)}{(F_y(a,b))^2}$$

לפי הנתונים ידוע כי $F_x(a,b)=0$. לכן:

$$g''(a)=\frac{(F_{xx}(a,b)+F_{xy}(a,b)g'(a))F_y(a,b)}{(F_y(a,b))^2}$$

בנוסף ידוע כי $g'(a)=0$ לכן:

$$g''(a)=\frac{(F_{xx}(a,b))F_y(a,b)}{(F_y(a,b))^2}$$

לפי הנתונים:

$$F_{xx}(a,b)\neq 0,\ F_y(a,b)\neq 0$$

ולכן:

$$g''(a)\neq 0$$

ולכן, מהקורס חשבון אינפיניטסימלי 1, נקבל כי $g(a)=b$ הינה נק' קיצון. לכן היא לא חח"ע כי בסביבה של $x=a$ מתקיים $g(a)>g(x)$ ולכן לא חח"ע.
לכן סתירה.
לכן x לא פונ' של y.
מש"ל.

שאלה 3

שאלה 3 (20 נקודות)

נסמן :
$$S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^2\times\left(0,\tfrac{3}{2}\right)\ \middle|\ z^2=3x^2+3y^2\right\}$$
$$S_2=\left(\mathbf{R}^2\times\left[\tfrac{3}{2},\infty\right)\right)\cap S\left((0,0,2);1\right)$$

הוכיחו שהקבוצה $S=S_1\cup S_2$ היא משטח חלק.

נפרק את הנק בS ל3 אופציות:

אופציה 1: $z>\frac{3}{2}$

נקבל $(x,y,z)\in S_2\cap(\mathbb{R}^2\times\left(\frac{3}{2},\infty\right))$:
נבנה את הפונ:

$$f_2:\mathbb{R}^2\times\left(\frac{3}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$$

$$f_2(x,y,z)=x^2+y^2+(z-2)^2$$

(המרחק ממרכז הספירה).
נקבל:

$$\triangledown f_2(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x & 2y & 2z-4\end{pmatrix}$$

מפני שהנגזרות החלקיות רציפות
נקבל כי לכל $(x,y,z)\in S_2$ מתקיים:

$$f_2(x,y,z)=1,\ \triangledown f_2(x,y,z)\neq 0$$

ונקבל שלכל $a\in S_2$:

$$S\cap\left(\mathbb{R}^2\times\left(\frac{3}{2},\infty\right)\right)=\{v|v\in\mathbb{R}^2\times\left(\frac{3}{2},\infty\right),f_2(v)=f_2(a)=1\}=S\cap(\mathbb{R}^2\times\left(\frac{3}{2},\infty\right))$$

אופציה 2: $0<z<\frac{3}{2}$

נקבל $(x,y,z)\in S_1$.
נגדיר פונ'

$$f_1:\mathbb{R}^2\times\left(0,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}$$

$$f_1(x,y,z)=3x^2+3y^2-z^2$$

נקבל כי מתקיים לכל $a\in S_1$ אם"ם ש $f(a)=0$. (לפי הגדרת S_1)
לכן נקבל כי לכל $a\in S_1$:

$$S_1=S_1\cap(\mathbb{R}^2\times\left(0,\frac{3}{2}\right))=\{v|v\in(\mathbb{R}^2\times\left(0,\frac{3}{2}\right)),f(v)=f(a)=0\}$$

אופציה 3: $z=\frac{3}{2}$

ניקח את הפונ':

$$f:\mathbb{R}^2\times(0,\infty)\to R$$

$$f(x,y,z)=\begin{cases}f_1(x,y,z)-1\text{ if }z\geq\frac{3}{2}\\ \frac{f_2(x,y,z)}{3}\text{ else}\end{cases}$$

נקבל:

$$\triangledown f(x,y,z)=\begin{cases}\triangledown f_1(x,y,z)\text{ if }z\geq\frac{3}{2}\\ \triangledown f_2(x,y,z)\text{ if }z<\frac{3}{2}\end{cases}$$

כלומר:

$$\triangledown f(x,y,z)=\begin{cases}(2x,2y,2z-4)\text{ if }z\geq\frac{3}{2}\\ (2x,2y,-\frac{2}{3}z)\text{ if }z<\frac{3}{2}\end{cases}$$

ונקבל:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2x, 2y, \begin{cases} (2z-4) \text{ if } \geq \frac{3}{2} \\ (-\frac{2}{3}z) \text{ if } < \frac{3}{2} \end{cases}\right)$$

נבדוק האם הנגזרות הרציפות (שמהן מורכב הגרדינאט רציף):
ידוע כי הפונ' $2x$ ו $2y$ רציפות. נסתכל על:

$$(z) \mapsto \begin{cases} (2z-4) \text{ if } \geq \frac{3}{2} \\ (-\frac{3}{2}z) \text{ if } < \frac{3}{2} \end{cases}$$

נבדוק האם הפונ' הנ"ל רציפה. נבדוק מהקורס חשבון אינפיניטסימלי 1:

$$\lim_{z \to \frac{3}{2}} \left((z) \mapsto \begin{cases} (2z-4) \text{ if } \geq \frac{3}{2} \\ (-\frac{2}{3}z) \text{ if } < \frac{3}{2} \end{cases}\right)$$

הערך הנ"ל קיים אם"ם מתקיים:

$$\lim_{z \to \frac{3}{2}^+} \left((z) \mapsto \begin{cases} (2z-4) \text{ if } \geq \frac{3}{2} \\ (-\frac{2}{3}z) \text{ if } < \frac{3}{2} \end{cases}\right) = \lim_{z \to \frac{3}{2}^-} \left((z) \mapsto \begin{cases} (2z-4) \text{ if } \geq \frac{3}{2} \\ (-\frac{3}{2}z) \text{ if } < \frac{3}{2} \end{cases}\right)$$

ונקבל:

$$\lim_{z \to \frac{3}{2}^+} (2z-4) = \lim_{z \to \frac{3}{2}^-} \left(-\frac{2}{3}z\right)$$

מהקורס חשבון אינפיניטסימלי 1, ומהרציפות של הביטויים האלה נקבל:

$$(2)\left(\frac{3}{2}\right) - 4 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$-1 = -1$$

קיבלנו פסוק אמת, לכן הגבול מוגדר, ולכן הפונ' רציפה כאשר $z = \frac{3}{2}$.
לכן כל הנגזרות החלקיות רציפות. לפי משפט 10.ד.3, נקבל כי f גזירה ברציפות בכל הנקודות כאשר $z = \frac{3}{2}$.
נקבל לכל $a \in S$:
לפי ההגדרה של S ושל f, ניתן להסיק כי:

$$S \cap (\mathbb{R}^2 \times (0,\infty)) = \{x | x \in (\mathbb{R}^2 \times (0,\infty)), f(x) = f(a) = 0\}$$

לכן, לפי משפט 12.ג.7, נקבל כי הקבוצה S היא משטח על חלק.
מש"ל.

שאלה 4

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי S יריעה חלקה d־ממדית ב־$\mathbf{R}^k$, בעלת שתי תכונות:

1. כל קרן שקודקודה ב־$0^{[k]}$ מכילה לכל היותר נקודה אחת של S.
2. לכל נקודה $a \in S$ המרחב המשיק בנקודה a ל־S אינו מכיל את $0^{[k]}$.

תהי S' איחוד כל הקרניים שקודקודן ב־$0^{[k]}$ שמכילות נקודה מ־S, לא כולל $0^{[k]}$ עצמה, דהיינו:

$S' = \bigcup_{a \in S} \{ta \mid t > 0\}$

הראו שאם $d = k - 1$ (כלומר S היא משטח־על) אז S' היא קבוצה פתוחה.

נגדיר:

$$S_A = \bigcup_{a \in A} \{ta \mid t > 0\}$$

נסתכל על S. נניח כי S משטח על.

יהי $s \in S$. לפי ההגדרה של S קיימת קבוצה פתוחה U ב $\mathbb{R}^k$ וקבוצה פתוחה Ω ב$\mathbb{R}^d$והומיאומורפיזם $h : \Omega \to S \cap U$ כאשר:

$$\rho(Jh_{h^{-1}(s)}) = d = k - 1$$

כלומר, המטריצה הזאת בעלת דרגה מלאה:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{k-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{k-1}} \end{pmatrix}$$

לפי סעיף 2 בנתונים, נקבל כי גם המטריצה הזאת בעלת דרגה מלאה (כי העמודות בת"ל):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{k-1}} & s_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{k-1}} & s_k \end{pmatrix}$$

נסתכל על הפונ':

$$h' : \Omega \times (0, \infty) \to S_{h(\Omega)}$$

כלומר:

$$h' : \Omega \times (0, \infty) \to S_{S \cap U}$$

כאשר:

$$h' : (x, t) \mapsto th(x)$$

ניתן להסיק לפי נתון (1), לפי ש h הומיאומורפיזם (פון רציפה), ומההגדרה של S_A, נקבל כי h' ורציפה גזירה והפיכה.
ונקבל כי

$$Dh'_{(x,t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{k-1}} & s_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{k-1}} & s_k \end{pmatrix}$$

לפי משפט הפונקצייה ההופכית, נקבל כי לכל $s \in S \cap U$ קיימת סביבה המכילה כדור פתוח B, כאשר $h'(B)$ קבוצה פתוחה. לכן $h'(\Omega \times (0,\infty))$ קבוצה פתוחה.

האיחוד של כל הקבוצות $h'(\Omega \times (0,\infty))$ לפי s הוא S' לפי ההגדרה של הפונ' והקבוצות הללו. איחוד של קבוצות פתוחות היא קבוצה פתוחה ולכן S' פתוחה.
מש"ל

שאלה 5

שאלה 5 (20 נקודות)

יהי $\alpha > 0$ ותהי $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ שמוגדרת על ידי: $(x,y,z) \mapsto xyz$

הראו של־ f יש ערך מזערי וערך מרבי בקבוצה

$$A = \left\{ (x,y,z) \in [0,\infty)^3 \;\middle|\; x \le \alpha y,\ x^6 + y^6 + z^6 \le 3 \right\}$$

ומצאו אותם ואת כל נקודות הקיצון של f בקבוצה זאת. (התוצאה תלויה במספר α.)

לפי 2.ד.25, נקבל כי A קבוצה סגורה. אראה כי היא חסומה.

$$x^6 + y^6 + z^6 \le 3$$

ונקבל:

$$x \le \sqrt[6]{3},\ y \le \sqrt[6]{3},\ z \le \sqrt[6]{3}$$

לכן הקבוצה חסומה.
ידוע כי

$$f : (x,y,z) \mapsto xyz$$

פונקצייה רציפה.
לכן נקבל כי קיים מינימום ומקסימום.
נפריד ל4 מקרים:

מקרה 1: $x^6 + y^6 + z^6 = 3, x = \alpha y$

נגדיר פונ:

$$\varphi : (x,y,z) \mapsto (x^6 + y^6 + z^6 \quad x - \alpha y)$$

נחשב את קבוצת הווקטורים:

$$\{\triangledown\varphi_1(x,y,z),\triangledown\varphi_2(x,y,z),\triangledown f(x,y,z)\}=$$

ונקבל:

$$\{(6x^5,6y^5,6z^5),(1,-\alpha,0),(zy,xz,xy)\}$$

נציב במטריצה:

$$\begin{vmatrix}6x^5 & 6y^5 & 6z^5\\ 1 & -\alpha & 0\\ zy & xz & xy\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}6x^5 & 6y^5 & 6z^5\\ 1 & -\alpha & 0\\ zy & xz & xy\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}6x^5 & 6y^5+\alpha 6x^5 & 6z^5\\ 1 & 0 & 0\\ zy & xz+\alpha zy & xy\end{vmatrix}=(6xy^6+\alpha 6x^6y)-(6xz^6+6\alpha yz^6)=$$

$$=6(xy^6+\alpha x^6y-(x+\alpha y)z^6)$$

נציב:

$$x=\alpha y$$

נקבל:

$$=6(\alpha y^7+\alpha^7y^7-(2\alpha y)z^6)=6(y^7(\alpha+\alpha^7)-2\alpha yz^6)$$

הדטרמיננטה הנ"ל שווה ל0 אם"ם:

$$z^6=y^6\frac{\alpha^7+\alpha}{2\alpha}$$

ונקבל:

$$x=\alpha y,z=y\sqrt[6]{\frac{\alpha^7+\alpha}{2\alpha}}$$

נבדוק מתי:

$$(\alpha y)^6+y^6+y^6\frac{\alpha^7+\alpha}{2\alpha}=3$$

ולכן:

$$y=\sqrt[6]{\frac{3}{\alpha^6+1+\frac{\alpha^7+\alpha}{2\alpha}}}=\sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6+1}}$$

ולכן $\left(\alpha\sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6+1}},\sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6+1}},1\right)$ נק קיצון לכל .

מקרה 2: $x^6+y^6+z^6=3, x<\alpha y$

ניקח:

$$\varphi:(x,y,z)\mapsto x^6+y^6+z^6$$

נקבל:

$$\nabla\varphi(x,y,z)=(6x^5\quad 6y^5\quad 6z^5),\nabla f(x,y,z)=(yz\quad xz\quad xy)$$

נראה מתי הוקטורים האלה ת"ל.
אם הם ת"ל, אזי קיים β כאשר:

$$(6x^5,6y^5,6z^5)+\beta(yz,xz,xy)=0$$

ונקבל:

$$6x^5=-\beta yz,\ 6y^5=-\beta xz,\ 6z^5=-\beta xy$$

ונקבל

$$\frac{6x^5}{yz}=\frac{6y^5}{xz}=\frac{6z^5}{xy}$$

ולכן:

$$x^6=y^6=z^6$$

לכן נקבל, מ $x^6+y^6+z^6=3$:

$$x=y=z=1$$

ונקבל שנקודה זו מתקיימת אם"ם $\alpha>1$.
ונקבל:
שהנק $(1,1,1)$ היא נק קיצון אםם $\alpha>1$.

מקרה 3: $x^6+y^6+z^6<3, x=\alpha y$

ניקח:

$$\varphi:(x,y,z)\mapsto x-\alpha y$$

$$\nabla\varphi(x,y,z)=(1,-\alpha,0)$$

$$\nabla f(x,y,z)=(yz,xz,xy)$$

נבדוק מתי הם ת"ל:
אם הם ת"ל, אזי קיים β כאשר:

$$(yz,xz,xy)=\beta(1,-\alpha,0)$$

ונציב $x=\alpha y$:

$$(yz,\alpha yz,\alpha y^2)=\beta(1,-\alpha,0)$$

ונקבל:

$$yz=\beta, \alpha yz=-\beta\alpha, \alpha y^2=0$$

לכן נקבל: $y=x=0$ וגם:

$$\beta=0$$

ולכל z.
לכן, נקבל שהנק $(0,0,z)$ היא נק קיצון לכל $0\leq z<\sqrt[6]{3}$.

מקרה 4 $x^6+y^6+z^6<3, x<\alpha y$

נראה מתי הגרדיאנט מתאפס:

$$\nabla f(x,y,z)=(yz,xz,xy)=0$$

ונקבל 3 אפשרויות:
אפשרות 1:

$$x=y=0, 0\leq z<\sqrt[6]{3}$$

אפשרות 2:

$$x=z=y=0$$

אפשרות 3:

$$x=z=0, 0\leq y<\sqrt[6]{3}$$

ולכן אלה גם נקודות קיצון.
לסיכום, נקבל:

$$\left(\alpha\sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6+1}}, \sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6+1}}, 1\right), (1,1,1), (0,0,a), (0,0,0), (0,a,0)$$

לכל $0\leq a<\sqrt[6]{3}$.
נמצא את המינימום והמקסימום. הוא בין הנקודות הנ"ל:

מקסימום:

כל נקודה עם 0 ערכה הוא 0. לכן הנק מקסימום תיהיה אםם $1<\alpha$:

$$f(1,1,1)=1$$

בנוסף, נקבל כי הנק $\left(\alpha\sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6+1}}, \sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6+1}}, 1\right)$ היא גם נק מקסימום ומקסימום מוחלט, אם"ם הנק הנ"ל לא מוגדרת, ונקבל:

$$f\left(\alpha\sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6+1}}, \sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6+1}}, 1\right)=\alpha\sqrt[3]{\frac{2}{a^6+1}}$$

מינימום:

כל נקודה שמכילה את 0 באחד האיברים שלה, היא נק' מינימום, היות וזה הערך המינימלי שהפונ' מוציאה, כי x, y, z אי שליליים.
מש"ל.