

20280

**משוואות דיפרנציאליות רגילות 1**  
**חוברת הקורס - חורף 2025 א**

כתבה: שיר סברוני

אוקטובר 2025 – סמסטר חורף

**פנימי – לא להפצה.**

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

## תוכן העניינים

1	אל הסטודנטים
2	לוח זמנים ופעילויות
3	התנאים לקבלת 3 נקודות זכות
3	פירוט המטלות ומשקליהן
5	ממ"ח 01
8	ממ"ן 11
10	ממ"ח 02
14	ממ"ן 12
16	ממ"ן 13
18	ממ"ן 14

חוברת זאת כוללת פרטים שיש להכיר, כדי לבצע את הנדרש ולסיים בהצלחה את לימוד הקורס משוואות דיפרנציאליות רגילות 1. פרטים חשובים נוספים כלולים בחוברת "השלמות לחוברת הקורס", שניתן לצפות בתוכנה באתר הקורס באינטרנט.<sup>1</sup>

**עם קבלת חומר הלימוד בקורס יש להתחיל בלימוד עצמי**, בקצב המותאם ללוח הזמנים שבהמשך חוברת זאת. בזמנים המומלצים בלוח הזמנים ללימוד כל יחידת לימוד כלול גם הזמן הנדרש לפתרון והגשת המטלה הקשורה אליה. חשוב לתכנן לוח זמנים אישי שיאפשר את לימוד החומר ופתרון והגשת המטלות במועדי ההגשה שנקבעו. מפגשי ההנחיה מתוכננים לפי לוח הזמנים וחשוב לעיין בחומר הלימוד המתאים לפני כל מפגש.

**אתר הקורס באינטרנט** מהווה ערוץ תקשורת עיקרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטיות וסטודנטים אחרים בקורס. זה המקום המתאים להעלות בו לדיון כל רעיון או שאלה בנושאי הלימוד.

**הודעות, עדכונים ותיקונים למטלות, אם יהיו כאלה, יתפרסמו באתר הקורס.**

אופי הקורס דורש **תרגול רב**. חשוב להקדיש זמן לתרגול חומר הלימוד על ידי פתרון מגוון בעיות. המטלות להגשה שבחוברת זאת כוללות מגוון שאלות מתאימות, אך אין די בהן. ספרי הלימוד כוללים שאלות רבות וחשוב לנסות לפתור אותן לפני קריאת פתרון שבספר. **באתר הקורס באינטרנט יש חומרי למידה נוספים.**

צוות הקורס מעוניין לעזור לך בלימודים. לכן, אם התעוררה בעיה או שאלה במהלך הלימוד, חשוב לא להסס ולפנות אלינו בהקדם. עומדות לרשותך דרכי ההתקשרות הבאות:

- דואר אלקטרוני למרכזת ההוראה בכתובת: [shirsi@openu.ac.il](mailto:shirsi@openu.ac.il)
  - טלפון למרכזת ההוראה בקורס, שיר סברוני, בימי ה בין השעות 14:30-12:30
  - טלפון למנחה בשעת ההנחיה הטלפונית המפורטת יחד עם לוח המפגשים.
  - פניה למנחה בדואר אלקטרוני.
  - פניה למנחה במפגש ההנחיה.
  - **שאלות -** לפניית בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאלתא. לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת בחינות בקורס.
- המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות.**

נאחל לכולנו סמסטר מהנה ומוצלח.

בברכה, צוות הקורס.

<sup>1</sup> פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס יש באתר שה"ם בכתובת <http://www.openu.ac.il/shoham>. מידע על שירותי הספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותך באתר הספרייה בכתובת <http://www.openu.ac.il/Library>.

**לוח זמנים ופעילויות (מס' קורס /א2025)**

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	תאריך אחרון להגשת הממ"ח	תאריך אחרון להגשת הממ"ן
1	01.11.2024-29.10.2024	כרך א		
2	08.11.2024-03.11.2024			
3	15.11.2024-10.11.2024			
4	22.11.2024-17.11.2024	כרך ב	ממ"ח 01 22.11.24	
5	29.11.2024-24.11.2024			ממ"ן 11 29.11.24
6	06.12.2024-01.12.2024			
7	13.12.2024-08.12.2024	כרך ג	ממ"ח 02 20.12.24	
8	20.12.2024-15.12.2024			ממ"ן 12 27.12.24
9	27.12.2024-22.12.2024 (ה-ו חנוכה)			
10	03.01.2025-29.12.2024 (א-ה חנוכה)	יחידה 8		
11	10.01.2025-05.01.2025			ממ"ן 13 17.1.25
12	17.01.2025-12.01.2025	יחידה 9		
13	24.01.2025-19.01.2025			
14	31.01.2025-26.01.2025			ממ"ן 14 31.1.25
15	03.02.2025-02.02.2025			

**מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד**

### התנאים לקבלת 3 נקודות זכות

- כדי לקבל 3 נקודות זכות בקורס זה עליך :
- א. להגיש מטלות במשקל של 10 נקודות לפחות.
- ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.
- ג. לקבל בציון הסופי של הקורס 60 לפחות.

### פירוט המטלות ומשקליהן

בקורס "מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות" ארבע מטלות מנחה ושלוש מטלות מחשב. בטבלה שלהלן מופיעה רשימת המטלות, היחידות שבהן עוסקות המטלות ומשקליהן.

המטלה	היחידות אליהן היא מתייחסת	משקל המטלה
ממ"ן 11	כרך א	4
ממ"ן 12	כרך ב	4
ממ"ן 13	כרך ג	6
ממ"ן 14	כרך ד	6
ממ"ח 01	כרך א	2
ממ"ח 02	כרך ב	2
סה"כ 24 נקודות		

חובה להגיש מטלות שמשקלן הכולל לפחות 10 נקודות .

## **הערות חשובות לתשומת לבכם!**

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

**עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.**

**אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית  
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.**

# מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20280 – מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות סמסטר: א2025  
 חומר הלימוד למטלה: כךך א משקל המטלה: 2 נקודות  
 מספר השאלות: 8 מועד אחרון להגשה: 22.11.24

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאלתא בכתובת [www.openu.ac.il/sheilta](http://www.openu.ac.il/sheilta)

## שאלה 1

הפתרון הכללי של המשוואה  $x^2 y' + y = 0$  הוא:

א. $y = Cxe^x$	ב. $y = Ce^x$	ג. $y = Ce^{\frac{1}{x}}$	ד. $y = Cxe^{-x}$
ה. אף תשובה אינה נכונה			

## שאלה 2

הפתרון הכללי של המשוואה  $y' = \frac{4y}{1-x^2}$  הוא:

א. $y(x) = C\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$	ב. $y(x) = C\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$	ג. $y(x) = C\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$	ד. $y(x) = C\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
ה. אף תשובה אינה נכונה			

## שאלה 3

$$\begin{cases} xy' - y = 2xe^{-\frac{y}{x}} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

פתרון בעיית ההתחלה

הוא:

א. $y = x \ln(e + 2 \ln x)$	ב. $y = \ln(e + 2 \ln x)$	ג. $y = x \ln(e + x \ln x)$
ד. $y = x \ln(e + x \ln x)$	ה. אף תשובה אינה נכונה	



#### שאלה 4

מצאו את פתרון בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} (2e^y - x)y' = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

א. $x = e^y - e^{-y}$	ב. $y = e^x - e^{-x}$	ג. $x = e^{2y} - e^{-2y}$
ד. $x = e^y + e^{-y} - 2$	ה. $x = \frac{2}{3}e^y - \frac{2}{3}e^{-2y}$	ו. אף תשובה אינה נכונה

#### שאלה 5

פתרו את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} (2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

א. $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = 0$	ב. $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = -1$
ג. $x^4 - 3x^2y^3 + y^2 = 0$	ד. בין א-ה יש יותר מתשובה נכונה אחת.

#### שאלה 6

הפתרון הכללי של המשוואה  $ydx + (\frac{e^x}{y} - 1)dy = 0$  הוא :

א. $-e^{-x} + \ln y  = c$	ב. $ye^{-x} - \ln y  = c$	ג. $-ye^{-x} + \ln y  = c$
ד. $-ye^{-x} + \ln y  = c$	ה. אף תשובה אינה נכונה	

#### שאלה 7

נסתכל במשוואה  $y' = f(y)$  כאשר  $f$  גזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}$ .

לכל אחת מהטענות הבאות בדקו אם היא נכונה :

1. אם  $u(x)$  הוא פתרון של המשוואה בקטע  $(a, b)$ , וקיימת נקודה  $x_0$  בקטע אשר

$u'(x_0) = 0$ , אז  $u(x)$  בהכרח קבועה בקטע.

2. אם הפונקציה  $f(x)$  חיובית לכל  $x$ , אז כל פתרון של המשוואה בקטע  $(a, b)$  עולה

ממש בקטע זה (כלומר  $(x_1 < x_2 \Rightarrow u(x_1) < u(x_2))$ ).

א. רק 1 נכון	ב. רק 2 נכון	ג. שניהם נכונים.	ד. שניהם לא נכונים
--------------	--------------	------------------	--------------------

## שאלה 8

נסתכל במשוואה דיפרנציאלית  $y' = f(x)y + g(x)$  כאשר  $f, g$  פונקציות רציפות בקטע  $(a, b)$  וקיימת נקודה  $x_0$  בקטע זה כך ש- $g(x_0) \neq 0$ . נניח ש- $u_1, u_2$  הם פתרונות של המשוואה בקטע וכי  $\beta, \alpha$  הם מספרים ממשיים כך ש- $\alpha u_1(x) + \beta u_2(x)$  גם הוא פתרון של המשוואה בקטע. מה ניתן להסיק?

א. אחד לפחות מבין $\beta, \alpha$ שווה ל-0	ב. $\alpha = 1 - \beta$	ג. $\alpha^2 + \beta^2 = 1$
ד. אם $u_1, u_2$ הם פתרונות, אז לכל $\beta, \alpha$ $\alpha u_1(x) + \beta u_2(x)$ הוא פתרון.		

▶▶▶ סוף המטלה

# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20280 – מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות סמסטר: 2025א  
 חומר הלימוד למטלה: כרך א משקל המטלה: 4 נקודות  
 מספר השאלות: 5 מועד אחרון להגשה: 29.11.24

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

## שאלה 1 (15 נקודות)

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה  $x^2 + y^2 = 2xyy'$  ב-3 דרכים:

- בעזרת צורה הומוגנית
- כמשוואה מדויקת
- בעזרת צורת ברנולי

## שאלה 2 (20 נקודות)

א. פתרו את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = e^{x+y} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

ומצאו את תחום ההגדרה של הפתרון.

ב. הראו שלבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' \sin x + y \cos x = 1 \\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

יש פתרון יחיד בקטע  $(0, \pi)$  ומצאו אותו. הראו שאין פתרון בשום קטע פתוח המכיל את  $\pi$ .  
 איך מתיישב הדבר עם משפט הקיום והיחידות?

## שאלה 3 (25 נקודות)

פתרו כל אחת מן המשוואות הבאות (גם פתרון סתום מתקבל).

א.  $(1+x^2)y^3 + x(1-y^2)y' = 0$

ב.  $x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy - y^3 = 0$

ג.  $(e^x \sin y - 2y \sin x)dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)dy = 0$

#### שאלה 4 (20 נקודות)

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה

(רמז: השתמשו בהצבה  $y^2 = z$ )

$$(x - y^2)dx + 2xy dy = 0$$

#### שאלה 5 (20 נקודות)

א. פתרו את המשוואה

$$x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

ב. פתרו את המשוואה

$$\sin y y' = \cos x (2 \cos y - \sin^2 x)$$

(רמז: הציבו  $v = \cos y$ )

ג. פתרו את המשוואה

$$y' = y^4 \cos x + y \tan x$$

סוף המטלה ►►►

## מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20280 – מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות סמסטר: 2025א  
 חומר הלימוד למטלה: כרך ב משקל המטלה: 2 נקודות  
 מספר השאלות: 10 מועד אחרון להגשה: 20.12.24

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאלתא בכתובת [www.openu.ac.il/sheilta](http://www.openu.ac.il/sheilta)

### שאלה 1

נתונה המשוואה  $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{a^2}{x^2})y = 0$  עבור  $x \neq 0$  ו-  $a$  קבוע.  
 יהיו  $y_1$  ו-  $y_2$  פתרונות של המשוואה הנתונה המקיימים את התנאים הבאים:  
 $y_1(1) = 3, \quad y_2(1) = -8.1, \quad y_1'(1) = -2, \quad y_2'(1) = 5.4$

סמנו את הנכונה מבין הטענות הבאות:

א. $y_1$ ו- $y_2$ תלויים לינארית ב- $(0, +\infty)$	ב. $y_1$ ו- $y_2$ אינם תלויים לינארית ב- $(0, +\infty)$
ג. אי אפשר לדעת אם $y_1$ ו- $y_2$ תלויים על סמך נקודה אחת.	ד. אף אחת מהתשובות אינה נכונה

### שאלה 2

פתרו את בעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} y'' y = (y')^2 \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$$

ומצאו את  $y(\ln 2)$ , כאשר  $y(x)$  הוא פתרון הבעיה:

א. $y(\ln 2) = 4$	ב. $y(\ln 2) = 2$	ג. $y(\ln 2) = 8$
ד. $y(\ln 2) = 1$	ה. אף אחת מהתשובות אינה נכונה	

### שאלה 3

פתרו את בעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} 2(y')^2 = y''(y-1) \\ y(1) = 2; y'(1) = -1 \end{cases}$$

ציינו מהו  $y(\frac{1}{2})$ , כאשר  $y(x)$  הוא פתרון הבעיה:

א. $y(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$	ב. $y(\frac{1}{2}) = \frac{5}{3}$	ג. $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
ד. $y(\frac{1}{2}) = 3$	ה. אף אחת מהתשובות אינה נכונה	

#### שאלה 4

לכל אחד מהמשפטים הבאים קבעו אם הוא נכון או לא:

- קיימת משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע הפתוח  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ , כך שהפונקציות  $\sin x, x$  הן פתרונות שלה בקטע זה.
- קיימת משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע הפתוח  $(0,1)$ , כך שהפונקציות  $x, x^2, x(x+2)$  הן פתרונות שלה בקטע זה.

א. רק משפט 1 נכון	ב. רק משפט 2 נכון
ג. שני המשפטים נכונים	ד. שני המשפטים אינם נכונים

#### שאלה 5

פתרו את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} 4y'' - 4y' + y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

אם  $y$  הוא הפתרון, מהו  $y(\ln 9)$ ?

א. 9	ב. 3	ג. $e^3$
ד. $\sqrt[3]{e}$	ה. אף אחת מהתשובות אינה נכונה	

#### שאלה 6

יהי  $y = y(x)$  פתרון של בעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 3\sin x + \cos x \\ y(0) = 0, y'(0) = -2 \end{cases}$$

מהו  $y(\frac{\pi}{2})$ ?

א. $y(\frac{\pi}{2}) = -e^\pi + 1$	ב. $y(\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi}$	ג. $y(\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi} + 1$
ד. $y(\frac{\pi}{2}) = -e^\pi$	ה. אף אחת מהתשובות אינה נכונה	

המשך המטלה בעמוד הבא

## שאלה 7

לכל אחד מן המשפטים הבאים קבעו אם הוא נכון או לא.

1. אם  $y_3, y_2, y_1$  הם פתרונות של משוואה לינארית אי-הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע  $I$ , אז  $W(y_1, y_2, y_3) = 0$  לכל  $x$  בקטע  $I$ .
2. אם  $y_4, y_3, y_2, y_1$  הם פתרונות של משוואה לינארית אי-הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע  $I$ , אז  $W(y_1 - y_4, y_2 - y_4, y_3 - y_4) = 0$  לכל  $x$  בקטע  $I$ .

א. רק משפט 1 נכון	ב. רק משפט 2 נכון
ג. שני המשפטים נכונים	ד. שני המשפטים אינם נכונים

## שאלה 8

פתרו את בעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 1 \\ y(0) = \frac{4}{3}, y'(0) = 3 \end{cases}$$

אם  $y$  הוא פתרון של בעיית ההתחלה, חשבו את  $y(\ln \sqrt[3]{2})$ .

א. $y(\ln \sqrt[3]{2}) = 1$	ב. $y(\ln \sqrt[3]{2}) = \frac{1}{3}$	ג. $y(\ln \sqrt[3]{2}) = \frac{2}{3}$	ד. $y(\ln \sqrt[3]{2}) = \frac{4}{3}$
ה. $y(\ln \sqrt[3]{2}) = \frac{7}{3}$	ו. $y(\ln \sqrt[3]{2}) = e^3 - \frac{1}{2}$	ז. אחת מהתשובות אינה נכונה	ח. אחת מהתשובות אינה נכונה

## שאלה 9

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה:  $x^2 y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0$  ב-  $(0, \infty)$ .

הפתרון הכללי הוא:

א. $c_1 e^x + c_2 x^{-1/2}$	ב. $c_1 x + c_2 x^{-1/2}$	ג. $c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1/2}$
ד. $c_1 x^{-1/2} + c_2 x$	ה. אחת מהתשובות אינה נכונה	

המשך המטלה בעמוד הבא

## שאלה 10

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית  $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$

ונתונים שני פתרונות שלה  $y_2 = xe^x, y_1 = x$  (בדקו שאכן אלה פתרונות של המשוואה).

לכל אחד משני הקטעים  $(-3, -1)$  ,  $(-1, 2)$  קבעו אם שני הפתרונות הללו הם פתרונות בלתי תלויים בקטע זה.

א. רק ב- $(-3, -1)$	ב. רק ב- $(-1, 2)$
ג. בשניהם	ד. בשניהם לא

▶▶▶ סוף המטלה



## מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20280 – מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות סמסטר: א2025  
 חומר הלימוד למטלה: כרך ב משקל המטלה: 4 נקודות  
 מספר השאלות: 4 מועד אחרון להגשה: 27.12.24

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

### שאלה 1 (25 נקודות)

א. הראו שלמשוואה  $y'' = 2x + y \cos^2 x$  יש שני פתרונות שונים שלגרפים שלהם יש נקודת חיתוך. הראו שבנקודת חיתוך כזו אין משיק משותף לשני הגרפים.  
 ב. בדקו אם קיימת משוואה מהצורה  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ , כאשר  $p, q$  הן פונקציות רציפות בקטע פתוח  $(a, b)$ , כך שהפונקציות  $\sin x, \cos x, x$  נמנות עם פתרונותיה בקטע זה.

### שאלה 2 (25 נקודות)

א. יהי  $f(x)$  פתרון המשוואה  $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$ , המקיים  $f(1) = 2$  ו-  $f'(1) = -1$ .  
 חשב את  $f(\frac{1}{2})$ . (רמז:  $y = x$  הוא פתרון של המשוואה).  
 ב. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה  $(x+1)xy'' + (x+2)y' - y = x$   
 אם ידוע שאחד הפתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה הוא פולינום.

### שאלה 3 (25 נקודות)

א. יהי  $y(x)$  פתרון לא טריביאלי של המשוואה  $y'' + p(x)y = 0$  ונניח ש-  $p(x)$  היא פונקציה רציפה ו-  $p(x) < 0$  ב-  $\mathbb{R}$ . הוכיחו כי  $y(x)$  מתאפס בנקודה אחת לכל היותר.  
 (רמז: אם  $y$  מתאפס בשתי נקודות שונות, אז  $y' \cdot y$  מתאפס בשתי נקודות שונות, ואז הנגזרת של  $y' \cdot y$  מתאפסת באיזושהי נקודה ביניהן וזה היה רמז דק כמו פיל).  
 ב. בדקו אם הפונקציות  $e^{x^2}, x$  הן פתרונות של משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים: (i) בקטע  $(0, 1)$ , (ii) בקטע  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

### שאלה 4 (25 נקודות)

א. פתרו את המשוואה  $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$

$$y'' + y = x \sin x$$

ב. פתרו את המשוואה

▶▶▶ סוף המטלה

# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס : 20280 – מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות סמסטר : 2025א  
 חומר הלימוד למטלה : כרך ג משקל המטלה : 6 נקודות  
 מספר השאלות : 5 מועד אחרון להגשה : 17.1.25

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

## שאלה 1 (20 נקודות)

א. נתונה מערכת משוואות

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - xy^2 \\ \frac{dy}{dt} = -x - y + x^2y \end{cases}$$

ונתונה הפונקציה

$$u(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \ln|xy - 1|$$

הוכיחו שלכל פתרון  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  של המערכת המקיים  $x(t)y(t) \neq 1$ , קיים קבוע  $C$ , כך ש-

$$u(x(t), y(t)) = C \quad \text{לכל } t \text{ ממשי.}$$

ב. הוכיחו שלא קיימת מערכת משוואות מהצורה

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

כאשר  $A$  מטריצה  $2 \times 2$  בעלת רכיבים רציפים ב-  $R$  כך שהווקטורים

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

הם פתרונות שלה.

## שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y - 7e^{-t} - 3 \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y - 1 \end{cases}$$

מצאו את כל הפתרונות החסומים בקטע  $[a, +\infty)$ , עבור  $a$  ממשי.

## שאלה 3 (20 נקודות)

פתרו את מערכת המשוואות

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 5t \\ 8e^t \end{pmatrix}$$

בשתי שיטות לפי בחירתכם.

## שאלה 4 (20 נקודות)

א. פתרו את המערכת

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$$

ב. פתרו את המערכת  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  בהינתן  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

## שאלה 5 (20 נקודות)

פתרו את המערכת המשוואות

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2}{t}x + 3y + 1 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^2}x + \frac{3}{t}y + t \end{cases}$$

▶▶▶ סוף המטלה

# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס : 20280 – מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות סמסטר : 2025א  
 חומר הלימוד למטלה : יחידות 8,9 משקל המטלה : 6 נקודות  
 מספר השאלות : 5 מועד אחרון להגשה : 31.1.25

**קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")**

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

## שאלה 1 (20 נקודות)

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה ובעלת נגזרת רציפה למקוטעין בקטע  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .  
 כיצד יש להרחיב את  $f$  לקטע  $[-\pi, \pi]$  כך שטור פורייה של הפונקציה המורחבת יהיה מהצורה

$$\text{הבאה : } \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin(2n-1)x ?$$

ב. נתונה פונקציה  $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$  בקטע  $[0, 2\pi]$ . מצאו את הפיתוח שלה לטור סינוסים ומצאו את סכמו של הטור בקטע  $[0, 2\pi]$ . (הבחן בין הקצוות לנקודות הפנימיות).

## שאלה 2 (20 נקודות)

א. תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה ברציפות ב-  $(-\infty, \infty)$  ומחזורית (בעלת מחזור  $2\pi$ ). הוכיחו כי אם לכל

$$n \text{ טבעי } \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = 0 \text{ אזי } f \text{ פונקציה זוגית.}$$

ב. מצאו את סכום הטור

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

7מז : פתחו את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

לטור פורייה בקטע  $(-\pi, \pi)$ .

### שאלה 3 (20 נקודות)

א. פתחו את הפונקציה  $f(x) = e^{ax}$  לטור פורייה בקטע  $(0, \pi)$  על-ידי הרחבה לפונקציה אי-זוגית.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n e - 1)n}{1 + n^2 \pi^2} \sin n \frac{\pi}{4}$$

בעזרת הפיתוח שמצאת מצא את סכום הטור

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -3 \leq x \leq -1 \\ 1 & -1 < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x < 3 \end{cases}$$

ב. פתחו לטור פורייה את הפונקציה ומצא את סכומה של הטור בקטע  $[-3, 3]$ .

### שאלה 4 (10 נקודות)

מצאו את הערכים העצמיים ופונקציות עצמיות מתאימות לבעיית השפה

$$\begin{cases} y'' + 4y' + (4 + 9\lambda)y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

### שאלה 5 (20 נקודות)

מצאו את הערכים העצמיים ופונקציות עצמיות מתאימות לבעיית השפה

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \\ y(1) = y(e) = 0 \end{cases} \quad 1 < x < e$$

מצאו ביחס לאיזו פונקציית משקל פונקציות עצמיות, השייכות לערכים עצמיים שונים, אורתוגונליות בקטע  $[1, e]$ .

### שאלה 6 (10 נקודות)

מצאו את הערכים העצמיים ופונקציות עצמיות מתאימות לבעיית השפה

הבאה בקטע  $[0, 1]$  :

$$\begin{cases} y'' - 6y' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

ביחס לאיזו פונקציית משקל כל שני פתרונות, השייכים לערכים עצמיים שונים, אורתוגונליים בקטע?

►►► סוף המטלה