行列式

1. 逆序数

1.1 逆序数的定义

对于 n 个不同的元素，一般规定按自然数从大到小为标准次序（例如 12345），每有两个元素先后次序不同于标准次序时，即为有 1 个**逆序**。一个排列中所有逆序总数叫做这个排列的**逆序数**。

奇排列：逆序数为奇数的排列。

偶排列：逆序数为偶数的排列。

> 例 1：求排列 32415 的逆序数。
>
> 解：逆序数 $t=4$
>
> 分别为 $32, 31, 21, 41$

1.2 逆序数的性质

定理 1 一个排列中任意两个元素对换，排列改变奇偶性。

> 简单证明：
>
> 首先考虑元素 a 和相邻元素 b 对换的情况。此时可以将没有没有移动的剩余部分看成一个整体，这个整体部分对于 a 和 b 的相对位置没有发生改变，自然逆序也不会发生变化。而 a 和 b 的对换会使得排列的逆序数 $+1$ 或 -1，所以奇偶性改变。
>
> 然后考虑元素 a 和排列中相距 n 个元素的元素 b 对换的一般情况。那么 a 经过 n 次相邻对换可以到元素 b 的位置，而 b 再经过 $n+1$ 次相邻对换可以到元素 a 原本的位置。总共经过 $2n+1$ 次相邻对换所以奇偶性改变。
>
> 也可以用我们刚刚提到的思考方式，假设 a 在 b 前方，那么 a 前方和 b 后方的元素对于 a 和 b 的相对位置都没有发生变化，只需要考虑 a 和 b 中间的元素，将它们看成一个整体 c。假设 c 总共包含 n 个元素，a 与 c 之间的逆序数为 x， b 与 c 之间的逆序数为 y。a 和 b 对换后，a 与 c 之间的逆序数变为 $n-x$， b 与 c 之间的逆序数变为 $n-y$，a 和 b 对于 c 的逆序数从 $x+y$ 变为 $2n-(x+y)$，即 a 和 b 对于 c 的逆序奇偶性没有发生变化，而 a 和 b 位置的前后改变却会给整个排列的逆序数带来 $+1$ 或 -1 的变化，所以排列的奇偶性会改变。

推论　奇排列变成标准排列需要奇数次对换。偶排列变成标准排列需要偶数次对换。

> 简单证明：将排列中得 t 个逆序分别对换后即为标准排列。

2. 行列式

2.1 行列式的定义

$n \times n$ 的矩阵的行列式被称为 $\boldsymbol{n}$ **阶行列式**，记作：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

对于矩阵 $A=(a_{ij})$，D 简记作 $\det(A)$ [1] 或 $\det(a_{ij})$。

行列式 D 的计算公式为：

$$D=\sum(-1)^t\, a_{1\,p_1}\, a_{2\,p_2}\,\dots\, a_{n\,p_n} \tag{1}$$

其中 $p_1\,p_2\dots p_n$ 为自然数 $1,2,\dots,n$ 的一个排列。t 为这个排列的逆序数。D 则是这 $n\,!$ 项的代数和。

> 例 2：求 3 阶行列式
>
> $$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$
>
> 方法一：行列式公式
>
> 根据公式 (1) 得到 $D=\sum(-1)^t\, a_{1\,p_1}\, a_{2\,p_2}\, a_{3\,p_3}$
>
> 其中 $p_1\,p_2\,p_3$ 共有 6 中组合，分别是：
>
> 偶排列：$a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$，$a_{12}\,a_{23}\,a_{31}$，$a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$
>
> 奇排列： $a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$，$a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$，$a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$
>
> 所以行列式
> $D=a_{11}\,a_{22}\,a_{33}+a_{12}\,a_{23}\,a_{31}+a_{13}\,a_{21}\,a_{32}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$
>
> 方法二：**对角线法则**
>
> $$\text{行列式}=\text{主对角线}(\searrow)\text{元素积之和}-\text{副对角线}(\swarrow)\text{元素积之和}$$
>
> $D=a_{11}\,a_{22}\,a_{33}+a_{12}\,a_{23}\,a_{31}+a_{13}\,a_{21}\,a_{32}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$

2.2 行列式性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等。

$$|A^T|=|A|$$

性质 2 互换行列式两行(列)，行列式变号。

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列。交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论　如果行列式有两行(列)完全相同，则行列式等于0。

性质 3 行列式中的某一行同乘常数 k，行列式变为 k 倍。

第 i 行（或列）乘 k，记作 $r_i \times k$（或$c_i \times k$）。

推论　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提取到行列式外。

第 i 行（或列）提取 k，记作 $r_i \div k$（或$c_i \times k$）。

并且可以得到

$$|\boldsymbol{\lambda A}| = \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{A}|$$

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零。

性质 5 可以将行列式的按某一列(行)，拆成两数之和展开行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

若 n 阶行列式每个元素都表示成两数之和，则它可分解成 2^n 个行列式。

性质6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上，行列式不变。

将数 k 乘第 j 列加到第 i 列上，记作 $\boldsymbol{r_i + kr_j}$ （次序不可调换，加到谁上谁放前面）

性质7

对于任意 n 阶方阵 A 和 B 都有

$$|AB| = |BA| = |A|\,|B|$$

3. 余子式

3.1 余子式的定义

在 n 阶行列式中，把 (i,j) 元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 a_{ij} 的**余子式**，记作 $\boldsymbol{M_{ij}}$.

$$\boldsymbol{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}} \tag{3}$$

叫做 a_{ij} 的**代数余子式**，记作 $\boldsymbol{A_{ij}}$.

> 例如：
>
> 对于矩阵 $A = a_{ij}$
>
> $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$
>
> a_{32} 的余子式和代数余子式分别是

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$
$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}.$$

3.2 拉普拉斯展开（按行or列展开）

行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

按第 i 行展开:

$$\boldsymbol{D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)} \tag{4}$$

按第 j 列展开:

$$\boldsymbol{D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n)} \tag{5}$$

推论 1 上三角矩阵和下三角矩阵的行列式都等于对角矩阵的行列式。

对于对角矩阵 $\operatorname{diag}(\lambda_i)$，其行列式 $\det(\operatorname{diag}(\lambda_i))=\prod\lambda_i$ 即:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{6}$$

对于除副对角线外其余元素都为 0 的矩阵，其行列式为:

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \vdots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{7}$$

> 简单证明:
>
> 对角行列按行或按列依次展开即可。
>
> 除副对角线外其余元素都为 0 的矩阵则需要在此基础上算出其逆序数来判断符号。而逆序数则是从 1 加到 $(n-1)$ 的和，用等差数列就可以轻松算出等于 $\frac{n(n-1)}{2}$ 。即当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时为偶排列，当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时为奇排列。

> 例 3：求 $2n$ 阶行列式
>
> $$D_{2n}=\underbrace{\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & a & & & b & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & c & & & d & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}}_{2n}$$
>
> 解:
>
> 将其化成上三角或者下三角矩阵即可。

令 $k=\frac{b}{d}$，对于每个正整数 $i\in[1,n]$，作运算 r_i-kr_{2n+1-i} 得到

$$D_{2n}=\underbrace{\begin{vmatrix} a-kc & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a-kc & & & \\ & & c & d & & \\ & c & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}}_{2n}$$

根据式 (6) 可得，$D_{2n}=(a-kc)^n\times d^n=(ad-bc)^n$

推论 2 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零。

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j, \\ a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j. \end{aligned} \tag{8}$$

简单证明：

将行列式的第 i 行换成第 j 行后再按第 j 行展开即可。相当于展开了一个有相同行元素的行列式，根据 2.2 中性质 2 的推论可得这个行列式的值为 0 。

类似地，用 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 依次代替行列式 $\det(a_{ij})$ 按第 i 行展开的展开式中的 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+\cdots+b_nA_{in} \tag{9}$$

类似地，用 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 依次代替行列式 $\det(a_{ij})$ 按第 j 行展开的展开式中的 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj} \tag{10}$$

例 4： D 的余子式 记作M_{ij}，代数余子式记作 A_{ij}。求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 和 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

解：

根据式 (9)，用 $[1,1,1,1]$ 代替第一行可得：

$$
\begin{aligned}
D^* &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \\
&= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \\
&= A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} \\
\therefore \quad & A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = 4
\end{aligned}
$$

根据式 (10) 可得，$M_{11} + M_{21} + M_{31} + M_{41} = A_{11} - A_{21} + A_{31} - A_{41}$.

$$
\therefore M_{11} + M_{21} + M_{31} + M_{41} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0
$$

3.3 范德蒙德行列式 Vandermonde matrix

$$
D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j) \tag{11}
$$

4. 克拉默法则 Cramer's Rule

4.2 克拉默法则定义

如果线性方程组的**系数行列式**不等于零，那么方程组有惟一解。其中 $D_j(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是把系数行式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,
$$

$$
x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},
$$

4.3 克拉默法则推论

定理 2 如果线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$，则方程组一定有解，且解是惟一的。

逆定理　如果线性方程组无解或有两个以上不同的解，则它的系数行列式必为零。

定理 3 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$，则齐次线性方程组没有非零解。

线性方程组右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为 0 时，线性方程组叫做**非齐次线性方程组**，当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为 0 时，线性方程组叫做**齐次线性方程组**。

定理 3 说明系数行列式 $\boldsymbol{D = 0}$ 是齐次线性方程组**有非零解**的充分必要条件。

逆定理　如果齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式必为零。

---

1. 此处的 $\det$ 是 Determinant 的简写。↩