分块矩阵

1. 分块矩阵

1.1 分块矩阵的定义

对于行数和列数较高并且有一定规律的矩阵，可以使用**分块法**将其分为小矩阵运算。每一个小矩阵称为**子块**。以子块为元素的矩阵在形式上被称为**分块矩阵**。

> 例如：
>
> 3×4 的矩阵 A
>
> $$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$$
>
> 分成子块的方法有很多，比如：
>
> (i)
>
> $$\left(\begin{array}{cc:cc}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\\hdashline a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{array}\right)$$
>
> 此时 A 可以记为[1]
>
> $$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$$
>
> 其中
>
> $$A_{11}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix}a_{13}&a_{14}\\a_{23}&a_{24}\end{pmatrix},\quad A_{21}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}\end{pmatrix},\quad A_{22}=\begin{pmatrix}a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$$
>
> (ii)
>
> $$\left(\begin{array}{c:cc:c}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\\hdashline a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{array}\right)$$
>
> (iii)
>
> $$\left(\begin{array}{c:c:c:c}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{array}\right)$$

1.2 分块矩阵的运算律

(i) 加法律

> 只要能格子对上就能相加。

若矩阵 A 和 B 的行数相同，列数相同，并且采用了同样的分法进行分块（即子块的行数相同，列数也相同）

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{m1} & \cdots & A_{mn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{m1} & \cdots & B_{mn}\end{pmatrix}$$

则有

$$A+B=\begin{pmatrix}A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1n}+B_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{m1}+B_{m1} & \cdots & A_{mn}+B_{mn}\end{pmatrix}$$

(ii) 数乘运算律

> 和矩阵数乘一样。

若 A 为分块矩阵，λ 为常数，则有

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda A_{m1} & \cdots & \lambda A_{mn}\end{pmatrix}$$

(iii) 乘法律

> 只要行和列能对上就能相乘。

只要 A 的列数等于 B 的行数，A 子块的列数也分别等于 B 对应子块的行数（即 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$ 的行数）

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{st}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{t1} & \cdots & B_{tr}\end{pmatrix}$$

那么就有

$$AB=\begin{pmatrix}C_{11} & \cdots & C_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ C_{s1} & \cdots & C_{sr}\end{pmatrix}$$

其中

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\quad (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)$$

(iv) **分块矩阵的转置**

> 每个子块小矩阵也要转置!

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{m1} & \cdots & A_{mn}\end{pmatrix}\Longleftrightarrow A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T & \cdots & A_{m1}^T\\ \vdots & & \vdots\\ A_{1n}^T & \cdots & A_{mn}^T\end{pmatrix}$$

1.3 分块对角矩阵

1.3.1 分块对角矩阵的定义

若 n 阶方阵 A 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且对角线上的子块都是方阵，即

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & & O\\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s\end{pmatrix}$$

那么称 A 为**分块对角矩阵**。

1.3.2 分块对角矩阵的性质

(i) **行列式**

$$|A|=|A_1|\,|A_2|\cdots|A_n|$$

(ii) **逆运算**

若 $|A_i|\neq 0(i=1,2,\cdots,s)$，则 $|A|\neq 0$，并有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & & & O\\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1}\end{pmatrix}$$

1.4 分块矩阵的行列式[2]

分块矩阵的行列式在一般情况不满足矩阵的行列式。这里简单讨论 2 阶分块矩阵的行列式。

1.4.1 一般情况下

(i) **若三角阵的 A 和 D 都是方阵**

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ B & D \end{vmatrix} = |A|\,|D|$$

(ii) **若 A 可逆**

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\,|D - CA^{-1}B|$$

(iii) **若 D 可逆**

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D|\,|A - CD^{-1}B|$$

> 推导：
>
> $$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A|\,|D - CA^{-1}B|$$

1.4.2 当子块 A, B, C, D 都是 n 阶方阵时

(i) **若其中一个矩阵是零矩阵，则**

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - BC|$$

(ii) **若 $A = D, B = C$，则**

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B|\,|A - B|$$

(iii) **当其中两项可交换时：**

(1) 若 C 与 A 可交换（即 $AC = CA$），则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$

(2) 若 C 与 D 可交换（即 $CD = DC$），则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - BC|$$

(3) 若 B 与 D 可交换（即 $BD = DB$），则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |DA - BC|$$

(4) 若 A 与 B 可交换（即 $AB = BA$），则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |DA - CB|$$

---

1. 本章节中出现的所有 A_{ij} 均为分块矩阵的子块而非代数余子式。↩
2. 参考分塊矩陣的行列式 ↩