# 矩阵的秩

## 1. 子式

### 定义

在 $m \times n$ 矩阵 $A$ 中，任取 $k$ 行与 $k$ 列 $(k \leqslant m,\ k \leqslant n)$，这 $k^2$ 个元素按照原次序所组成行列式就称为矩阵 $A$ 的 **$k$ 阶子式。**

$m \times n$ 矩阵 $A$ 的 $k$ 阶子式共有 $\mathrm{C}_m^k \cdot \mathrm{C}_n^k$ 个。

> 因为可以间隔多行任取所以跟余子式不一样。

## 2. 秩

### 2.1 秩的定义

$r$ 阶子式 $D$ 不等于0，$r+1$ 阶子式全都为 $0$ 的矩阵 $A$ 的**秩**为 $r$，记作 $R(A)$.
其中，$D$ 称为矩阵 $A$ 的最**高阶非零子式。**

> 换句话说就是，当你能找出一个 $r$ 阶子式不为 $0$ 时，矩阵 $A$ 的秩至少为 $r$.
>
> 用来证明某个矩阵满秩或者秩比较高的时候用子式比较容易，但是如果矩阵的秩很低，需要把所有高阶子式都计算一遍得到 $0$ 确比较麻烦。

对于 $n$ 阶矩阵 $A$，当 $R(A)=n$ 时，矩阵 $A$ 称为**满秩矩阵**，否则称为**降秩矩阵。**

当矩阵的秩等于它的列数时，这样的矩阵被称为**列满秩矩阵。**

### 推论

$$R(A^T)=R(A)$$

$$0 \leqslant R(A_{m\times n}) \leqslant \min(m,n)$$

> 秩的定义是由子式来的，子式的本质就是行列式，而转置不会改变行列式的值，所以原本该是 $0$ 的子式还是 $0$，原本不是 $0$ 的子式也不会因为转置变成 $0$，所以秩也不会改变。

### 2.2 秩的性质

#### 定理 1

$$A \sim B \iff R(A)=R(B)$$

**推论**

若存在可逆矩阵 $P, Q$，使得 $PAQ = B$，那么 $A$ 与 $B$ 的秩相等。

$$\exists P \in \mathrm{GL}(m),\, Q \in \mathrm{GL}(n),\, \text{s.t. } PAQ = B \iff R(A) = R(B)$$

## 性质

### 性质 1

$$\max(\, R(A), R(B)\,) \leqslant R(A, B) \leqslant R(A) + R(B)$$

特别地，当 $B = b$ 为非零列向量时，有

$$R(A) \leqslant R(A, b) \leqslant R(A) + 1.$$

> 这性质常用于讨论线性方程组的解。
>
> 理解：把同一空间中的两组列向量拼在一起后所能张成的空间的维度肯定大于等于单独一组列向量所张成的空间，肯定小于等于两组列向量单独张成的空间的维度的和（因为两组列向量中可能有重合的维度，如果没有重合那就是等于，有重合就是小于）。

### 性质 2

$$R(A + B) \leqslant R(A) + R(B)$$

> 证明：
>
> 对矩阵 $(A + B, B)$ 作变换 $c_i - c_{n+i}\ (i = 1, \cdots, n)$，可得
>
> $$(A + B, B) \overset{c}{\sim} (A, B)$$
>
> 根据性质 1 可得
>
> $$R(A + B, B) = R(A, B) \leqslant R(A, B) \leqslant R(A) + R(B)$$

### 性质 3

$$R(AB) \leqslant \min(\, R(A), R(B)\,)$$

### 性质 4

$$A_{m \times n} B_{n \times l} = O \iff R(A) + R(B) \leqslant n$$

**推论**

$$A_{m \times n} B_{n \times l} = C,\, R(A) = n \iff R(B) = R(C)$$

> 简单证明：
>
> $$R(A) = n,\, C = AB \implies B \overset{r}{\sim} C \implies R(B) = R(C)$$

**性质 $5$ 矩阵乘法的消去律**

设 $AB=O$，若 $A$ 为列满秩矩阵，则 $B=O$.

## 2.3 秩的理解

所谓“秩”在我眼中就是基底的数量，即列向量所能张成空间的维度，所以秩也称为**列空间维度**。

行数代表列所在空间的维度，列数则代表向量的个数。比如一个 $2 \times 4$ 的矩阵就代表了在 $2$ 维空间中的 $4$ 个向量，这 $4$ 个向量无论怎么排列都在 $2$ 维空间这个平面中，所以列向量能张成的空间的最高维度就是 $2$，也就是秩最高为 $2$。特别地，当这 $4$ 个向量都在一条直线上时，它们所能张成的空间的维度为 $1$（不考虑零向量的特殊情况）。

再比如，一个 $3 \times 2$ 的矩阵就代表 $3$ 维空间中的两个向量，根据两条直线确定一个平面，所以它们所张成的维度最高为 $2$ 维平面。