线性方程组

1. 线性方程组

1.1 定义

有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

由矩阵乘法的定义可以写成以向量 x 为**未知元**，向量 b 为已知元的的向量方程

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

其中，矩阵 A 称为**系数矩阵**，将 A 与 b 拼在一起后得到的矩阵 (A, b) 称为**增广矩阵**（也可以写作 $(A \mid b)$ ），它的解称为方程组的**解向量**，一般记作 $\vec{\xi}$。

当线性方程组有解时，就称它是**相容**的，无解就称它是**不相容**的。

1.2 性质

1.2.1 秩与解的关系

定理 1

无解的充要条件是 $R(A) < R(A, b)$.

定理 2

有解的充要条件是 $R(A) = R(A, b)$.

有唯一解的充要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$.

有无穷多解的充要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$.

> 这里线性方程组的解的自由度 c 可以看作是 $c = n - R$. 这里的 R 就等于 $R(A)$ 和 $R(A, b)$，所以只有当它们相等时讨论解才有意义。这里的自由度可以理解为可以任取值的未知量的数量，比如当自由度为 2 时，只有 x_1 和 x_2 可以任取值，其它未知量都是根据这两个变量的值来确定的。而当自由度不为 0 时，只要有一个未知量可以任取值，解就具有无穷多个了。

定理 3

将定理 2 推广到矩阵范围，矩阵方程 $AX=B$ 有解的充要条件是 $R(A)=R(A,B)$.

> 将矩阵 X 和 B 拆分成多个向量即可，即
>
> $$X=(x_1,x_2,\cdots,x_l),\quad B=(b_1,b_2,\cdots,b_l)$$
>
> 矩阵方程 $AX=B$ 就等价于 l 个向量方程，即
>
> $$Ax_i=b_i\,(i=1,2,\cdots,l)$$
>
> 剩下的就跟定理 2 一样了。

定理 4

n 元**齐次**线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $R(A)<n$.

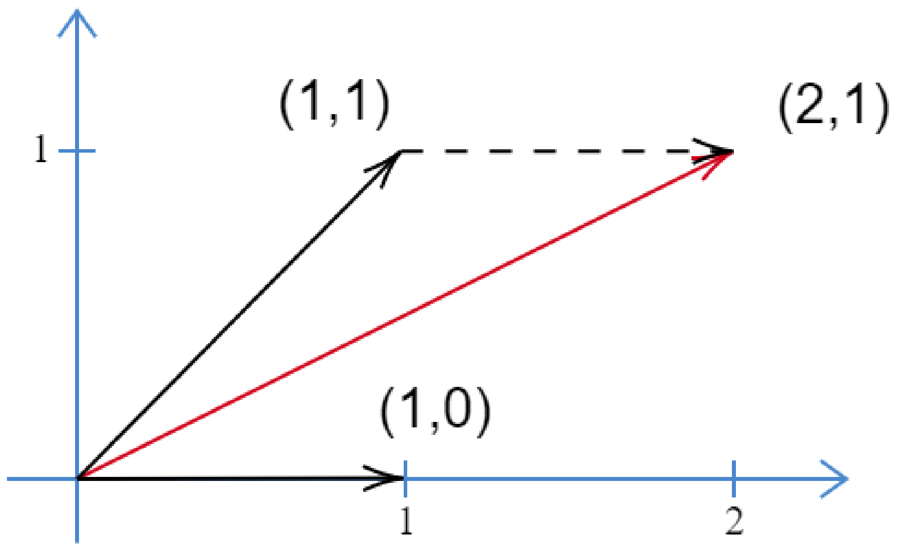
> 当 $R(A)=n$ 时仅有唯一解 $\vec{x}=\vec{0}$.

1.3 线性方程组的本质理解

将系数矩阵 A 看作是一个线性变换，那么解线性方程组的过程就相当于在求什么样的未知向量 x 经过 A 变换后会落在向量 b 的位置。其实只要将向量 b 经过 A 的逆变换后就可以得到这个向量的坐标了，即 $x=A^{-1}b$. 不过前提就得是矩阵 A 可逆。比如：假设 A 是一个逆时针旋转 θ 的变换，那么只要将向量 b 顺时针旋转 θ 就可以轻松求出向量 x.

另一种理解方式是将线性方程组 $Ax=b$ 看作 $Ax=Eb$. 其几何意义就是：一个向量在自然基底中的坐标为 b，那么这个向量在 A 基底中的坐标 x 就是我们要求的值了。

> 例如：
>
> 下图就表示了，在基底 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 中的一个红色向量 b 在自然基底中的坐标是 $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$。对于这个向量，可以一眼看出 $b=1\cdot a_1+2\cdot a_2$，即 b 在基底 A 中的坐标是 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$。这就对应了线性方程组的解，即
>
> $$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\implies x=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$



通过这种方式我们就可以轻松地看出系数矩阵的秩与方程组解的关系。因为秩即为基底的数量，也就是列向量张成的空间的维度，所以只有当 (A, b) 和 A 的维度相等时才能有解。而当 A 的维度小于其所在空间的维度时，解就有无穷多个（例如：二维平面中的投影对应了三维空间中无数个切面，无法确切地求出是哪个切面）。

2. 线性方程组的解空间

2.1 定义

线性方程组 $A\vec{x} = b$ 的所有**解向量**所构成的向量空间称为它的**解空间**，一般记作 S。

3. 齐次线性方程组的解法

3.1 齐次线性方程组的解的性质

性质 1

若 $\vec{x} = \vec{\xi}_1, \vec{x} = \vec{\xi}_2$ 是方程组 $A\vec{x} = 0$ 的解，则 $\vec{x} = \vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2$ 也是方程组的解。

> 证：
>
> $$A(\vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2) = 0$$

性质 2

若 $\vec{x}=\vec{\xi}$ 是方程组 $A\vec{x}=0$ 的解，k 为实数，则 $k\vec{\xi}$ 也是方程组的解。

3.2 解法

要求齐次线性方程组的解，只需要求出解空间 S 的**最大无关组** $S_0=(\vec{\xi_1},\vec{\xi_2},\cdots,\vec{\xi_t})$，那么齐次线性方程组的任一解都可以用 S_0 来表示为

$$\vec{x}=k_1\vec{\xi_1}+k_2\vec{\xi_2}+\cdots+k_t\vec{\xi_t})$$

上式称为齐次线性方程组的**通解**，最大无关组 S_0 称为这个齐次线性方程组的**基础解系。**

> 换句话说：
>
> 基础解系就是解空间的基底，求通解只需要找到一组基底即可。

具体解法：

假设齐次线性方程组 $Ax=b$ 的秩为 r，将 A 化为行最简形得

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

从中可以得到对应关系

$$\begin{cases}x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n,\end{cases}$$

把 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 看作可自由取值的自由未知数，并依次令它们等于 $c_1,\cdots,c_n-r$ 可得到通解

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\\ x_{r+1}\\ x_{r+2}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-b_{11}\\ \vdots\\ -b_{r1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-b_{12}\\ \vdots\\ -b_{r2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\cdots+c_{n-r}\begin{pmatrix}-b_{1,n-r}\\ \vdots\\ -b_{r,n-r}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

记作

$$\vec{x}=c_1\vec{\xi}_1+c_2\vec{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}$$

可得 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$ 即是齐次线性方程组的**基础解系**，其中

$$
\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
$$

4. 秩零度定理

若矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $R(A) = r$，则 n 元齐次线性方程组 $A\vec{x} = 0$ 的解空间 S 的秩 $R(S) = n - r$.

5. 非齐次线性方程组的解法

5.1 非齐次线性方程组的解的性质

性质 3

若 $\vec{x} = \vec{\eta}_1, \vec{x} = \vec{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $A\vec{x} = b$ 的解，则 $\vec{x} = \vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2$ 为对应齐次线性方程组 $A\vec{x} = 0$ 的解。

> 证明：
>
> $$A(\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2) = A\vec{\eta}_1 - A\vec{\eta}_2 = 0$$

性质 4

若 $\vec{x} = \vec{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $A\vec{x} = b$ 的解，$\vec{x} = \vec{\xi}$ 是齐次线性方程组 $A\vec{x} = 0$ 的解，那么 $\vec{x} = \vec{\xi} + \vec{\eta}$ 仍然是非齐次线性方程组 $A\vec{x} = b$ 的解。

> 证明：
>
> $$A(\vec{\xi} + \vec{\eta}) = A\vec{\xi} + A\vec{\eta} = 0 + b = b$$

5.2 解法

由性质 3 可知，只需要求得非齐次线性方程组 $A\vec{x} = b$ 的一个解 $\vec{\eta}^*$，则 $A\vec{x} = b$ 的任一解总可表示为

$$\vec{x} = \vec{\xi} + \vec{\eta}^*$$

其中，$\vec{\eta}^*$ 称为非齐次线性方程组 $A\vec{x} = b$ 的**特解**，$\vec{\xi}$ 为对应齐次线性方程组 $A\vec{x} = 0$ 的**通解**，非齐次线性方程组的任一解又可表示为

$$\vec{x} = c_1\vec{\xi}_1 + c_2\vec{\xi}_2 + \cdots + c_{n-r}\vec{\xi}_{n-r} + \vec{\eta}^*$$

上式称为非齐次线性方程组 $A\vec{x} = b$ 的**通解。**

6. 补充

6.1 关于同解可用的一些性质

性质 5

> 若 n 元齐次线性方程组 $A\vec{x} = 0$ 与 $B\vec{x} = 0$ 同解，那么 $R(A) = R(B)$.

> 证明：
>
> 根据秩零度定理可得，两个方程组的解空间的秩相等，即 $n - R(A) = n - R(B)$，所以 $R(A) = R(B)$.

性质 6

$$R(A^TA) = R(A)$$

> 证明：
>
> 只需要证明 $A\vec{x} = 0$ 和 $(A^TA)\vec{x} = 0$ 同解即可。