矩阵的逆运算

1. 伴随矩阵

1.1 伴随矩阵的定义

矩阵 $A=(a_{ij})$ 的各个元素所对应的代数余子式所构成的矩阵称作 A 的**伴随矩阵**，简称**伴随阵**，记作 A^*.

其中 A_{ij} 是在行列式章节的式 (3) 中定义的 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

1.2 伴随矩阵的性质

$$\boldsymbol{A^*A=AA^*=|A|E} \tag{2}$$

> 证明：
>
> $$A^*A=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{ki}\right)=(|A|\delta_{ij})=|A|\left(\delta_{ij}\right)=|A|E$$

2. 逆矩阵

2.1 逆矩阵的定义

对于 n 阶矩阵 A，如果有一个 n 阶矩阵 B 使得 $AB=BA=E$，则称矩阵 A 是**可逆**的，并称矩阵 B 为 A 的**逆矩阵**。记作 $B=A^{-1}$.

> 为什么逆矩阵是唯一的?
>
> 假设 n 阶方阵 A 有两个对应的矩阵 B 和 C 都能使 $BA=AC=E$，那么可得 $B=BE=B(AC)=(AB)C=EC=C$，即为$B=C$，所以 n 阶方阵 A 对应的逆矩阵是唯一的。

2.2 逆矩阵的性质

定理 1 若矩阵 A 可逆，则 $|A|=0$.

定理 2 若 $|A|=0$，则矩阵 A 可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^* \tag{3}$$

推论

(i) 若矩阵 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) 若矩阵 A 可逆，常数 $\lambda \neq 0$，则 λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$ 即 $\dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$.

(iii) 若 A, B 为同阶矩阵且都可逆，则 AB 也可逆。且

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \tag{4}$$

(iv) 若矩阵 A 可逆，则 A^T 也可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

2.3 逆矩阵的求法