二次型

1. 二次型

1.1 定义

二次型：

含有 n 个变量的**二次齐次函数**

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=\sum_{i, j=1}^n a_{ij} x_i x_j=a_{11} x_1^2+a_{22} x_2^2+\cdots+a_{nn} x_n^2+2 a_{12} x_1 x_2+2 a_{13} x_1 x_3+\cdots+2 a_{n-1, n} x_{n-1} x_n$$

称为**二次型。**

标准型：

只含有平方项的二次型，称为**标准型**（或**法式**）**。**比如：

$$f=k_1 x_1^2+k_2 x_2^2+\cdots+k_n x_n^2$$

规范型：

当标准型的系数仅为 $-1,0,1$ 时称为**规范型。**比如：

$$f=x_1^2-x_3^2+\cdots-x_n^2$$

复二次型：

当二次型的系数为复数时称为**复二次型**，为实数时称为**实二次型。**

二次型矩阵：

二次型 $f=\sum_{i, j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ 可以写成矩阵的形式

$$f=\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

合同：

若存在可逆矩阵 C 使得 $B=C^T A C$，则称 A 与 B **合同**，这个变换称为**合同变换。**

合同对交化：

对于对称阵 A 寻求可逆矩阵 C 使得 $C^T A C=\Lambda$ 为对角阵的过程称为**合同对角化。**

1.2 性质

性质 1

若 A 为对称阵，则合同矩阵 $B = P^TAP$ 也是对称阵

> 证明：
>
> $$B^T = (P^TAP)^T = P^TA^TP = P^TAP = B$$

性质 2

若存在可逆矩阵 C 使得 $B = C^TAC$，则 $R(A) = R(B)$

定理 1

给定任意二次型 $f = \boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}\,(A^T = A)$，总有**正交变换** $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ 使得 f 化为**标准型**：

$$f = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$$

其中，λ_i 是矩阵 A 的特征值。

> 证明：
>
> $$f = \boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x} = (P\boldsymbol{y})^TA(P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^TP^TAP\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\Lambda\boldsymbol{y}$$
>
> 其实就是将对称阵 A 对角化

推论

给定任意二次型 $f = \boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$，总有**可逆变换** $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{z}$ 使得 $f(C\boldsymbol{z})$ 为**规范型**：

$$f(\mathrm{C}\mathbf{z}) = \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}z_1^2 + \cdots + \frac{\lambda_r}{|\lambda_r|}z_r^2.$$

2. 正定二次型

2.1 定义

对于 $f = \boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}\,(A^T = A)$，如果任何 $x \neq 0$ 都有 $f(x) > 0$，则称 f 为**正定二次型**，并称对称阵 A 是**正定**的。反之为**负定**。

2.2 惯性定理

设二次型 $f = \boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}\,(A^T = A)$ 的秩为 r，有两个可逆变换

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} = C\boldsymbol{z}$$

使得 f 化为标准型：

$$\begin{aligned} f &= k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ry_r^2 \quad (k_i \neq 0), \\ f &= \lambda_1z_1^2 + \lambda_2z_2^2 + \cdots + \lambda_rz_r^2 \quad (\lambda_i \neq 0), \end{aligned}$$

则 k_i 中正数的个数与 λ_i 中正数的个数相等。

二次型的标准型中正系数的个数称为二次型的**正惯性指数**，负系数的个数称为二次型的**负惯性指数**。

若二次型 f 的正惯性系数为 p，秩为 r，则 f 的**规范型**可确定为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_p + 1^2 - \cdots - y_r^2$$

即前 p 项系数为正，其余为负。

> 二次型的标准型不是唯一的，但是实变换下二次型的标准型的系数中正数的个数是不会变的。

2.3 性质

定理 1

n 元二次型 $f = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}\ (A^T = A)$ 为**正定**的充要条件是它的**标准型**的 n 个系数都为正（**规范型**的 n 个系数都为 1）或者说**正惯性指数**等于 n。

推论

对称阵 A 为**正定矩阵**的充要条件是 A 的**特征值**全为正。

赫尔维茨定理

对称阵 A 为**正定矩阵**的充要条件是 A 的**各阶主子式**都为正，即

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

对称阵 A 为**负定矩阵**的充要条件是 A 的**奇数**阶主子式为**负**，**偶数**阶主子式为**正**即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0 \quad (r = 1, 2, \cdots, n)$$