矩阵

1. 矩阵的基础

1.1 矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的矩阵称为 $m \times n$ 矩阵，一般用大写字母 A 表示，记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中，数 a_{ij} 位于矩阵 A 的第 i 行 j 列，称为矩阵 A 的**元素**。矩阵 A 也可以简记作 (a_{ij}) 或者 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或者 $A_{m\times n}$. 特别地，当矩阵 A 的行数和列数都等于 n 时，矩阵 A 称为 n 阶矩阵或 n 阶**方阵**，也记作 A_n.

1.2 特殊矩阵

行矩阵：

只有一行的矩阵，又称**行向量**。记作

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

列矩阵：

只有一列的矩阵，又称**列向量**。记作

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

零矩阵：

元素都是 0 的矩阵。记作 $\boldsymbol{O}$.

单位矩阵：

主对角线**（即左上角到右下角的直线）上的元素都为 1，其余元素都为 0. 记作 $\boldsymbol{E}$.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

单位阵 E 的元素为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1,\ \text{当}\ i=j,\\0,\ \text{当}\ i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

可交换矩阵：

对于两个 n 阶方阵 A 和 B，若 $AB=BA$，则称方阵 A 与 B 是**可交换**的。常数的乘法乘方以及多项式中的很多性质，矩阵只有在可交换时才满足。

对角矩阵：

主对角线**之外的元素都为** 0**. 简称**对角阵**，记作

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

也简记作 $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\mathrm{diag}(\lambda_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$.

奇异矩阵：

当 $|A|=0$ 时，称 A 为**奇异矩阵**，否则为**非奇异矩阵。**

2. 矩阵的运算

2.1 矩阵的加法

定义

只有当两个矩阵是**同型矩阵**（即两个矩阵拥的行数和列数分别相等）时，才可以进行加法运算。记作 $A+B$，规定：

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

运算律

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad A+B=B+A\\&\text{(ii)}\ \ (A+B)+C=A+(B+C)\\&\text{(iii)}\ A-B=A+(-B)\end{aligned}$$

2.2 矩阵的数乘

定义

数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

运算律

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \ \ (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \\ &\text{(ii)} \ (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A \\ &\text{(iii)} \ \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \end{aligned}$$

矩阵的加法减法和数乘统称为矩阵的**线性运算**。

2.3 矩阵的乘法

定义

只有当左矩阵的列数等于右矩阵的行数时，矩阵才能相乘。一个 $m \times s$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 与一个 $s \times n$ 矩阵 $B = (b_{ij})$ 的乘积为一个 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij})$，此乘积记作 $AB = C$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n) \quad (1)$$

> 例如：
>
> $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

运算律

矩阵的乘法**不满足交换律**。AB 读作 A **左乘** B 或者 B 被 A **左乘**。BA 读作 A 右乘 B . AB 有意义时 BA 不一定有意义，有意义也不一定相等。

对于两个 n 阶方阵，若 $AB = BA$，则称 A 和 B 是**可交换**的。

即使 $A \neq O$, $B \neq O$，也可以有 $AB = O$.

> 例如：
>
> $$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

但是矩阵的乘法满足**交换律**和**结合律**：

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \ \ (AB)C = A(BC) \\ &\text{(ii)} \ \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) \\ &\text{(iii)} \ A(B+C) = AB + AC \end{aligned}$$

2.4 矩阵的幂运算

定义

设 A 为 n 阶方阵，k 为正整数。A^k 就是 k 个 A 连乘，所以只有 A 为方阵时幂才有意义。规定

$$A^1 = A,\ A^2 = A^1 A,\ \cdots,\ A^{k+1} = A^k A$$

运算律

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad A^k A^l = A^{k+l}\\&\text{(ii)}\ \ (A^k)^l = A^{kl}\\&\text{(iii)}\ \boldsymbol{(AB)^k \neq B^k A^k}\end{aligned}$$

2.5 矩阵的转置

定义

把矩阵 A 的行序数和列序数对调得到的新矩阵称为 A 的**转置矩阵**，记作 A^T.

对于矩阵 $A_{m\times n} = (a_{ij})$，转置矩阵 $A^T = (a_{ji})$ 为 $n \times m$ 矩阵。

> 例如：
>
> $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
> $$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

运算律

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad (A^T)^T = A\\&\text{(ii)}\ \ (A+B)^T = A^T + B^T\\&\text{(iii)}\ (\lambda A)^T = \lambda A^T\\&\text{(iv)}\ (AB)^T = B^T A^T\end{aligned}$$

对称

若方阵 A 满足 $A^T = A$，则称 A 为**对称矩阵**，简称**对称阵**。对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等。

2.6 矩阵的共轭

定义

当 $A = (a_{ij})$ 为复数矩阵时，记 $\overline{a_{ij}}$ 为 a_{ij} 的共轭复数，$\overline{A}$ 为 A 的共轭矩阵。其中 $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$.

运算律

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}\\&\text{(ii)}\ \ \overline{\lambda A} = \overline{\lambda}\,\overline{A}\\&\text{(iii)}\ \overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}\end{aligned}$$

3. 矩阵的迹

定义

矩阵的迹（trace）是一个 $n \times n$ 的方阵中主对角线元素之和，对于一个 n 阶方阵 $A = (a_{nn})$ 其迹为

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

3.1 性质

性质 1 线性性

$$\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

$$\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{tr}(A)$$

性质 2 转置不变性

$$\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$$

性质 3 乘积的迹

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

性质 4 相似不变性

如果矩阵 A 和 B 相似（即 $B = P^{-1}AP$），那么它们的迹相等。

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(P^{-1}PA) = \mathrm{tr}(A)$$