矩阵变换

1. 矩阵的初等变换

1.0 初等矩阵

定义

单位矩阵 E 经过一次初等变换后得到的矩阵称为**初等矩阵。**

1.1 矩阵的初等行变换

定义

(i) **对调两行**

对调 i, j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$.

> 把单位矩阵 E 中的 i, j 两行对调后得到初等矩阵：
>
> $$E(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

(ii) **乘 k 倍**

第 i 行中的所有元素乘不为 0 的常数 k，记作 $r_i \times k$.

> 把单位矩阵 E 中的第 i 行乘 k 后得到初等矩阵：
>
> $$E(i(k))=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(iii) **乘 k 倍后加到另一行**

第 j 行乘 k 倍后加到第 i 行上，记作 $r_i + kr_j$.

> 把单位矩阵 E 中的第 j 行乘 k 后加到第 i 行上得到初等矩阵：
>
> $$E(ij(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

1.2 矩阵的初等列变换

定义

(i) **对调两列**

对调 i, j 两列，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

(ii) **乘 k 倍**

第 i 列中的所有元素乘不为 0 的常数 k，记作 $c_i \times k$.

(iii) **乘 k 倍后加到另一列**

第 j 列乘 k 倍后加到第 i 列上，记作 $c_i + kc_j$.

1.3 矩阵的等价

定义

如果矩阵 A 经过有限次初等行变换后能变成矩阵 B，就称 A 与 B **行等价**，记作 $A \overset{r}{\sim} B$.

如果矩阵 A 经过有限次初等列变换后能变成矩阵 B，就称 A 与 B **列等价**，记作 $A \overset{c}{\sim} B$.

如果矩阵 A 经过有限次初等变换后能变成矩阵 B，就称 A 与 B **等价**，记作 $A \sim B$.

性质

(i) 反身性（自反性）

矩阵和它自身等价，即

$$A \sim A$$

(ii) 对称性

若 $A \sim B$，则 $B \sim A$.

(iii) 传递性

若 $A \sim B, B \sim C$，则 $A \sim C$.

1.4 行阶梯形矩阵

全零行都在底部，非零行的首项系数（也称作**主元** *leading coefficient*，即最左边的首个非零元素）严格地比上面行的首项系数更靠右的矩阵称为**行阶梯形矩阵。**

> 例如：
>
> $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.5 行最简形矩阵

行阶梯形矩阵的非零行的第一个非零元素为 1，且它们上方的其他元素都为 0 的矩阵，称为**行最简形**矩阵。

> 例如：
>
> $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.6 标准形矩阵

定义

左上角是一个**单位矩阵。**其余元素都为 0 的矩阵称为**标准形**矩阵.

> 例如：
>
> $$A_{m\times n} \sim F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

1.7 初等变换的性质

定理 1 左行右列

设 A 与 B 为 $m \times n$ 矩阵，那么:

(i) [1] 若存在可逆矩阵 P，使得 $PA = B$，那么 A 行等价于 B.

$$A \overset{r}{\sim} B \iff \exists P \in \mathrm{GL}(m), \text{ s.t. } PA = B$$

(ii) 若存在可逆矩阵 Q，使得 $AQ = B$，那么 A 列等价于 B.

$$A \overset{c}{\sim} B \iff \exists Q \in \mathrm{GL}(n), \text{ s.t. } AQ = B$$

(iii) 若存在可逆矩阵 P, Q，使得 $PAQ = B$，那么 A 等价于 B.

$$A \sim B \iff \exists P \in \mathrm{GL}(m),\ Q \in \mathrm{GL}(n), \text{ s.t. } PAQ = B$$

性质 1 方阵可逆的充要条件

$$A \in \mathrm{GL}(n) \iff \exists P_1, P_2, \ldots, P_i \in E_n, \text{ s.t. } A = P_1 P_2 \ldots P_i$$

其中，E_n 表示 n 阶初等矩阵的集合。

推论

$$A \in \mathrm{GL}(n) \iff A \sim E$$

2. 矩阵的旋转变换

---

1. $\mathrm{GL}(m)$ 表示 m 阶可逆矩阵的集合. 这里的意思就是存在 m 阶可逆矩阵 P. ↩