正交

1. 内积

1.1 内积的定义

对于两个 n 维向量

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

其**内积**规定为

$$[x, y] = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

当 x, y 都为列向量时，有

$$[x, y] = x^Ty$$

内积相当于将向量的数量积

$$x \cdot y = |x||y| \cos\theta$$

扩展到 n 维。

1.2 内积的性质

$$\begin{aligned} &(i) \quad [x, y] = [y, x] \\ &(ii) \ \ [\lambda x, y] = \lambda[x, y] \\ &(iii)\, [x + y, z] = [x, z] + [y, z] \\ &(iv) \ \ x = 0 \iff [x, x] = 0; \quad x \neq 0 \iff [x, x] > 0 \end{aligned}$$

1.2.1 施瓦茨不等式 Schwarz inequality

$$[x, y]^2 \leqslant [x, x][y, y]$$

2. 范数

2.1 长度（2范数）

定义

$$\|x\| = \sqrt{[x,x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

$\|x\|$ 称为 n 维向量 x 的**长度**（或者**范数**）。

当 $x = 1$ 时，称 x 为**单位向量**。

2.2 p范数

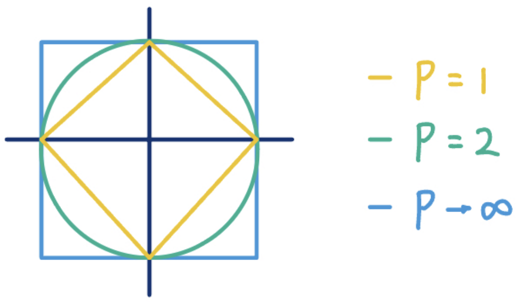
定义

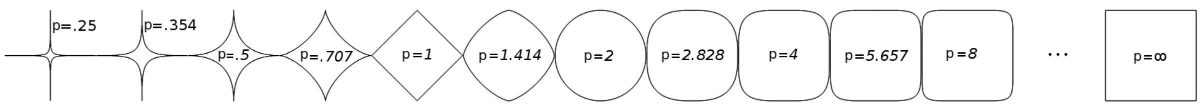
p 范数（**p norm**）可以看成2范数的扩展。

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p}$$

> 1 范数即为曼哈顿距离，2 范数即为几何距离。

当范数趋近于无穷大时，可以看出长度为 1 的点所形成的集合趋近于正方形。





2.3 范数的性质

向量的范数（长度）具有以下性质：

(i) **非负性**

$$x \neq 0 \iff \|x\| > 0, \quad x = 0 \iff \|x\| = 0$$

(ii) **齐次性**

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

(iii) **三角不等式**

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

当 $0<p<1$ 时，不满足三角不等式，所以 p 的取值范围是 $[1,\infty)$.

3. 正交

3.1 定义

定义 1 正交

当 $[x,y]=0$ 时，称向量 x 与 y **正交**。若 $x=0$，则 x 与任何向量都正交。

正交向量组是指一组两两正交的非零向量。

> 正交向量组可以理解为一组互相正交的单位基底，即在 $rank=n$ 的基础上两两向量的内积还为 0，且每个列向量长度都为 1.

定义 2 规范正交基

设 n 维向量 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 是向量空间 $V(V\in\mathbb{R}^n)$ 的一个基，如果 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 两两正交，且都是单位向量，则称 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 是 V 的一个**规范正交基**。

> 例如：
>
> $$e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$
>
> 是 $\mathbb{R}^4$ 的一个规范正交基。

定义 3 正交矩阵

如果 n 阶矩阵 A 满足

$$A^TA=E\quad(A^{-1}=A^T)$$

那么称 A 为**正交矩阵**，简称**正交阵**。

定义 4 正交变换

若 P 为正交矩阵，则线性变换 $y=Px$ 称为**正交变换**。

经过正交变换的向量长度不变。所以三角形之类的几何图形在正交变换下不会改变形状。

> 证明：$\|y\|=\sqrt{y^{\mathrm{T}}y}=\sqrt{x^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}P_x}=\sqrt{x^{\mathrm{T}}x}=\|x\|$

3.2 性质

定理 1

若 n 维向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关。

定理 2

向量的内积就是他们的

3.2.1 正交矩阵的性质

(i) 若 A 为正交矩阵，则 $A^{-1} = A^T$ 也是正交矩阵，且 $\det(A) = 1\, or -1$。

> 行列式的绝对值就是列向量围成的二维平行四边形的面积或者三维平行六面体的体积。
>
> 对于正交矩阵而言，求逆只要求转置就可以了。

(ii) 若 A 和 B 都是正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵。

> 证明：$AB(AB)^T = ABB^TA^T = AEA^T = E$

3.3 施密特 Schimidt 正交化

设 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是向量空间 V 的一个基，要求 V 的一个规范正交基就是要找一组两两正交的单位向量 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 使 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 与 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 等价。这个过程称为这个基的**规范正交化**。

用**施密特正交化**将 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 规范正交化：

取

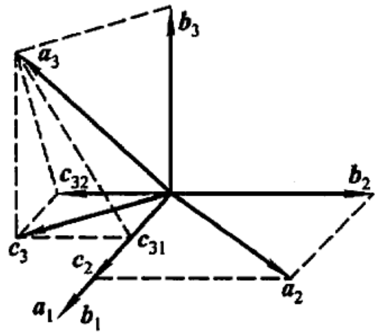
$$\begin{aligned}
&b_1 = a_1; \\
&b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 - \cdots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1},
\end{aligned}$$

然后再把它们单位化，取

$$e_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1, e_2 = \frac{1}{\|b_2\|} b_2, \cdots, e_r = \frac{1}{\|b_r\|} b_r,$$

就是 V 的一个规范正交基。

> 施密特正交化的过程就是先取一个向量然后不断地将其余基底减去已经规范正交化的基底上的投影的过程。
>
> 比如：a_2 在 b_1 上的投影 c_2 就等于 $c_2 = \dfrac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$. 将 a_2 在 b_1 上的投影减去后，剩下的就是垂直部分的分量 b_2 了。



b_3
a_3
c_{32}
b_2
c_3
c_{31}
c_2
a_2
a_1
b_1