特征值

1. 特征值

1.1 定义

定义 1

对于 n 阶矩阵 A，如果常数 λ 和 n 维非零列向量 x 使得关系式

$$Ax = \lambda x$$

成立，那么这样的常数 λ 称为 A 的**特征值**，非零列向量 x 称为 A 的对应于特征值 λ 的**特征向量。**

定义 2

解矩阵 A 的特征值和特征向量，就是解 n 元 n 阶的齐次线性方程组

$$(A - \lambda E)x = 0$$

它有非零解的充要条件是系数行列式

$$|A - \lambda E| = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

这个以 λ 为未知数的 n 次方程称为矩阵 A 的**特征方程。**

$|A - \lambda E|$ 是 λ 的 n 次多项式，记作 $f(\lambda)$，称为矩阵 A 的**特征多项式。**

定义 3

几何重数：矩阵的特征方程的维度。$[1, n]$

代数重数：特征值的重根个数。取值范围：$[1, n]$

> 代数重数是指这个特征值在矩阵的特征多项式中的重数。换句话说，代数重数表示特征值作为根出现在特征多项式中的次数。
>
> 几何重数是与该特征值相关的线性无关特征向量的最大数量。换句话说，几何重数表示特征空间的维数，即特征值对应的特征向量所构成的空间的基向量的数量。

1.2 性质

性质 1

1 个特征值可能对应 1 个或多个特征向量。但是 1 个特征向量只对应 1 个特征值。

即几何重数 $\leqslant$ 代数重数。

> 特征值的几何含义就是当矩阵 A 对特征向量 x 进行线性变换时，相当于将 x 放缩为 λ 倍。所以一个向量只可能被放缩为一个特定的倍数，但是不同的特征向量可能被放缩为同一个倍数。

性质 2

设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，那么 A 的特征值之和等于矩阵的迹（trace）. 即

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

性质 3

特征值乘积等于行列式，即

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$$

性质 4

若 λ 是 A 的特征值，则 λ^k 是 A^k 的特征值。（k 可以取负数）

> 证明：
>
> $$A^kp=A^{k-1}(Ap)=A^{k-1}(\lambda p)=\cdots=A(\lambda^{k-1}p)=\lambda^kp$$

性质 5

$\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值，其中 $\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$ 是 λ 的特征多项式，$\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA_m$ 是矩阵 A 的多项式。

> 也就是说只要求出 A 的特征值，再代入 $\varphi(\lambda)$ 就可以得到 $\varphi(A)$ 的特征值。

定理 1

假设方阵 A 的特征值各不相等，则 A 的特征向量**线性无关**。

ケイリー・ハミルトンの定理 (Cayley–Hamilton theorem)

若 $\varphi(\lambda)$ 为矩阵 A 的特征多项式（即 $\varphi(\lambda):=|A-\lambda E|$），那么 $\varphi(A)=O.$

1.3 特征值的求法

2 阶矩阵快速求特征值

假设 2 阶矩阵 A 的迹的均值为 m，行列式为 p. 即

$$m = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A), \quad p = \det(A)$$

那么根据性质 1 和 2 还有一元二次方程的性质可以快速得到特征值 λ

$$\lambda_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - p^2}$$