向量组的线性相关性

1. 向量组

1.1 定义

若干个**列向量**组成的集合叫做**向量组**。

> 例如：$m\times n$ 矩阵是一个含有 n 个 m 维列向量的向量组。

向量组的**秩**就是矩阵的秩。

1.2 线性组合的定义

给定向量组 $A=(\vec{a_1},\vec{a_2},\ \cdots,\vec{a_n})$ 和一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$

$$k_1\vec{a_1},k_2\vec{a_2},\ \cdots,k_n\vec{a_n}$$

称为向量组 A 的一个**线性组合**，实数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 称为这各线性组合的**系数**。

2. 线性表示

2.1 定义

给定向量组 $A=(\vec{a_1},\vec{a_2},\ \cdots,\vec{a_n})$ 和向量 $\vec{b}$，如果存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得

$$\vec{b}=k_1\vec{a_1},k_2\vec{a_2},\ \cdots,k_n\vec{a_n}$$

则称向量 $\vec{b}$ 能由向量组 A **线性表示**。

对于向量组 $A=(\vec{a_1},\vec{a_2},\ \cdots,\vec{a_n})$ 和向量组 $B=(\vec{b_1},\vec{b_2},\ \cdots,\vec{b_n})$，若 B 中的每个向量都能由向量组 A 线性表示，则称向量组 B 能由向量组 A **线性表示**。若向量组 A 和向量组 B 能相互线性表示，则称这两个**向量组等价**。

2.2 性质

定理 1

向量 $\vec{b}$ 能由向量组 $A=(\vec{a_1},\vec{a_2},\ \cdots,\vec{a_n})$ **线性表示**的充要条件是

$$R(A)=R(A|b)$$

> 证明：
>
> 向量 $\vec{b}$ 能由向量组 $A=(\vec{a_1},\vec{a_2},\ \cdots,\vec{a_n})$ 线性表示也就是方程组
>
> $$x_1\vec{a_1},x_2\vec{a_2},\ \cdots,x_n\vec{a_n}=\vec{b}$$

> 有解。由 线性方程组 定理 2 可得其充要条件是 $R(A) = R(A|b)$.

定理 2

向量组 $B = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \cdots, \vec{b_n})$ 能由向量组 $A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n})$ **线性表示**的充要条件是

$$R(A) = R(A|B)$$

推论

向量组 $B = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \cdots, \vec{b_n})$ 与向量组 $A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n})$ **等价**的充要条件是

$$R(A) = R(B) = R(A|B)$$

定理 3

若向量组 $B = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \cdots, \vec{b_n})$ 能由向量组 $A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n})$ **线性表示**，则

$$R(B) \leqslant R(A)$$

> 当 $R(B) < R(A)$ 时，A 可以表示 B 但是 B 不能表示 A，这对应了几何中高维物体可以投影到低维，但是低维却无法表示高维。

3. 线性相关性

3.1 定义

给定向量组 $A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n})$ 如果存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得

$$k_1\vec{a_1} + k_2\vec{a_2} + \cdots + k_n\vec{a_n} = \vec{0}$$

则称向量组 A 是**线性相关**的，否则称它是**线性无关**，或者**线性独立**的。

3.2 性质

定理 4

向量组 $A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n})$ **线性相关**的充要条件是秩小于向量的个数，即

$$R(A) < n$$

线性无关的充要条件是

$$R(A) = n$$

定理 5

(i) 若向量组 $A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n})$ 线性相关，那么向量组 $A' = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n}, \vec{a_{n+1}})$ 也线性相关。
反之，若向量组 $A' = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n}, \vec{a_{n+1}})$ 线性无关，那么向量组 $A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n})$ 也线性无关

> 换句话说：
>
> 只要能找到一组向量线性相关，那么向量组就线性相关。
>
> 只要向量组线性无关，那么其中任取几个向量都线性无关。

(ii) 当维度 m 小于向量数 n 时，$m \times n$ 的向量组一定线性相关。特别地，$n+1$ 个 n 维向量组一定线性相关。

(iii) 若向量组 $A=(\vec{a_1},\vec{a_2}，\cdots,\vec{a_n})$ 线性无关，向量组 $A|b=(\vec{a_1},\vec{a_2}，\cdots,\vec{a_n},\vec{b})$ 线性相关，则向量 b 一定能由向量组 A 线性表示，且表示式是惟一的。

4. 最大无关组

4.1 最大无关组的定义

如果能在向量组 $A=(\vec{a_1},\vec{a_2}，\cdots,\vec{a_n})$ 中选出 r 个**线性无关**的向量组成向量组 $A_0=\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_r}$，使得向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果有的话）都线性相关，那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个**最大线性无关向量组**，简称**最大无关组**，r 就是向量组 A 的**秩**。

只含有**零向量**的向量组没有最大无关组，它的秩为 0.

4.2 性质

$A_0=\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_r}$ 是向量组 $A=(\vec{a_1},\vec{a_2}，\cdots,\vec{a_n})$ 的最大无关组的充要条件是

(i) 向量组 A_0 线性无关。

(ii) 向量组 A 的任何一个向量都能由 A_0 线性表示。