

# Seminarios de Cálculo

Cálculo Diferencial – Curso 2025/26

Prof. Rubén Oncala

ruben.oncalamesa@ceu.es

Web: [droncala.github.io/TemaX](https://droncala.github.io/TemaX)

YouTube: @droncalaTemaX

---

Entrega antes del 19 de Diciembre del 2025 en un solo PDF por email o por la web de TemaX.

## Seminario 2: Análisis de funciones en una variable

---

Analiza las siguientes funciones reales de variable real:

■  $f_1(x) = 2 - 3x + x^2 + 7x^3$

■  $f_2(x) = \frac{1}{3x} + \frac{2}{5x^2} + \frac{4}{3x^3}$

■  $f_3(x) = \frac{5 - 15x}{2x + 5x^2}$

■  $f_4(x) = 4e^{-(3x-2)^2}$

■  $f_5(x) = \ln\left(\frac{3x}{4x^2 + 2}\right)$

■  $f_6(x) = \sin(3x + 2) \cdot e^{-x^2/10}$

■  $f_7(x) = \frac{\tan(2x)}{3x + 1}$

**Se pide realizar para cada función:**

1. Calcular la primera ( $f'$ ) y segunda derivada ( $f''$ ).
2. Encontrar los puntos críticos y clasificarlos en máximos o mínimos relativos.
3. Hallar los puntos de inflexión (donde cambia la concavidad).
4. Calcular los límites en el infinito y estudiar las discontinuidades (asíntotas horizontales y verticales).
5. Realizar un esbozo manual de la gráfica y comprobar los resultados con GeoGebra.

*Nota: Presta atención a la periodicidad de las funciones trigonométricas antes de determinar todos los extremos relativos.*

## Seminario 3: Análisis de funciones en varias variable

Dadas las siguientes funciones escalares, puntos  $P$  y vectores de dirección  $\vec{v}$ :

Función	Punto ( $P$ )	Vector ( $\vec{v}$ )
$g_1(x, y) = -(x - 3)^2 - (y - 4)^2 + 10,5$	$P(2, 3)$	$\vec{v} = (2, -2)$
$g_2(x, y) = +(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + 10,5$	$P(1, 1)$	$\vec{v} = (-2, 3)$
$g_3(x, y) = +(x - 3)^2 - (y - 4)^2 + 10,5$	$P(2, 5)$	$\vec{v} = (1, 1)$
$g_4(x, y) = 5x^2 + 2y^2 + 3xy$	$P(3, 4)$	$\vec{v} = (1, 1)$
$g_5(x, y) = 2e^{4x^2+3y^2-5}$	$P(3, 4)$	$\vec{v} = (1, 1)$
$g_6(x, y, z) = xy^2z^3 + \ln\left(\frac{xy}{z^2 - 1}\right)$	$P(-3, 2, 2)$	$\vec{v} = (2, 4, 5)$

**Determina para cada caso:**

1. El vector gradiente  $\nabla g(P)$ .
2. La dirección de máximo crecimiento de la función y el valor de la pendiente máxima (módulo del gradiente) en el punto  $P$ .
3. La derivada direccional en el punto  $P$  según la dirección del vector  $\vec{v}$  (recuerda normalizar el vector si es necesario).
4. Localiza los puntos críticos analíticamente ( $\nabla g = 0$ ) y clasifícalos (Máximo, Mínimo o Punto de Silla) utilizando el criterio del Hessiano (para  $g_1$  a  $g_5$ ).
5. Visualiza y comprueba los resultados en GeoGebra 3D.

## Seminario 4: Cálculo integral y ecuaciones diferenciales

---

### Resolución de EDOs con condiciones de contorno

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales, encuentra la constante  $\kappa$  y realiza la predicción solicitada. Comprueba los resultados en GeoGebra.

**a) Ley de Termalización de Newton:**

$$\frac{dT}{dt} = \kappa(T - 25)$$

*Condiciones:*  $T(0) = 1$ ,  $T(5) = 7$ .

*Objetivo:* Obtener la función  $T(t)$  y predecir la temperatura para  $T(10)$ .

**b) Tasa de Variación Polinómica:**

$$\frac{dM}{dt} = \kappa M(t^2 + t + 1)$$

*Condiciones:*  $M(2) = 10$ ,  $M(8) = 1,3$ .

*Objetivo:* Obtener la función  $M(t)$  y predecir el valor  $M(5)$ .

**c) Cinética No Lineal:**

$$\frac{dY}{dt} = \kappa Y^2 e^{-\kappa t}$$

*Condiciones:*  $Y(0) = 1$ ,  $Y(2) = 10$ .

*Objetivo:* Obtener la función  $Y(t)$  y predecir el valor  $Y(3)$ .

## Problemas de Aplicación/Modelización (puedes usar GeoGebra)

### Ejercicio 1: Problema de Mezclas (Tanque de Sal)

Un depósito con capacidad total de 50 L contiene inicialmente 10 L de agua pura. Comenzamos a verter una solución salina con una concentración de **100 g/L** a un ritmo de **4 L/min**. La mezcla se mantiene uniforme mediante agitación y, simultáneamente, se deja salir líquido del tanque a un ritmo de **2 L/min**.

- Obtén la ecuación general para el volumen de agua en el tanque  $V(t)$ . ¿Cuánto tiempo tardará el depósito en llenarse?
- Plantea la ecuación diferencial para la cantidad de sal  $Q(t)$  y resuélvela. Recuerda el balance de masa:

$$\frac{dQ}{dt} = \text{Tasa Entrada} - \text{Tasa Salida}$$

- ¿Cuánta sal (en kg) habrá en el depósito en el instante exacto en que se llene?
- 

### Ejercicio 2: Crecimiento Orgánico

Se ha observado que la velocidad de crecimiento de la superficie  $S$  de una hoja de cierta especie vegetal es directamente proporcional a su superficie en dicho instante ( $S' = k \cdot S$ ).

- Sabiendo que la superficie es de **1 cm<sup>2</sup>** en  $t = 1$  semana y de **5 cm<sup>2</sup>** en  $t = 2$  semanas:
    1. Resuelve la EDO por variables separables para hallar la función  $S(t)$ .
    2. Determina el valor de la constante de crecimiento  $k$  y la constante de integración  $C$  usando los datos.
    3. Calcula la superficie esperada para la semana 5 ( $t = 5$ ).
- 

### Ejercicio 3: Cinética de Eliminación No Lineal

En ciertos fármacos, la velocidad de eliminación no es lineal, sino proporcional al cuadrado de la concentración ( $C' = -k \cdot C^2$ ). En un ensayo clínico se obtienen los siguientes datos:

- Dosis inicial en  $t = 0$ :  $C_0 = 20$  mg/L.
- Medición en  $t = 2$  horas:  $C_2 = 10$  mg/L.

**Se pide:**

1. Plantear y resolver la ecuación diferencial para  $C(t)$ .
2. Determinar el valor numérico de la constante  $k$  (indica sus unidades).
3. Calcular la concentración restante pasadas 6 horas desde la administración ( $t = 6$ ).