

# Seminarios de Cálculo

Rubén Oncala

Curso 2025/26

## 1 Derivadas de una variable

Para las siguientes funciones:

$$f_{\pm}(x) = 2 \pm 3x + x^2 + 7x^3$$

$$f_2(x) = \frac{1}{3x} + \frac{2}{5x^2} + \frac{4}{3x^3}$$

$$f_3(x) = \frac{5 - 15x}{2x + 5x^2}$$

$$f_4(x) = 4e^{-(3x-2)^2}$$

$$f_5(x) = \ln\left(\frac{3x}{4x^2 + 2}\right)$$

$$f_7(x) = \frac{\tan(2x)}{3x + 1}$$

$$f_6(x) = \sin(3x + 2) \cdot e^{-x^2/10}$$

- Resuelve la primera y segunda derivada.
- Encuentra los extremos relativos, calcifícalos en máximos o mínimos,
- Encuentra los puntos de inflexión.
- Determina los límites de la función, estudia discontinuidades.
- Haz un esquema de la función y comprueba tus resultados con ordenado (geogebra)

*Pista: Piensa en las soluciones de las funciones trigonométricas  $\sin(ax + b)$ ,  $\cos(ax + b)$  y  $\tan(ax + b)$  antes de decidir los extremos relativos.*

## 2 Derivadas de varias variable

Para las siguientes funciones determina:

$$\text{Max:} \quad g_1(x, y) = -(x - 3)^2 - (y - 4)^2 + 10.5 \quad P = (2, 3) \quad \bar{v} = (2, -2)$$

$$\text{Min:} \quad g_2(x, y) = +(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + 10.5 \quad P = (1, 1) \quad \bar{v} = (-2, 3)$$

$$\text{Silla:} \quad g_3(x, y) = +(x - 3)^2 - (y - 4)^2 + 10.5 \quad P = (3, 4) \quad \bar{v} = (1, 1)$$

$$g_4(x, y) = 5x^2 + 2y^2 + 3xy \quad P = (3, 4) \quad \bar{v} = (1, 1)$$

$$g_5(x, y) = 2e^{4x^2+3y^2-5} \quad P = (3, 4) \quad \bar{v} = (1, 1)$$

$$g_6(x, y, z) = x y^2 z^3 + \ln \left( \frac{xy}{z^2 - 1} \right) \quad P = (-3, 2, 2) \quad \bar{v} = (2, 4, 5)$$

- El vector gradiente.
- La dirección de mayor crecimiento de la función y el valor de la pendiente en el punto  $P$ .
- Los extremos relativos, clasifícalos en máximos, mínimos o puntos de silla.
- La derivada direccional en el punto  $P$  y en la dirección del vector  $\bar{v}$ .
- Comprueba los resultados con ordenador (geogebra).

### 3 Integrales y EDOS

Para las ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \kappa (T - 25) & T(t=0) &= 100 & T(t=5) &= 80 \\ \frac{dM}{dt} &= \kappa M (t^2 + t + 1) & M(t=2) &= 10 & M(t=8) &= 1.3 \\ \frac{dY}{dt} &= \kappa Y^2 e^{-\kappa t} & Y(t=0) &= 1 & Y(t=2) &= 10\end{aligned}$$

- Obtén la solución general de la ecuación.
  - Obtén el valor de la constante  $\kappa$  para las condiciones de contorno.
  - Usando la constante  $\kappa$  obtenida, haz predicciones para  $t = 5$ .
- 

Un depósito de agua de 50 L contiene 10 L de agua. Supongamos que comenzamos a verter en el depósito una solución de agua con 100 g de sal por litro, a un ritmo de 4 L por minuto. También agitamos el depósito para mantener una distribución uniforme de la sal y, al mismo tiempo, dejamos salir agua (con sal) a un ritmo de 2 L por minuto.

- Obtén la ecuación general para el volumen de agua en el tanque, ¿cuánto tiempo tardará el depósito en llenarse?
- Obtén la ecuación general para la cantidad de sal en el tanque, ¿cuánta sal habrá en el depósito al llenarse?

*Observación:* La tasa de variación de la cantidad de sal en el depósito es igual a la diferencia entre la cantidad de sal que entra y la cantidad de sal que sale del depósito.