STATISTIQUES
PROBABILITÉS

14

Trigonométrie

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Calculer et utiliser des fréquences
- Calculer et utiliser des pourcentages

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Auto-évaluation

1 Le tableau ci-dessous présente le nombre de pots de peinture vendus en un mois selon la couleur.

Couleur	Jaune	Blanc	Rouge
Effectif	256	7489	458

Couleur	Bleu	Vert	Noir
Effectif	156	785	4123

1) Calculer les fréquences arrondies au centième.
2) Exprimer les fréquences en pourcentage arrondies à l'unité.

2 Dans une boulangerie, Mariette achète :
- 15 pains au chocolat ;
- 10 croissants ;
- 12 tartelettes ;
- 8 pains au raisin ;
- 22 éclairs ;
- 20 brioches.

1) Quelle est la proportion de :
 a) tartelettes ? b) viennoiserie ?
2) Parmi les desserts, quelle est la proportion d'éclairs ?

3 En 2013, 778 200 candidats se sont présentés à la série générale de l'examen du Diplôme National du Brevet, 84,5 % ont été reçu et neuf candidats sur 10 maîtrisaient le socle commun de compétences.
1) Combien de candidats ont été reçus ?
2) Combien de candidats ont la maîtrise du socle commun de compétences ?

4 Dans la liste des nombres entiers de 0 à 20, citer
1) les nombres impairs ;
2) les nombres divisibles par 3 ;
3) les nombres impairs ou divisibles par 3 ;
4) les nombres impairs non nuls et divisibles par 3.

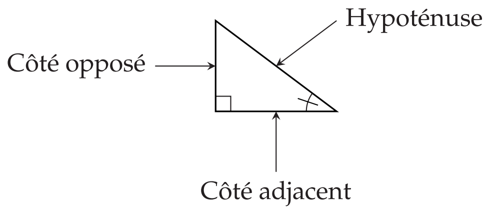
5 Benoît a réparé 351 machines à laver. Il a changé le joint sur 128 machines et le programmateur sur les autres dont 26 présentaient aussi un défaut de joint qu'il a aussi remplacé.
1) Quel est le pourcentage de machines à laver ayant un joint défectueux ?
2) Quel est le nombre de machine ayant seulement un programmateur défectueux ?

Voir solutions p. 60

Cours - Méthodes

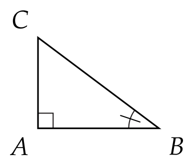
1. Vocabulaire

Dans le chapitre, sauf indication contraire, tous les triangles sont rectangles.



2. Cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle

A. Définition



DÉFINITION

Dans le triangle ABC rectangle en A, on appelle **cosinus** de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ et on note $\cos\widehat{ABC}$ le quotient de la longueur du côté adjacent AB et de celle de l'hypoténuse BC.

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$

B. Propriétés

PROPRIÉTÉ

1) En utilisant le théorème de Thalès, on montre que le cosinus d'un angle ne dépend pas du triangle rectangle considéré, mais uniquement de la mesure de l'angle.
2) Le cosinus d'un angle aigu est une grandeur sans unité. Il est compris entre 0 et 1. En effet, c'est un quotient de deux grandeurs positives, et le dénominateur est supérieur au numérateur (l'hypoténuse est le côté le plus long d'un triangle rectangle).
3) Plus la mesure d'un angle est grande, et plus son cosinus est petit. Cela nous incite à choisir :

$$\cos 0^\circ = 1 \qquad \cos 90^\circ = 0$$

C. Applications

MÉTHODE 1 Utilisation de la calculatrice

Il faut commencer par deux mises en garde concernant l'utilisation de la calculatrice en trigonométrie : d'une part, la calculatrice ne fournit la plupart du temps que des valeurs approchées, et d'autre part, il faut vérifier qu'elle est bien paramétrée en degrés.

Exercice d'application Calculer $\cos 37°$, $\cos 45°$, $\cos 85°$, $\cos 90°$, et en déterminer un arrondi au millième.

Correction A la calculatrice, en utilisant la touche COS on doit obtenir :

$$\cos 37° \approx 0{,}799$$
$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$$
$$\cos 85° \approx 0{,}087$$
$$\cos 90° = 0$$

Ce dernier résultat nous permet de vérifier facilement que la calculatrice est bien paramétrée.

Exercice d'application Déterminer la mesure α, β et γ au degré près des angles tels que :

$$\cos \alpha = 0{,}7 \qquad \cos \beta = 0{,}1 \qquad \cos \gamma = -0{,}6$$

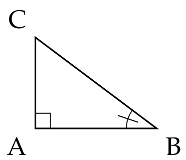
Correction La calculatrice nous permet d'écrire que :

$$\alpha \approx 46° \qquad \beta \approx 84°$$

Attention, la calculatrice nous donne une réponse pour γ, mais elle n'a aucun sens en classe de collège ! ! On rappelle que le cosinus d'un angle aigu est compris entre 0 et 1.

MÉTHODE 2 Calcul de longueur

Exercice d'application On considère la figure suivante. On précise que $\hat{B} = 40°$.



1) Si BC = 7 cm, déterminez la valeur exacte et l'arrondi de AB au millimètre.
2) Si AB = 3 cm, déterminez la valeur exacte et l'arrondi de BC au millimètre.

Correction Le triangle ABC est rectangle en A. Donc :

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$$

1)

$$AB = BC \times \cos \hat{B} = 7 \times \cos(40°)$$
$$AB \approx 5{,}4$$

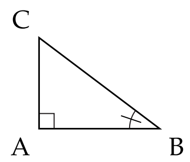
Avec la caclulatrice, on trouve que l'arrondi de AB au millimètre vaut 5,4 cm.

2)

$$BC = \frac{AB}{\cos \hat{B}} = \frac{3}{\cos(40°)}$$
$$BC \approx 3{,}9$$

Avec la calculatrice, on trouve que l'arrondi de BC au millimètre vaut 3,9 cm.

MÉTHODE 3 **Déterminer un angle**



Exercice d'application On considère la figure suivante. On précise que $AB = 5$ cm et $BC = 8$ cm. Déterminer l'arrondi de $\hat{B}$ au degré près.

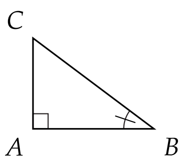
Correction Le triangle ABC est rectangle en A. Donc :

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{8}$$

Avec la calculatrice, on trouve que l'arrondi de $\hat{B}$ au degré vaut 51°.

3. Sinus

A. Définition



DÉFINITION

Dans le triangle ABC rectangle en A, on appelle **sinus** de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ et on note $\sin \widehat{ABC}$ le quotient de la longueur du côté opposé AC et de celle de l'hypoténuse BC.

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$$

B. Propriétés

PROPRIÉTÉ

1) Après avoir constaté que le sinus d'un angle est égal au cosinus de l'angle complémentaire, on peut affirmer que la plupart des propriétés du cosinus restent valables pour le sinus : le sinus d'un angle ne dépend pas du triangle rectangle considéré, mais uniquement de la mesure de l'angle. Le sinus d'un angle aigu est une grandeur sans unité. Il est compris entre 0 et 1.
2) Plus la mesure d'un angle est grande, et plus son cosinus est grand. Cela nous incite à choisir :

$$\sin 0^\circ = 0 \qquad \sin 90^\circ = 1$$

C. Applications

MÉTHODE 4 Utilisation de la calculatrice

Exercice d'application Calculer $\sin 37^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 85^\circ$, $\sin 90^\circ$, et en déterminer un arrondi au millième.

Correction A la calculatrice, en utilisant la touche SIN on doit obtenir :

$$\sin 37^\circ \approx 0{,}602$$
$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$$
$$\sin 85^\circ \approx 0{,}996$$
$$\sin 90^\circ = 1$$

Exercice d'application Déterminer la mesure α, β et γ au degré près des angles tels que :

$$\sin \alpha = 0{,}7 \qquad \sin \beta = 0{,}1 \qquad \sin \gamma = -0{,}6$$

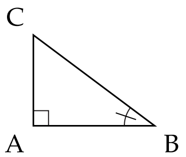
Correction La calculatrice nous permet d'écrire que :

$$\alpha \approx 44^\circ \qquad \beta \approx 6^\circ$$

Attention, la calculatrice nous donne une réponse pour γ, mais elle n'a aucun sens en classe de collège ! ! On rappelle que le sinus d'un angle aigu est compris entre 0 et 1.

MÉTHODE 5 Calcul de longueur

Exercice d'application On considère la figure suivante. On précise que $\hat{B} = 40^\circ$.



1) Si BC $= 7$ cm, déterminez la valeur exacte et l'arrondi de AC au millimètre.
2) Si AC $= 3$ cm, déterminez la valeur exacte et l'arrondi de BC au millimètre.

Correction Le triangle ABC est rectangle en A. Donc :

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$$

1)

$$AC = BC \times \sin \hat{B} = 7 \times \sin(40^\circ)$$
$$AC \approx 4{,}5$$

Avec la calculatrice, on trouve que l'arrondi de AC au millimètre vaut 4,5 cm.

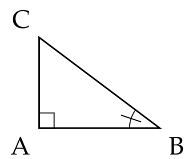
2)

$$BC = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{3}{\sin(40^\circ)}$$
$$BC \approx 4{,}7$$

Avec la calculatrice, on trouve que l'arrondi de BC au millimètre vaut 4,7 cm

MÉTHODE 6 Déterminer un angle

Exercice d'application On considère la figure suivante. On précise que AC $= 3$ cm et BC $= 8$ cm. Déterminer l'arrondi de $\hat{B}$ au degré près.



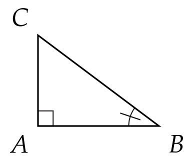
Correction Le triangle ABC est rectangle en A. Donc :

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{8}$$

Avec la calculatrice, on trouve que l'arrondi de $\hat{B}$ au degré vaut 22°.

4. Tangente

A. Définition



DÉFINITION

Dans le triangle ABC rectangle en A, on appelle **tangente** de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ et on note sin $\widehat{ABC}$ le quotient de la longueur du côté opposé AC et de celle du côté adjacent AB.

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$

B. Propriétés

PROPRIÉTÉ

1) La tangente d'un angle ne dépend pas du triangle rectangle considéré, mais uniquement de la mesure de l'angle. Le tangente d'un angle aigu est une grandeur positive sans unité. Elle peut être supérieure à 1.
2) Plus la mesure d'un angle est grande, et plus sa tangente est grande. Cela nous incite à choisir :

$$\tan 0^\circ = 0$$

La tangente d'un angle droit n'existe pas.

C. Applications

MÉTHODE 7 Utilisation de la calculatrice

Exercice d'application Calculer $\tan 37^\circ$, $\tan 45^\circ$, $\tan 85^\circ$, et en déterminer un arrondi au millième.

Correction A la calculatrice, en utilisant la touche TAN on doit obtenir :

$$\tan 37^\circ \approx 0{,}754$$
$$\tan 45^\circ = 1$$
$$\tan 85^\circ \approx 11{,}43$$

Exercice d'application Déterminer la mesure α, β et γ au degré près des angles tels que :

$$\tan\alpha = 0{,}7 \qquad \tan\beta = 0{,}1 \qquad \tan\gamma = 4$$

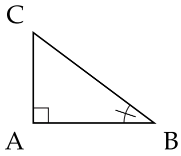
Correction La calculatrice nous permet d'écrire que :

$$\alpha \approx 35^\circ \qquad \beta \approx 6^\circ \qquad \gamma \approx 76^\circ$$

Attention, on rappelle que la tangente d'un angle aigu peut être supérieure à 1.

MÉTHODE 8 Calcul de longueur

Exercice d'application On considère la figure suivante. On précise que $\hat{B} = 40^\circ$.



1) Si AB $= 7$ cm, déterminez la valeur exacte et l'arrondi de AC au millimètre.
2) Si AC $= 3$ cm, déterminez la valeur exacte et l'arrondi de AB au millimètre.

Correction Le triangle ABC est rectangle en A. Donc :

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

1)

$$AC = AB \times \tan \hat{B} = 7 \times \tan(40^\circ)$$

$$AC \approx 5{,}9$$

Avec la calculatrice, on trouve que l'arrondi de AC au millimètre vaut 5,9 cm.

2)

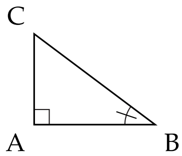
$$AB = \frac{AC}{\tan \hat{B}} = \frac{3}{\tan(40^\circ)}$$

$$AB \approx 3{,}6$$

Avec la calculatrice, on trouve que l'arrondi de AB au millimètre vaut 3,6 cm

MÉTHODE 9 Déterminer un angle

Exercice d'application On considère la figure suivante. On précise que AC $= 3$ cm et AB $= 8$ cm. Déterminer l'arrondi de $\hat{B}$ au degré près.



Correction Le triangle ABC est rectangle en A. Donc :

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{8}$$

Avec la calculatrice, on trouve que l'arrondi de $\hat{B}$ au degré vaut 21°.

5. Liens entre sinus, cosinus et tangente

A. CAS SOH TOA

La formule mnémotechnique suivante est donnée pour se souvenir des trois définitions données dans les paragraphes ci-dessus.

$$CAH \quad SOH \quad TOA$$

où C, S et T désignent respectivement le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle aigu,
et où A, O et H désignent respectivement les longueurs du côté adjacent, du côté opposé, et de l'hypoténuse.

B. Angles complémentaires

Les deux résultats suivants découlent directement des trois définitions.

PROPRIÉTÉ : Cosinus de l'angle complémentaire

Le cosinus d'un angle aigu est égal au sinus de l'angle complémentaire.
Le sinus d'un angle aigu est égal au cosinus de l'angle complémentaire.

PREUVE Dans le triangle ABC rectangle en A, les deux angles aigus $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires, et :

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \sin \hat{C}$$

Exemple
On a :

$\cos 40^\circ = \sin 50^\circ$ $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$ $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$

PROPRIÉTÉ : Tangente de l'angle complémentaire

La tangente d'un angle aigu est égal à l'inverse de la tangente de son angle complémentaire

PREUVE Dans le triangle ABC rectangle en A, les deux angles aigus $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires, et :

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\tan \hat{C}}$$

Exemple
On a :

$\tan 40^\circ = \dfrac{1}{\tan 50^\circ}$ $\tan 60^\circ = \dfrac{1}{\tan 30^\circ}$ $\tan 45^\circ = \dfrac{1}{\tan 45^\circ}$

C. Théorème de Pythagore

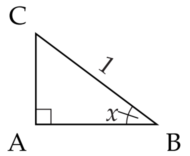
PROPRIÉTÉ

Soit x la mesure en degrés d'un angle aigu.
On a toujours la relation suivante :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

REMARQUE : Au lieu d'écrire $(\cos x)^2$, on écrit $\cos^2 x$.

PREUVE On considère le triangle ABC rectangle en A, tel que BC $=1$ ci-dessous. $\hat{B}$ est désigné par x.



D'une part, le théorème de Pythagore nous permet d'écrire :

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2=1^2=1$$

D'autre part,

$$\cos^2 x+\sin^2 x=\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{AB}}{1}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{AC}}{1}\right)^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2$$

On en déduit :

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

Exemple

On a :

$\cos^2 30^\circ+\sin^2 30^\circ=1$ $\qquad$ $\cos^2 67^\circ+\sin^2 67^\circ=1$ $\qquad$ $\cos^2 0^\circ+\sin^2 0^\circ=1$

D. Expression de la tangente à partir du sinus et du cosinus

PROPRIÉTÉ

Soit x la mesure en degrés d'un angle aigu.
On a toujours la rélation suivante :

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

PREUVE Dans le même triangle que ci-dessus, on a :

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}}=\frac{AC}{BC}\div\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{BC}\times\frac{BC}{AB}=\frac{AC}{AB}=\tan x$$

MÉTHODE 10

Exercice d'application Soit x la mesure en degrés d'un angle aigu, tel que $\sin x = \frac{12}{13}$. Déterminer les valeurs exactes de $\cos x$ et $\tan x$.

Correction **Calcul de** $\cos x$

On sait que :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$.

On reconnaît une équation du type $y^2 = a$, où a est un nombre positif.

Donc

$$\cos x = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13} \quad \text{ou} \quad \cos x = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$$

or le cosinus d'un angle aigu est positif, d'où :

$$\cos x = \frac{5}{13}$$

Calcul de $\tan x$

On sait que :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{13} \div \frac{5}{13} = \frac{12}{13} \times \frac{13}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\tan x = \frac{12}{5}$$

6. Pour quelques exercices de plus

A. Valeurs remarquables

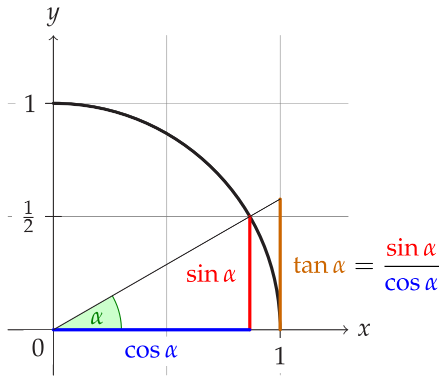
En considérant un triangle équilatéral coupé en deux par une médiatrice, ou un carré coupé en deux par une diagonale, on peut déterminer des valeurs exactes des cosinus, sinus et tangentes des angles ayant pour mesures 30°, 45°et 60°.

Il convient de retenir ces valeurs, elles seront utiles dans la suite de vos études.

Mesure x de l'angle	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

B. Kit de survie

Si on doit déterminer le cosinus, le sinus, la tangente d'un angle, ou la mesure de l'angle à partir de son cosinus, de son sinus ou de sa tangente, on peut obtenir des valeurs approchées satisfaisantes à partir du dessin suivant :

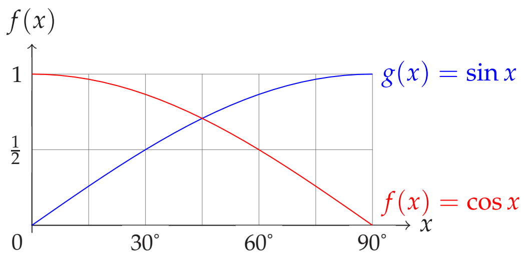


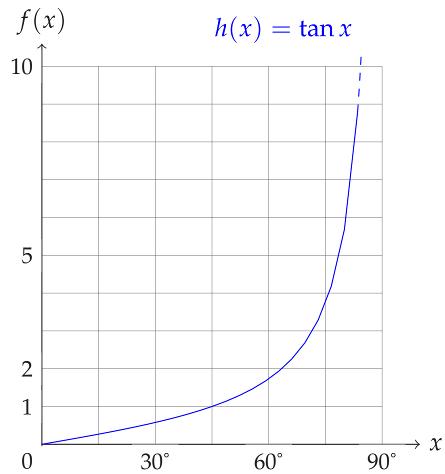
C. Fonctions trigonométriques

Soient f, g et h les trois fonctions qui à toute mesure d'angle aigu (en degrés) associe respectivement le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle.

$$f : x \mapsto \cos x \qquad g : x \mapsto \sin x \qquad h : x \mapsto \tan x$$

Les représentations graphiques de ces 3 fonctions sont tracées dans les deux repères ci-dessous.





SOLUTIONS

Chapitre SP14
Trigonométrie

1

Couleur	Jaune	Blanc
Fréquences	0,02	0,56
Pourcentage	2	56

Couleur	Rouge	Bleu
Fréquences	0,03	0,01
Pourcentage	3	1

Couleur	Vert	Noir
fréquences	0,06	0,31
pourcentage	6	31

Auto-évaluation

2 **1)**

a) 12/87 **b)** 53/87

2) 22/34

3 **1)** 657 579 **2)** 700 380

4

1) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

2) 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18.

3) 0, 1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19.

4) 0, 3, 9, 15.

5

1) 43,9 %

2) 197