
Système de particules

IMN504

Systèmes de particules



[Particle systems - A Technique for Modeling a Class of Fuzzy Objects, William T. Reeves, Lucasfilm, 1983 \(Star Trek II\)](#)

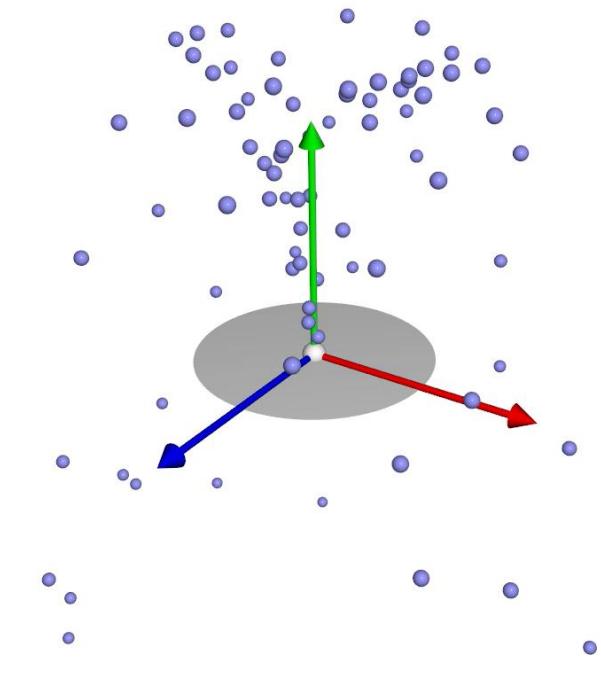


- [Karl Sims, Particle dreams, 1988](#)

Pour commencer – Trajectoire simple

Chute libre sous l'influence de la gravité

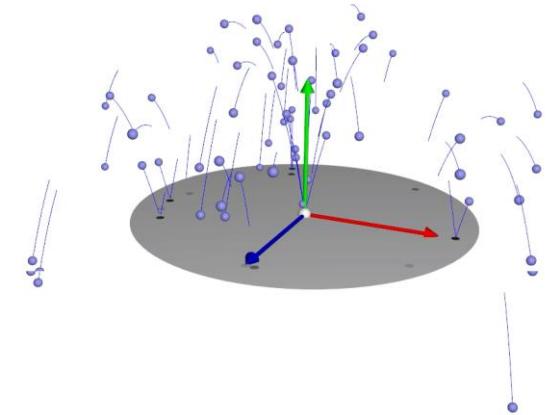
- Des sphères
- L'équation du mouvement
 - $p(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + p_0$
- Un peu d'aléatoire
 - Position initiale
 - Vitesse initiale
- Une durée de vie pour chaque particule



Pour commencer – Trajectoire simple

On peut complexifier

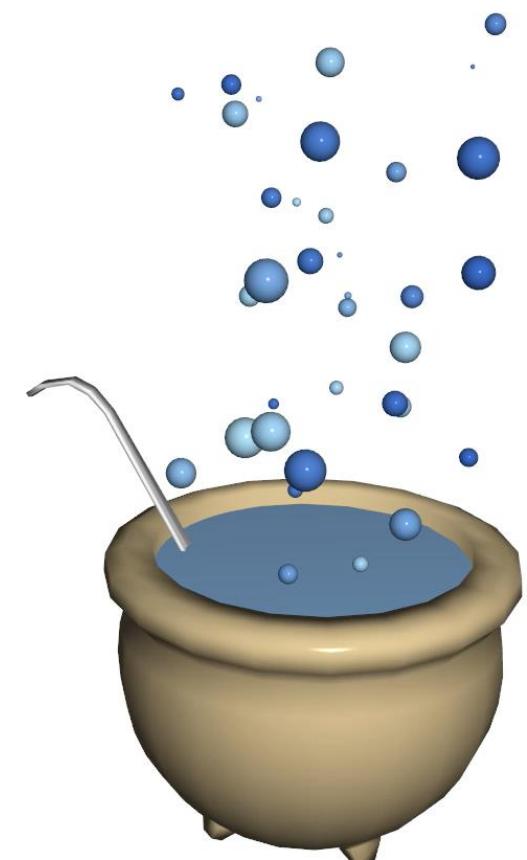
- Intégration du rebond
- Équation du mouvement par morceaux
 - $p(t) =$
- Comment calculer le temps t_i d'impact au sol ?
- Quelle vitesse après impact ?



Pour commencer – Trajectoire simple

Mouvements arbitraires

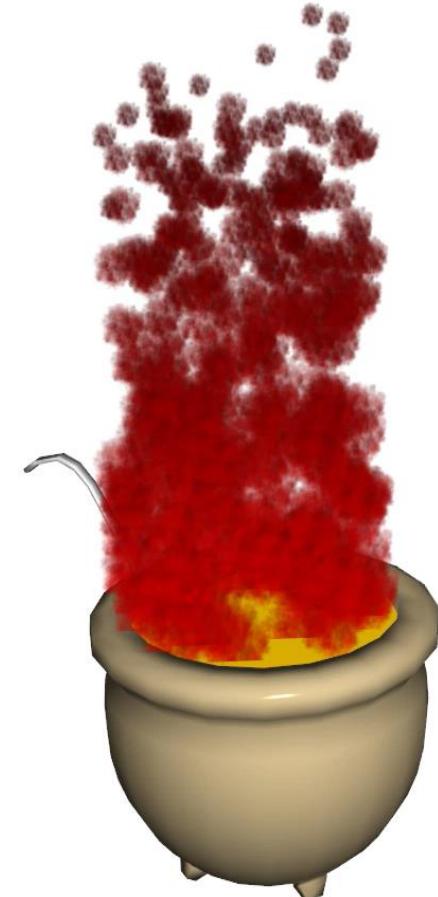
- Trajectoires « artistiques »
- Un mouvement arbitraire
 - Des fonctions sinusoidales
 - De l'aléatoire



Pour commencer – Trajectoire simple

Mouvements arbitraires

- Trajectoires « artistiques »
- Un mouvement arbitraire
 - Des fonctions sinusoidales
 - De l'aléatoire
 - Avec des imposteurs



Cas D'utilisation



The Lord of the Rings

Cas D'utilisation



The Lord of the Rings

Cas D'utilisation



The Lord of the Rings

Afficher Les particules

Avec IMN401

- Afficher chaque particule p indépendamment
- Modifier sa position dans le vertex shader
- Beaucoup d'appels CPU
- Nb de particules limite les performances

```
for (each object in my scene)
{
    glDrawElements(...);
```

En plus efficace

- Utiliser le mécanisme d'*instancing*
- Un unique modèle géométrique de particule
- Un appel pour afficher N instances
- Dans le shader
 - `gl_InstanceID` pour identifier chaque instance

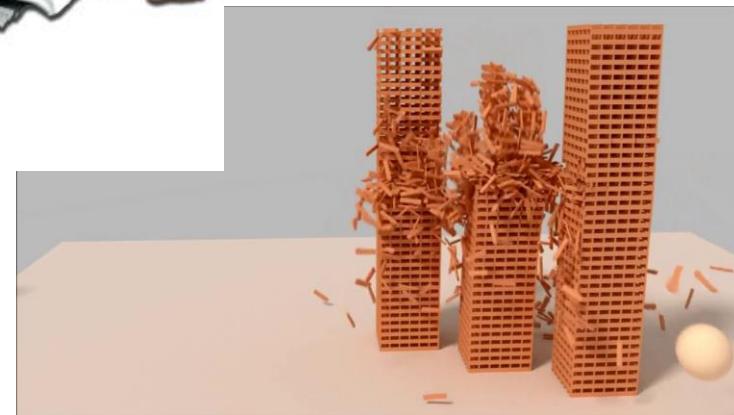
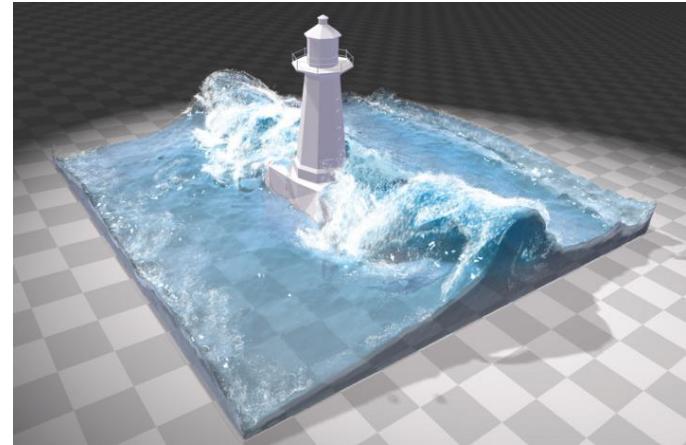
```
glDrawElementsInstanced(p,N);
```

Animation basée Physique

Animation basée physique

Simulation physique

- Besoin de dynamique précise
- Dur à faire de manière procédurale
- De multiples éléments en interaction
 - Collisions, objets rigides...
 - De la géométrie complexe
 - Vêtements, fluides...



Principe général

Décrire le système

- Paramètres
 - Position, vitesse, orientation
- État au temps $t = 0$

Évolution

- Équations différentielles
- Règles de physiques
- Forces, conservation d'énergie, contraintes

Solution numérique

- Approche numérique itérative
- Intégration numérique

Mécanique classique

Des grandeurs physiques

- Newton (N) : Unité de mesure d'une force
- Inertie : Résistance d'un objet à la modification de sa vitesse (linéaire ou de rotation).
- Masse : Quantité d'inertie d'un corps

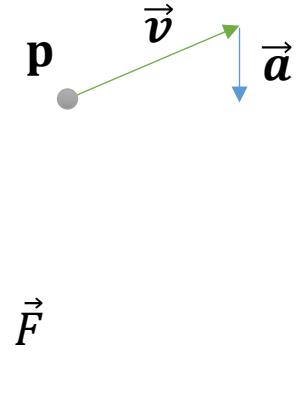
Lois de Newton

- En l'absence de toute force, un corps matériel, s'il est au repos, reste au repos. S'il est en mouvement, il conserve un mouvement rectiligne et uniforme.
- L'application d'une force \vec{F} au corps de masse m se traduit par la variation de sa vitesse (accélération)
- Entre deux corps, il ne peut y avoir d'action que mutuelle.

Physique d'une particule

Le cas simple : une particule

- Une position \mathbf{p}
- Une vitesse \vec{v}
- Une masse m
- Une accélération \vec{a}



Relation entre forces et accélération

$$\bullet \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Avec plusieurs forces

$$\bullet \sum_{i=1}^m \vec{F}_i = m\vec{a}$$

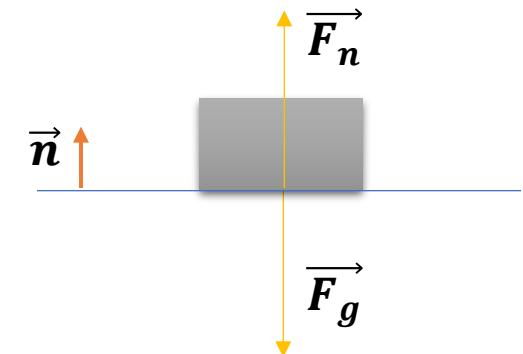
Les forces classiques

La gravité

- Force sans contact uniforme (en physique classique)
- $\mathbf{g} = 9,81 \text{ m/s}$

La force normale

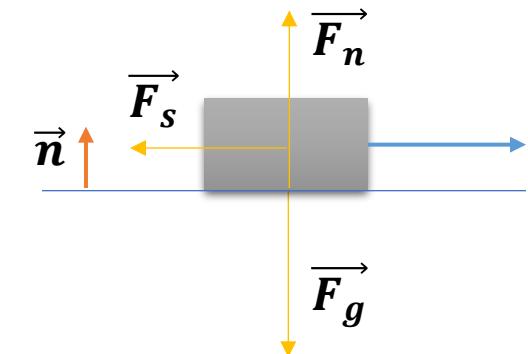
- Provoque du contact entre deux objets
- Répulsion d'un corps sur un autre
- Dépend de l'angle d'inclinaison
- $\overrightarrow{\mathbf{F}_n} = \mathbf{m}\mathbf{g} \cos \theta$



Les forces classiques

La force de friction

- Force résultant des multiples collisions lors du frottement
- Perpendiculaire à la force normale
- De direction opposée au mouvement



Frottement statique

- $\vec{F}_s \leq s\vec{F}_n$
- s coefficient de frottement statique (empirique)
- Restreint le déplacement

Les forces classiques

La force de friction

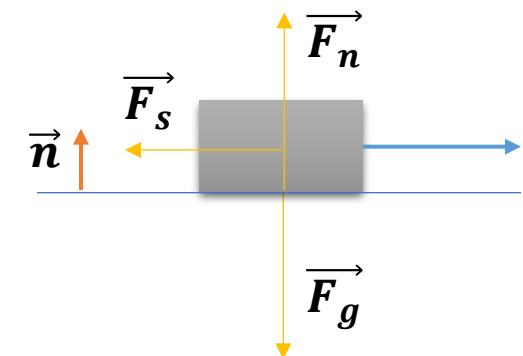
- Force résultant des multiples collisions lors du frottement
- Perpendiculaire à la force normale
- De direction opposée au mouvement

Frottement statique

- $\vec{F}_s \leq s\vec{F}_n$
- s coefficient de frottement statique (empirique)
- Restreint le déplacement lorsque l'objet ne bouge pas

Frottement dynamique

- Des que la force $\vec{F} > \vec{F}_s$, l'objet entre en mouvement,
- Dans ce cas, on pale de force de friction cinétique
- Coefficient cinétique k : $\vec{F}_k \leq k\vec{F}_n$



Les forces classiques

Un exemple simple

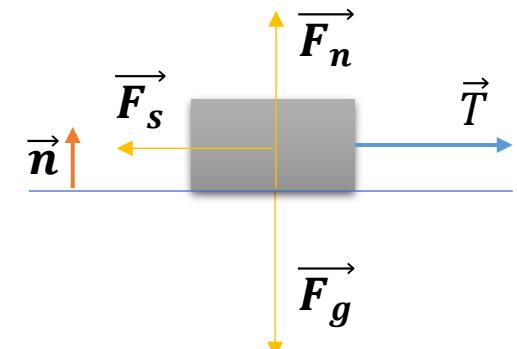
- Un bloc de 10 kg sur un plancher
- Le coefficient statique s est 0,5
- Le coefficient cinétique k est 0,4

Exemple 1

- Traction $\vec{T} = (20,0,0)N$
- Calculer \vec{F}_s

Exemple 2

- Traction $\vec{T} = (120,0,0)N$
- Calculer \vec{F}_s



Les forces classiques

Un exemple simple

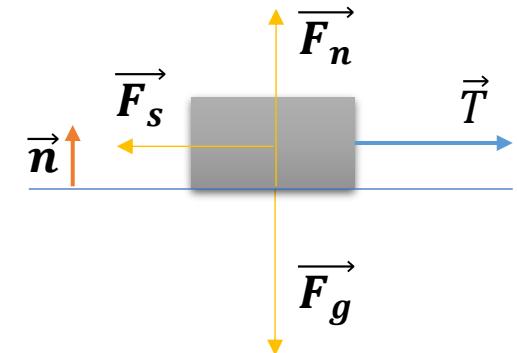
- Un bloc de 10 kg sur un plancher
- Le coefficient statique s est 0,5
- Le coefficient cinétique k est 0,4

Exemple 1

- Traction $\vec{T} = (20,0,0)N$
- $\vec{F}_s = 0.5 * 98 = (49,0,0)N$
- $\vec{F}_s > \vec{T}$: L'objet reste immobile

Exemple 2

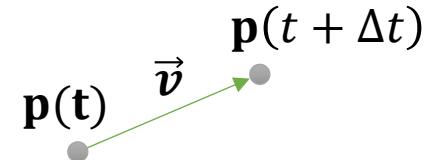
- Traction $\vec{T} = (120,0,0)N$
- $\vec{F}_s = 0.5 * 98 = (49,0,0)N$
- $\vec{F}_s > \vec{T}$: l'objet bouge
- $\vec{F} = T - 0.4 * 98 * (1,0,0) = (80.8,0,0)N$



Simulation dans le temps

Intégration temporelle

- Il faut intégrer dans les temps
- Simulation numérique itérative
- Par exemple :
 - $p(t + \Delta t) = p(t) + v(t)\Delta t$
- On réalise en fait une intégration de la vitesse
 - $\int v dt = c + tv$
 - La dérivée de la position (la vitesse) servant à faire une approximation de la nouvelle position



Intégration d'Euler

- Formellement, on note
- $y_{n+1} = y_n + hf'(x_n, y_n)$
- Avec h l'intervalle d'intégration

Les méthodes d'intégration

Intégration d'Euler

- Méthode non-symétrique
- Intuitif mais imprécis si le pas de temps est trop grand
- Rapide à calculer

Intégration de Runge-Kutta

- $y_{n+1} = y_n + h f'(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n))$

Intégration d'Euler implicite

- $y_{n+1} = y_n + h f'(x_{n+1}, y_{n+1})$

Problème de précision

La précision avant tout

- Phénomènes physiques continus
- Simulation numérique discrète
- Qu'est ce qui pourrait mal se passer ?
- Rater des phénomènes
 - Collisions, contact, forces
 - Sur-correction des problèmes

Explosions numériques

Des imprécisions numériques

- La valeur nulle est dure à atteindre après un mouvement si on ne la force pas
- Une force résiduelle
- Objets en équilibre

Explosions numériques

- Des sur-corrections
- Des valeurs très proches de 0 sous un diviseur

Animation Rigide de sphères

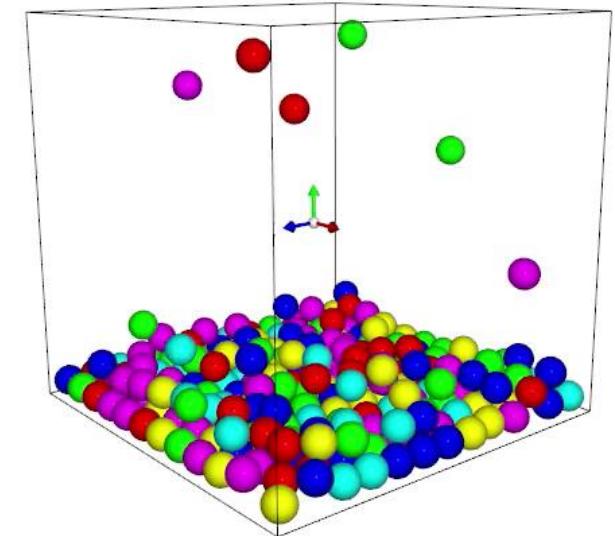
Animation de sphères

Les objectifs

- Particules modélisées par des sphères solides
- Collisions avec l'environnement
- Collision avec les autres sphères

Système physique

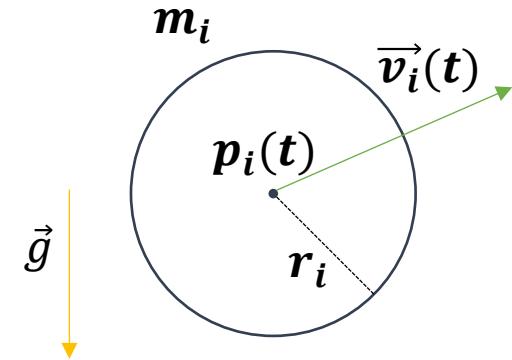
- N particules
 - Position p_i
 - Vitesse v_i
 - Masse m_i
 - Rayon r_i



Animation de sphères

Système physique

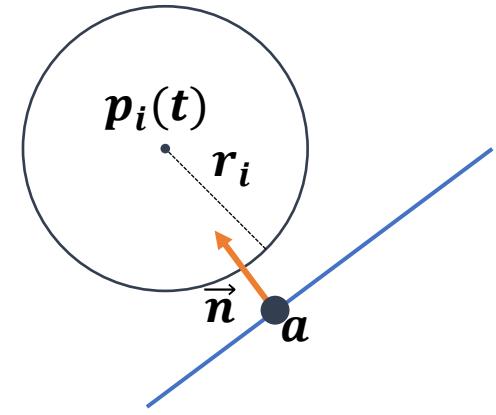
- N particules
 - Position p_i
 - Vitesse v_i
 - Masse m_i
 - Rayon r_i
- Force de gravité
 - $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$
- Solution numérique
 - Euler semi-implicite
 - $\vec{v}_i(t+1) = \vec{v}_i(t) + h \vec{F}_i$
 - $p_i(t+1) = p_i(t) + h \vec{v}_i(t+1)$



Histoires de collisions

Collision avec un plan

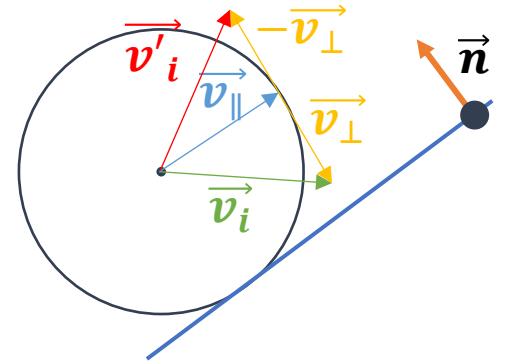
- Un plan P paramétré par un point a et sa normale \vec{n}
 - $p \in \mathbb{R}^3 \in P \Rightarrow (p - a) \cdot \vec{n} = 0$
 - $(p_i - a) \cdot \vec{n} > r_i$: au dessus
 - $(p_i - a) \cdot \vec{n} < r_i$: en collision
- Que faire en cas de collision ?



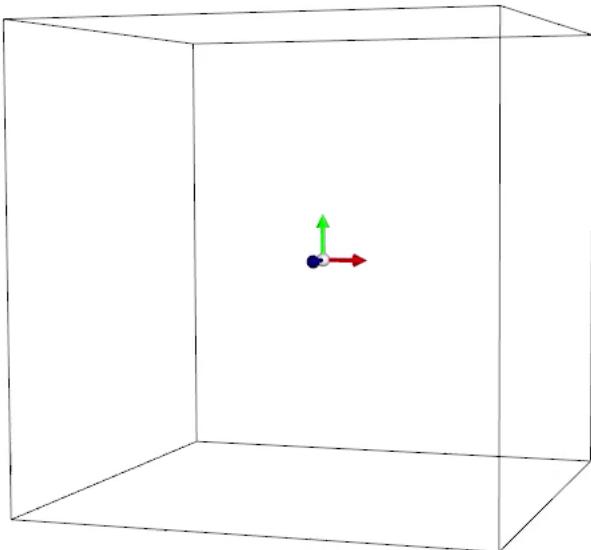
Histoires de collisions

Contact exact

- Supposons un contact exact :
 - $(p_i - a) \cdot \vec{n} = r_i$
- Mettre à jour la vitesse
 - Séparer $\vec{v}_i = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$
 - $\vec{v}_{\perp} = (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}$
 - $\vec{v}_{\parallel} = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}$
 - $\vec{v}'_i = \alpha\vec{v}_{\parallel} - \beta\vec{v}_{\perp}$
 - $\alpha \in [0, 1]$: friction
 - $\beta \in [0, 1]$: impact

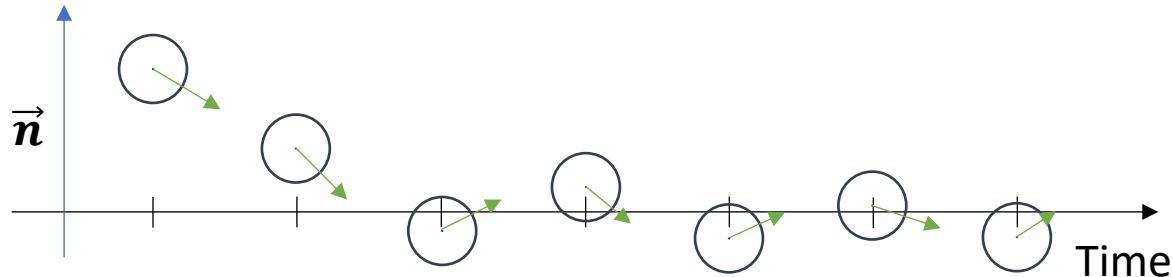


Histoires de collisions



Un monde discret

- Le contact exact n'arrive jamais dans un temps discret
- La sphère est déjà dans l'objet/sol
- Le poids agit toujours



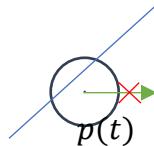
Histoires de collisions

Pas de contact exact

- On ne tombera jamais sur le contact exact en discret
- Il faut calculer la force au moment exact

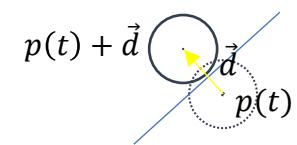
Mettre à jour la vitesse pour enlever la pénétration

- Simple pour des volumes simples
- On reste en collision



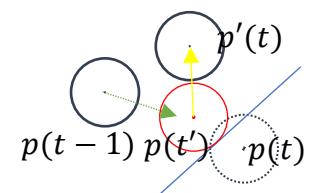
Corriger la position en projetant sur le plan (PBD)

- Simple à implémenter
- Physiquement faux

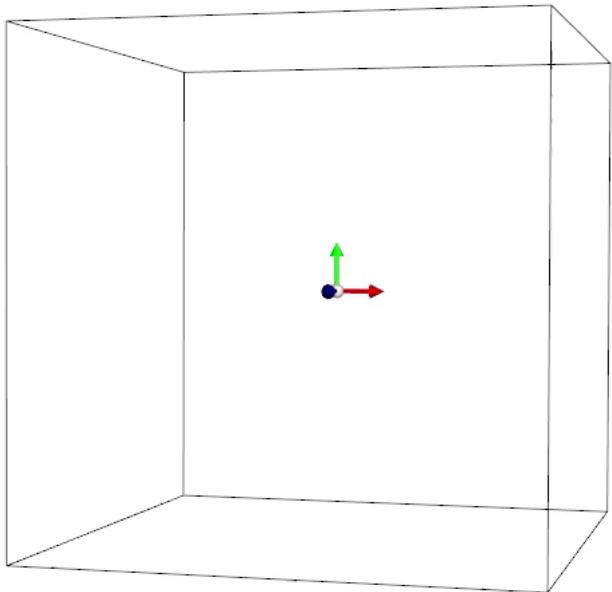


Trouver l'intersection exacte en remontant le temps (CCD)

- Physiquement exact
- Complexité élevée (recherche binaire, ...)



Histoires de collisions



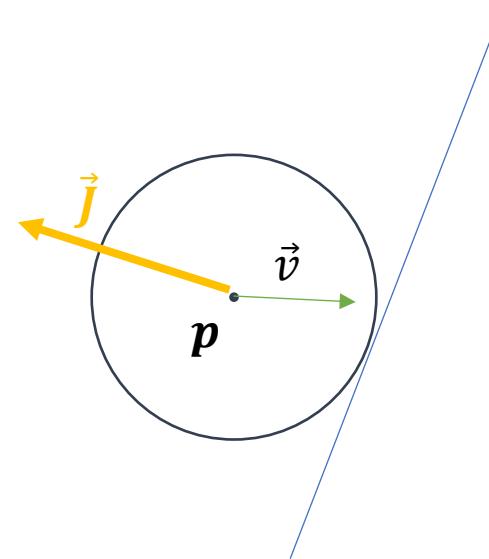
Avec reprojection

- $p'_i = p_i + d\vec{n}$
- $d = r_i - (p_i - a) \cdot \vec{n}$

Animation de sphères

Notion d'Impulsion

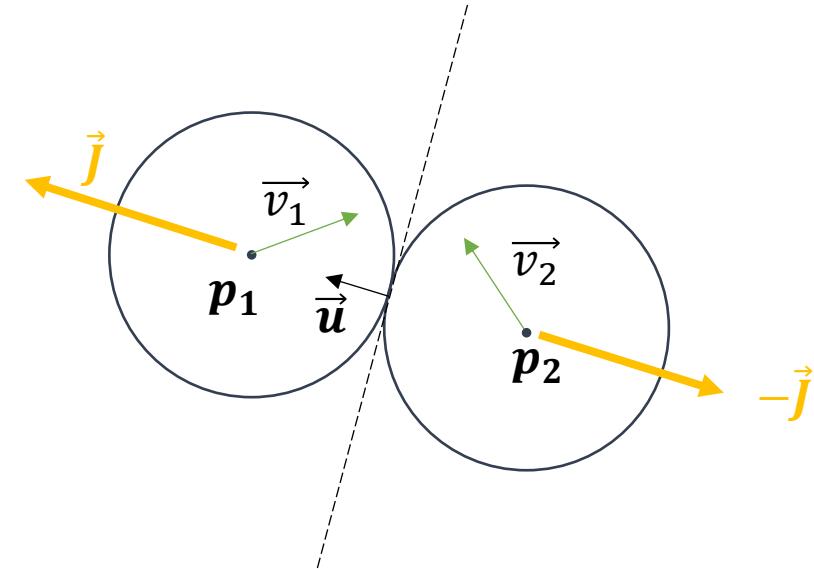
- Force intégrée sur le temps
 - $J = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt$
 - Changement brutal de vitesse dans le cas discret
- Pour une particule avec masse constante
 - $\int_{t_1}^{t_2} F(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} ma(t)dt$
 $\Rightarrow \vec{J} = m(\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1))$
 - Pour un impact
 - $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{J}/m$



Animation de sphères

Deux sphères en collisions

- Impulsion perpendiculaire au plan séparant les deux surfaces
 - $\vec{J} = j\vec{u}$, avec $\vec{u} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)/\|\vec{p}_1 - \vec{p}_2\|$
 - Le système préserve son moment linéaire
 - Les impulsions j sont égales en magnitude et opposées en direction
 - Sphères dures
 - Pas de perte d'énergie du système
 - $j = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{u}$



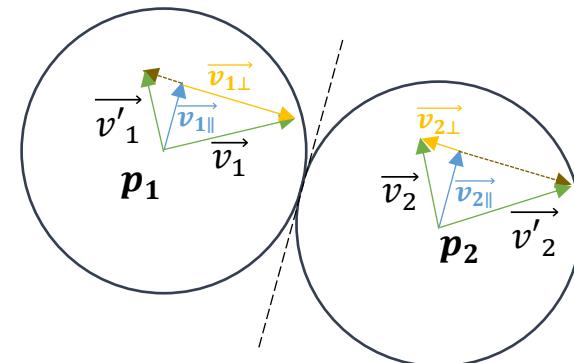
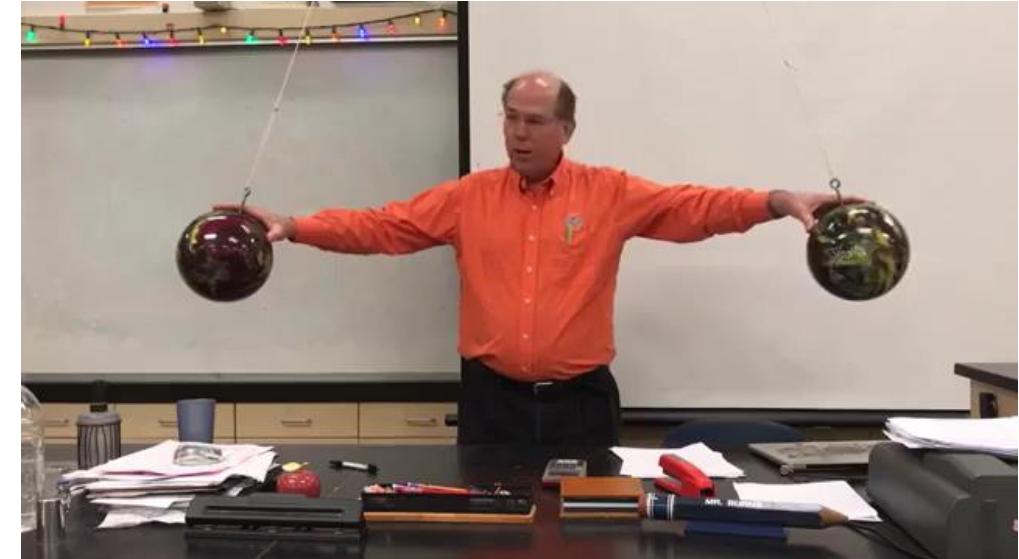
Animation de sphères

Deux sphères en collisions

- $\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \frac{\vec{J}}{m_1} = \vec{v}_1 + 2 \frac{m_2}{m_1+m_2} ((\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{u}) \vec{u}$
- $\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{J}}{m_2} = \vec{v}_2 + 2 \frac{m_1}{m_1+m_2} ((\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{u}) \vec{u}$

Deux sphères de poids identique

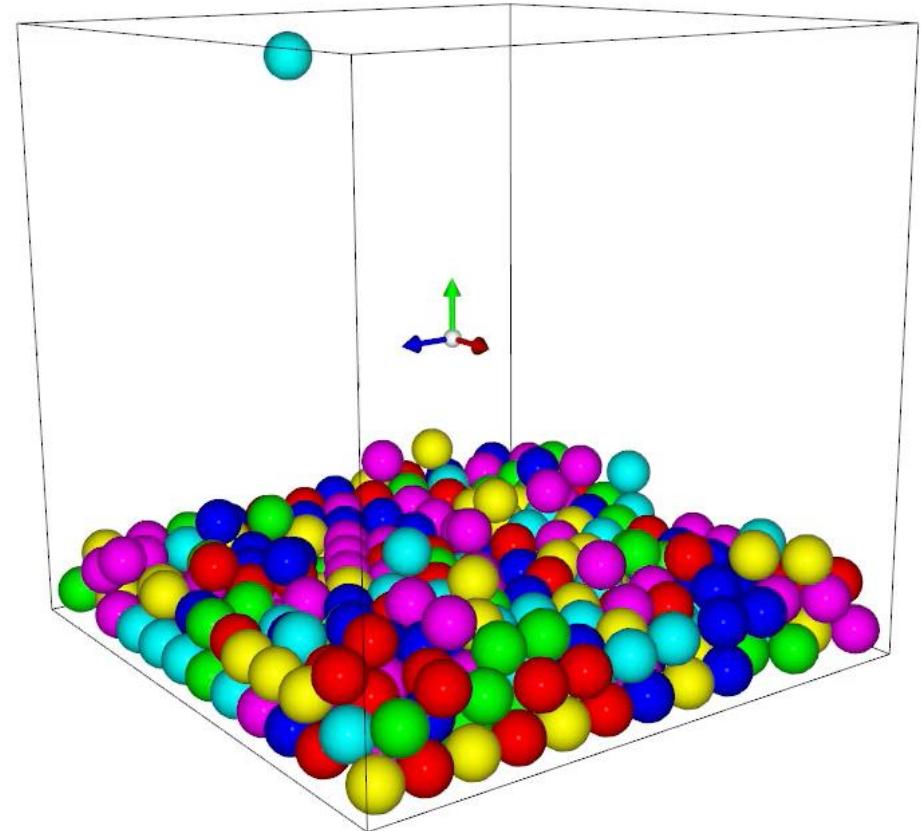
- Séparer la vitesse selon le plan séparateur
 - $\vec{v}_i = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$
 - $\vec{v}_{\perp} = (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{u}$ et $\vec{v}_{\parallel} = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{u}$
- Echanger leurs vitesses \vec{v}_{\perp}
- $\vec{v}'_1 = \vec{v}_{1\parallel} - \vec{v}_{2\perp}$ et $\vec{v}'_2 = \vec{v}_{2\parallel} - \vec{v}_{1\perp}$
- On peut ici aussi utiliser des atténuations (α, β)



Collisions multiples

En résumé

- Déetecter les collisions
- Si (vitesse relative $> \epsilon$)
 - Rebond élastique (MAJ vitesse)
 - $\vec{v}'_i = \alpha \vec{v}_i \pm \beta \frac{\vec{J}}{m_i}$
- Sinon
 - Contact statique, friction...
 - $\vec{v}'_i = \gamma \vec{v}_i$
- Corriger la position
 - Projection sur la surface de contact
 - $p'_i = p_i \pm \frac{d}{2} \vec{u}$



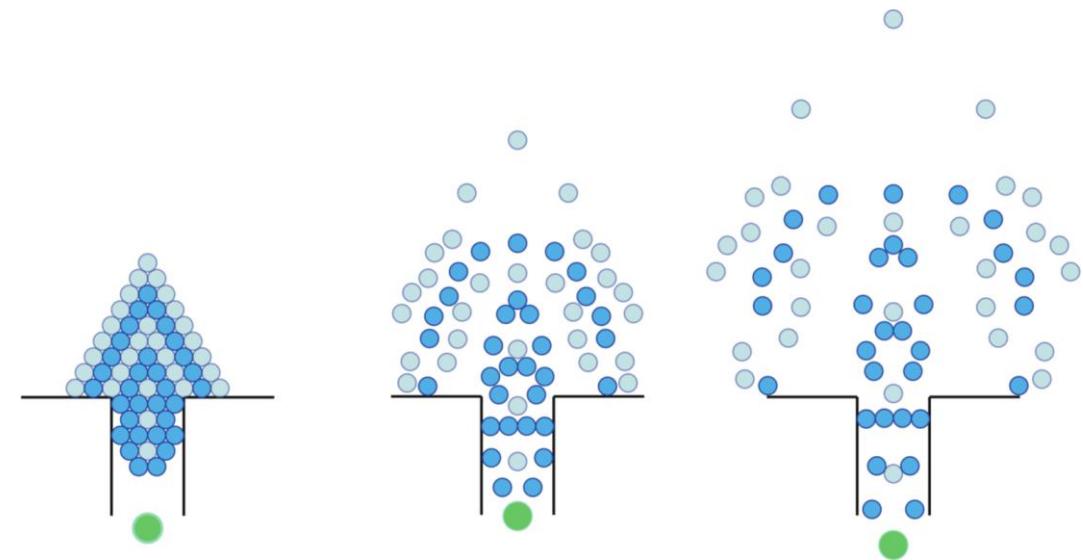
Animation de sphères

Collisions traitées par paires

- Pas d'état « global » de collisions
- Une correction peut entraîner une autre collision
- L'ordre de correction importe
 - Ca peut s'améliorer (un peu)
 - Réduire le pas de temps
 - Utiliser de multiples passes

Approche globale

- Solution complexe
 - Graphe de contact précalculé
 - Méthode de contrainte globale
 - Résolution de système global



Animation de modèles déformables

Modèles de matériaux

Elasticité

- La forme revient à sa position au repos sans forces externes
- Elastique pur ↔ Ne perd pas d'énergie



Plasticité

- Opposé d'élasticité (Change sa position au repos)
- Ne reviens pas à sa forme originale
- Ductile
 - Permet de grandes déformations (plastiques)
 - « Cassant »
 - Ne permet pas de grand déformations (verres, céramiques)



Viscosité

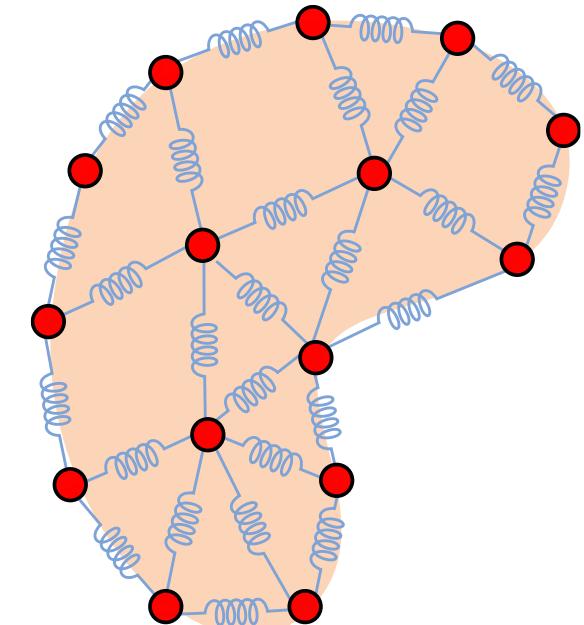
- Résistance à l'écoulement (fluides : miel...)



Modéliser des formes élastiques

Système masse-ressorts

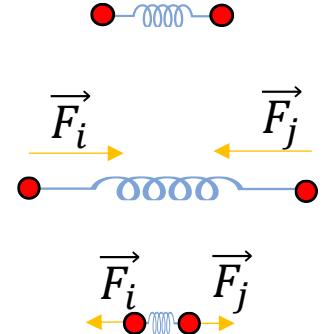
- Des particules (p, \vec{v}, m)
- Répartition sur la forme
- Ressorts:
 - Lien entre deux particules
 - Applique une force



Système Masse-Ressort

Ressorts

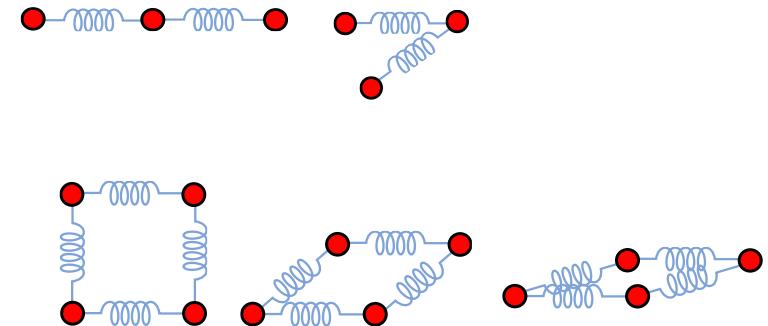
- Réseau de ressorts
- Attire et repousse les particules
- Applique une force sur i et j
- $\vec{F}_i = -\vec{F}_j$
- Dépend de
 - la rigidité k du ressort
 - la longueur L_r du ressort au repos
 - la longueur actuelle $L(t)$ du ressort
- $$\vec{F}_i = k(L(t) - L_r) \frac{\overrightarrow{(p_j - p_i)}}{\|j-i\|}$$



Différents ressorts

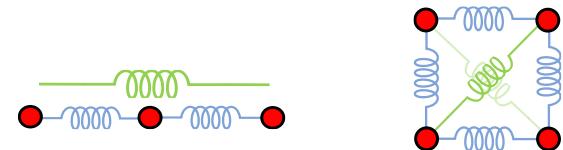
Ressorts structurels

- Particules du voisinage direct
 - Arêtes du maillage
 - Limite l'elongation et la contraction
 - Peut se tordre, se cisailleur, s'effondrer



Ressorts additionnels

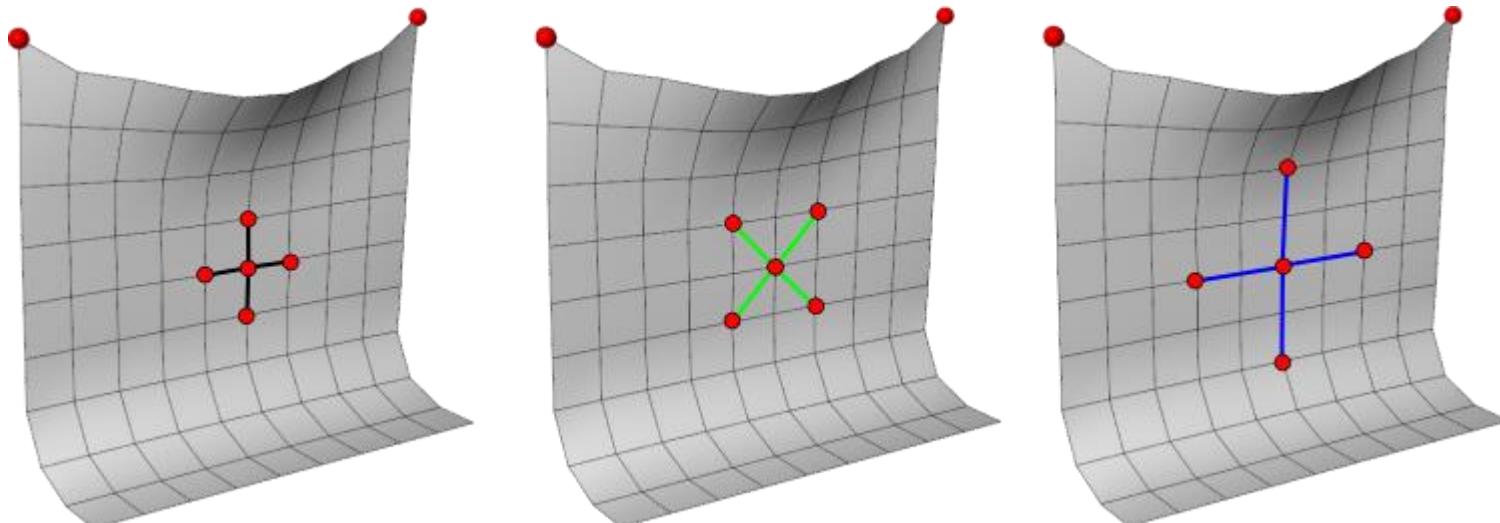
- Ressorts de courbures
- Ressorts de cisaillements
- (2,3)-voisinage



Animation de tissu

Système masse-ressorts

- Particules sur une grille $N \times N$
 - Masse m de chaque particule
 - $m_{totale} = N^2m$
- Mettre les ressorts de structures, de cisaillement et de courbure



Animation de tissu

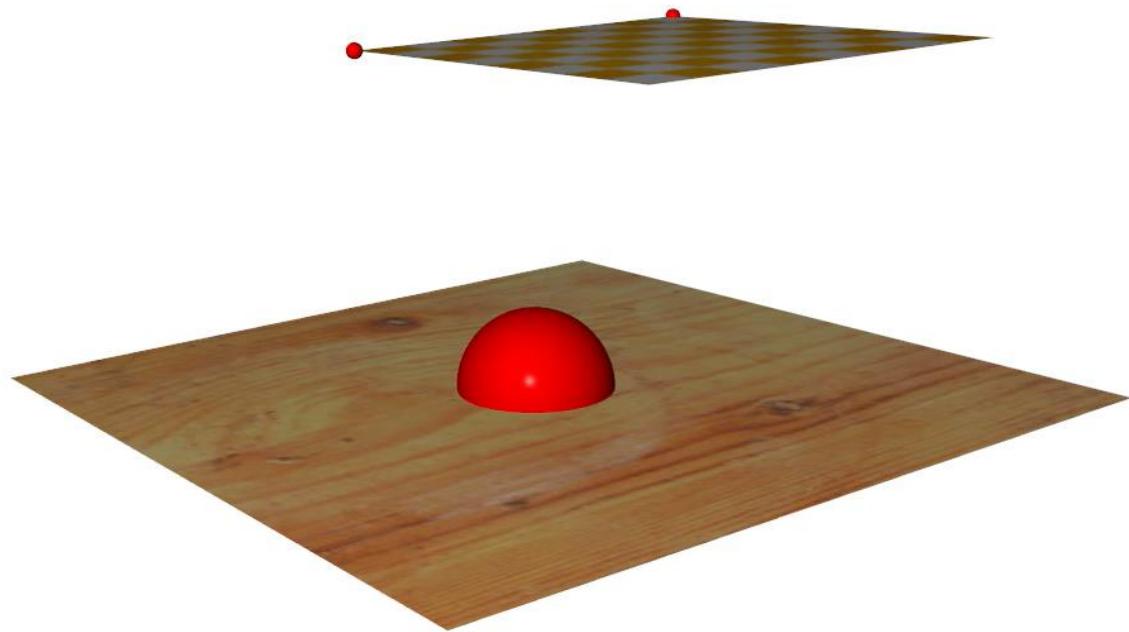
Simulation dans le temps

- Force finale sur chaque particule i
- $F_i(p, v, t) = m_i g - \mu \overrightarrow{v_i(t)} + \sum_{j \in V(i)} k_{ij} (L_{ij}(t) - L_{ij,r}) \frac{\overrightarrow{(p_j - p_i)}}{\|j-i\|}$
- Avec μ une atténuation en fonction de la vitesse (évite les oscillations)
- On peut rajouter également une constante d'amortissement k_d aux ressorts
 - $-k_d (\overrightarrow{v_j(t)} - \overrightarrow{v_i(t)})$

Intégration numérique

- Euler semi-implicite
 1. Calcul des forces
 2. Mettre à jour l'accélération
 3. Mettre à jour la vitesse
 4. Mettre à jour les positions

Animation de tissu

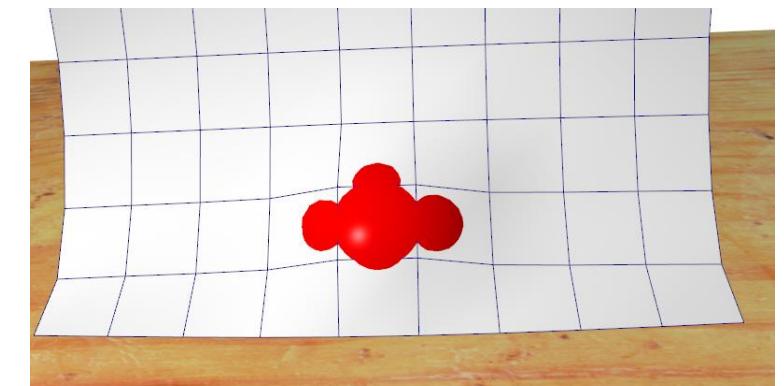
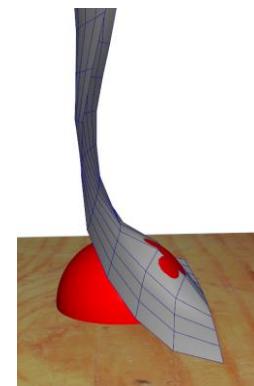


Simulation de tissu

- Gérer le vent
- Résistance à l'air (drag)
- Collisions avec la scène

Des limitations

- Collisions sur les sommets



Améliorations

Collisions

- Rechercher des collisions sommets ET faces
 - Plus coûteux
- Déplacer les sommets le long de la normale lors du calcul de collision
 - Physiquement faux
- Collision du tissu avec lui-même

[R. Bridson et al. Robust Treatment of Collisions, Contact and Friction for Cloth Animation. ACM SIGGRAPH 2002](#)

Convergence

- Résultats si on augmente l'échantillonnage ?
 - Pas de solution unique
 - Dépend de la connectivité
- Limiter les courbures
 - Formulation d'énergie

$$F = \frac{\partial E}{\partial p} \quad E = \frac{1}{2} k L k^2$$

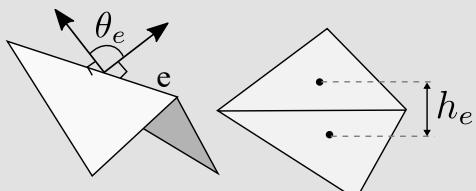
[\[Cho et al, Stable but Responsive Cloth, ACM SIGGRAPH 2002\]](#)

Courbure

Améliorations

Continuité des triangles

- Définir l'énergie de courbure des triangles



$$\bullet (x) = \sum_{\text{Arêtes}} (\theta_e - \theta_e^0) \frac{\|e^0\|}{h_e^0}$$

• [\[E. Grinspun et al., Discrete Shells, SCA 2003\]](#)

Résolution par éléments finis

- Résolution numérique globale
 - *Finite elements methods*
 - Complexité



• [B. Thomaszewski et al. \[EG 2009\]](#)