UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

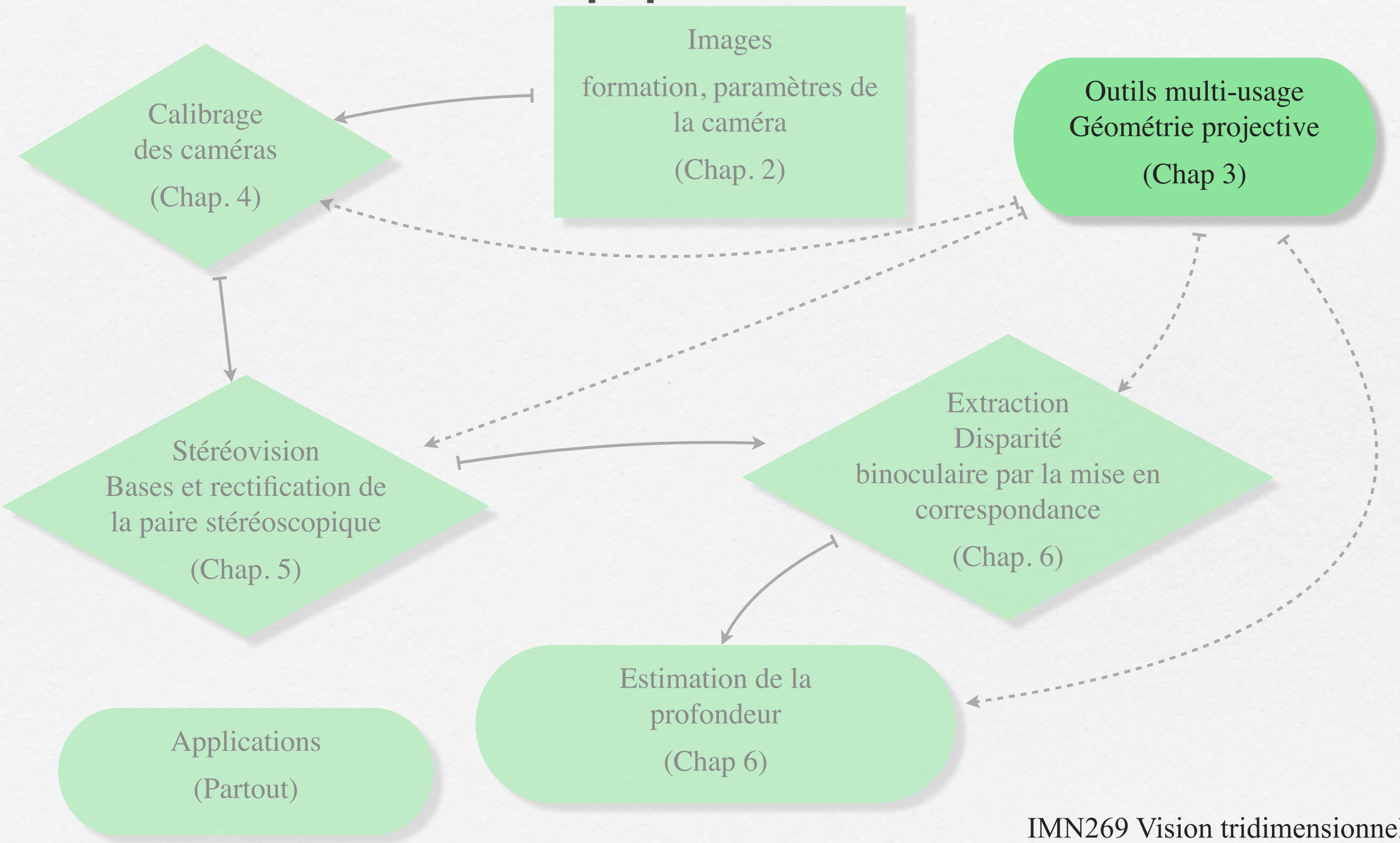
IMN269 - Vision tridimensionnelle

Chapitre 3

Géométrie projective

notes de cours de
Marie-Flavie Auclair-Fortier
feat. Olivier Godin

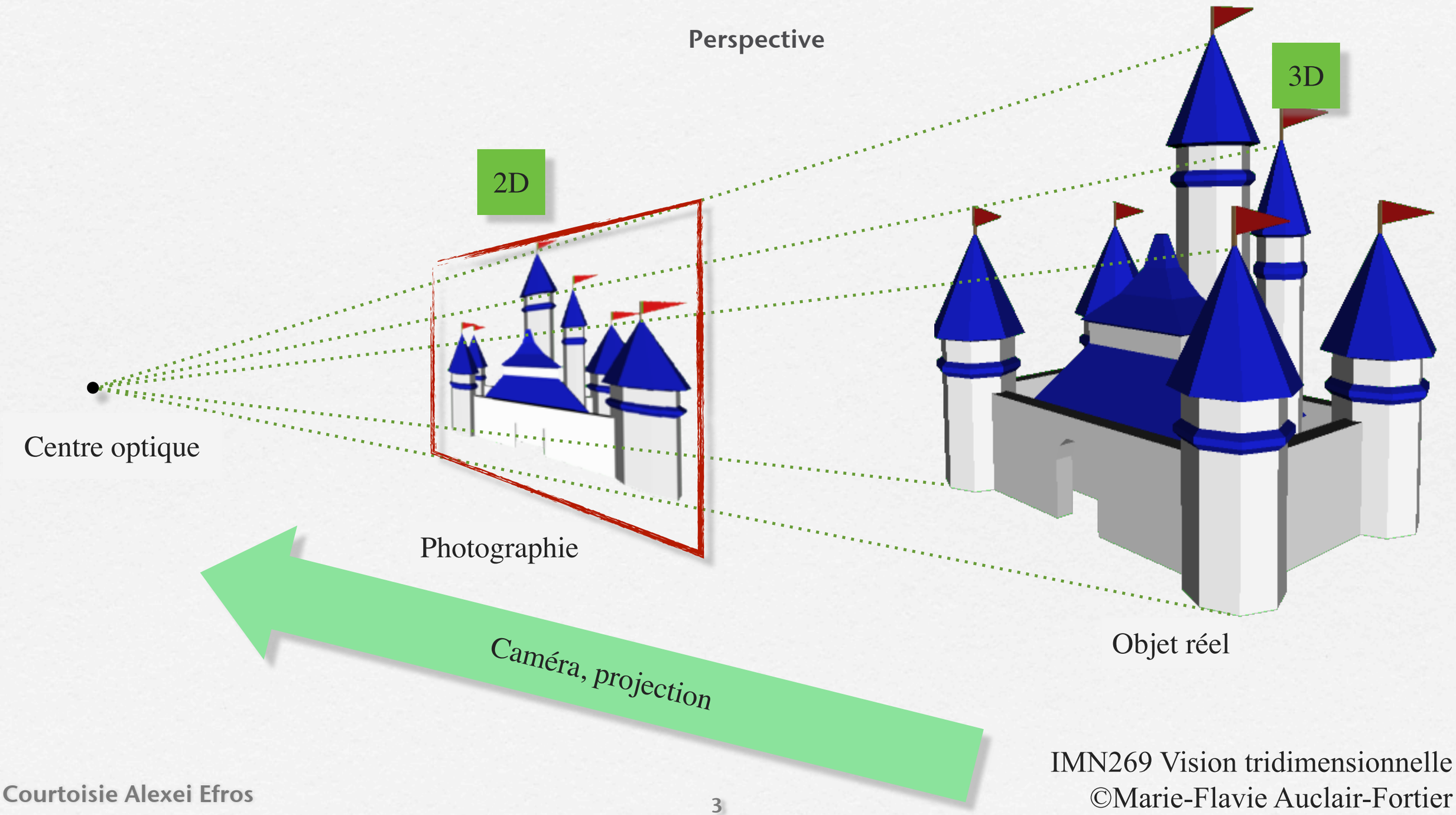
Cas de la vision stéréoscopique



©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Principes

- Formation d'image

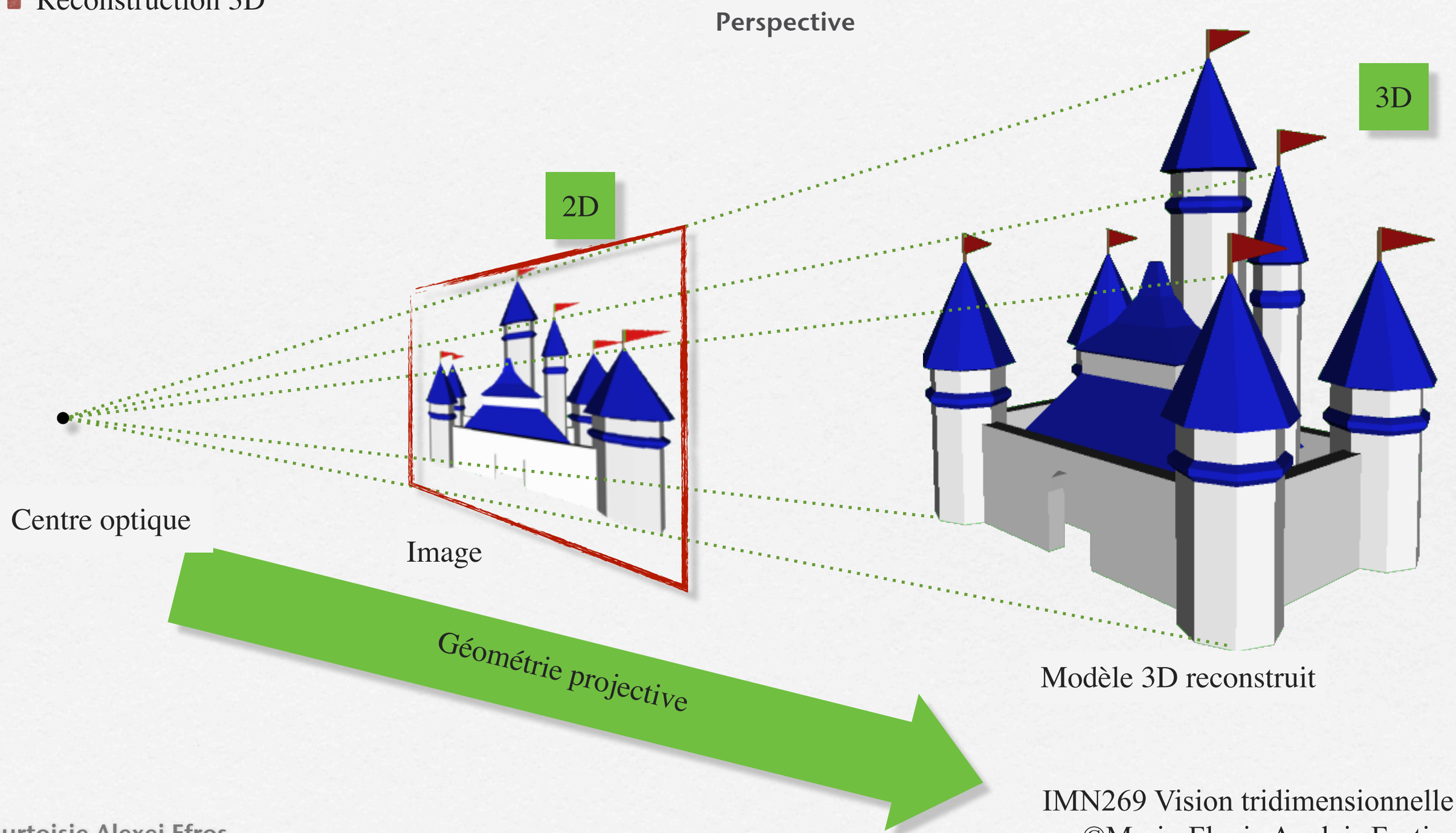


Courtoisie Alexei Efros

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Principes

- Reconstruction 3D

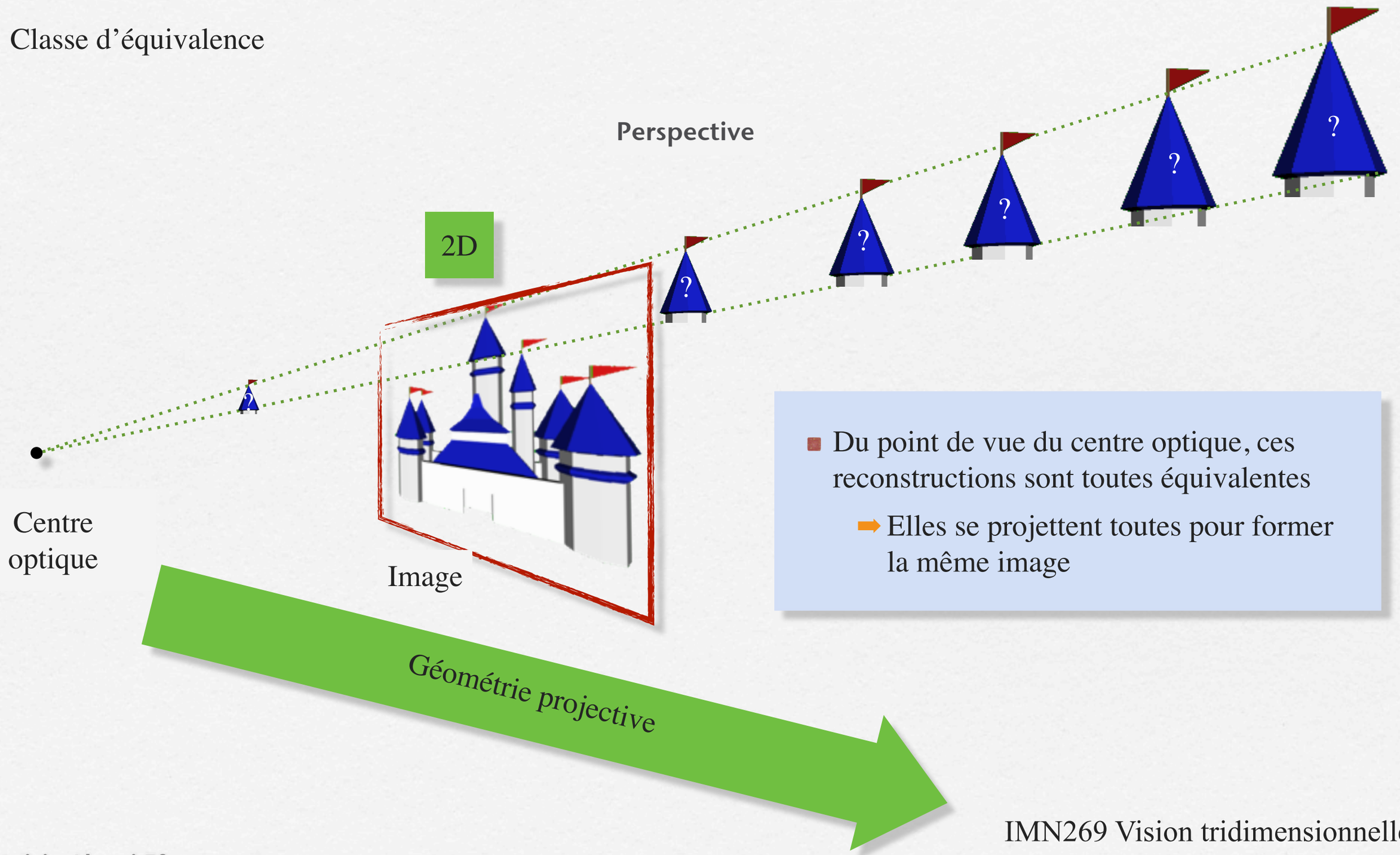


Courtoisie Alexei Efros

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Principes

- Classe d'équivalence



- Du point de vue du centre optique, ces reconstructions sont toutes équivalentes
  - ➡ Elles se projettent toutes pour former la même image

Courtoisie Alexei Efros

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Quelques points avant de commencer

- La géométrie projective est un outils très pertinent en vision artificielle
  (mais aussi en infographie, vous l'avez déjà utilisé...)
- Exploiter la perspective, le parallélisme et ses propriétés mathématiques en géométrie projective
- Nature projective de la caméra
- Différent de la géométrie Euclidienne!!!
- Unifie des concepts comme le parallélisme et l'infini
- Géométrie plus générale que la géométrie Euclidienne

- Géométrie par une seule vue
- Géométrie multi-vues : 2, 3, n

- ☑ Calibrage
- ☑ Stéréovision
- ☑ Perspective
- ☑ Texture
- ☑ Mouvement
- ☑ Silhouettes

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Applications

- Correction de la perspective

Source : Hartley & Zisserman, 2003

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Applications

- Autocalibrage : déterminer la position de la caméra par rapport à la scène
  - ✓ Idée : Utiliser 3 plans perpendiculaires de la scène

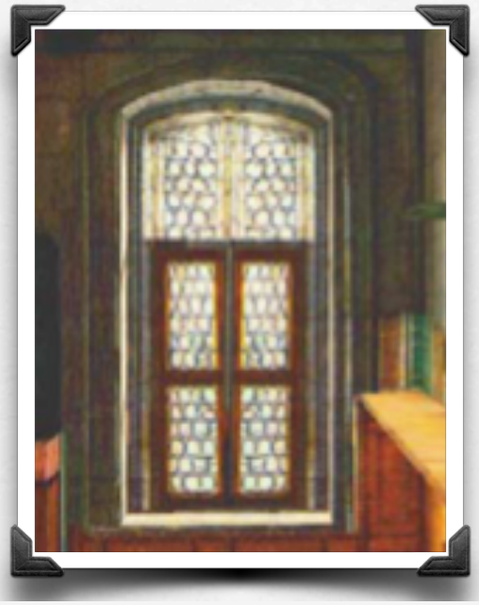
Source : A. Criminisi

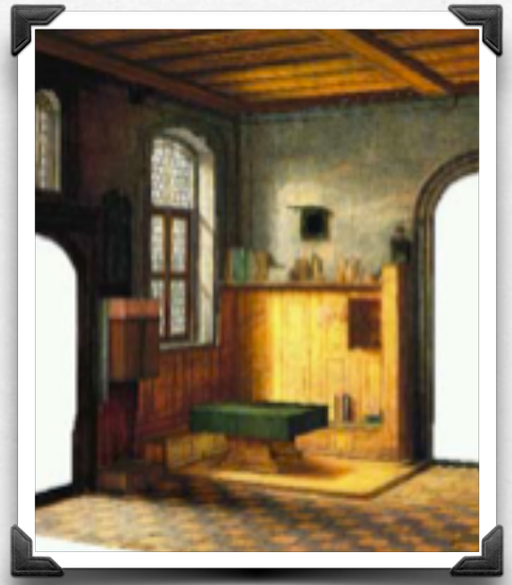
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Applications

- Reconstruction 3D à partir d'une seule image

Saint Jerôme dans son étude, Hendrick van Steenwijck, 1630





Trois vues différentes synthétisées à l'aide du modèle 3D reconstruit

Source : Hartley & Zisserman, 2003

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Applications

- Modélisation 3D de bâtiments à partir d'une seule image

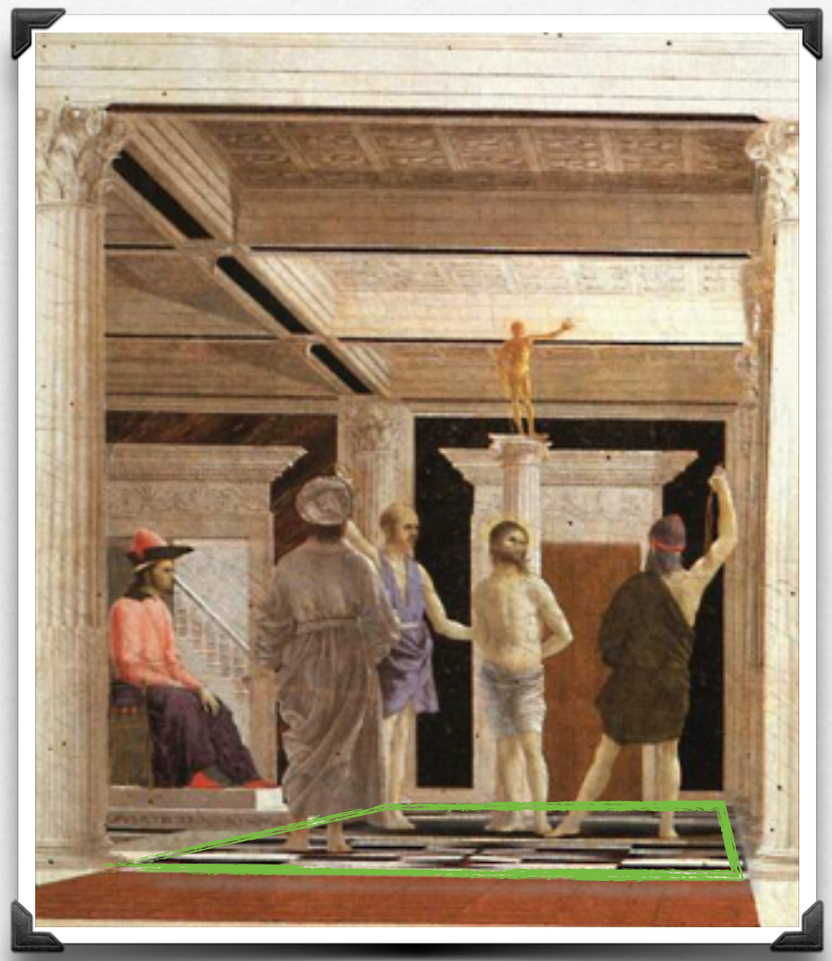
Une image et deux rendus du modèle 3-D
construit à partir de cette image

Source : P.Sturm, Auto-calibrage de caméras et reconstruction 3-D à partir d'images, 2001

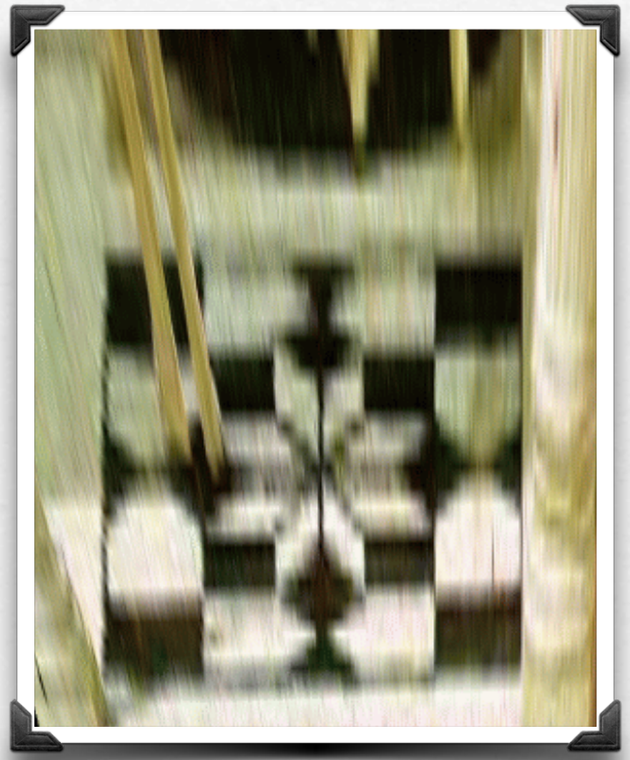
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

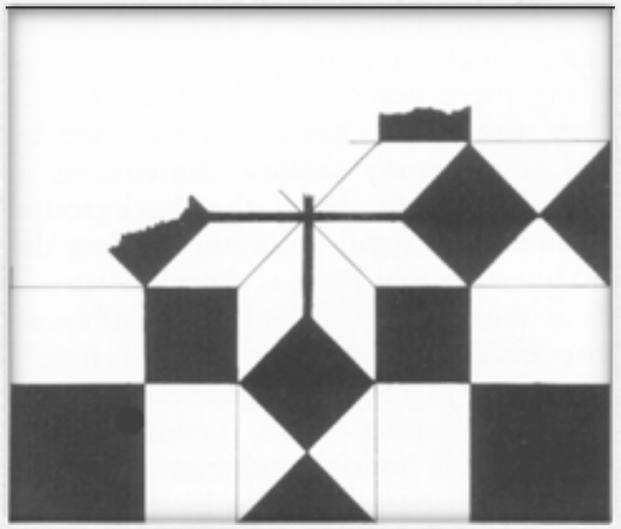
Applications

- Analyse



Quel est le motif du plancher?





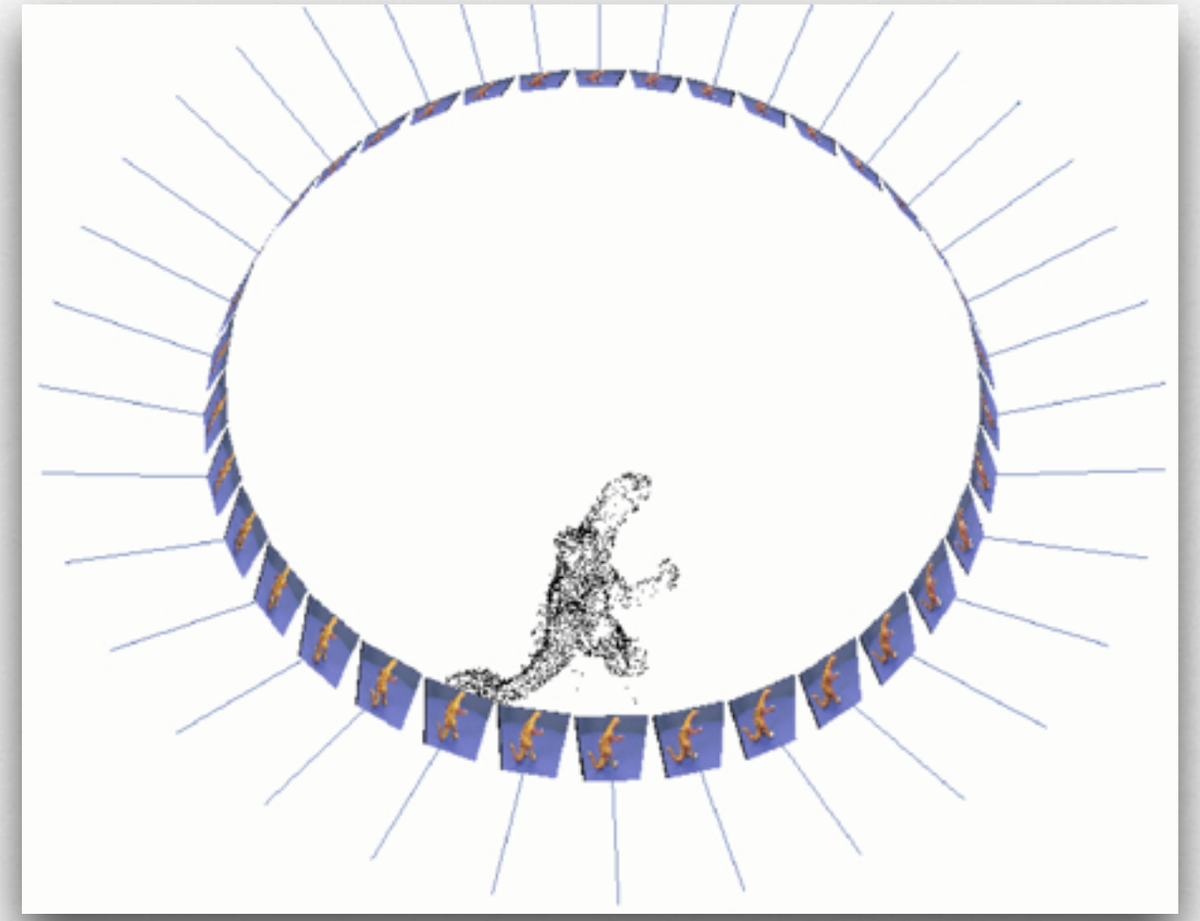
Source : Martin Kemp, The Science of Art
(reconstruction manuelle)

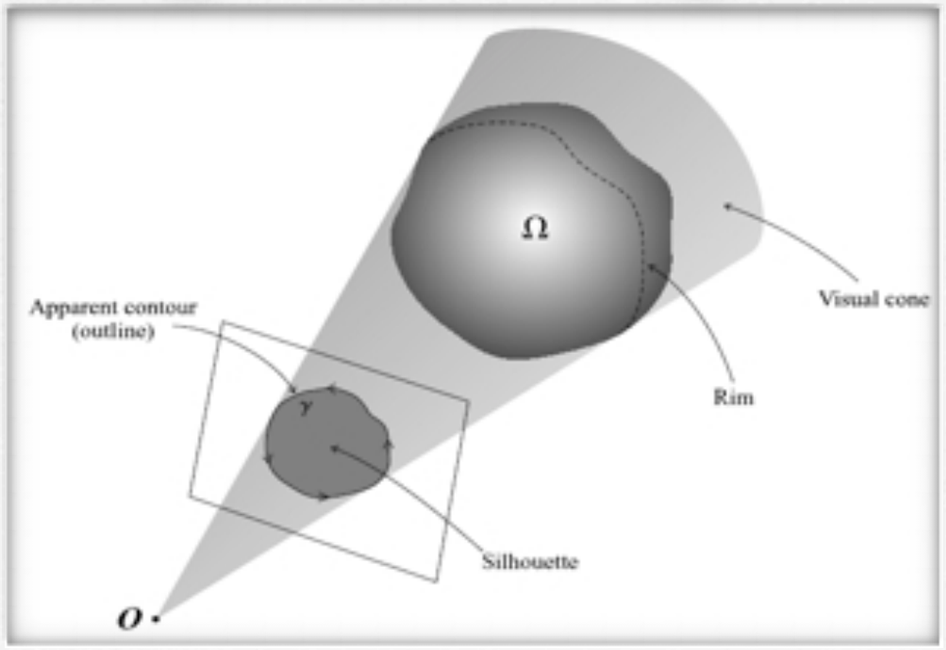
Source : Criminisi

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Applications

- Modélisation 3D d'objets réels : forme par la silhouette





Source :

Applications

- Métrologie à partir d'une vue unique

Extraction de la hauteur réelle des objets

Source : Antonio Torralba, MIT

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Applications

- Création de mosaïques d'images : Image grand angle virtuelle

Source : Alexei Efros, CMU, Fall 2008

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Applications

- Création de mosaïques d'images : Image grand angle virtuelle

Source : Alexei Efros, CMU, Fall 2008

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Plan du chapitre

1. Plan projectif

1.1. Représentation homogène d'une droite

1.2. Représentation homogène d'un point

1.3. Droite joignant 2 points

1.4. Intersection de 2 droites

1.5. Point idéal

1.6. Droite à l'infini

1.7. Dualité

2. Transformations projectives

3. Espace projectif (aperçu)

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

- Notations et/ou rappels

✓ vecteur colonne : $\mathbf{p}$ ou $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ou (x,y,z)

✓ vecteur ligne : $\mathbf{p}^t$ ou $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ ou $(x,y,z)^t$

✓ produit scalaire : $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}^t{}_1\mathbf{p}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

✓ produit vectoriel : $\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ -(x_1z_2 - z_1x_2) \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{bmatrix}$

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

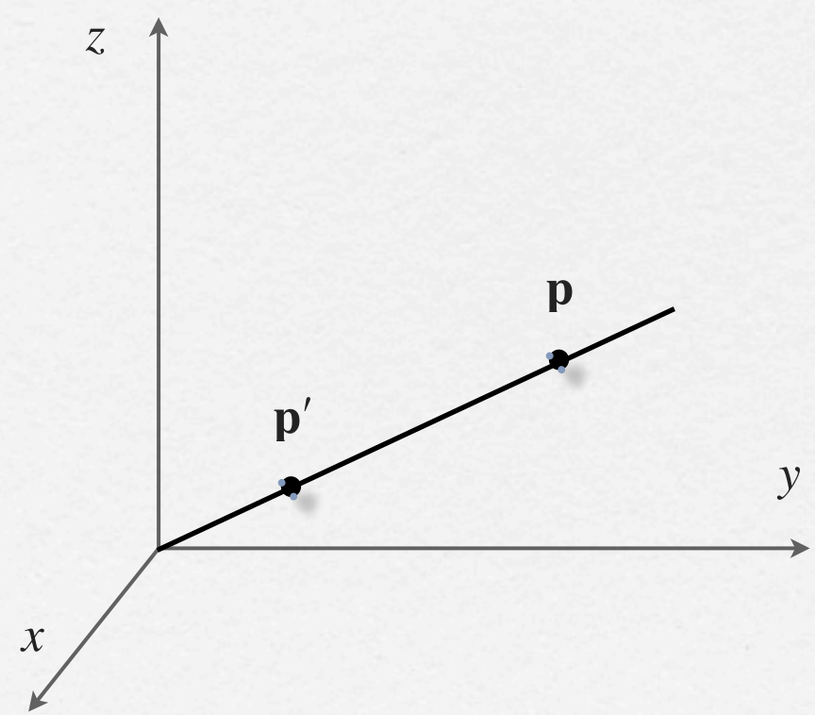
- Définition : Plan projectif $\mathbb{P}^2$

  Ensemble des classes d'équivalence de triplets ($\mathbb{R}^3$) où $\mathbf{p} = (x, y, z)$ et $\mathbf{p}' = (x', y', z')$ sont équivalents SSI

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ et } \lambda \neq 0$$

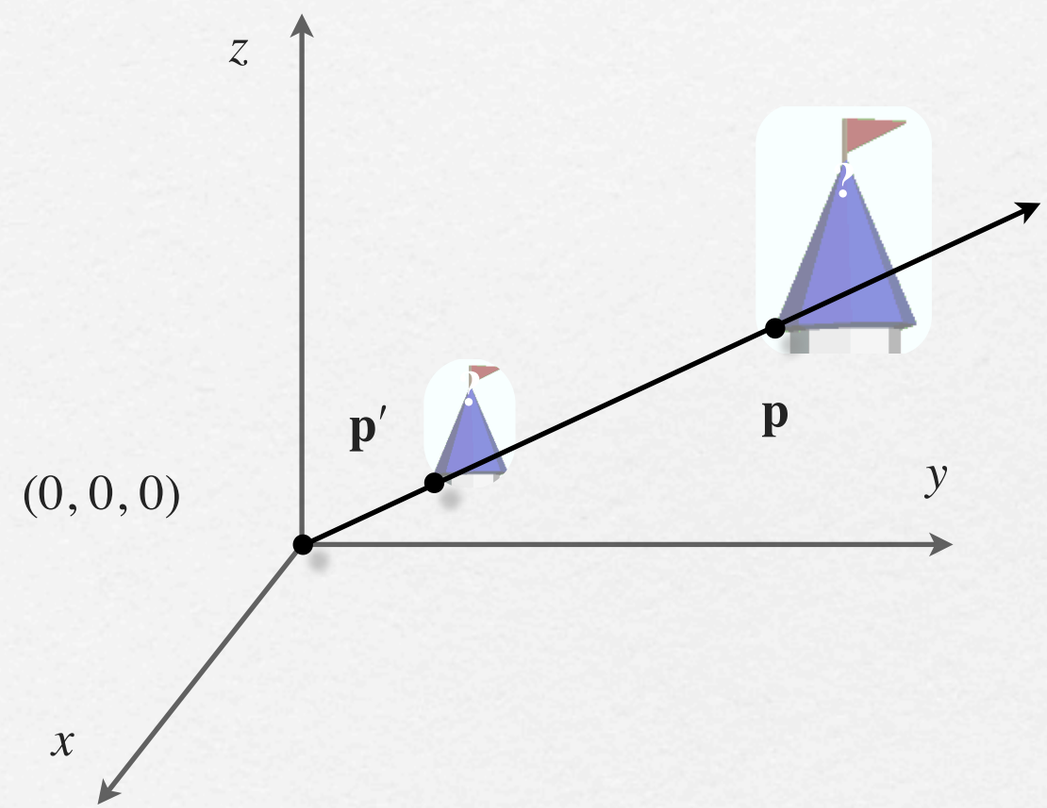
Facteur d'échelle
ou d'équivalence

On écrit alors $p \equiv p'$.



1. Plan projectif

- Dans la géométrie projective, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ sont considérés équivalents (égaux) :
  - ➡ on ne les distingue pas.



- De même tous les points sur le rayon qui les traverse et qui passe par (0, 0, 0)

IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Plan du chapitre

1. Plan projectif
   1.1. Représentation homogène d'une droite
   1.2. Représentation homogène d'un point
   1.3. Droite joignant 2 points
   1.4. Intersection de 2 droites
   1.5. Point idéal
   1.6. Droite à l'infini
   1.7. Dualité
2. Transformations projectives
3. Espace projectif (aperçu)

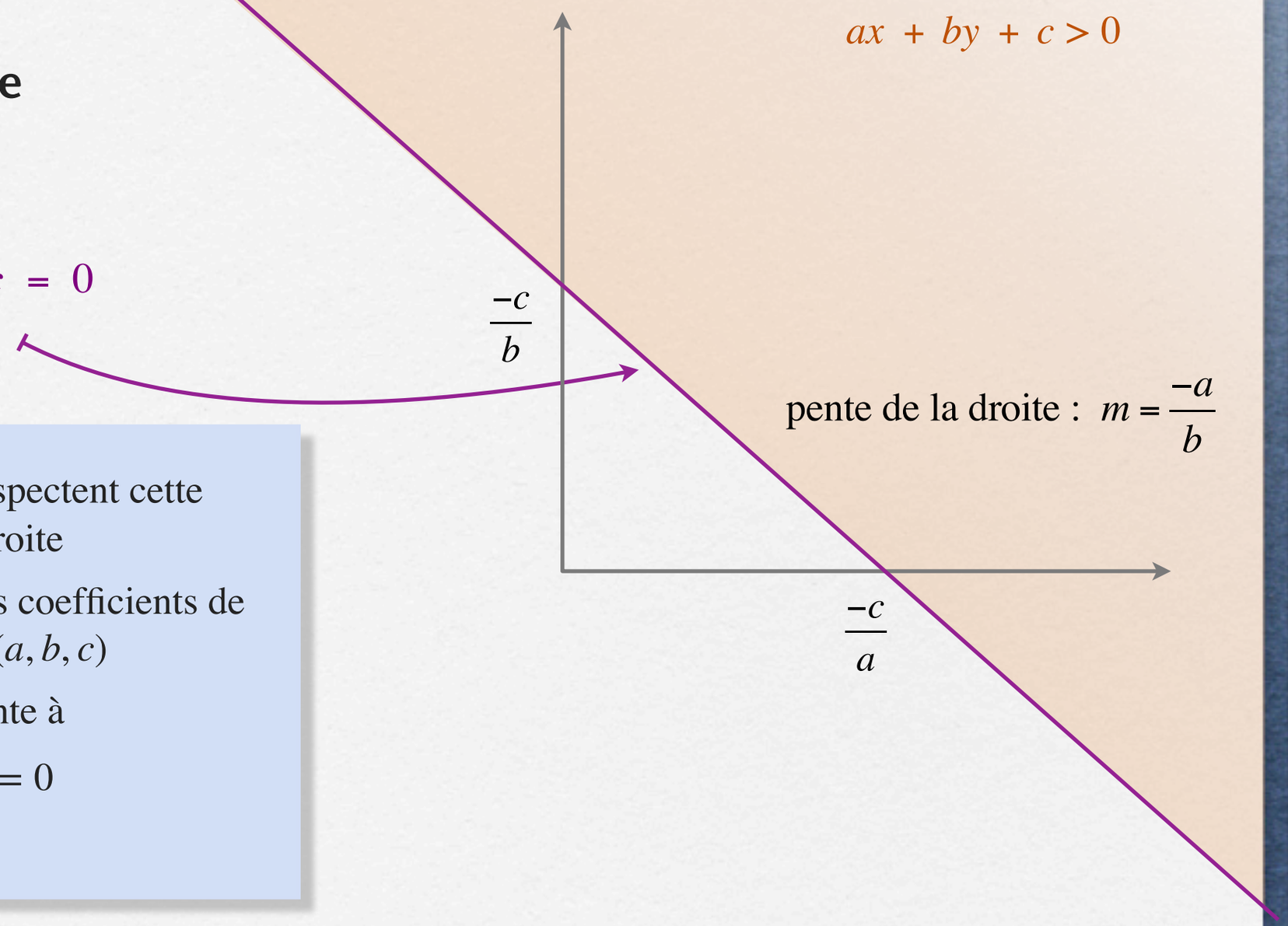
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

1. Représentation d'une droite

Équation d'une droite dans $\mathbb{R}^2$

$$ax + by + c = 0$$



- Tous les points (x, y) qui respectent cette équation définissent cette droite
- On peut représenter les trois coefficients de la droite par un triplet $d = (a, b, c)$
- Cette équation est équivalente à

$$kax + kby + kc = 0$$

avec $k \neq 0$

$(ka, kb, kc) = k(a, b, c) \equiv (a, b, c) \implies k(a, b, c)$ représente une **classe d'équivalence** de vecteurs homogènes

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Plan du chapitre

1. Plan projectif
   - 1.1. Représentation homogène d'une droite
   - 1.2. Représentation homogène d'un point
   - 1.3. Droite joignant 2 points
   - 1.4. Intersection de 2 droites
   - 1.5. Point idéal
   - 1.6. Droite à l'infini
   - 1.7. Dualité
2. Transformations projectives
3. Espace projectif (aperçu)

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

2. Représentation homogène d'un point

- *Rappel* : Un point (x, y) est sur une droite $\mathbf{d} = (a, b, c)$ SSI

$$ax + by + c = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d} = 0$$

Source :

IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

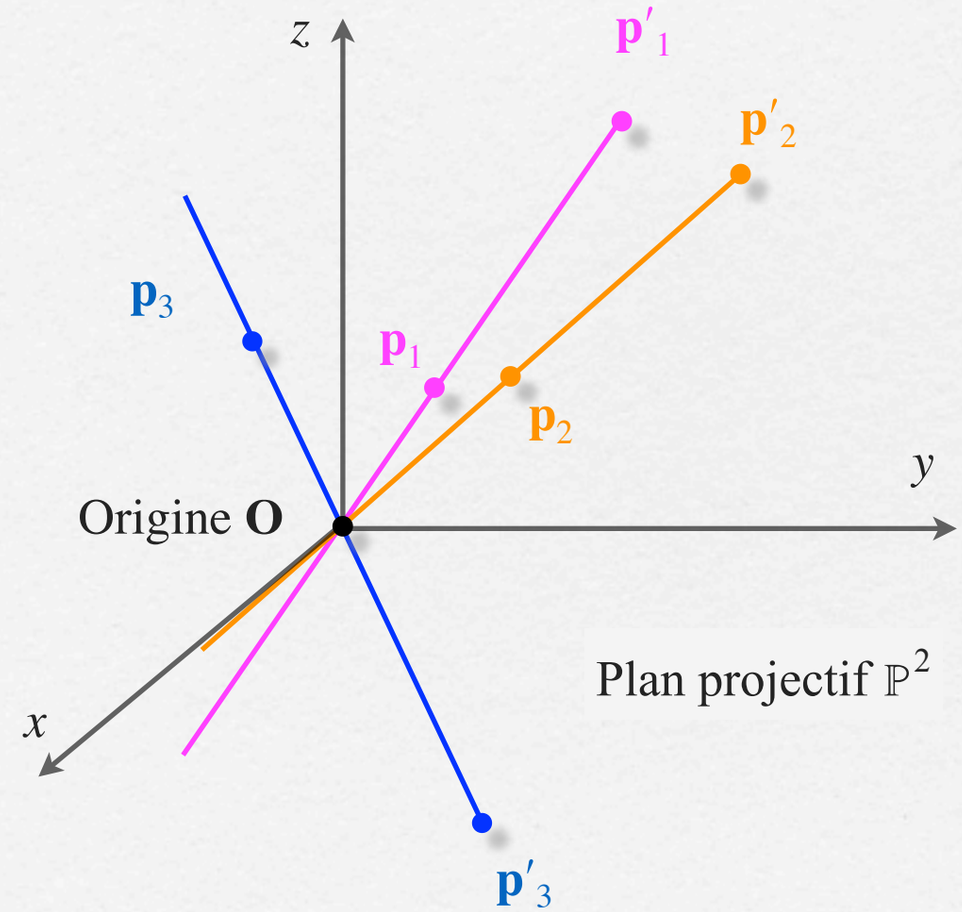
2. Représentation homogène d'un point

- *Remarque*
  - ✓ $(kx, ky, k)^t\,\mathbf{d} = 0$ SSI $(x, y, 1)^t\,\mathbf{d} = 0$

    ➡ $k(x, y, 1) \equiv (x, y, 1),\ \forall\ k \neq 0$

- En d'autres termes, le plan projectif $\mathbb{P}^2$ est, dans $\{\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)\}$, l'ensemble des rayons qui passent par l'origine $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$

$\mathbf{p}'_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1$	$\equiv \mathbf{p}_1$
$\mathbf{p}'_2 = \lambda_2 \mathbf{p}_2$	$\equiv \mathbf{p}_2$
$\mathbf{p}'_3 = \lambda_3 \mathbf{p}_3$	$\equiv \mathbf{p}_3$



©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

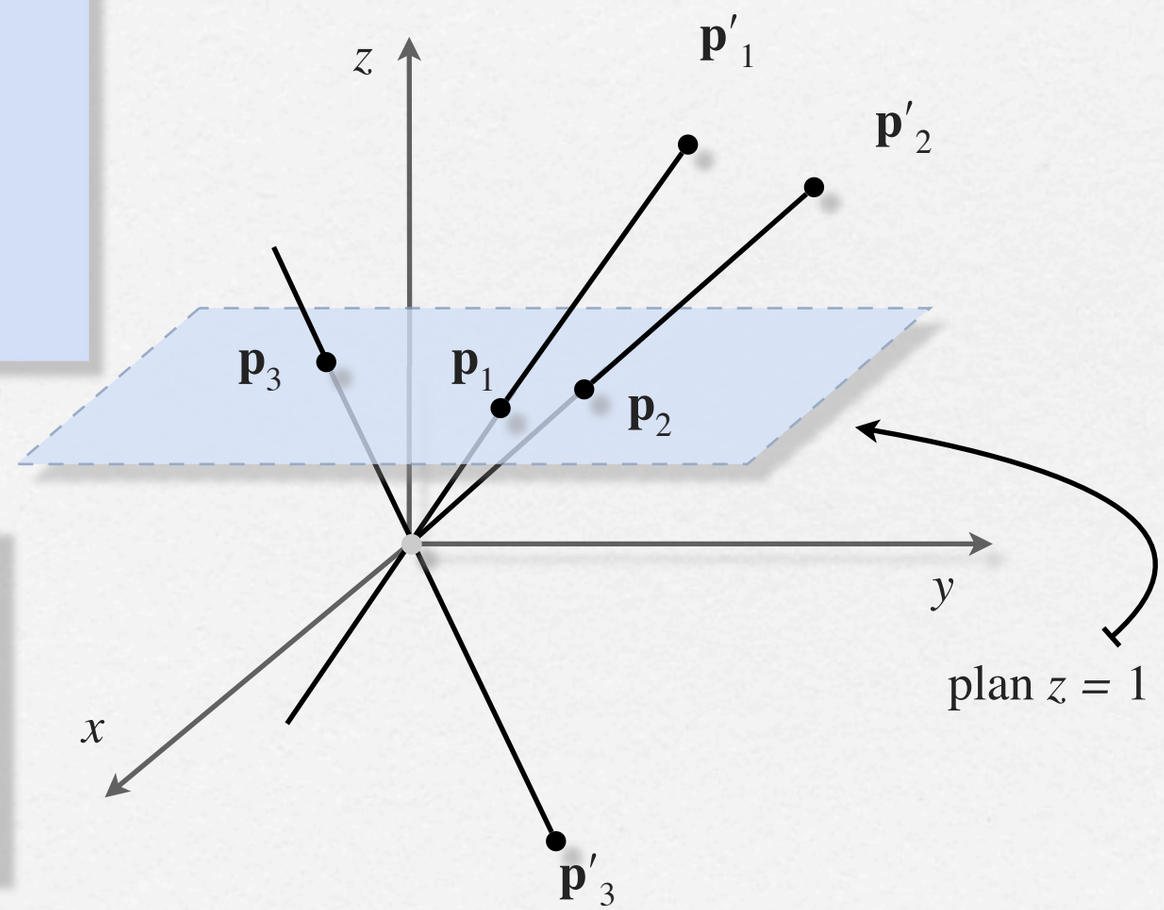
2. Représentation homogène d'un point

- **Coordonnées homogènes d'un point 2D** : on ajoute 1 en 3e coordonnée

Remarque

- La conversion entre $\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{R}^2$ s'effectue en coupant l'espace $\{\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)\}$ par le plan $z = 1$

$$\mathbf{p}_i = \frac{1}{z'_i}\mathbf{p}'_i = \left(\frac{x'_i}{z'_i}, \frac{y'_i}{z'_i}, 1\right)$$



Définitions

- **Points propres** : Les points de $\mathbb{P}^2$ tels que $z \neq 0$
- **Points impropres** : Les points de $\mathbb{P}^2$ tels que $z = 0$

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Plan du chapitre

1. Plan projectif
   - 1.1. Représentation homogène d'une droite
   - 1.2. Représentation homogène d'un point
   - 1.3. Droite joignant 2 points
   - 1.4. Intersection de 2 droites
   - 1.5. Point idéal
   - 1.6. Droite à l'infini
   - 1.7. Dualité
2. Transformations projectives
3. Espace projectif (aperçu)

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

Un plan 3D (texturé dans la figure) qui passe par l'origine

3. Droite joignant 2 points

La droite d joignant les points $p = (x,y,z)$ et $p' = (x', y', z')$ est déterminée par le vecteur $d = p \times p'$.

Démonstration

$$d = p \times p' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} yz' - y'z \\ -(xz' - x'z) \\ xy' - x'y \end{bmatrix}$$

Or, un point p est sur une droite de vecteur directeur d si et seulement si $p \cdot d = 0$. Vérifions…

$$\begin{aligned} p \cdot d &= [x, y, z] \cdot \begin{bmatrix} yz' - y'z \\ -(xz' - x'z) \\ xy' - x'y \end{bmatrix} \\ &= xyz' - xy'z - xyz' + x'yz + xy'z - x'yz \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le point p est donc sur la droite définie par d. Il en va de même pour p' (à vérifier en exercice).

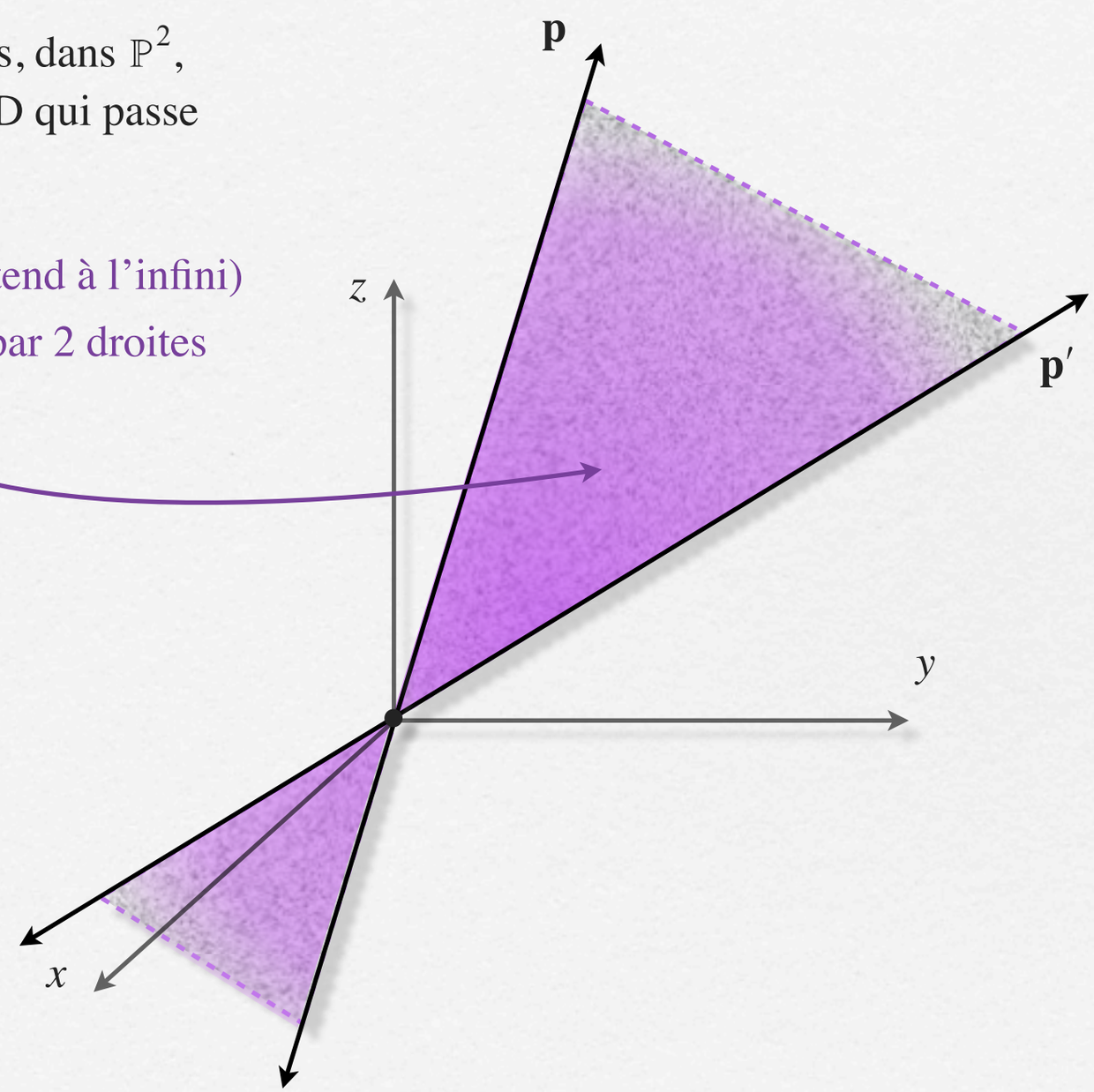
1. Plan projectif

3. Droite joignant 2 points

- Comme la droite est définie par 2 points, dans $\mathbb{P}^2$, on peut voir la droite comme un plan 3D qui passe par (0, 0, 0)

La droite dans $\mathbb{P}^2$ est un plan 3D (s'étend à l'infini) dans l'espace $\{\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)\}$ défini par 2 droites

Un plan 3D (texturé dans la figure) qui passe par l'origine

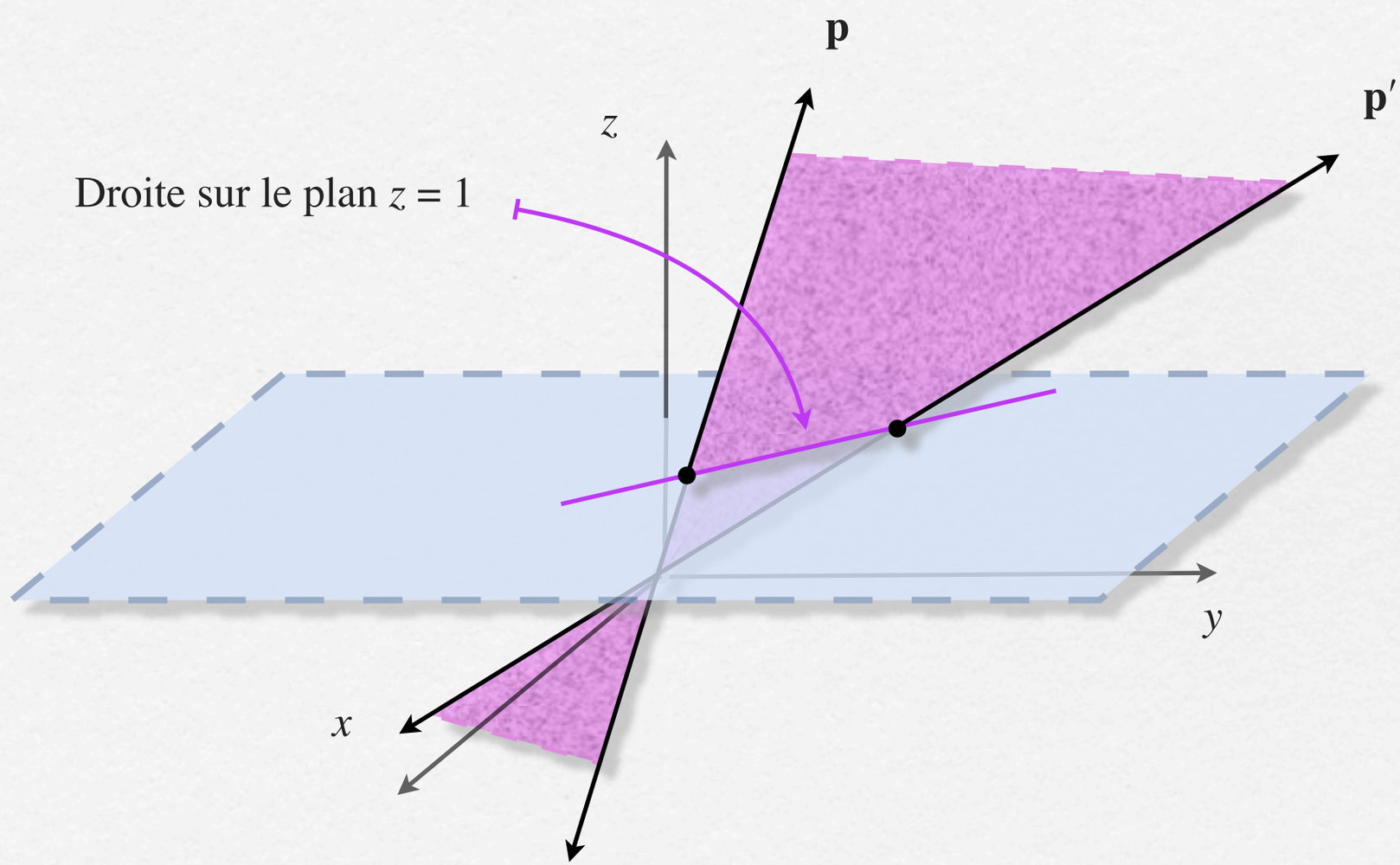


IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

3. Droite joignant 2 points

- Lorsqu'on coupe la droite (dans l'espace $\{\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)\}$) par le plan $z = 1$, on obtient une droite dans $\mathbb{R}^2$

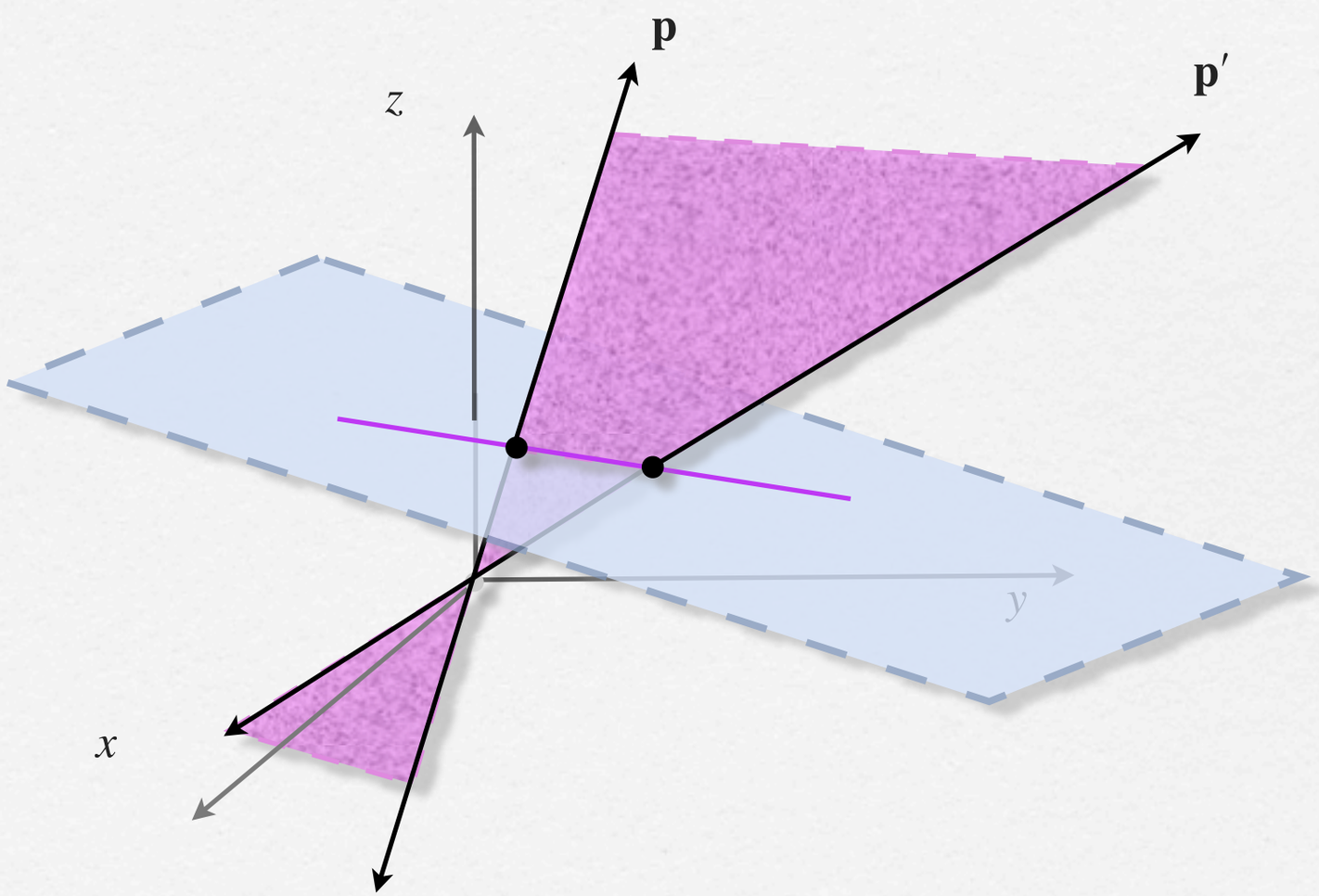


IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

3. Droite joignant 2 points

- Lorsqu'on coupe la droite (dans l'espace $\{\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)\}$) par un plan quelconque, on obtient encore une droite



IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Plan du chapitre

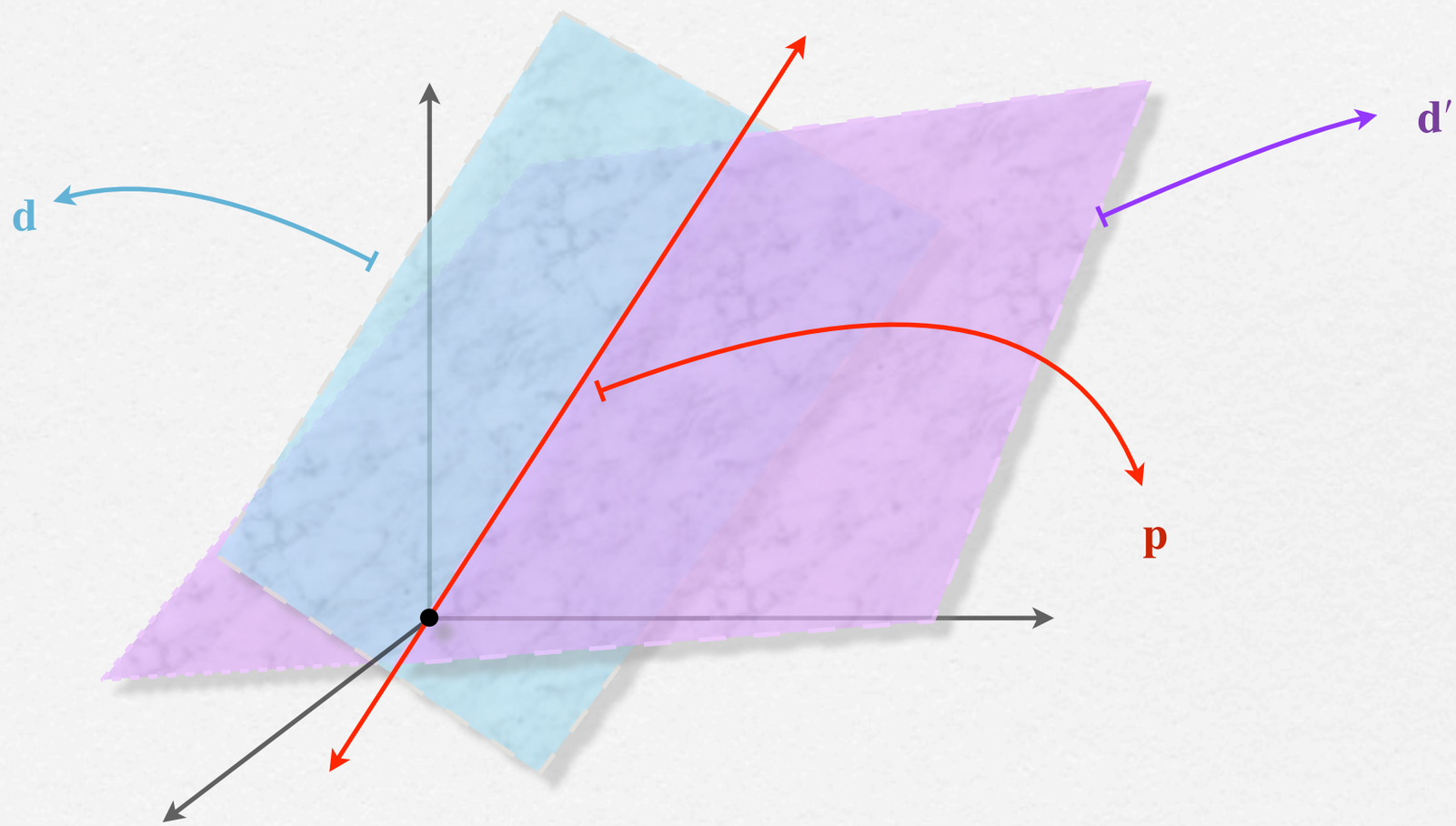
1. Plan projectif
   - 1.1. Représentation homogène d'une droite
   - 1.2. Représentation homogène d'un point
   - 1.3. Droite joignant 2 points
   - 1.4. Intersection de 2 droites
   - 1.5. Point idéal
   - 1.6. Droite à l'infini
   - 1.7. Dualité
2. Transformations projectives
3. Espace projectif (aperçu)

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

4. Intersection de 2 droites

- L'intersection de 2 droites $\mathbf{d} = (a, b, c)$ et $\mathbf{d}' = (a', b', c')$ est le point $\mathbf{p} = \mathbf{d} \times \mathbf{d}'$



IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Plan du chapitre

1. Plan projectif
   - 1.1. Représentation homogène d'une droite
   - 1.2. Représentation homogène d'un point
   - 1.3. Droite joignant 2 points
   - 1.4. Intersection de 2 droites
   - 1.5. Point idéal
   - 1.6. Droite à l'infini
   - 1.7. Dualité
2. Transformations projectives
3. Espace projectif (aperçu)

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

5. Point idéal

Prenons deux droites parallèles *d : ax + by + c = 0* et *d': ax + by + c'= 0* et trouvons l'intersection de celles-ci.

$$d \times d' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a & b & c' \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} (c'-c)b \\ -(c'-c)a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= (c'-c)\begin{bmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{bmatrix}$$

Divisons par la troisième coordonnée afin de trouver le point correspondant dans $\mathbb{R}^2$:

$$\left(\frac{b}{0}, \frac{-a}{0}\right) \implies (\infty, -\infty) \notin \mathbb{R}^2$$

On a donc que deux droites parallèles se croisent à l'infini.

- On appelle **points finis** (ou points propres) l'ensemble des points $\left\{ p = (x, y, z) \in \mathbb{P}^2 \middle| \, z \neq 0 \right\}$

- On appelle **points idéaux** (ou points impropres) l'ensemble des points $\left\{ p = (x, y, z) \in \mathbb{P}^2 \middle| \, z = 0 \right\}$

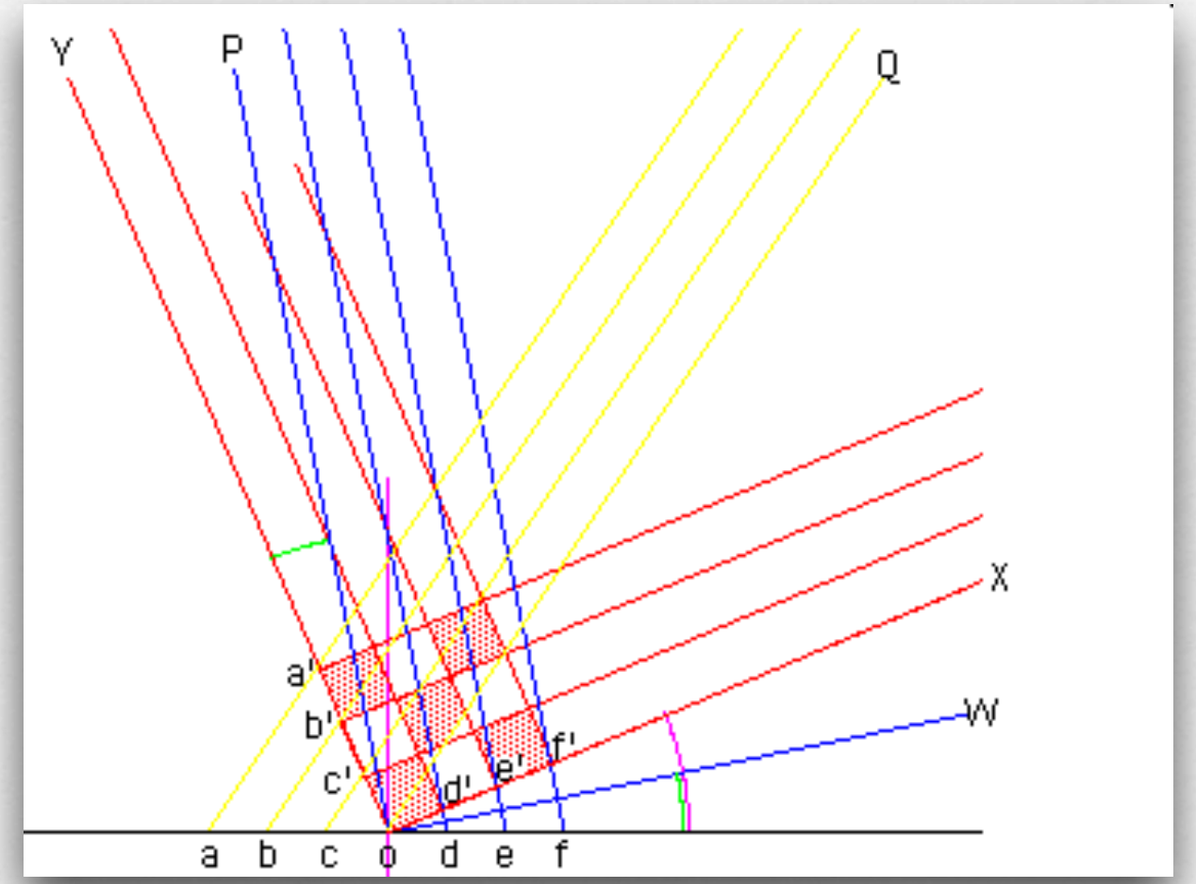
Source : The Geometry of Perspective Drawing on the Computer

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

5. Point idéal

- Cette appellation vient du fait que les points idéaux représentent l'intersection de 2 droites parallèles
  - ✓ 2 droites parallèles se croisent à l'infini
- Le point idéal représente l'orientation, la direction, l'inclinaison, bref, la pente m de la droite dans $\mathbb{R}^2$!



Source : The Geometry of Perspective Drawing on the Computer

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Plan du chapitre

1. Plan projectif
   - 1.1. Représentation homogène d'une droite
   - 1.2. Représentation homogène d'un point
   - 1.3. Droite joignant 2 points
   - 1.4. Intersection de 2 droites
   - 1.5. Point idéal
   - 1.6. Droite à l'infini
   - 1.7. Dualité
2. Transformations projectives
3. Espace projectif (aperçu)

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

6.Droite à l'infini

- Définition : Droite à l'infini
  - ✓ La droite $\mathbf{d}_\infty = (0, 0, 1)$
- Les points idéaux sont tous sur $\mathbf{d}_\infty$
- Vérification :

$$\begin{bmatrix} x & y & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}_\infty = \begin{bmatrix} x & y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Source :

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

6.Droite à l'infini

- Une droite $\mathbf{d} = (a, b, c)$ intersecte $\mathbf{d}_\infty$ au point idéal $(b, -a, 0)$

☑ (à vérifier en exercice)

- Une droite $\mathbf{d}' = (a, b, c')$ intersecte $\mathbf{d}_\infty$ au même point idéal $(b, -a, 0)$

Remarques

- Comme $\mathbf{d}$ et $\mathbf{d}'$ sont parallèles, on peut déduire que le point idéal $(b, -a, 0)$ représente la direction de la droite
  - ☑ cohérent avec la géométrie Euclidienne où le vecteur $(b, -a)$ est tangent à la droite $ax + by + c = 0$
- Si la direction de la droite varie, le point idéal change

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

6.Droite à l'infini

Important

- La droite à l'infini représente l'ensemble des directions des droites dans le plan $\mathbb{R}^2$

Remarques Dans $\mathbb{P}^2$

- Deux points distincts sont sur une même droite
  - ➡ Vrai aussi dans $\mathbb{R}^2$
- Deux droites distinctes s'intersectent en un point
  - ➡ Ceci n'est pas nécessairement vrai dans $\mathbb{R}^2$

IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Plan du chapitre

1. Plan projectif
   - 1.1. Représentation homogène d'une droite
   - 1.2. Représentation homogène d'un point
   - 1.3. Droite joignant 2 points
   - 1.4. Intersection de 2 droites
   - 1.5. Point idéal
   - 1.6. Droite à l'infini
   - 1.7. Dualité
2. Transformations projectives
3. Espace projectif (aperçu)

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

1. Plan projectif

7. Dualité

- Points et droites ont la même représentation
- Points et droites peuvent être interchangés
  - ✓ $\mathbf{d}^t\mathbf{p} = \mathbf{p}^t\mathbf{d} = 0$: 2 interprétations possibles
    - ➡ **p** est un point sur la droite **d**
    - ➡ **p** est une droite qui passe par le point **d**

➡ Ce sont des notions **duales**

- *Exemples*
  - ✓ même représentation (vecteur 3D)
  - ✓ intersection de 2 droites VS droite reliant 2 points (produit vectoriel)!
  - ✓ définition d'une droite passant par un point VS celle d'un point sur une droite (produit scalaire)

➡ La preuve d'un théorème n'a pas besoin d'être faite si le dual a déjà été démontré

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Plan du chapitre

1. Plan projectif

2. Transformations projectives

   2.1. Projectivités

   2.2. Transformation des droites

   2.3. Hiérarchies des transformations

   2.4. Correction de l'effet de perspective dans une image

3. Espace projectif (aperçu)

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Plan du chapitre

1. Plan projectif

2. Transformations projectives

   2.1. Projectivités

   2.2. Transformation des droites

   2.3. Hiérarchies des transformations

   2.4. Correction de l'effet de perspective dans une image

3. Espace projectif (aperçu)

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

3. Transformations projectives

1.Projectivités

- Définition : transformation inversible de $\mathbb{P}^2$ vers $\mathbb{P}^2$

  $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, telle que 3 points $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ et $\mathbf{p}_3$ sont colinéaires si et seulement si $h(\mathbf{p}_1)$, $h(\mathbf{p}_2)$ et $h(\mathbf{p}_3)$ sont aussi colinéaires

  ➡ Aussi appelée homographie

- Théorème : Une transformation $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ est une projectivité si et seulement si il existe une matrice 3×3 non singulière $\mathbf{H}$ telle que

Ne pas oublier le facteur d'échelle ou d'équivalence

$$h(\mathbf{p}) = \mathbf{H}\mathbf{p}, \ \forall \mathbf{p} \in \mathbb{P}^2$$

$$\text{avec } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \equiv \lambda \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

Source :

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- *Remarques*
  - ✓ Vrai à un facteur d'échelle près

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} = h_{33} \begin{bmatrix} h_{11}/h_{33} & h_{12}/h_{33} & h_{13}/h_{33} \\ h_{21}/h_{33} & h_{22}/h_{33} & h_{23}/h_{33} \\ h_{31}/h_{33} & h_{32}/h_{33} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \lambda \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

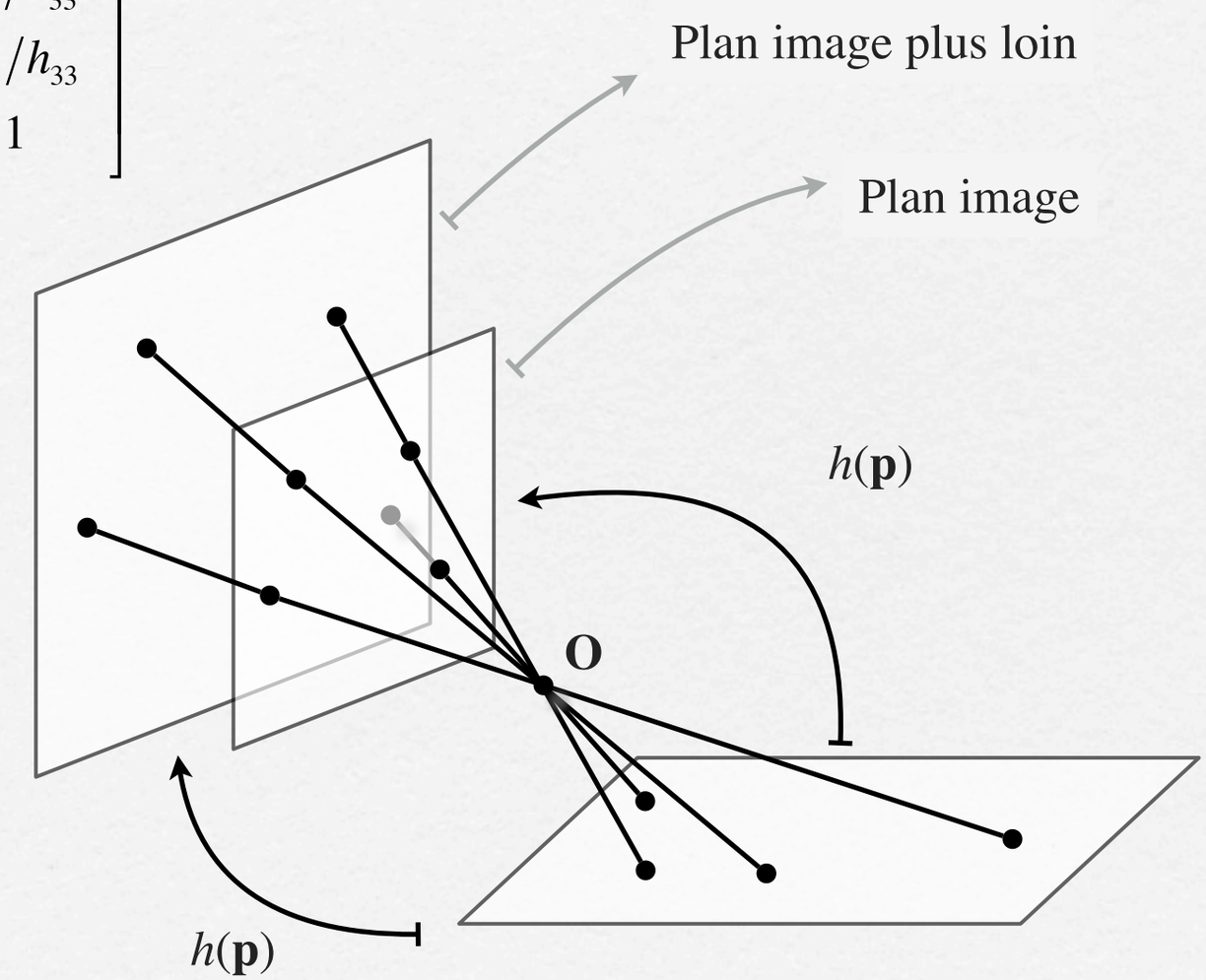
  - ✓ **H** possède 8 degrés de liberté
    - ➡ 9 éléments moins le facteur d'équivalence
  - ✓ Préserve les droites (colinéarité)
- *Exemple*
  - ✓ La formation de l'image d'une scène coplanaire peut être modélisée comme une transformation projective inversible

Terminologie

- La projectivité $h(\mathbf{p})$ est aussi appelée homographie

Important

- Les points de la scène sont coplanaires



©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- *Exemple* de scène coplanaire
  - ✓ Plancher, mur, ...

Motifs géométriques d'un plancher

La transformation projective déforme les motifs du plancher mais conserve les lignes droites

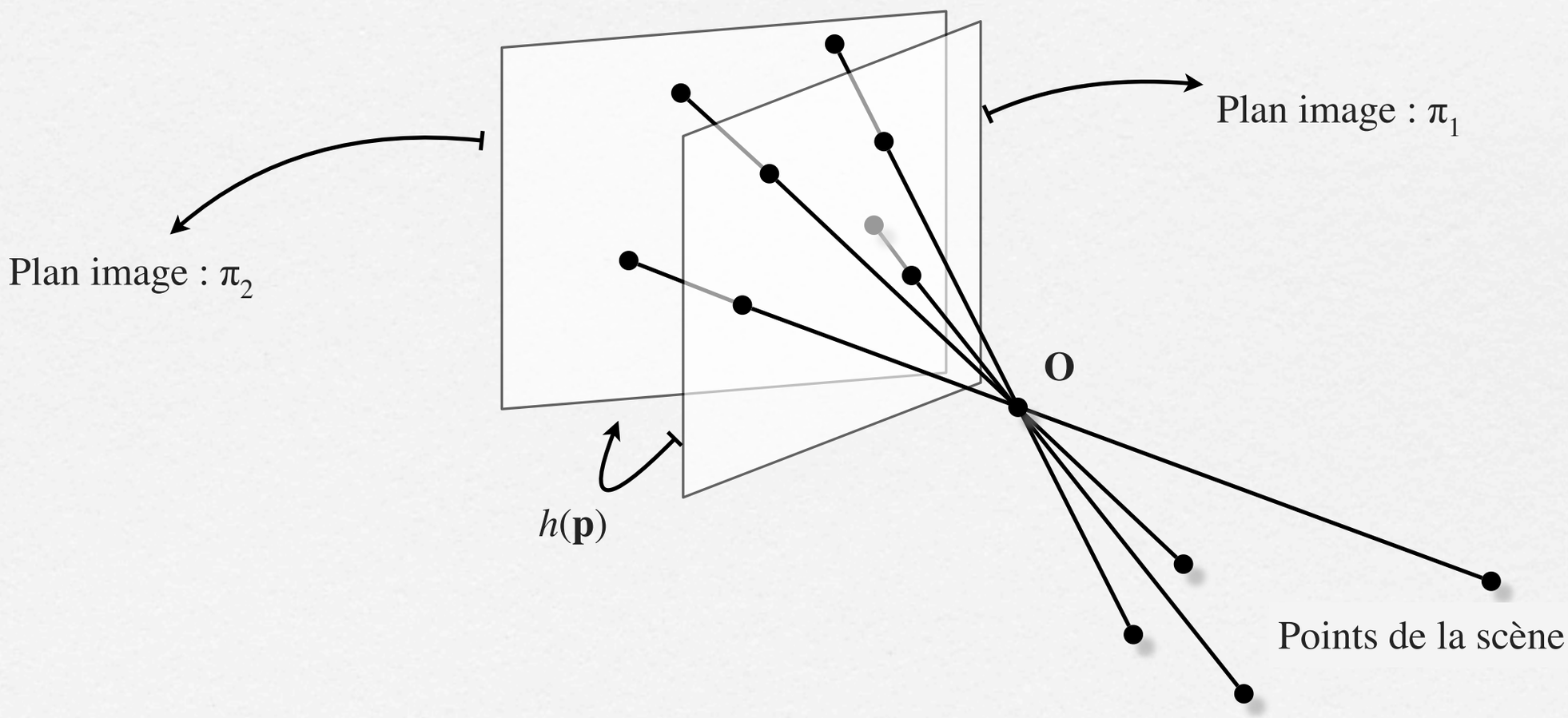
Source : Hartley et Zisserman, 2003

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- Deux plans images ayant le même centre de projection peuvent être reliés par une projectivité
- *Exemple*
  - ✓ La rectification d'images (chap. 5)



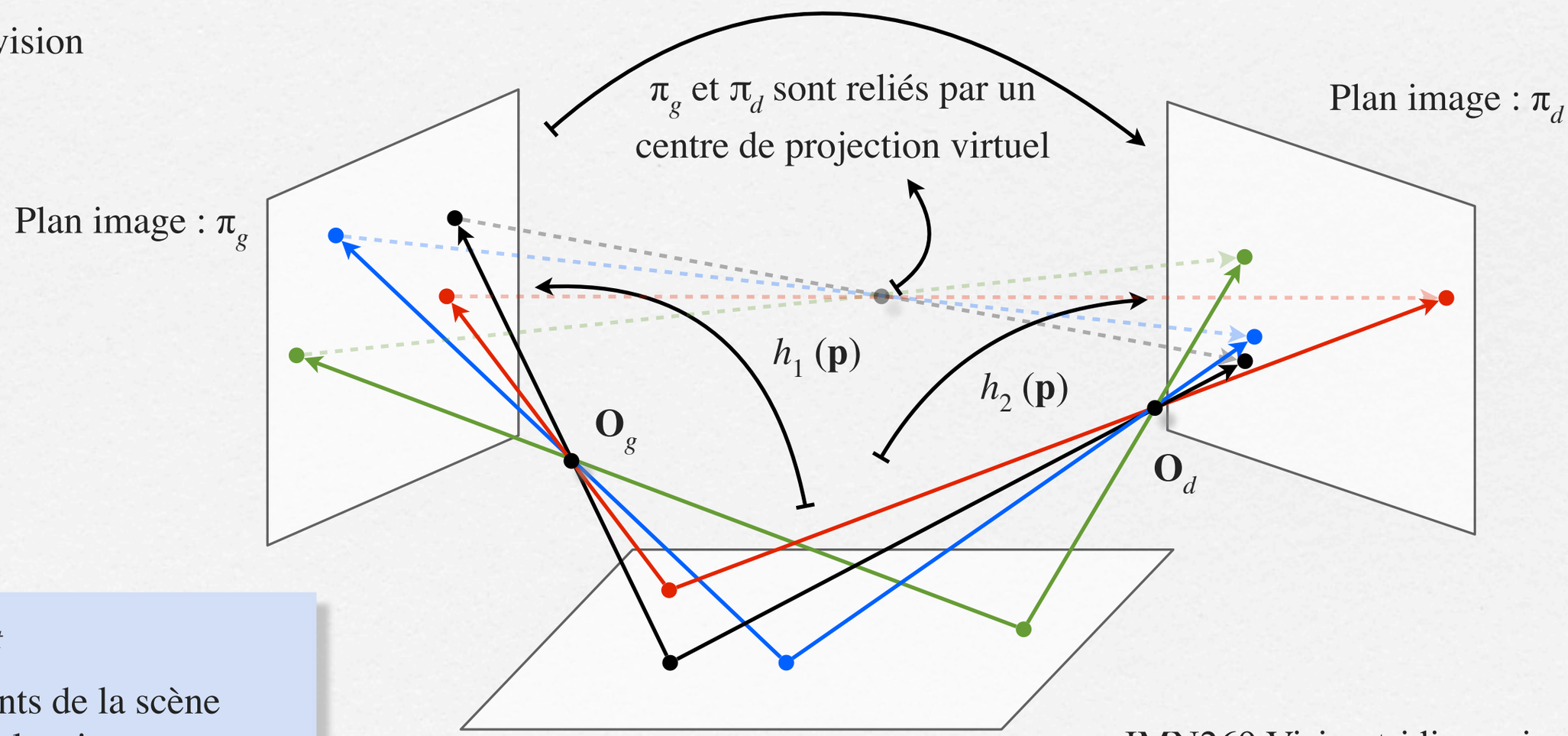
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- Si le centre de projection est différent, et si la scène est coplanaire, les deux images sont reliées par une transformation projective
  - ✓ Le point de vue n'est pas le même
- *Exemple*
  - ✓ Stéréovision

$$h_3(\mathbf{p}) = h_2(\mathbf{p}) \circ h_1^{-1}(\mathbf{p})$$



Important

- Les points de la scène sont coplanaires : π_1

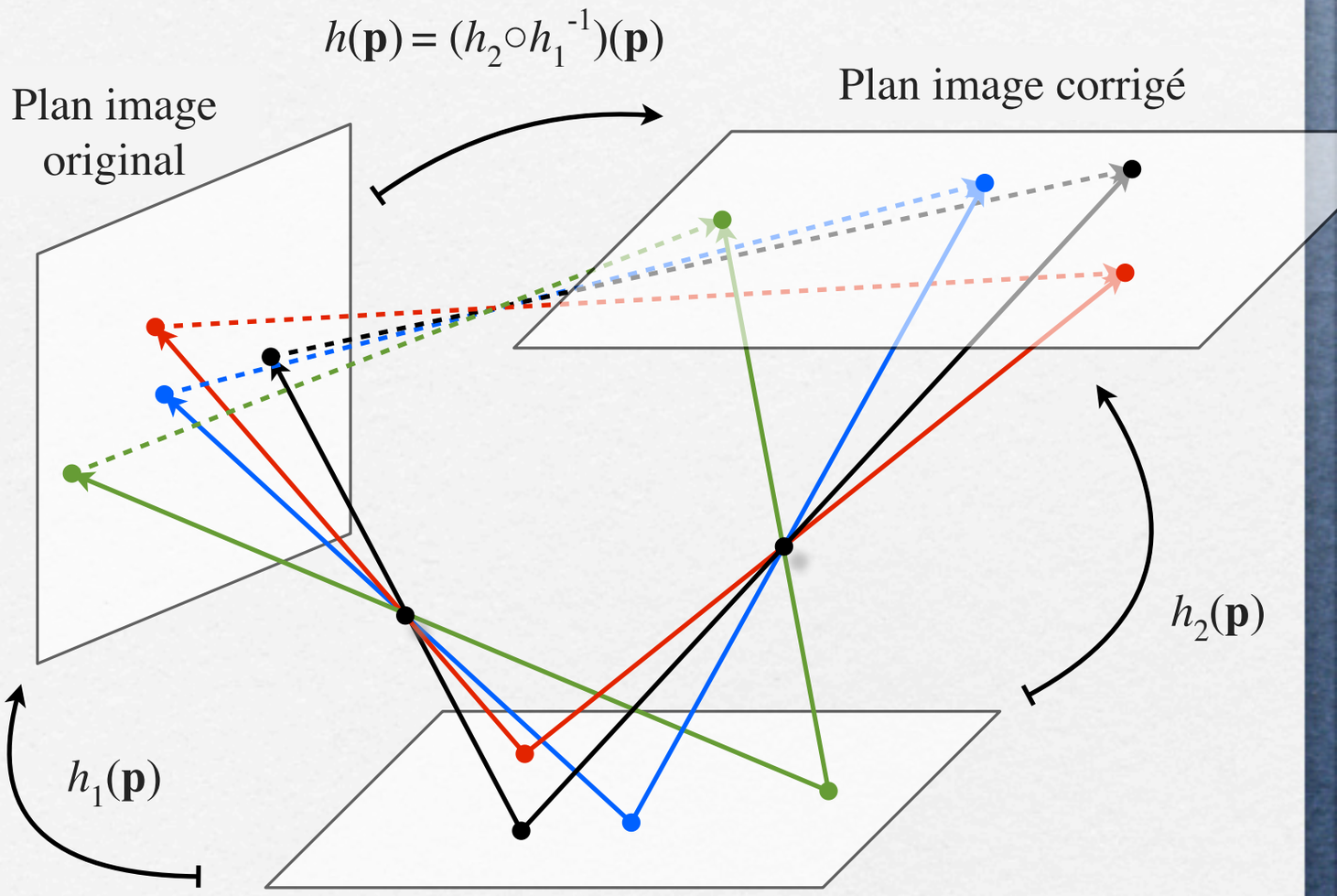
IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- *Exemple* d'application
  - ✓ Enlever la distorsion perspective de l'image d'un plan sans passer par la scène
    - ➡ $h(\mathbf{p})$ est la transformation qui permet de remettre parallèles les droites parallèles de la scène directement à partir de l'image
    - ➡ Le point de vue est changé!

Source : Hartley et Zisserman, 2003



Important

- Les points de la scène sont coplanaires

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- *Exemple* suite
  - ✓ On cherche $h(\mathbf{p})$ et on l'applique à toute l'image
  - ✓ Posons $\mathbf{p} = (x, y)$, la coordonnée d'un point dans l'image originale et $\mathbf{p}' = (x', y')$, la coordonnée du même point dans l'image corrigée
  - ✓ Dans $\mathbb{P}^2$, $\mathbf{p} = (x, y, 1)$ et $\mathbf{p}' = k(x', y', 1)$.

Ne pas oublier le facteur d'équivalence

  - ✓ Si $\mathbf{p}' = \mathbf{H}\mathbf{p}$, on a

$$\begin{bmatrix} kx' \\ ky' \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} kx' &= h_{11}x + h_{12}y + h_{13} \\ ky' &= h_{21}x + h_{22}y + h_{23} \\ k &= h_{31}x + h_{32}y + h_{33} \end{aligned}$$

IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- *Exemple* suite

$$\Rightarrow \begin{aligned} x'\left(h_{31}x+h_{32}y+h_{33}\right) &= h_{11}x+h_{12}y+h_{13} \\ y'\left(h_{31}x+h_{32}y+h_{33}\right) &= h_{21}x+h_{22}y+h_{23} \end{aligned}$$

(on remplace k dans les dimensions x et y)

$$\Rightarrow \begin{aligned} x'\left(h'_{31}x+h'_{32}y+1\right) &= h'_{11}x+h'_{12}y+h'_{13} \\ y'\left(h'_{31}x+h'_{32}y+1\right) &= h'_{21}x+h'_{22}y+h'_{23} \end{aligned}$$

avec $h'_{ij} = \dfrac{h_{ij}}{h_{33}}$

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- *Exemple* suite

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'x & -x'y \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 & -y'x & -y'y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h'_{11} \\ h'_{12} \\ h'_{13} \\ h'_{21} \\ h'_{22} \\ h'_{23} \\ h'_{31} \\ h'_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

2 équations à 8 inconnues

✓ Ça prends donc 4 paires de coordonnées pour résoudre le système

Remarque

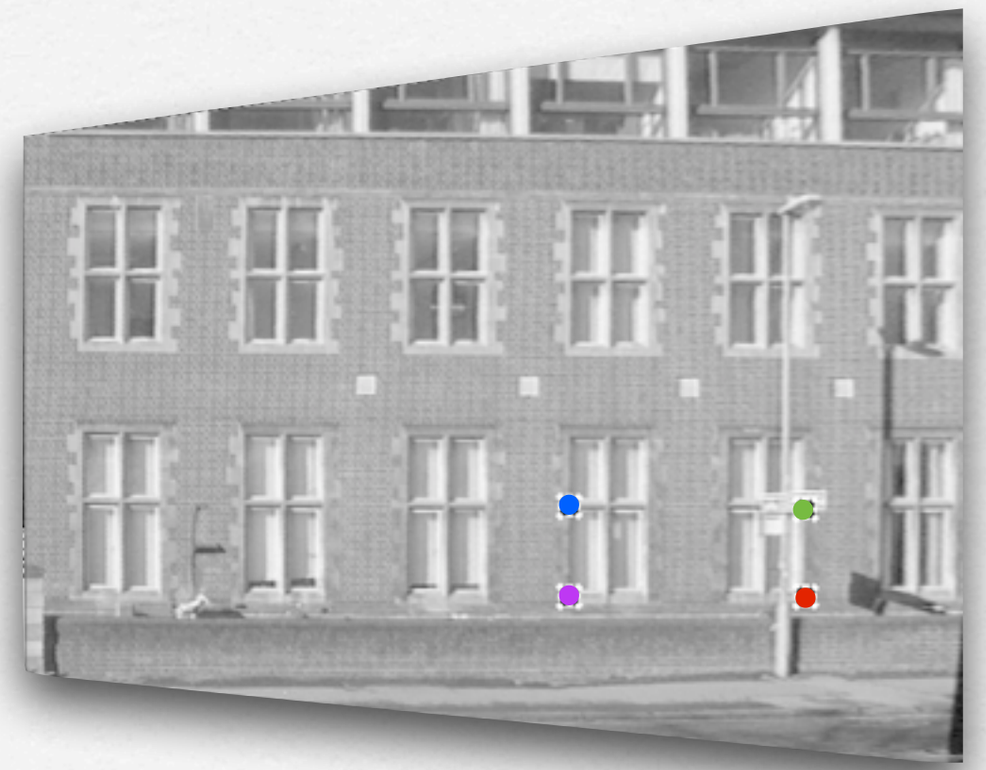
- Il ne faut pas qu'il y ait 3 points colinéaires, sinon la matrice sera singulière

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- Enlever la distorsion perspective d'une image d'un plan



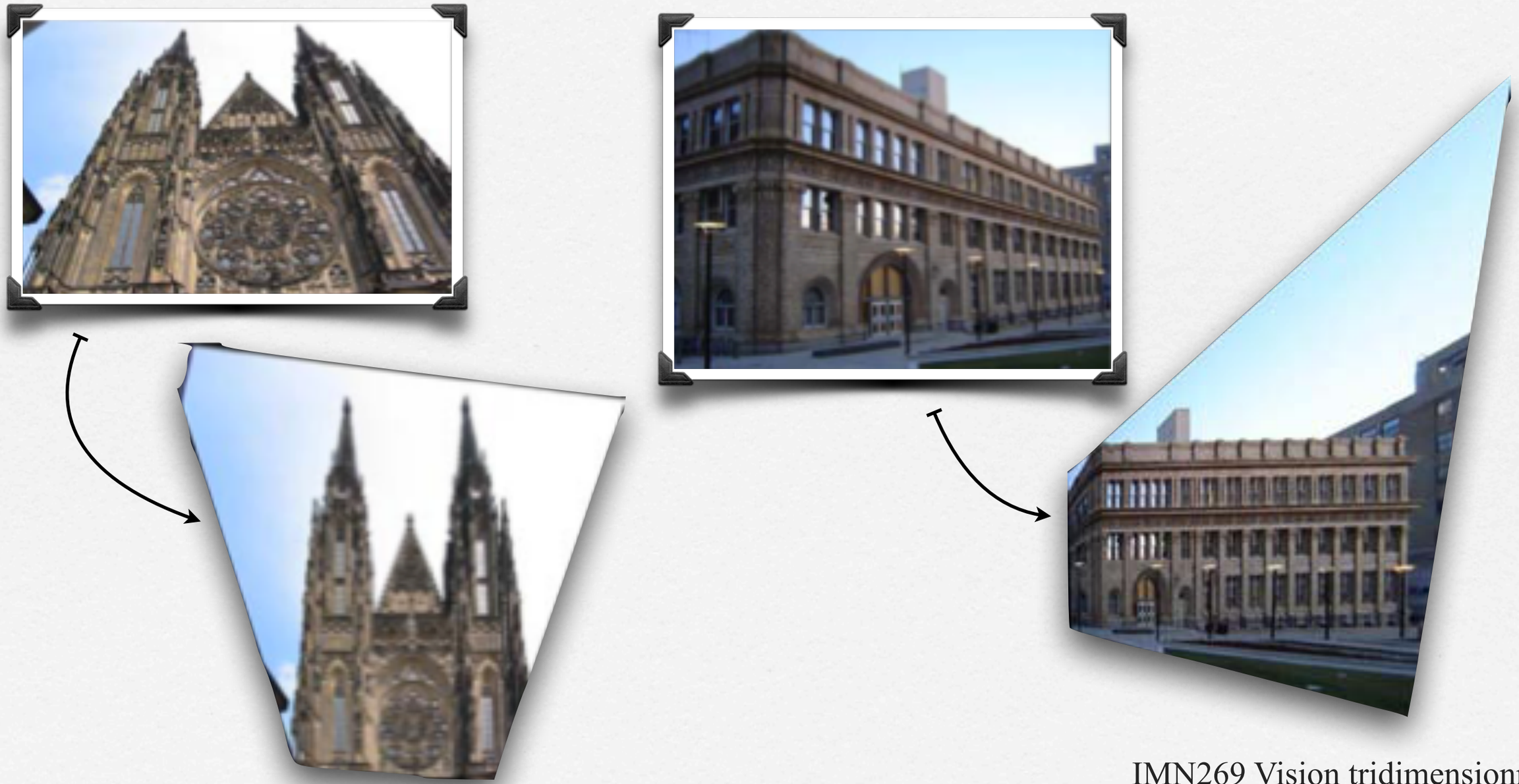
Source : Hartley et Zisserman, 2003

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- Enlever la distorsion perspective d'une image d'un plan



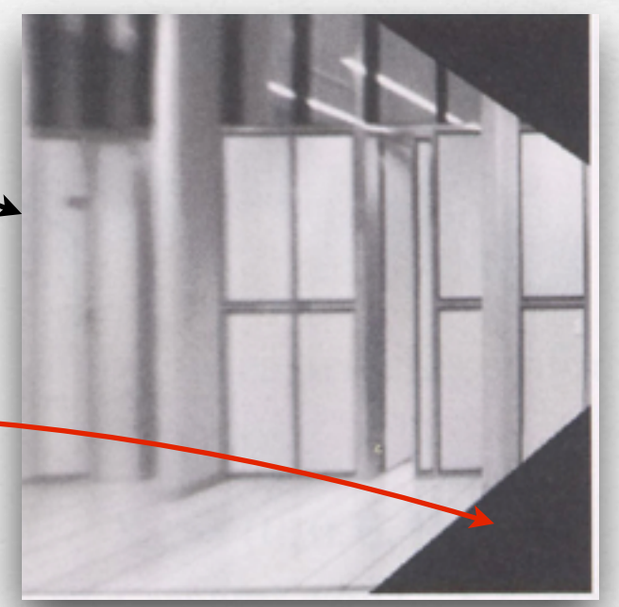
Source : Hartley et Zisserman, 2003

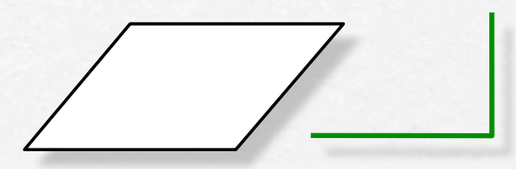
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

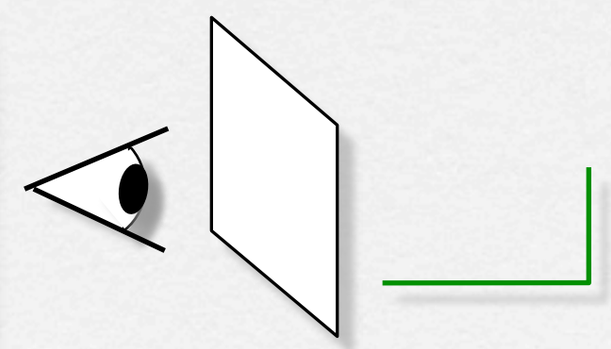
1. Projectivités

- Rectification d'une scène intérieure





Plan image parallèle au plancher



Plan image parallèle au mur

Sections noires : aucune information disponible dans l'image original (hors cadre)

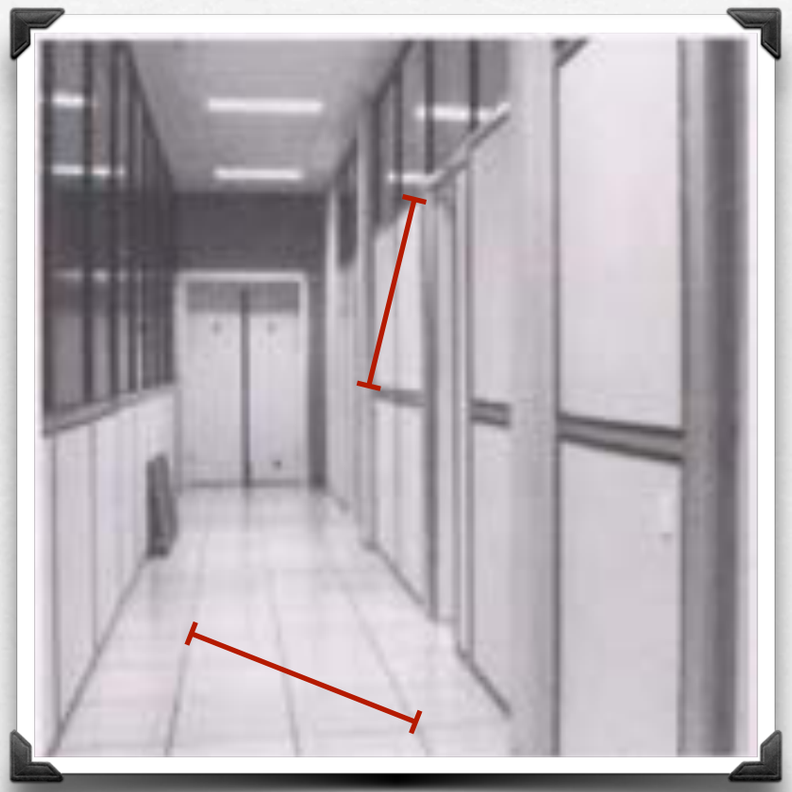
Source : Alexei Efros, CMU, Fall 2008

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

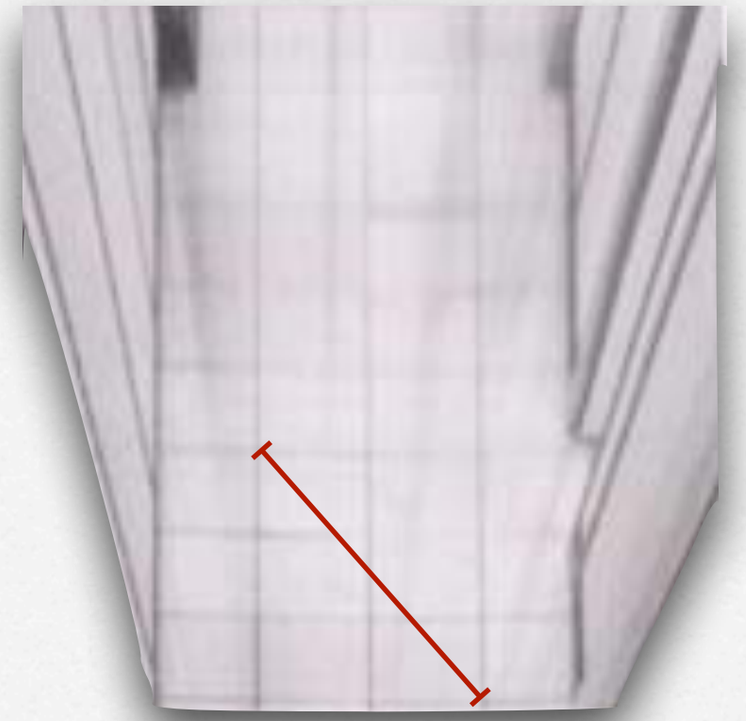
2. Transformations projectives

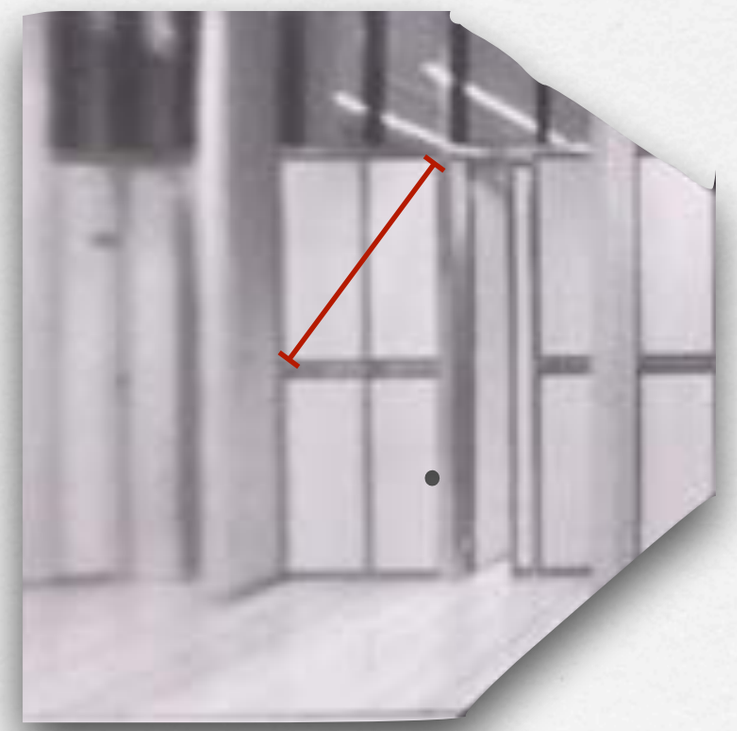
1. Projectivités

- Enlever la distorsion perspective d'une image facilite la prise de mesure



Métrologie





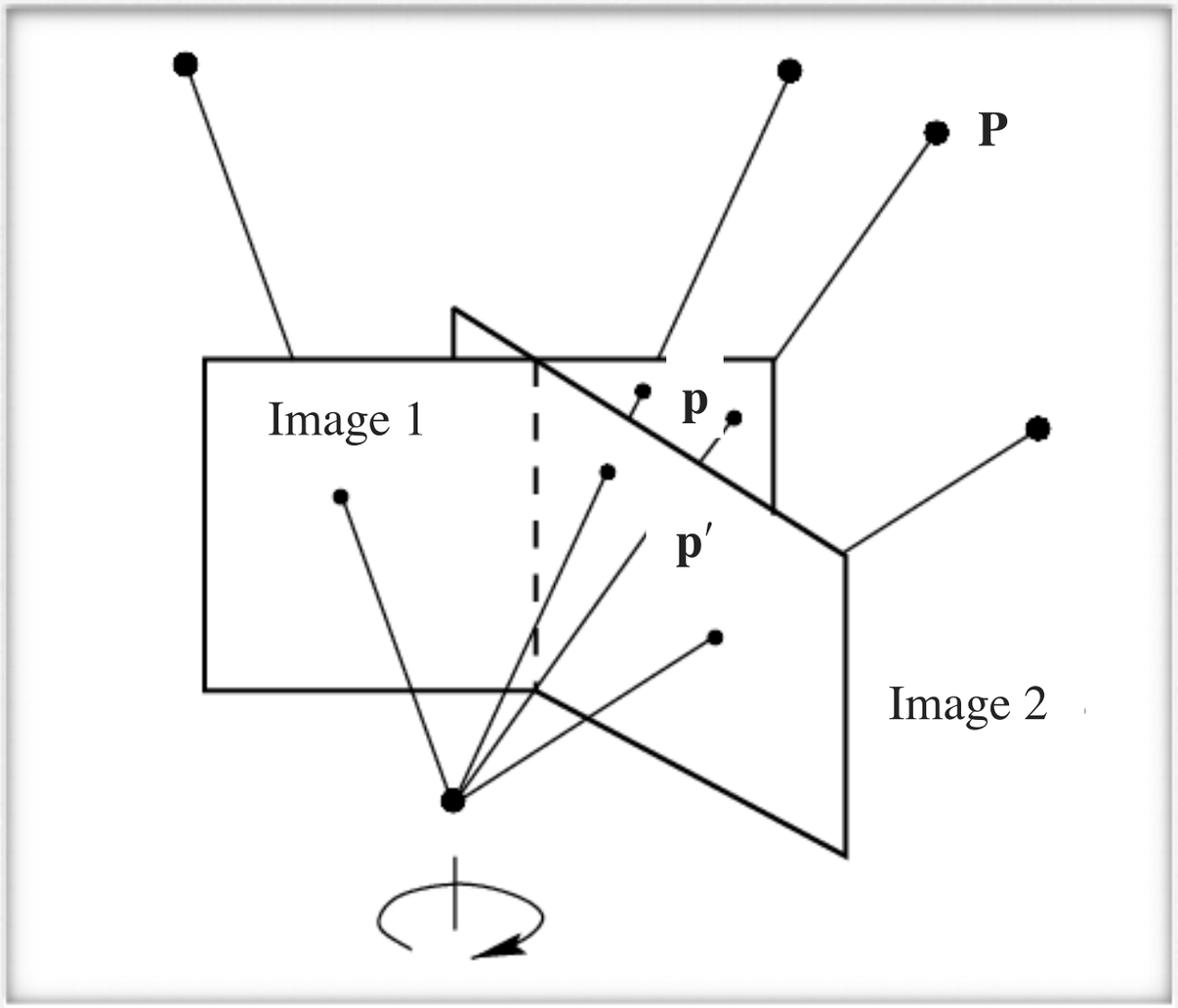
Source : Alexei Efros, CMU, Fall 2008

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- Panorama par mosaïque
  - ✓ Rotation de l'axe optique de la caméra



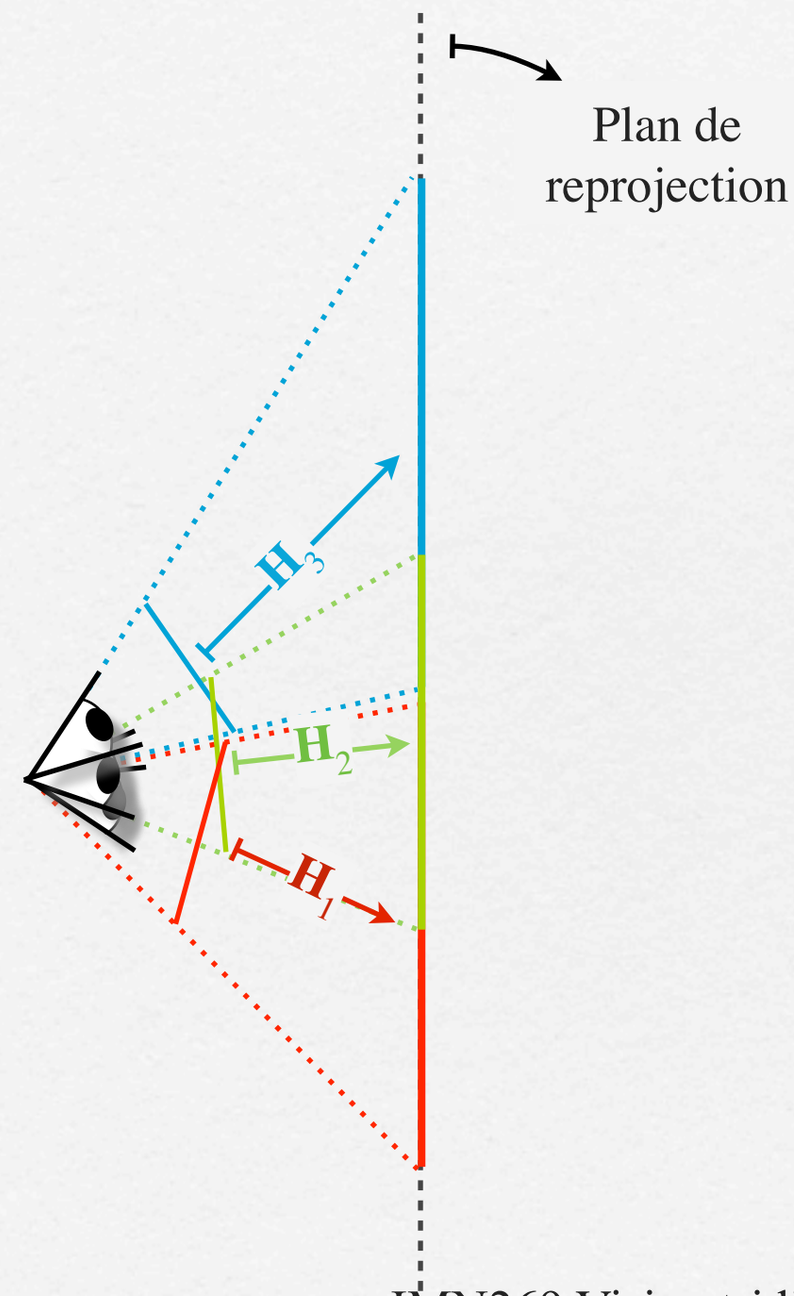
Source : Hartley et Zisserman, 2003

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- Panorama par mosaïque
  - ✓ La mosaïque a une interprétation naturelle en 3D
  - ✓ Chaque image est reprojetée sur un plan commun
  - ✓ La mosaïque est formée sur ce plan
  - ✓ La mosaïque est une caméra à grand angle synthétique



Remarque

- Il faut que le centre de projection soit le même pour toutes les images

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- Panorama par mosaïque

8 images à angle normal

Source : Alexei Efros, CMU, Fall 2008

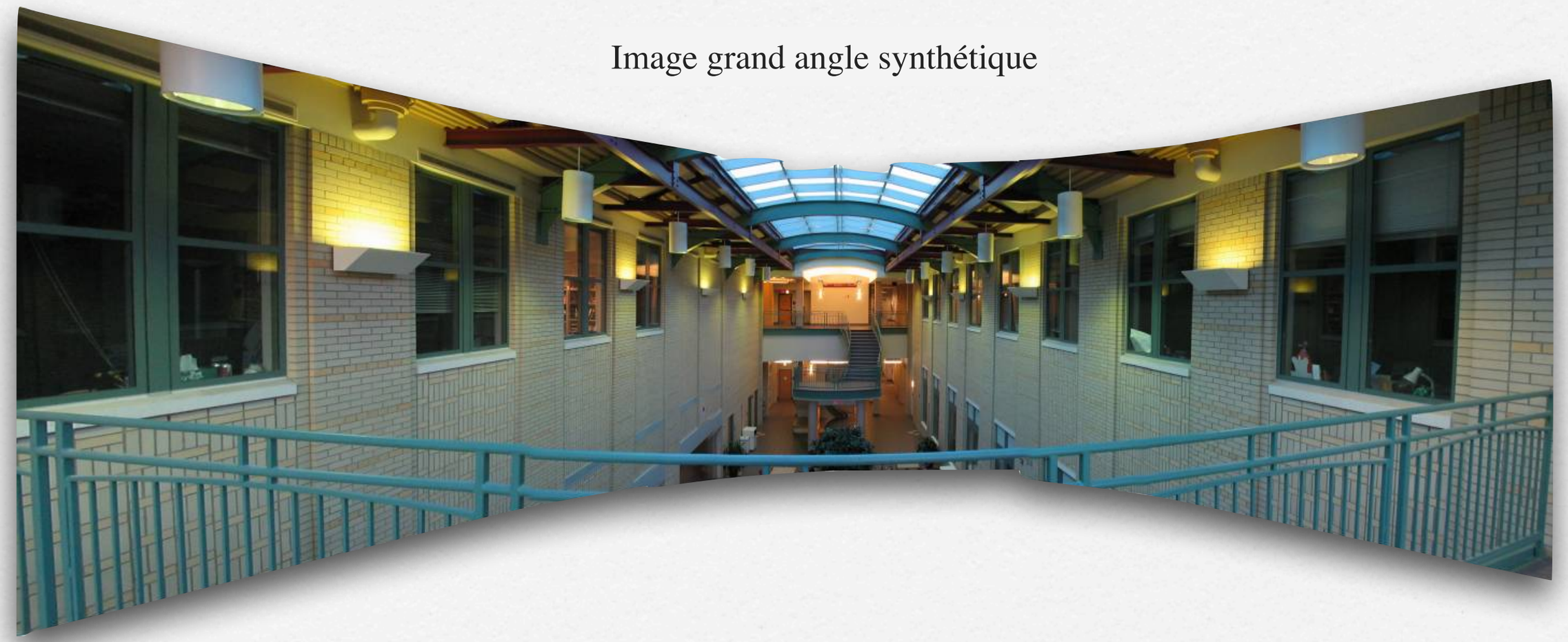
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- Panorama par mosaïque

Image grand angle synthétique



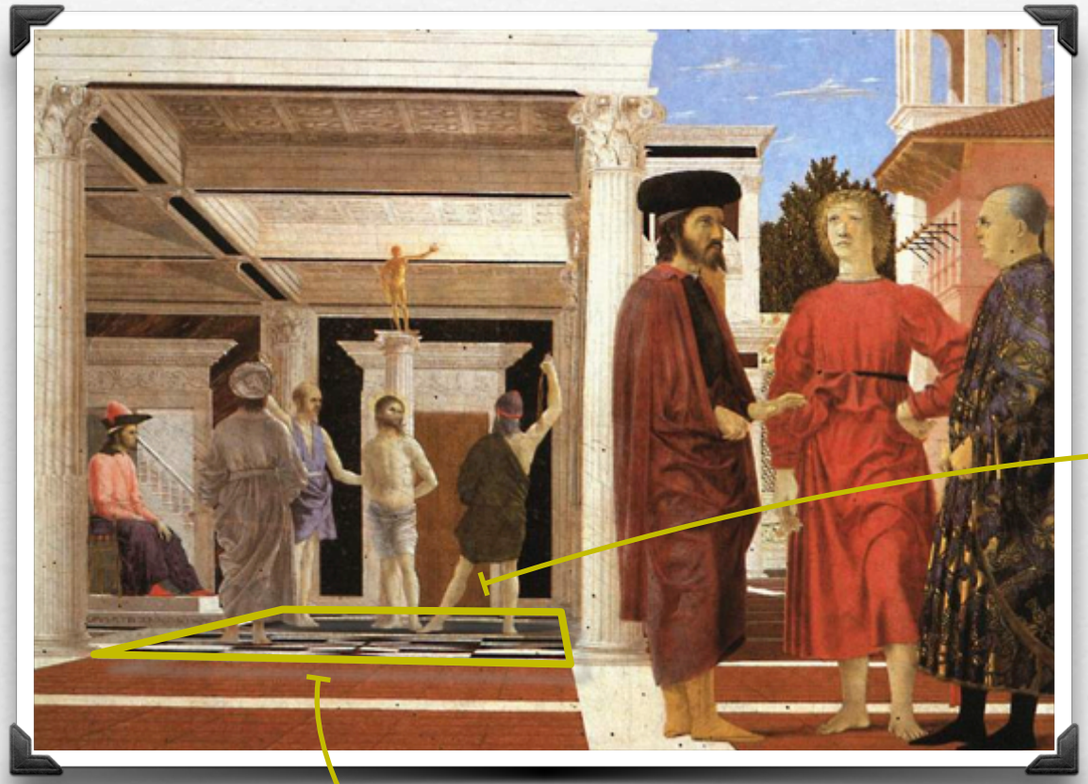
Source : Alexei Efros, CMU, Fall 2008

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- Analyse d'un motif de plancher dans une peinture



Homographie

Plancher rectifié

Zoom

Source : Criminisi

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

1. Projectivités

- Curiosité

L'illusion ne fonctionne que selon un certain point de vue

Homographies manuelles

Distorsions anamorphiques

Source : Site de Julian Beever

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

L'illusion ne fonctionne que selon un certain point de vue

1. Projectivités

- Curiosité

Source : Arthur Causse — Travail personnel.
Anamorphose peinte dans le couloir des chambres de l'hôpital Salvator à Marseille

Homographies manuelles

Distorsions anamorphiques

Source : Wikimedia commons

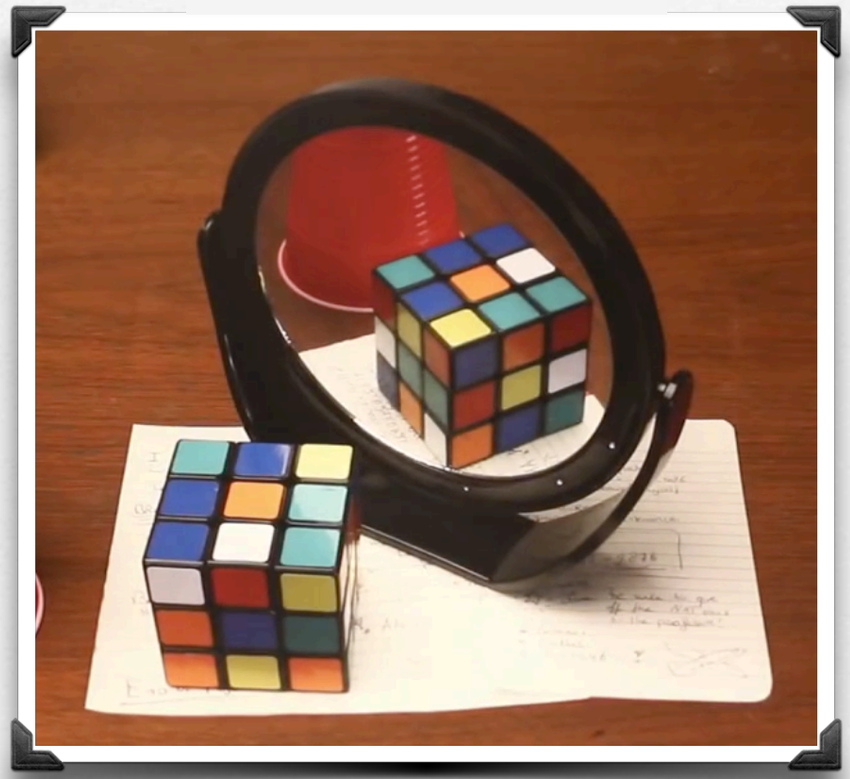
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

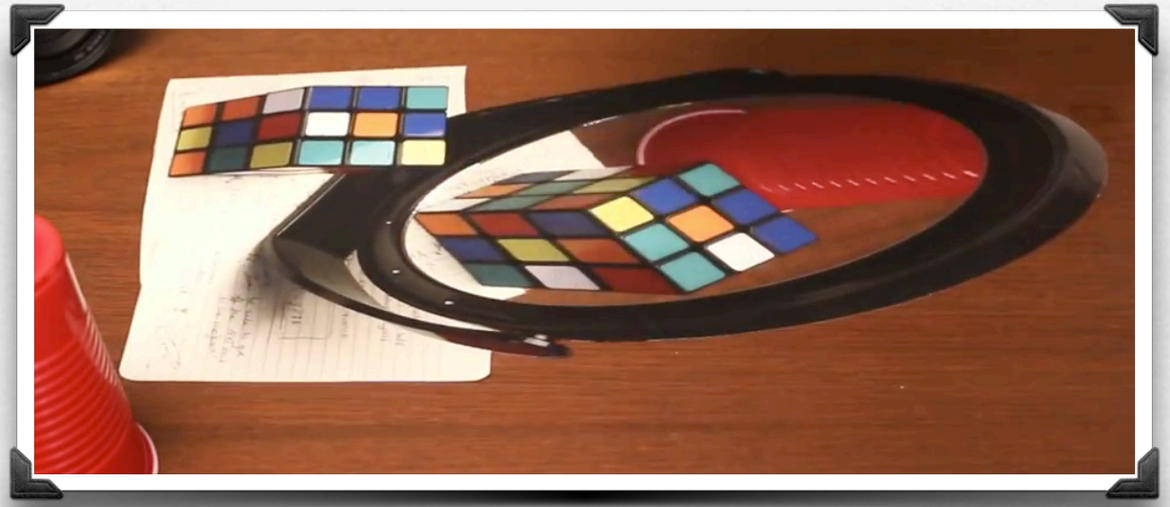
1. Projectivités

- Curiosité

Le bon point de vue



Un mauvais point de vue : oups



Source : Youtube

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Plan du chapitre

1. Plan projectif

2. Transformations projectives

2.1. Projectivités

2.2. Transformation des droites

2.3. Hiérarchies des transformations

2.4. Correction de l'effet de perspective dans une image

3. Espace projectif (aperçu)

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

2. Transformation des droites

Si p est sur la droite d, alors $p' = Hp$ est sur la droite transformée $d' = \mathbf{H}^{-t}d$ et la colinéarité est préservée.

Démonstration

Comme p est sur la droite d, on a

$$\begin{aligned} d^t p = 0 &\implies d^t(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H})p = 0 \\ &\implies (d^t\mathbf{H}^{-1})(\mathbf{H}p) = 0 \\ &\implies (d^t\mathbf{H}^{-1})p' = 0 \\ &\implies (\mathbf{H}^{-t}d)^t p' = 0 \\ &\implies (d')^t p' = 0 \end{aligned}$$

Attention

- Il ne faut pas confondre la transformation d'un point **p** avec celle d'une droite **d** même si les deux sont représentés par le même objet mathématique

☑ $\mathbf{p}' = \mathbf{Hp}$

☑ $\mathbf{d}' = \mathbf{H}^{-t}\mathbf{d}$

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Plan du chapitre

1. Plan projectif

2. Transformations projectives

   2.1. Projectivités

   2.2. Transformation des droites

   2.3. Hiérarchies des transformations

   2.4. Correction de l'effet de perspective dans une image

3. Espace projectif (aperçu)

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

a) Isométries

- Rotation et translation : transformations Euclidiennes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon\cos\theta & -\sin\theta & T_x \\ \varepsilon\sin\theta & \cos\theta & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p}$$

avec $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^t$

- 3 degrés de liberté
  - ✓ rotation : 1
  - ✓ translation : 2
- cas particuliers : rotation pure, translation pure

2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

a) Isométries

- On peut décomposer la matrice d'isométrie comme suit :

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_T} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_R}$$

$\mathbf{H}_i$: composante isométrique

$\mathbf{H}_T$: composante de translation

$\mathbf{H}_R$: composante de rotation

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

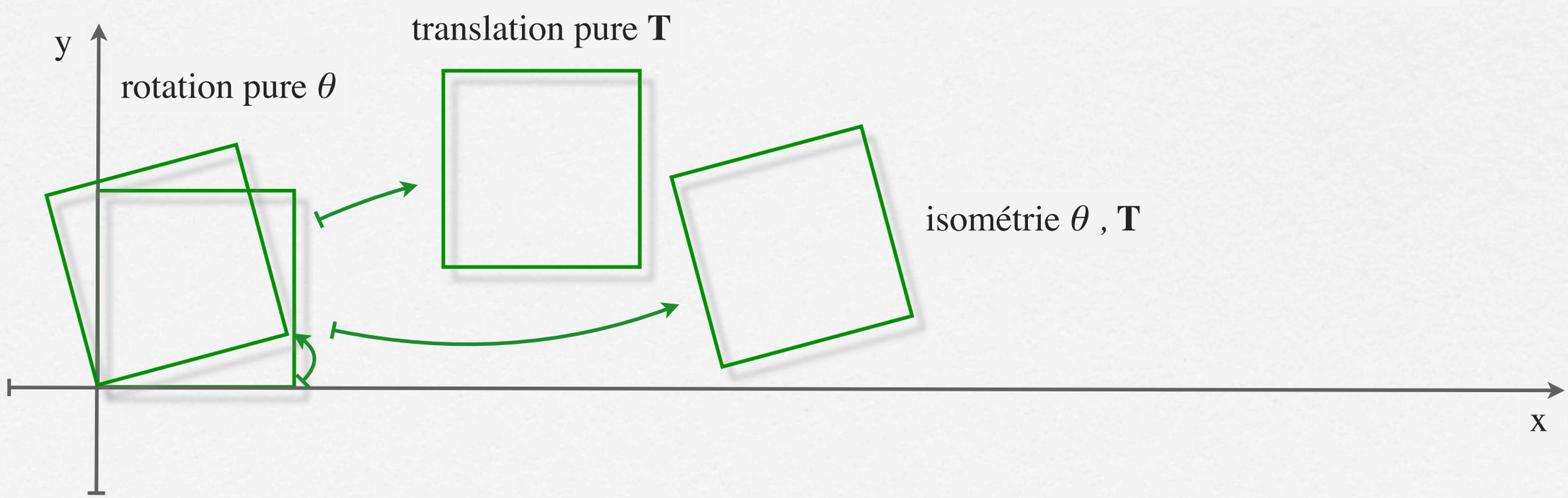
2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

a) Isométries

- 3 degrés de liberté : θ et $\mathbf{T} = (T_x, T_y)$
- Invariants : longueurs, angles, surfaces, parallélisme, colinéarité, $\mathbf{d}_\infty$
- Cas particuliers
  - ✓ rotation pure : $\mathbf{T} = (0, 0)$
  - ✓ translation pure : $\theta = 0°$ $\Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{I}$

transformations Euclidiennes



IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

a) Isométries

- Démo : invariance de $\mathbf{d}_\infty$

1. Vérifier qu'un point idéal reste idéal (i.e. un point de $\mathbf{d}_\infty$, demeure sur $\mathbf{d}_\infty$) en appliquant une isométrie $\mathbf{H}_i$

Posons $\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}$ où $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{T} = (T_x, T_y)$

et $\mathbf{p} = (x, y, 0)$, un point idéal

Transformons $\mathbf{p}$ par $\mathbf{H}_i$:

$$\mathbf{H}_i\mathbf{p} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & T_x \\ R_{21} & R_{22} & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}x + R_{12}y \\ R_{21}x + R_{22}y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rappel

- Un point idéal représente une orientation de droite dans $\mathbb{R}^2$
  - ☑ $\mathbf{H}_i$ modifie l'orientation de la droite dans le plan
  - ☑ $\mathbf{T}$ n'a aucun impact sur l'orientation de la droite

➡ Un point idéal reste idéal

➡ $\mathbf{H}_i$ déplace le point idéal sur $\mathbf{d}_\infty$

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

a) Isométries

- Démo : invariance de $\mathbf{d}_\infty$

  2. Vérifier qu'un point propre (non idéal, $z \neq 0$) n'est pas sur $\mathbf{d}_\infty$ après y avoir appliqué $\mathbf{H}_i$

     ☑ à vérifier en exercice

- Autre démo : invariance de $\mathbf{d}_\infty$

  ✓ Appliquons directement $\mathbf{H}_i$ sur $\mathbf{d}_\infty$ (c.f. section 3.2 - Transformation projective d'une droite)

$$\mathbf{H}_i^{-t}\mathbf{d}_\infty = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-t} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{T}^t\mathbf{R}^{-t} & 1 \end{bmatrix}}_{\text{À vérifier en exercice}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{d}_\infty$$

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

3. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

b) Similarités

- Isométrie et changement d'échelle : transformations Euclidiennes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & T_x \\ s\sin\theta & s\cos\theta & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}' = \begin{bmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p}$$

- 4 degrés de liberté
  - ✓ rotation : 1
  - ✓ translation : 2
  - ✓ changement d'échelle : 1
- cas particuliers : Isométrie, changement d'échelle pur ($\mathbf{R} = \mathbf{I}$, $\mathbf{T} = (0, 0)$)

IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

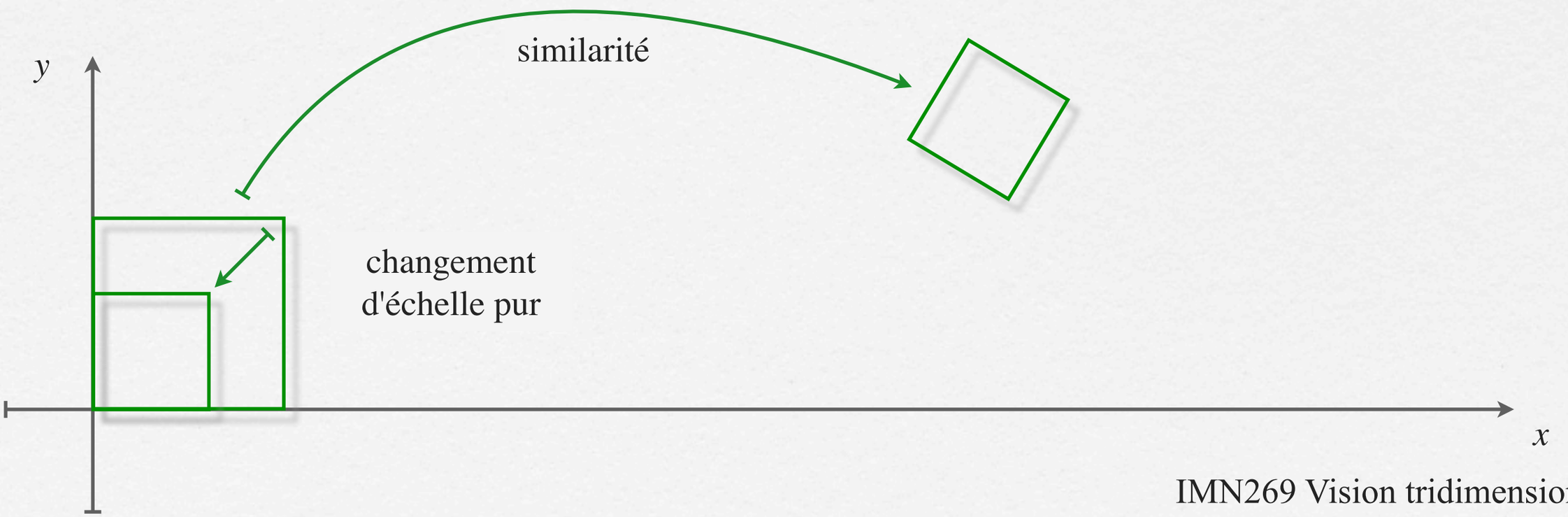
2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

b) Similarités

- 4 degrés de liberté : s, θ et $\mathbf{T} = (T_x, T_y)$
- Invariants : ratios des longueur, angles, ratios des surfaces, parallélisme, colinéarité, $\mathbf{d}_\infty$
- Cas particuliers
  - ✓ Isométries : $s = 1$
  - ✓ Changements d'échelle pur : $\theta = 0°$ et $\mathbf{T} = (0, 0)$

transformations Euclidiennes

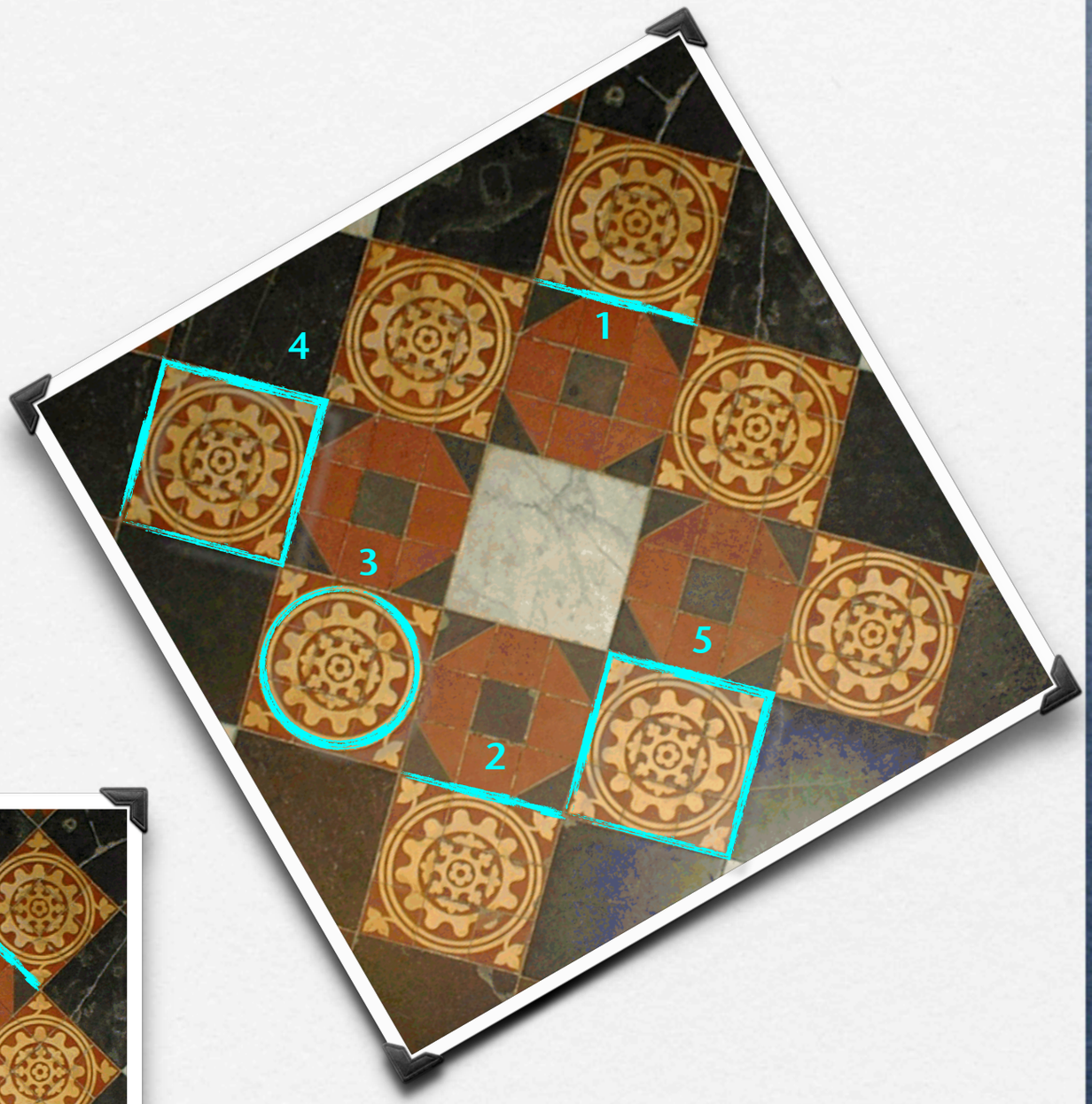


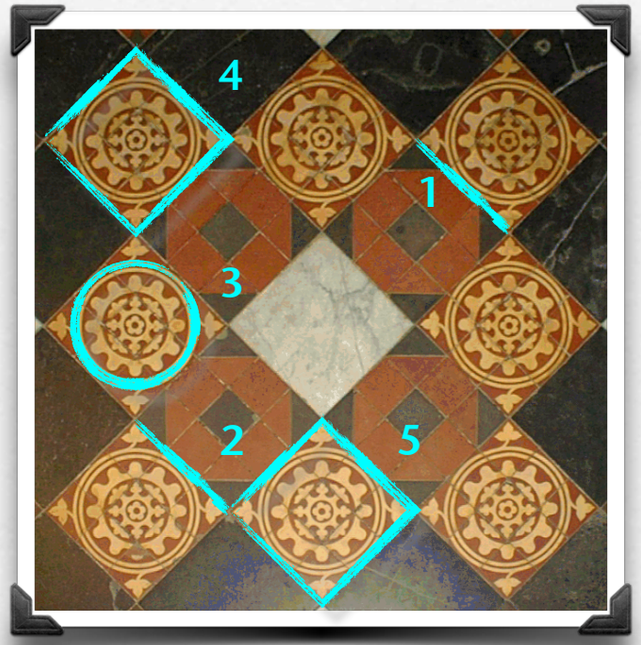
2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

b) Similarités

- Invariants
  - ✓ colinéarité : 1 et 2 demeurent des droites
  - ✓ ratios des longueur : longueur de 1 = longueur de 2
  - ✓ angles : 3 demeure un cercle, 4 et 5 demeurent des carrés
  - ✓ ratios des surfaces : surface de 4 = surface de 5
  - ✓ parallélisme, $\mathbf{d}_\infty$: 1 demeure parallèle à 2





Source : Hartley & Zisserman, 2003

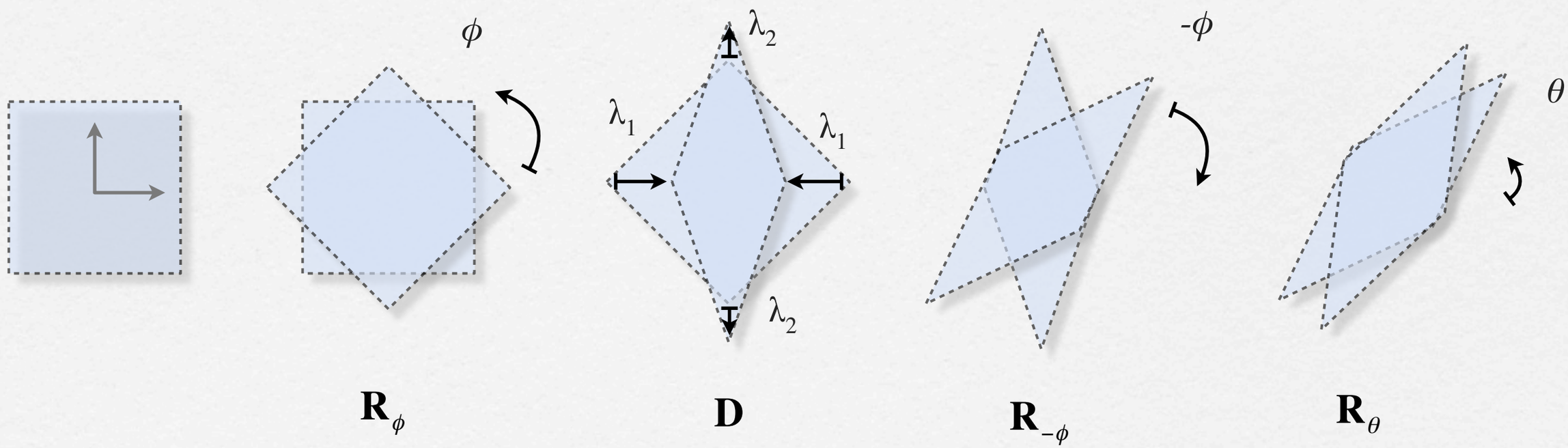
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

c) Affines

1. Rotation de ϕ,
2. Changement d'échelle de λ_1 en x et λ_2 en y
3. Rotation de $-\phi$
4. Rotation de θ



Source : Hartley & Zisserman, 2003

IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

c) Affines

- On peut décomposer la matrice affine comme suit

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} s\mathbf{R}_\theta & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_S} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_A}$$

avec

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}_{-\phi} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{s} \end{bmatrix} \mathbf{R}_\phi$$

$\mathbf{H}_A$: composante affine

$\mathbf{H}_S$: composante de similarité

$\mathbf{K}$: composante de cisaillement triangulaire supérieure et $\det(\mathbf{K}) = 1$

Remarque

- Si $s = \lambda_1$, on voit que le changement d'échelle en y est exprimé en % de celui en x

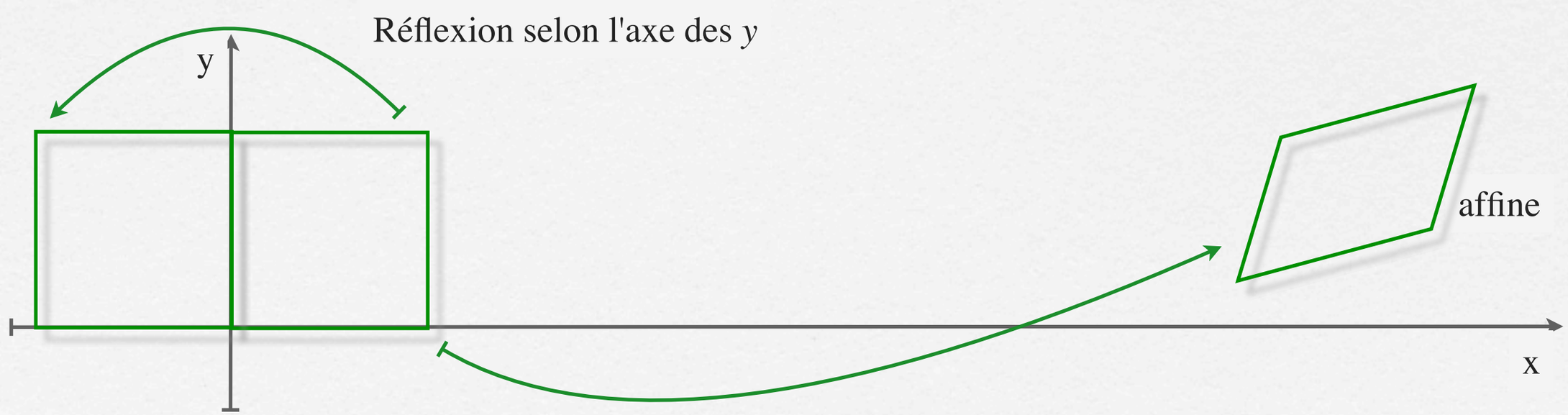
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

c) Affines

- 6 degrés de liberté : λ_1 , λ_2, ϕ, θ et $\mathbf{T} = (T_x, T_y)$
- Invariants : ratio des surfaces, parallélisme, ratio des droites parallèles, colinéarité, $\mathbf{d}_\infty$
- Cas particuliers
  - ✓ Similarités : $\lambda_1 = \lambda_2 = s$, $\phi = 0°$
  - ✓ Cisaillement : $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\theta = 0°$ et $\mathbf{T} = (0, 0)$
  - ✓ Réflexion pure : λ_1 ou $\lambda_2 = -1$ et l'autre = 1

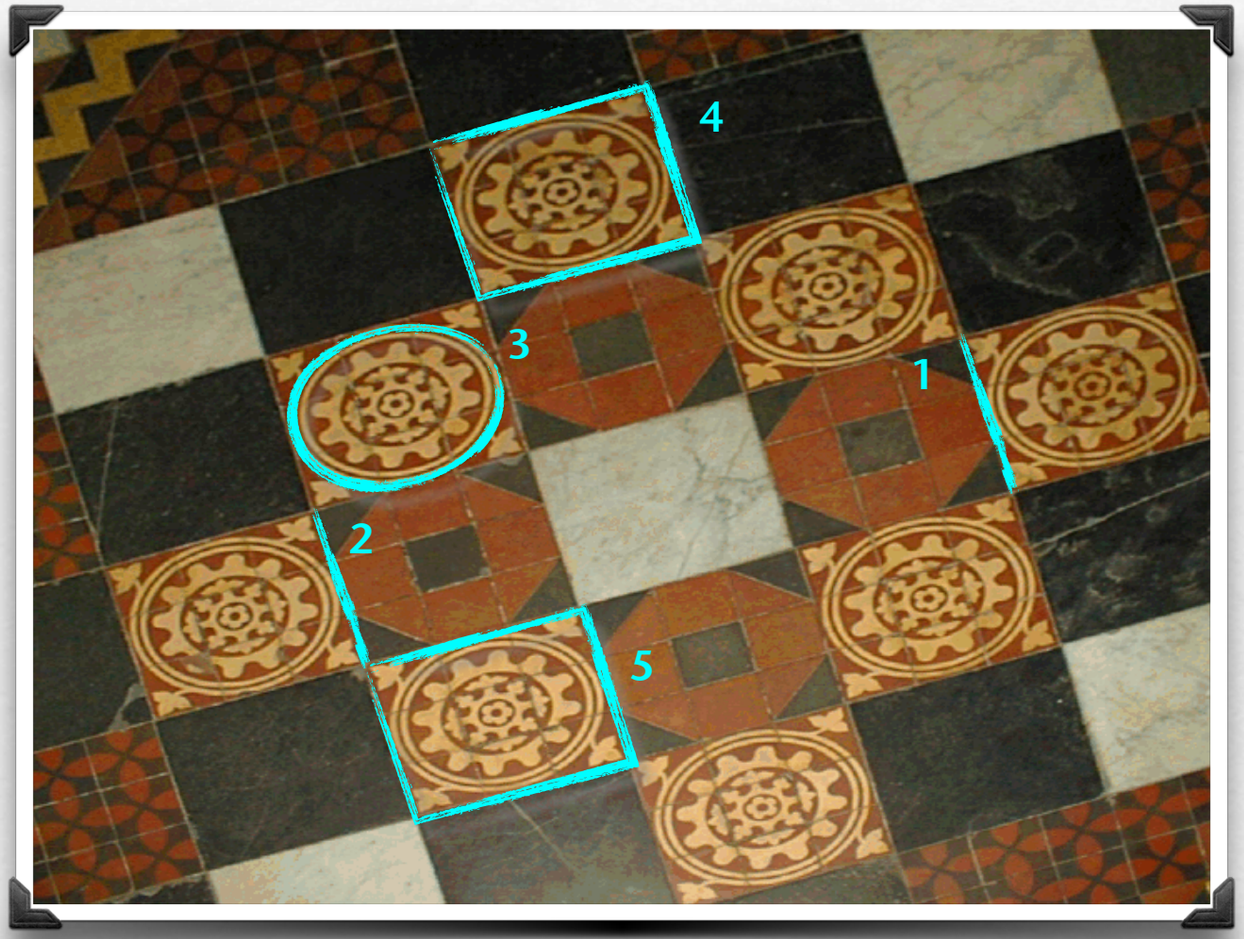


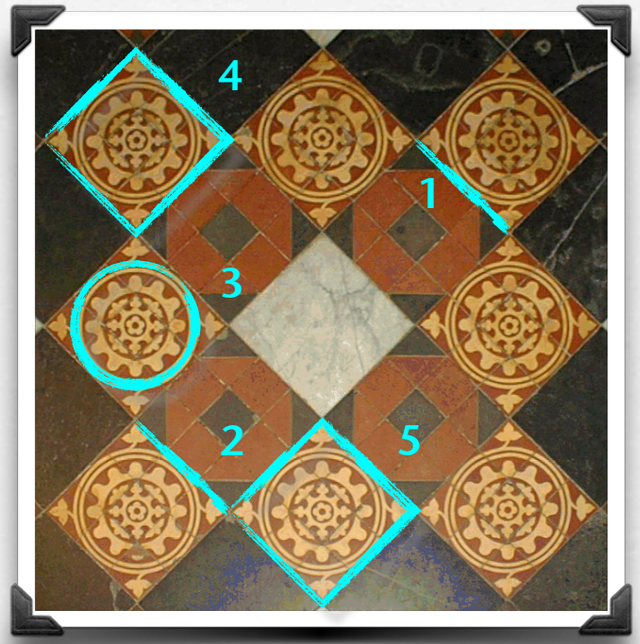
2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

c) Affines

- Invariants
  - ✓ colinéarité : 1 et 2 demeurent des droites
  - ✓ ratios des surfaces : surface de 4 = surface de 5
  - ✓ parallélisme , $\mathbf{d}_\infty$: 1 demeure parallèle à 2
  - ✓ ratios des droites *parallèles* :
    longueur de 1 = longueur de 2





Source : Hartley & Zisserman, 2003

- ☑ 3 n'est plus un cercle
  - ➡ angles varient
- ☑ 4 et 5 demeurent des parallélogrammes mais ne sont plus des carrés
  - ➡ angles et ratios des longueurs varient

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

d) Projectives

- On peut décomposer la matrice de transformation projective comme suit

$\mathbf{H}_P$:	composante projective
$\mathbf{H}_A$:	composante affine
$\mathbf{H}_S$:	composante de similarité
$\mathbf{K}$:	est triangulaire supérieure et det($\mathbf{K}$) = 1

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{T} \\ \mathbf{V}^t & v \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_S} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_A} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}^t & v \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_P} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K} = \mathbf{R}_{-\phi} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{s} \end{bmatrix} \mathbf{R}_{\phi}$$

- *Exemple*

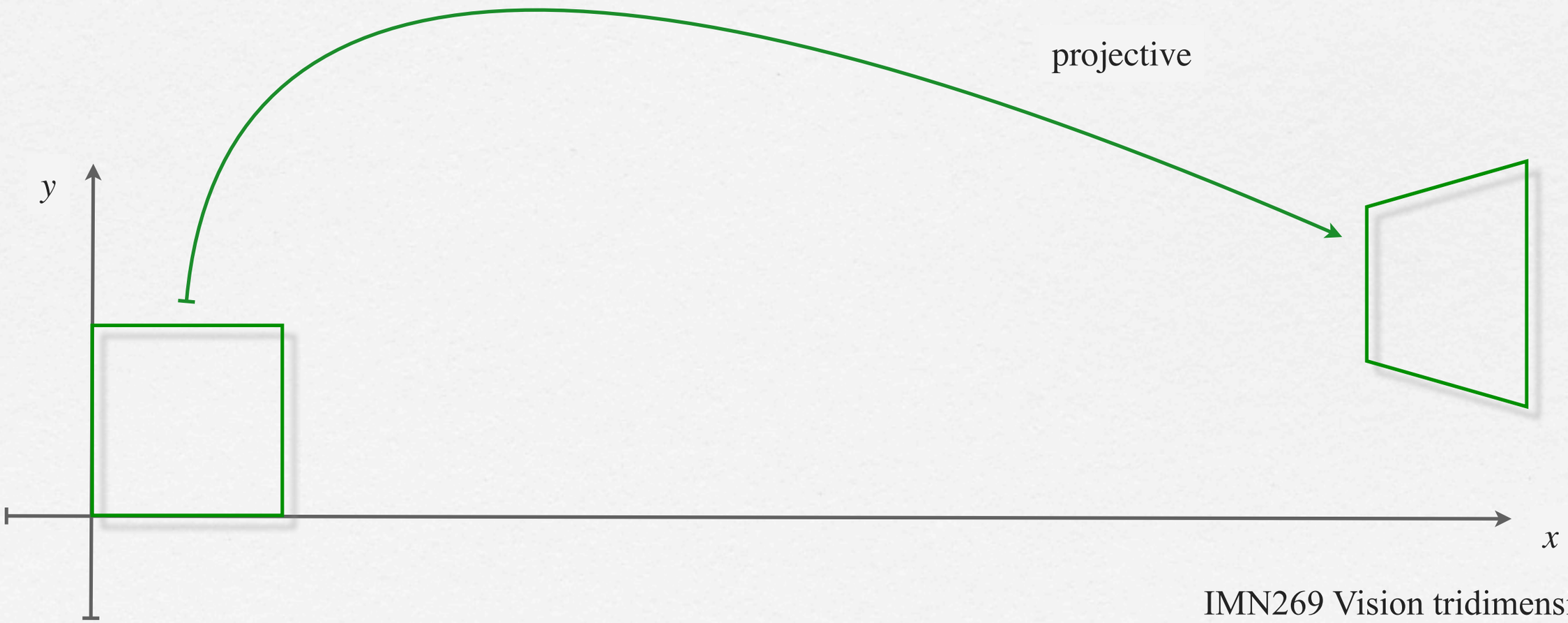
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1.707 & 0.586 & 1.0 \\ 2.707 & 8.242 & 2.0 \\ 1.0 & 2.0 & 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos(\pi/4) & -2\sin(\pi/4) & 1.0 \\ 2\sin(\pi/4) & 2\cos(\pi/4) & 2.0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

d) Projectives

- 8 degrés de liberté : $\mathbf{V} = (V_x, V_y), \lambda_1, \lambda_2, \phi, \theta$ et $\mathbf{T} = (T_x, T_y)$
- Invariants : colinéarité

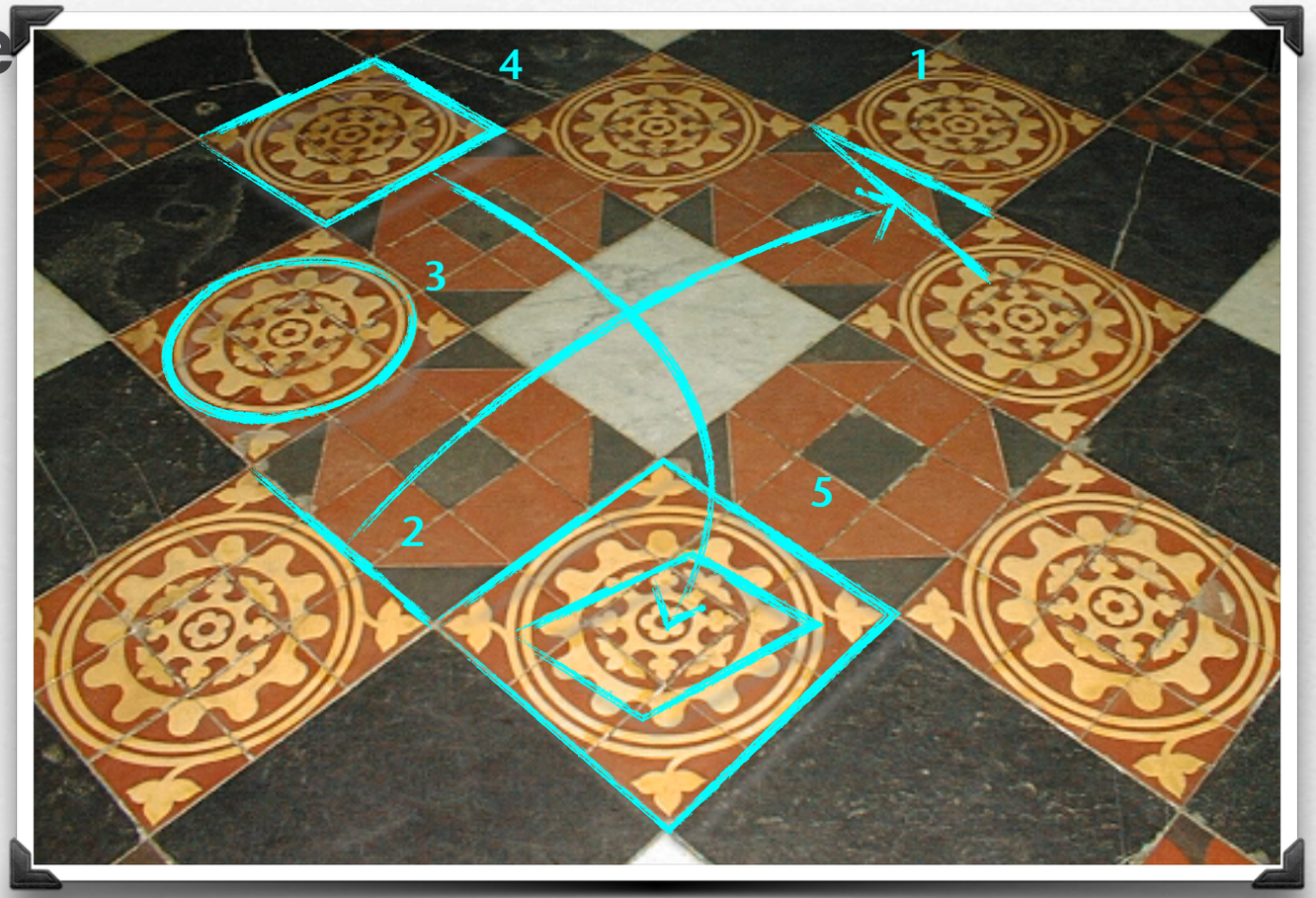


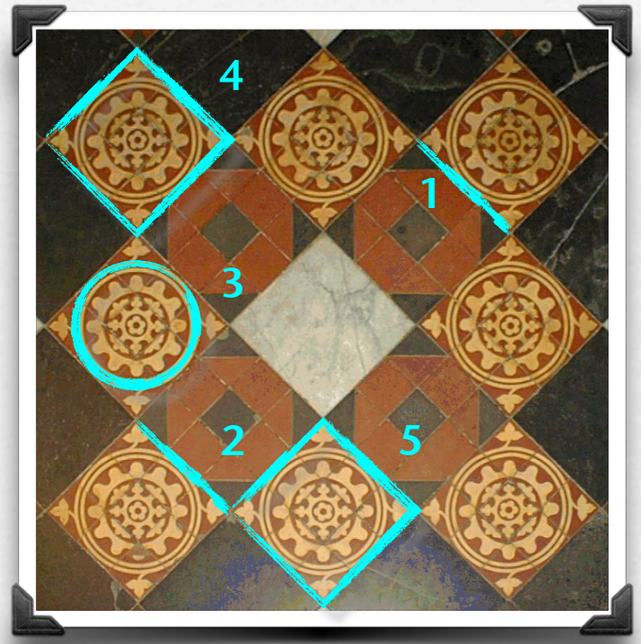
2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

d) Projectives

- Invariants
  - ✓ colinéarité
    - ➡ 1 et 2 demeurent des droites
    - ➡ côtés de 4 et 5 demeurent des droites





- ☑ 3 n'est plus un cercle (angles varient)
- ☑ surface de 4 ≠ surface de 5 (ratios des surfaces varient)
- ☑ 4 et 5 ne sont plus des parallélogrammes (parallélisme, angles et ratios des longueurs varient)
- ☑ 1 n'est pas parallèle à 2 (parallélisme varie)
- ☑ longueur de 1 ≠ longueur de 2 (ratios des longueur varient)

Source : Hartley & Zisserman, 2003

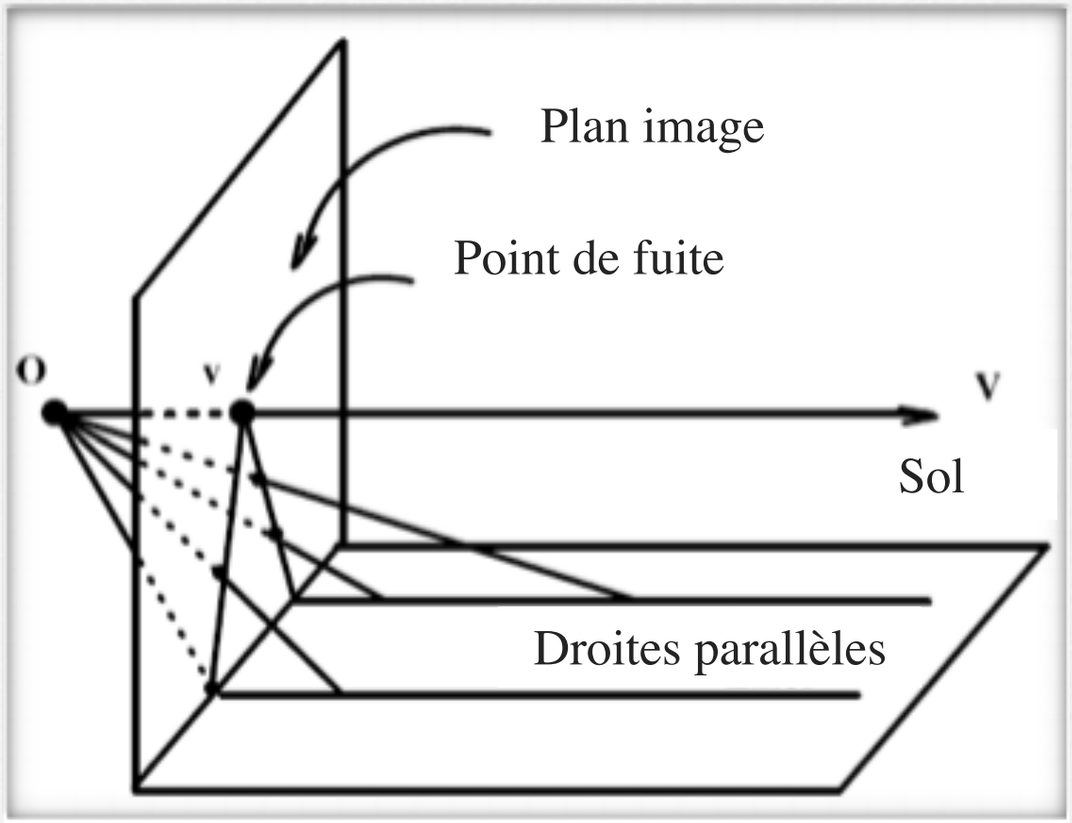
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

d) Projectives

- *Remarque*
  - ✓ Quand on applique une transformation projective, la droite à l'infini ($\mathbf{d}_\infty$) devient finie, ce qui permet d'observer les **points de fuite** et l'**horizon** dans le plan image



Démo :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{T} \\ \mathbf{V}^t & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}x + A_{12}y \\ A_{21}x + A_{22}y \\ V_x x + V_y y \end{bmatrix}$$

point fini car $z \neq 0$

Source : Mundy & Zisserman, 1992

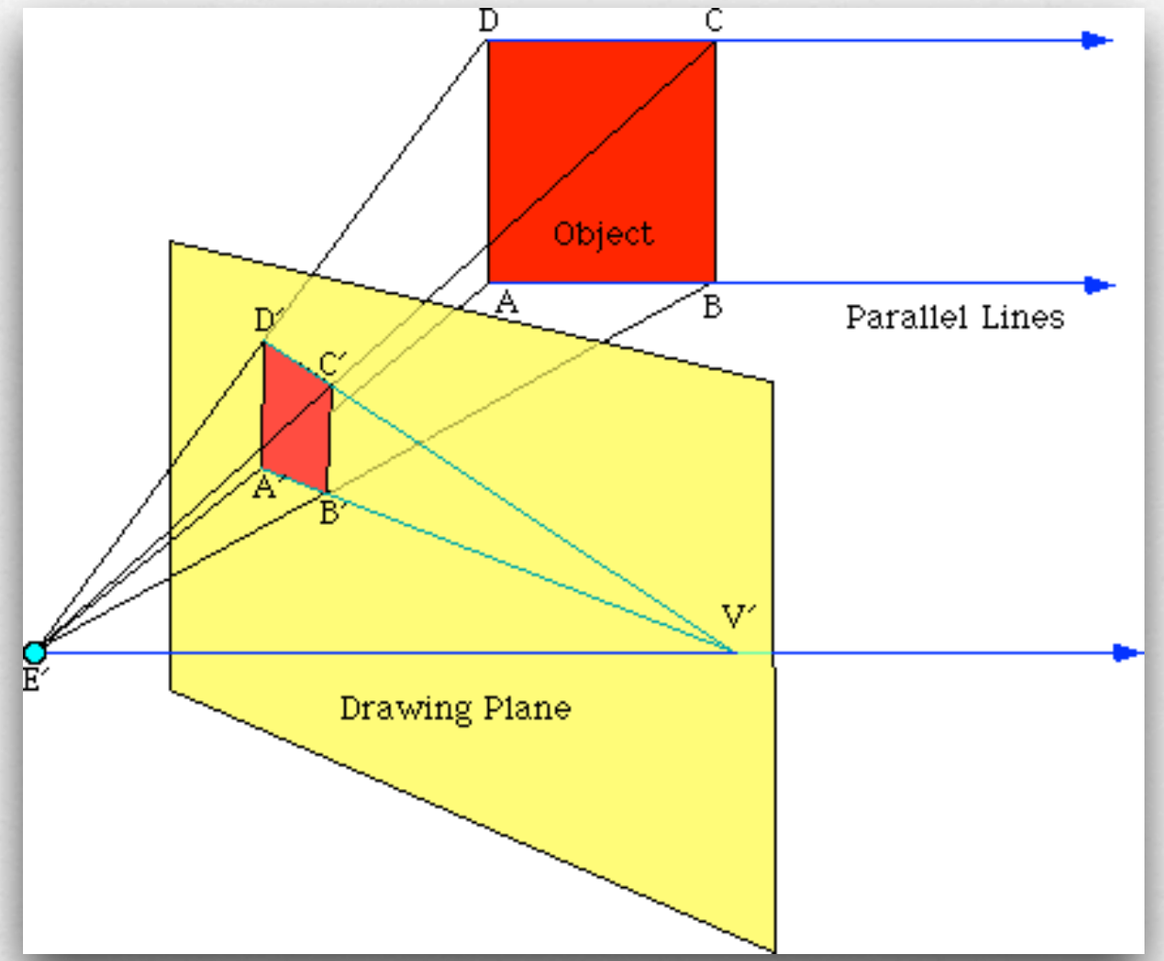
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

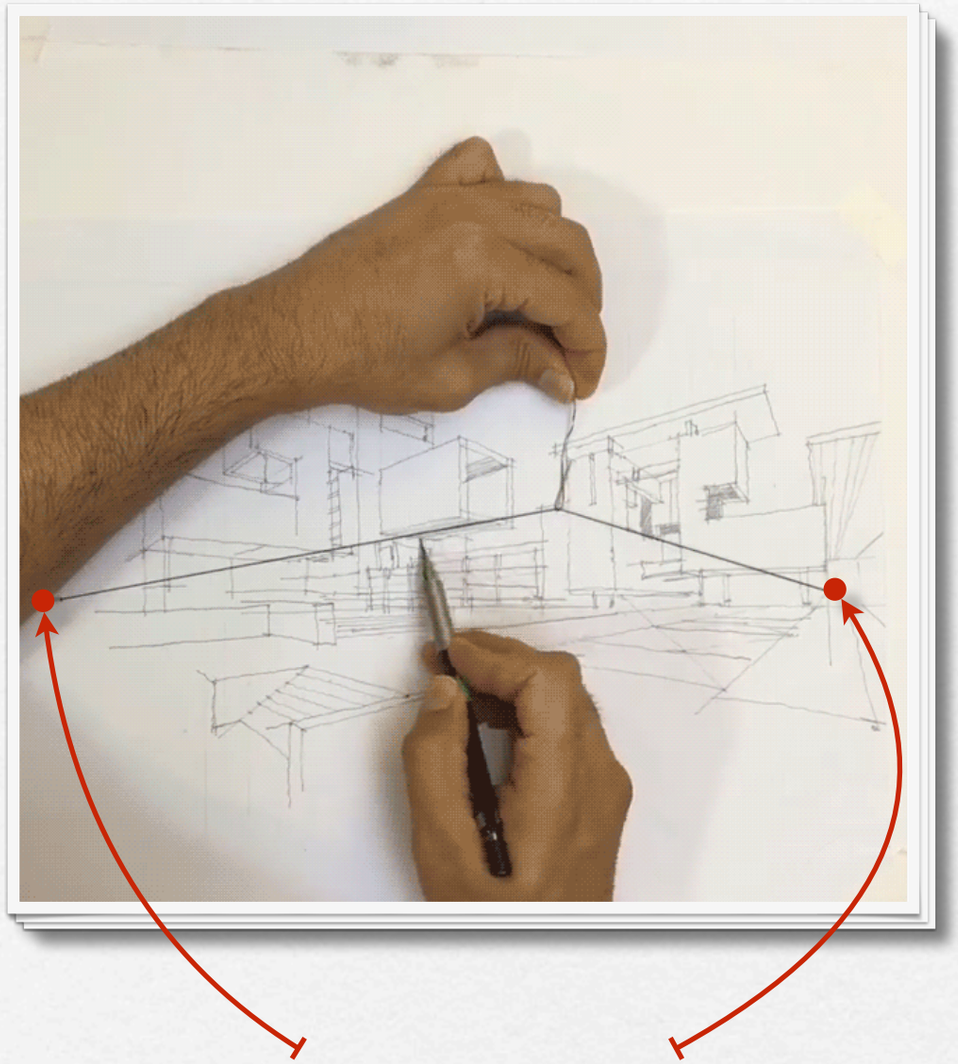
2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

d) Projectives

- Les **points de fuite** sont la projection des *points idéaux*





Points de fuite représentant la direction des axes du plancher

Source : Mundy & Zisserman, 1992

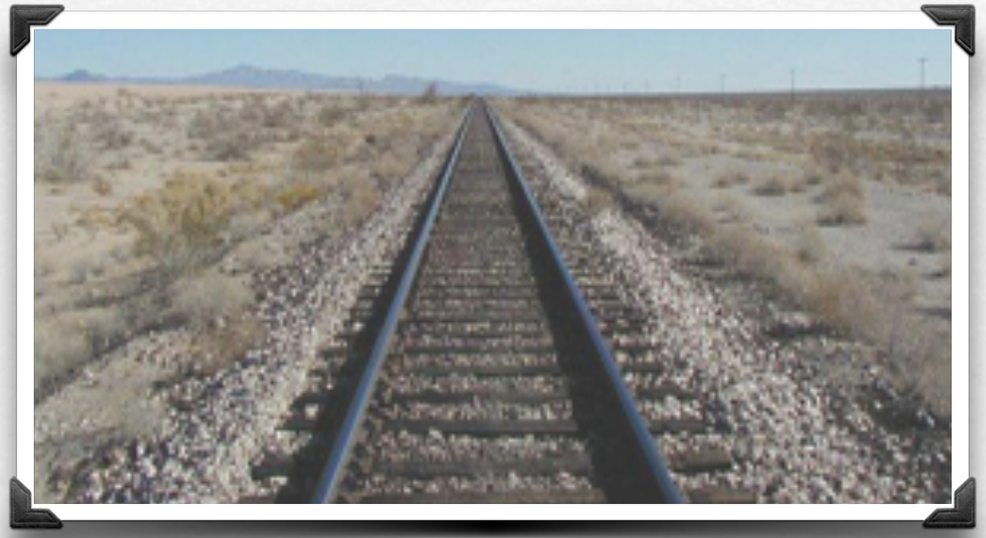
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

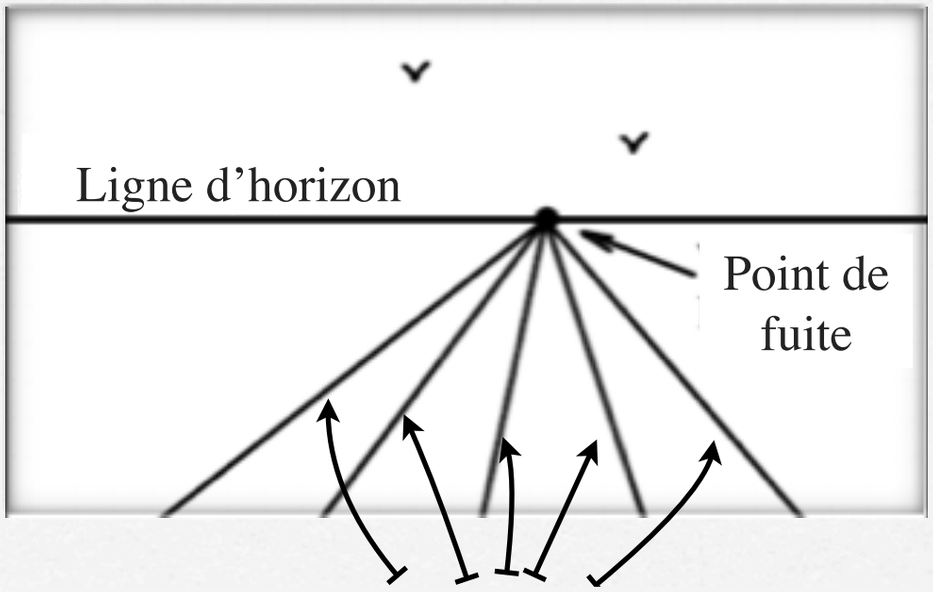
2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

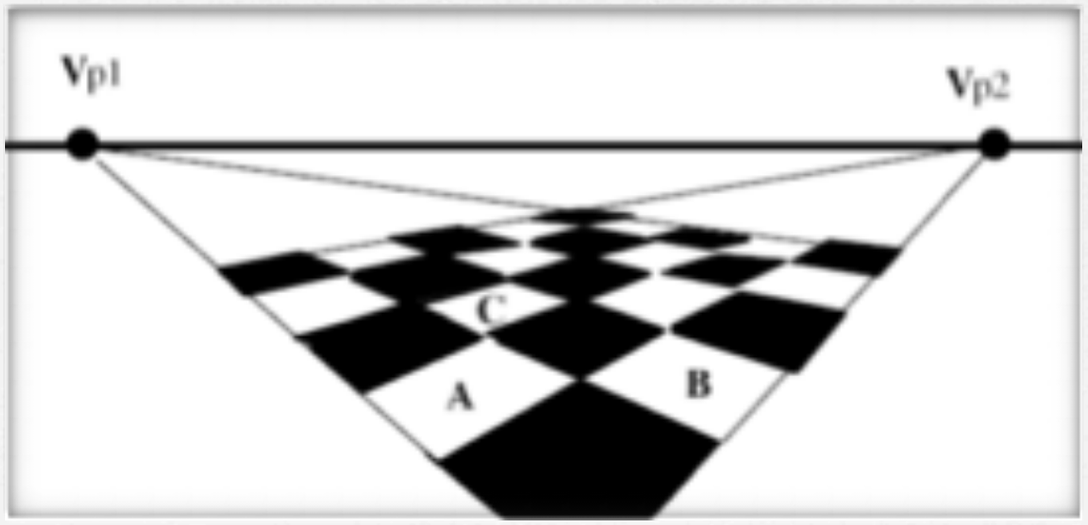
d) Projectives

- La **ligne d'horizon** est la projection de $\mathbf{d}_\infty$
- Les *points de fuite* se situent sur la *ligne d'horizon*
- La ligne d'horizon relie les points de fuite
- Il suffit d'avoir 2 points de fuite pour trouver la ligne d'horizon





Toutes ces droites sont parallèles avant d'être projetées (i.e. sur le plancher des vaches)



Source : Mundy & Zisserman, 1992

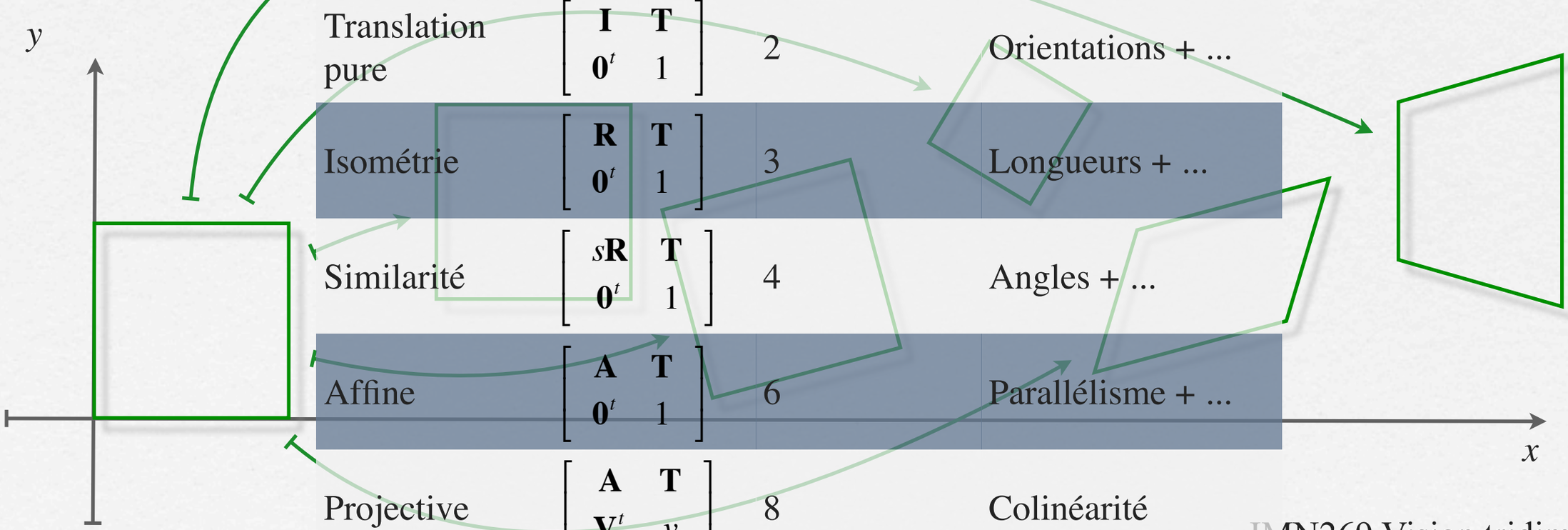
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

3. Hiérarchies des transformations

- *Récapitulatif*
  - ✓ Les transformations sont organisées en **hiérarchies** allant du particulier (translation pure) au général (projective)
  - ✓ Chacune est un cas particulier de la suivante

Nom	Matrice	Degrés de liberté	Préserve
Translation pure	$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}$	2	Orientations + ...
Isométrie	$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}$	3	Longueurs + ...
Similarité	$\begin{bmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}$	4	Angles + ...
Affine	$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}$	6	Parallélisme + ...
Projective	$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{T} \\ \mathbf{V}^t & v \end{bmatrix}$	8	Colinéarité



Plan du chapitre

1. Plan projectif

2. Transformations projectives

   2.1. Projectivités

   2.2. Transformation des droites

   2.3. Hiérarchies des transformations

   2.4. Correction de l'effet de perspective dans une image

3. Espace projectif (aperçu)

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

4. Correction de l'effet de perspective

La formation d'image selon le modèle de caméra à sténopée transforme la droite d_∞ en droite d dans l'image par une transformation projective $\mathbf{H}_1$. Pour faire la correction, on devrait idéalement trouver et appliquer la transformation projective $(\mathbf{H}_1)^{-1}$.

$$(\mathbf{H}_1)^{-1} = \begin{bmatrix} A & T \\ V^t & v \end{bmatrix} = \mathbf{H}_A \begin{bmatrix} I & 0 \\ V^t & v \end{bmatrix}$$

avec $\mathbf{H}_A$ qui est une transformation affine.

Remarque : on ne pourra pas trouver $\mathbf{H}_A$, donc la pose arbitrairement $\mathbf{H}_A = I$

Pour faire la correction, on applique donc la transformation $\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ V^t & v \end{bmatrix}$

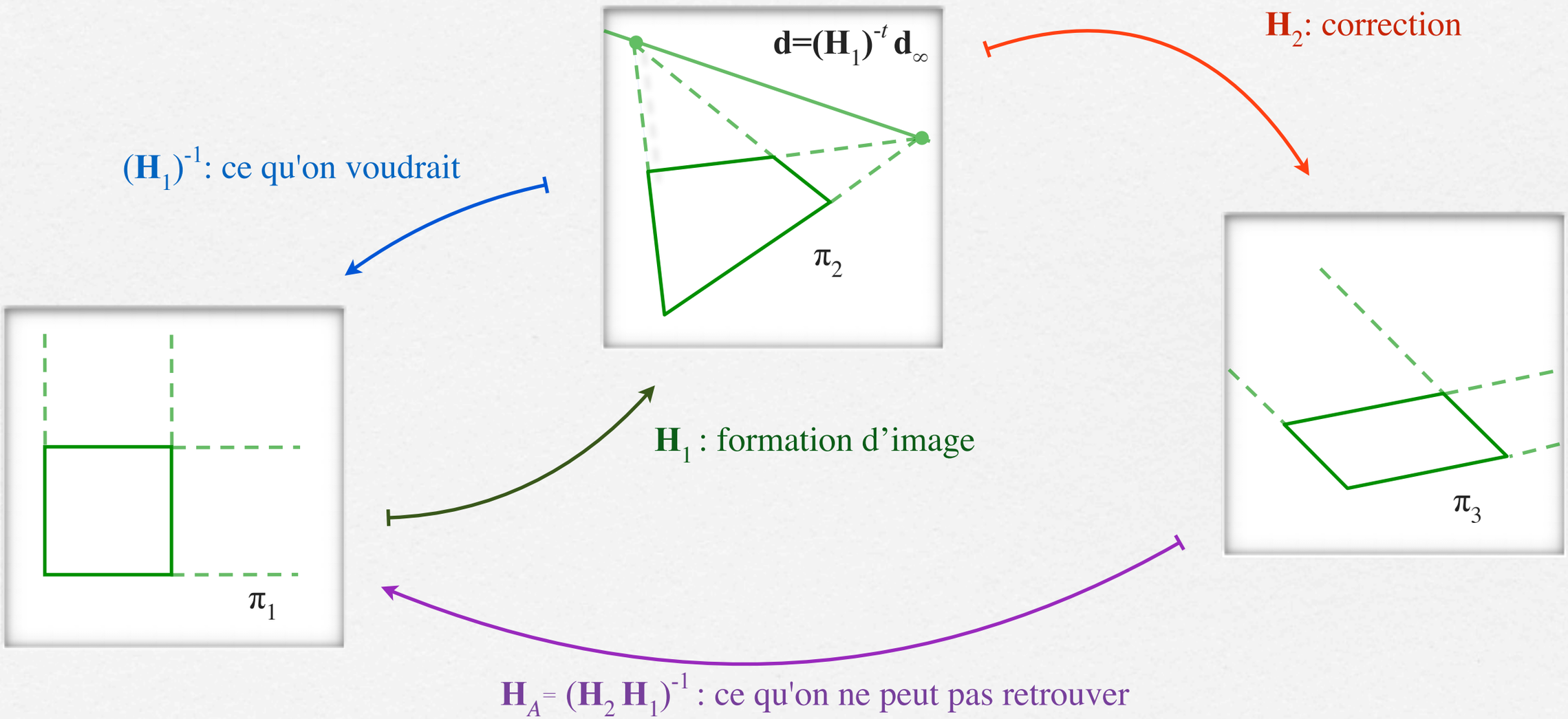
Inspiration : Hartley & Zisserman, 2003

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

4. Correction de l'effet de perspective

- ☑ $\mathbf{H}_1$ projette $\mathbf{d}_\infty$ dans le plan.
- ☑ $\mathbf{H}_2$ projette $\mathbf{d}$ à l'infini.
- ☑ $\mathbf{H}_A = (\mathbf{H}_2\,\mathbf{H}_1)^{-1}$ est donc affine : elle conserve $\mathbf{d}_\infty$



Inspiration : Hartley & Zisserman, 2003

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

4. Correction de l'effet de perspective

Avec la matrice $\mathbf{H}_2$, on veut renvoyer la ligne d'horizon dans l'image à l'infini (d_∞).

Soit $d = (d_1, d_2, d_3)$ la ligne d'horizon. On veut avoir

$$(\mathbf{H}_2)^{-t} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Posons

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}, \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R}$$

On a donc

$$(\mathbf{H}_2)^{-t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{a}{b} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{c} \\ a & b & \frac{1}{c} \end{bmatrix}, \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R}$$

On trouve alors que $c = d_3$, $b = d_2$, et $a = d_1$

Inspiration : Hartley & Zisserman, 2003

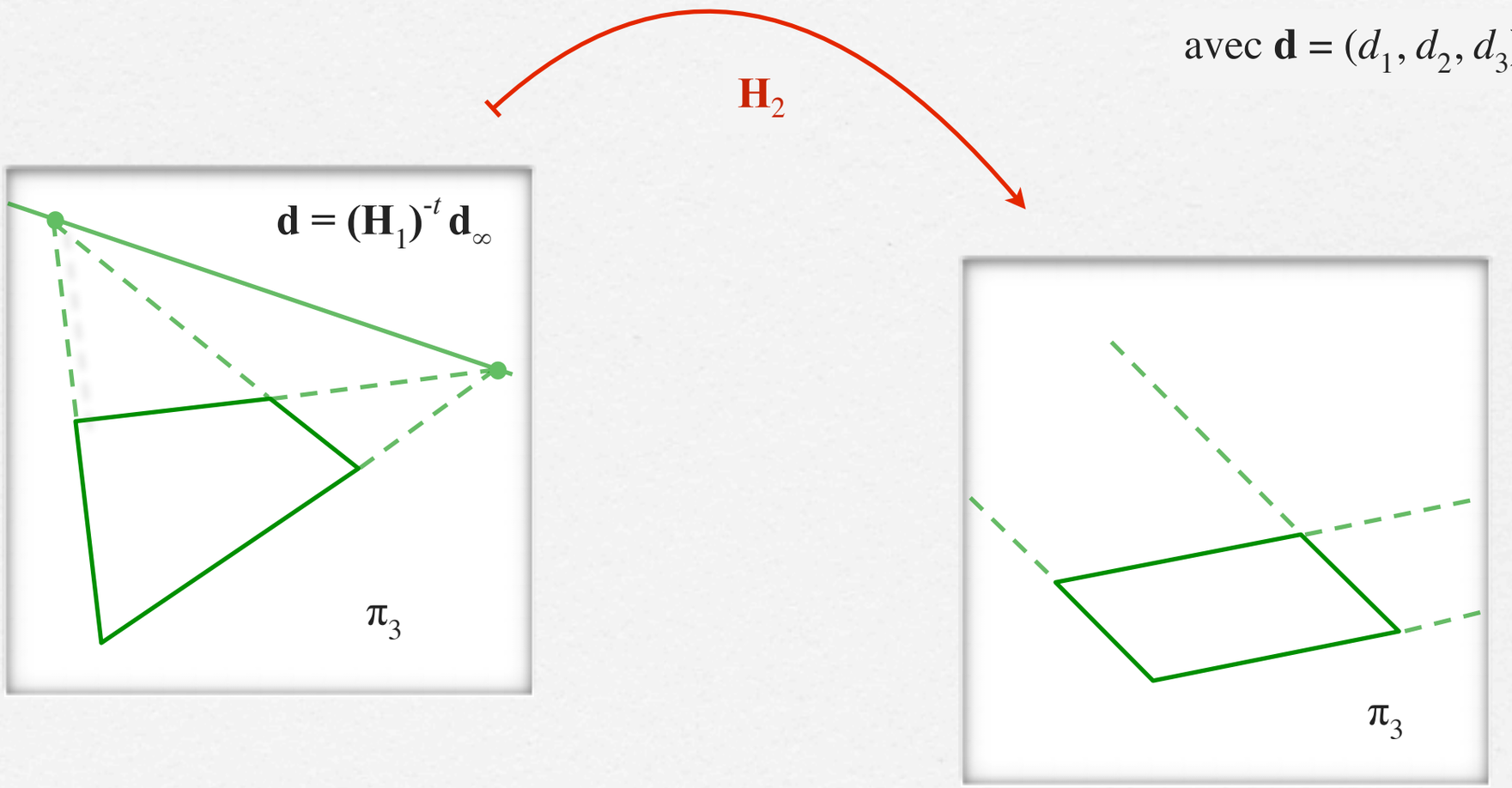
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

4. Correction de l'effet de perspective

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}$$

avec $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$



Inspiration : Hartley & Zisserman, 2003

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

4. Correction de l'effet de perspective

- *Idée* d'algorithme

  a) trouver 2 points de fuite : **faire 2 fois**

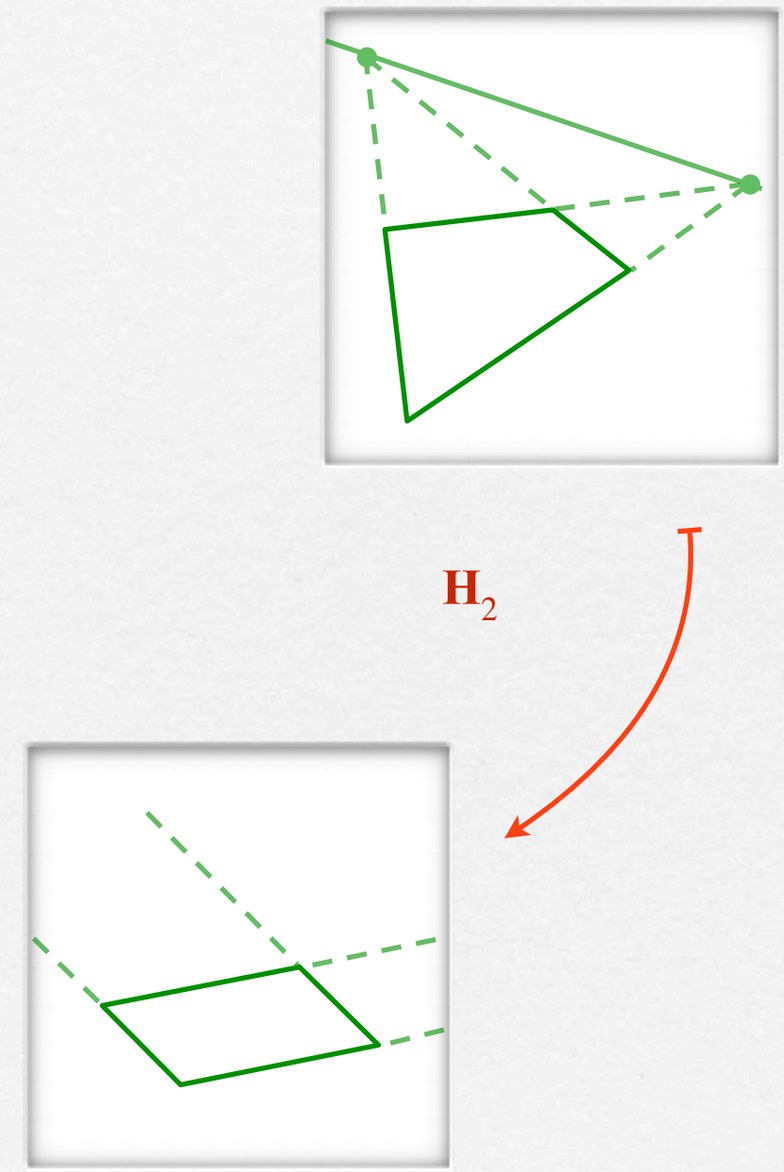
  ➡ trouver 2 droites parallèles dans la scène

  ➡ le point d'intersection de ces 2 droites est le point de fuite

  b) trouver la droite qui relie les 2 points de fuite : $\mathbf{d} = (\mathbf{H}_1)^{-t}\, \mathbf{d}_\infty$

  c) à l'aide de $\mathbf{d}$ on bâti $\mathbf{H}_2$

  d) on applique $\mathbf{H}_2$ à tous les points de l'image



Inspiration : Hartley & Zisserman, 2003

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

4. Correction de l'effet de perspective

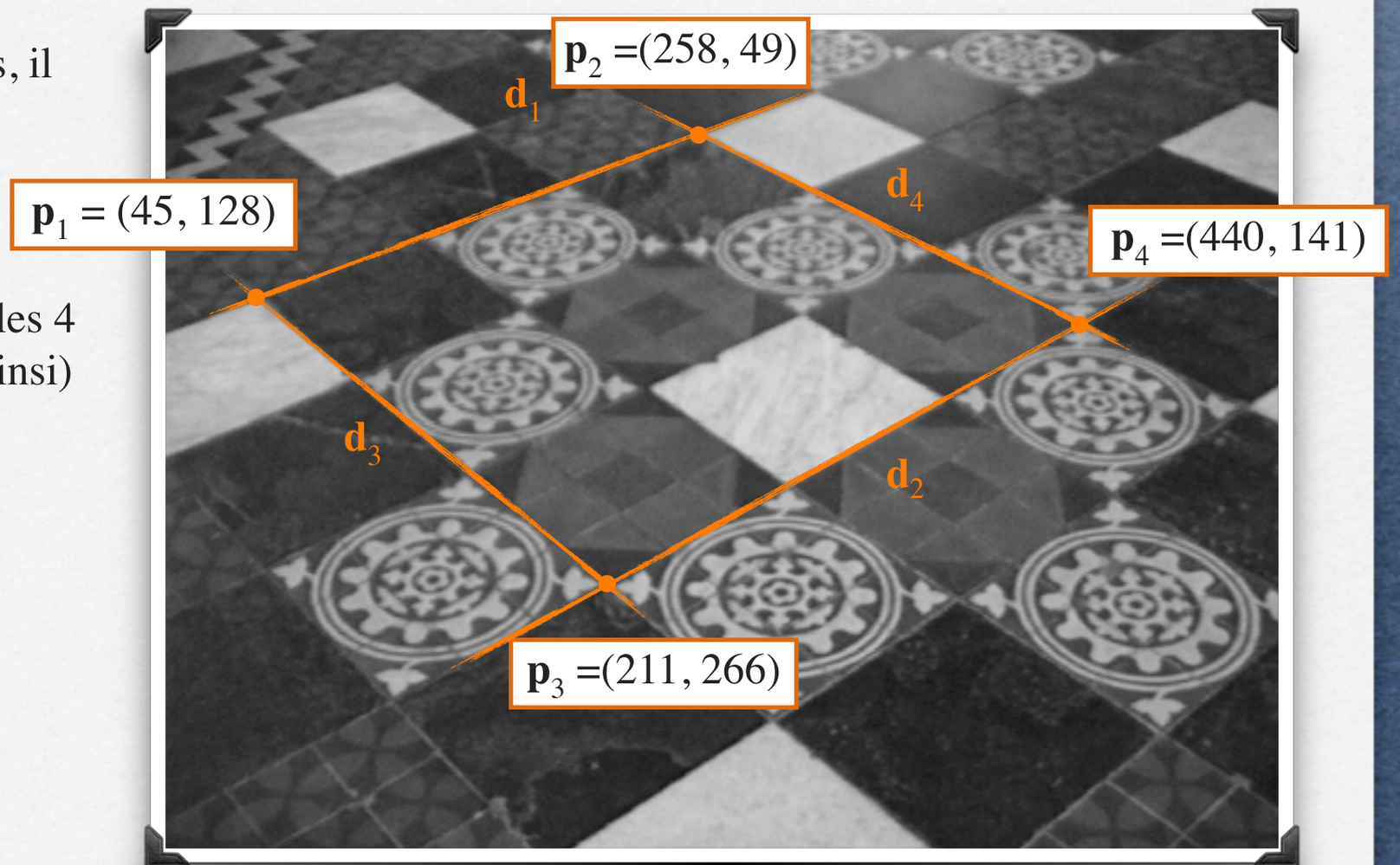
- *Exemple*

  a) trouver les points de fuite

  ➡ 2 paires de droites parallèles : les droites relient des paires de points, il faut d'abord trouver les droites

  ➡ 4 points caractéristiques qui sont les 4 coins d'un rectangle (plus facile ainsi)

Ici, les coordonnées sont en pixels



Source : Hartley & Zisserman, 2003

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

4. Correction de l'effet de perspective

- *Exemple*

a) trouver les points de fuite

➡ trouver un 1er point de fuite : 1 paire de droites parallèles, les droites relient des paires de points

$\mathbf{d}_1$:

$\mathbf{p}_1 = (45, 128) \rightarrow (45, 128, 100) = (0.45, 1.28, 1)$

$\mathbf{p}_2 = (258, 49) \rightarrow (258, 49, 100) = (2.58, 0.49, 1)$

La droite qui contient les 2 points est $\mathbf{d}_1 = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0.45 & 1.28 & 1 \\ 2.58 & 0.49 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.79 \\ 2.13 \\ -3.082 \end{bmatrix}$

$\mathbf{d}_2$:

$\mathbf{p}_3 = (211, 266) \rightarrow (211, 266, 100) = (2.11, 2.66, 1)$

$\mathbf{p}_4 = (440, 141) \rightarrow (440, 141, 100) = (4.40, 1.41, 1)$

La droite qui contient les 2 points est $\mathbf{d}_2 = \mathbf{p}_3 \times \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2.11 & 2.66 & 1 \\ 4.40 & 1.41 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 2.29 \\ -8.729 \end{bmatrix}$

2. Transformations projectives

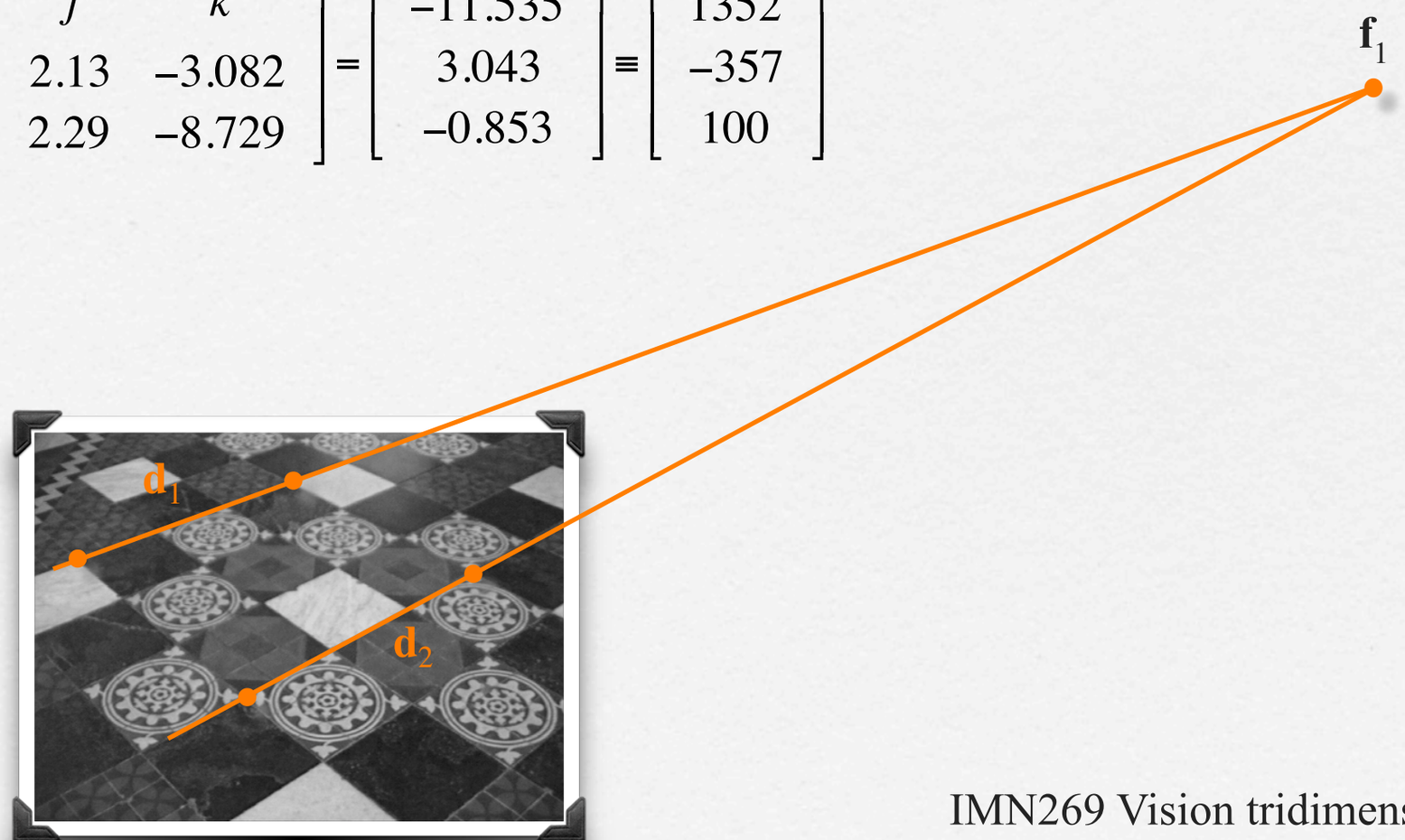
4. Correction de l'effet de perspective

- *Exemple*

  a) trouver les points de fuite

  ➡ trouver un 1er point de fuite : le point d'intersection de ces 2 droites est le point de fuite

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0.79 & 2.13 & -3.082 \\ 1.25 & 2.29 & -8.729 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.535 \\ 3.043 \\ -0.853 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1352 \\ -357 \\ 100 \end{bmatrix}$$



Source : Hartley & Zisserman, 2003

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

4. Correction de l'effet de perspective

- *Exemple*

  a) trouver les points de fuite

  ➡ trouver un 2e point de fuite : 1 paire de droites parallèles, les droites relient des paires de points

$\mathbf{d}_3$:

La droite qui contient $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_3$ est $\mathbf{d}_3 = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0.45 & 1.28 & 1 \\ 2.11 & 2.66 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.38 \\ 1.66 \\ -1.504 \end{bmatrix}$

$\mathbf{d}_4$:

La droite qui contient $\mathbf{p}_2$ et $\mathbf{p}_4$ est $\mathbf{d}_4 = \mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2.58 & 0.49 & 1 \\ 4.40 & 1.41 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.92 \\ 1.82 \\ 1.482 \end{bmatrix}$

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

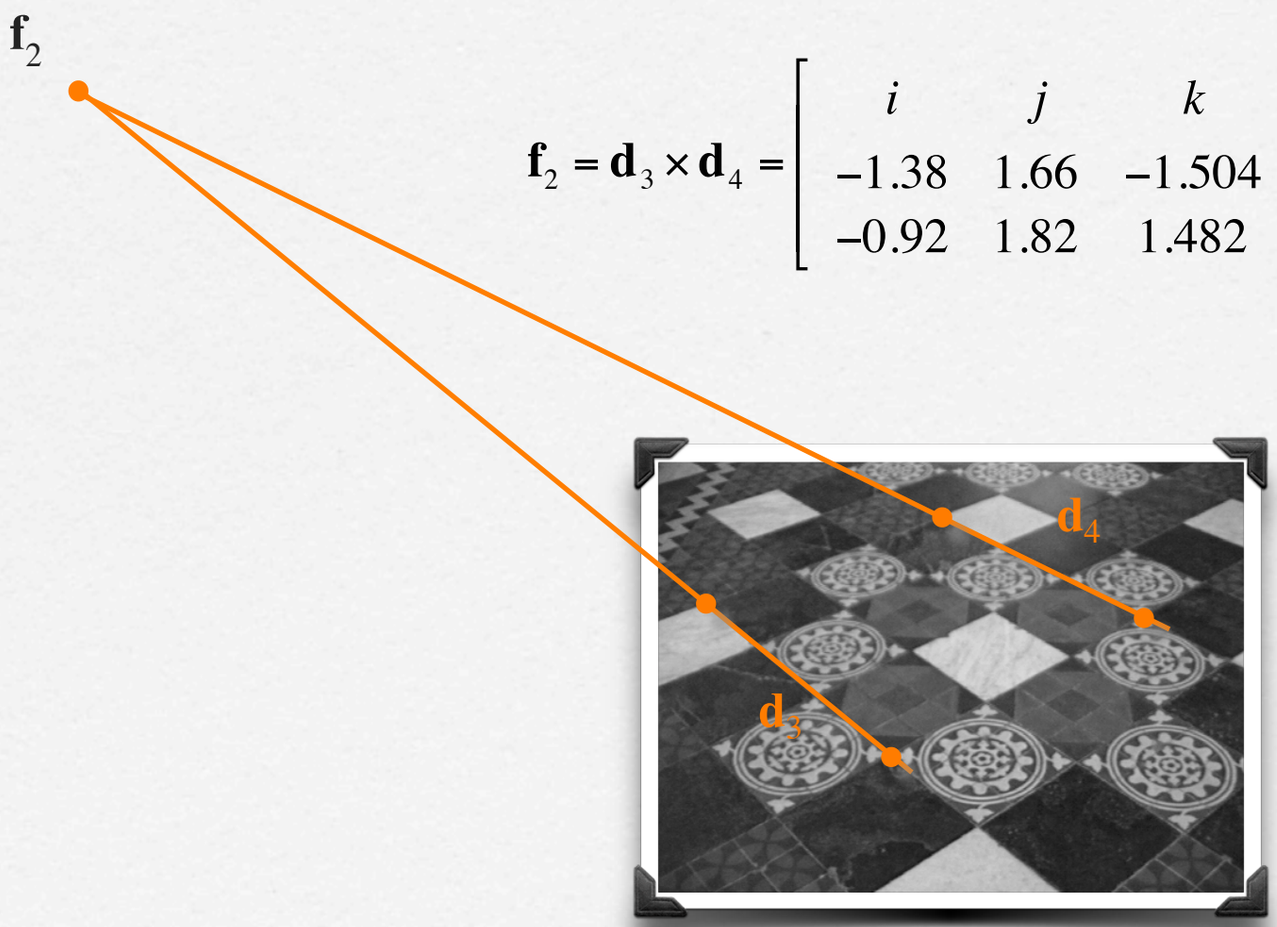
4. Correction de l'effet de perspective

- *Exemple*

  a) trouver les points de fuite

  ➡ trouver un 2e point de fuite : le point d'intersection de ces 2 droites est le point de fuite

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_4 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1.38 & 1.66 & -1.504 \\ -0.92 & 1.82 & 1.482 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.197 \\ 3.428 \\ -0.984 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -528 \\ -348 \\ 100 \end{bmatrix}$$



Source : Hartley & Zisserman, 2003

IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

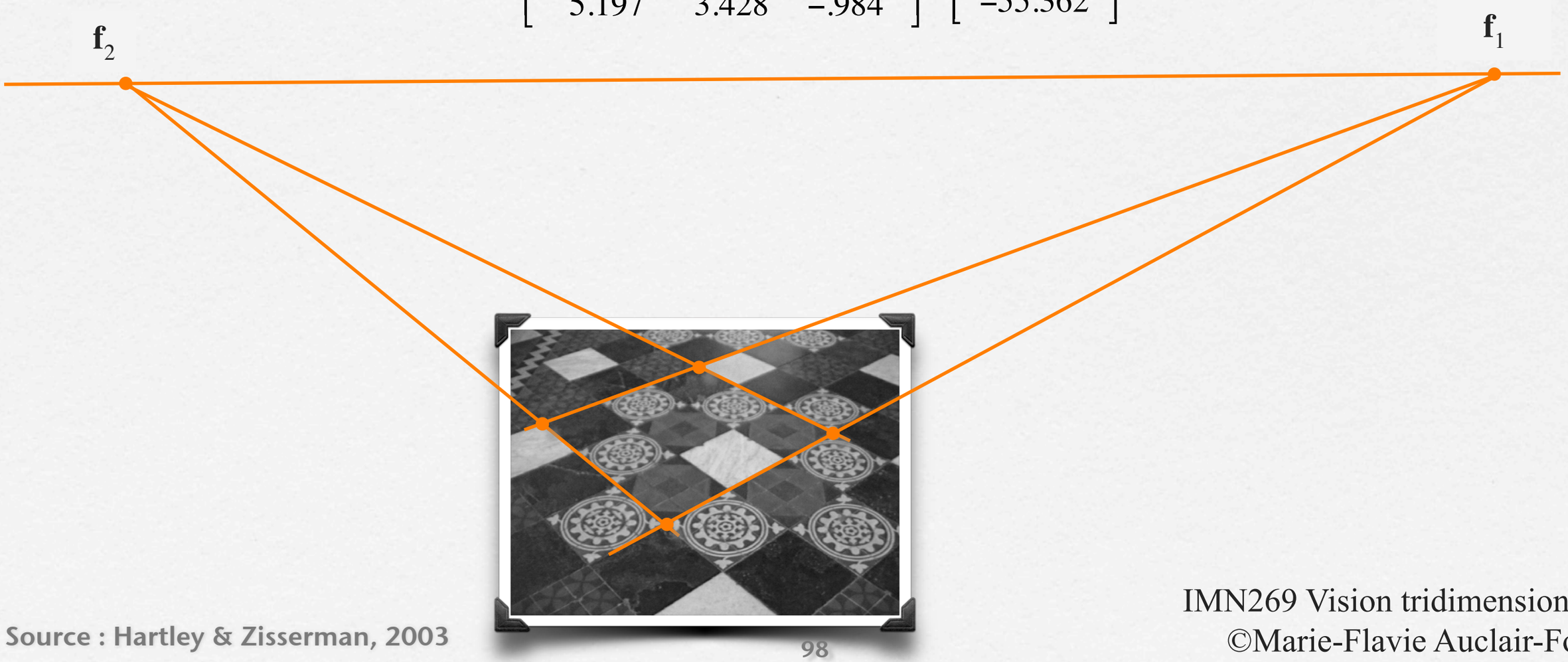
2. Transformations projectives

4. Correction de l'effet de perspective

- *Exemple*

  a) trouver la droite qui relie les 2 points de fuite : $\mathbf{d} = \mathbf{H}_1\, \mathbf{d}_\infty$

$$\mathbf{d} = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -11.535 & 3.043 & -0.853 \\ 5.197 & 3.428 & -.984 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.070 \\ -15.790 \\ -55.362 \end{bmatrix}$$



Source : Hartley & Zisserman, 2003

IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

4. Correction de l'effet de perspective

- *Exemple*

  c) à l'aide de $\mathbf{d}$, on bâti $\mathbf{H}_2$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.070 & 15.790 & 55.362 \end{bmatrix}$$

✓ On peut vérifier le résultat de $\mathbf{H}_2\,\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{H}_2\,\mathbf{f}_2$ et $(\mathbf{H}_2)^{-t}\,\mathbf{d}$

Qu'est-ce que ça devrait donner d'après vous?

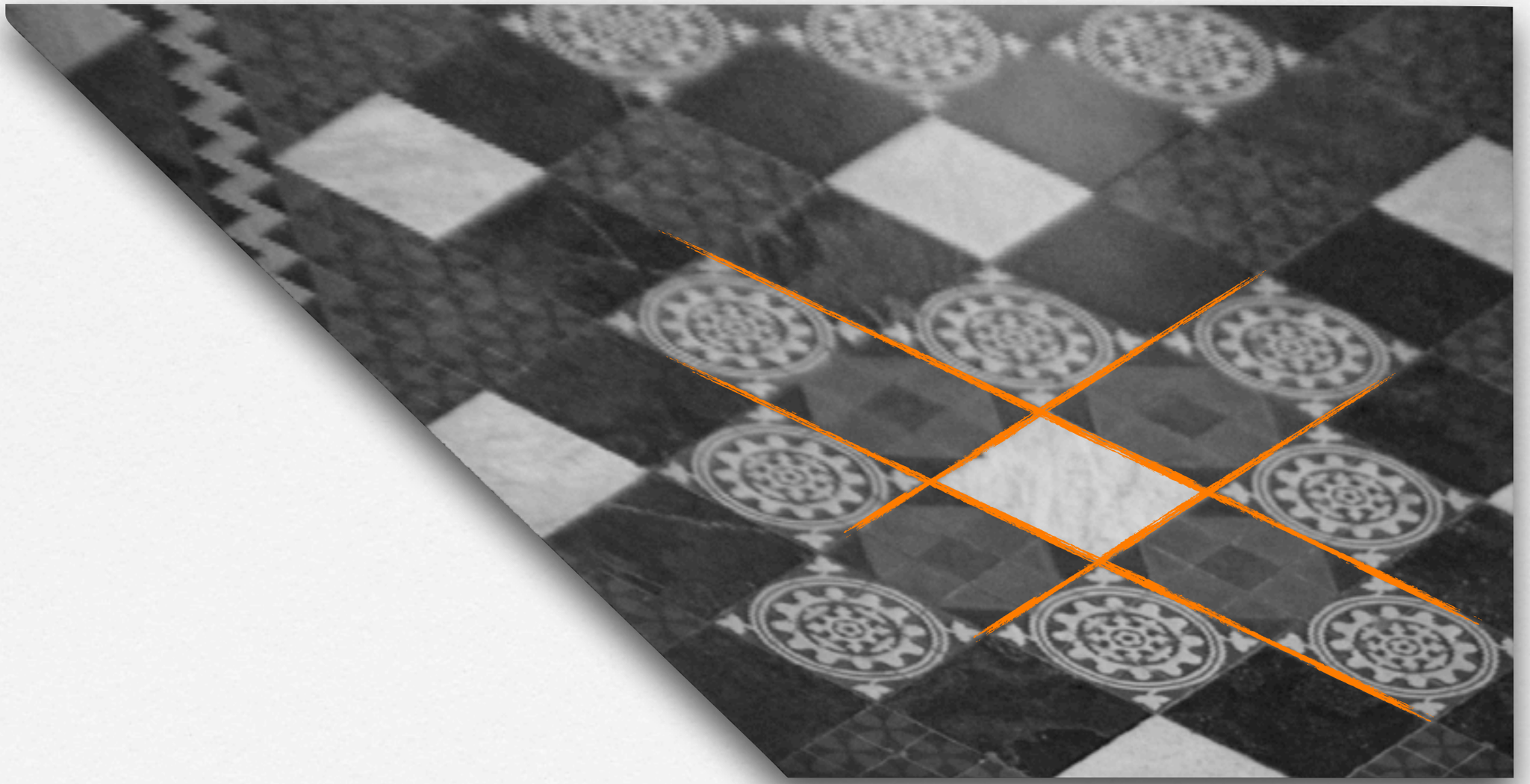
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

2. Transformations projectives

4. Correction de l'effet de perspective

- *Exemple*

  d) on applique $\mathbf{H}_2$ à toute l'image



Source : Hartley & Zisserman, 2003

IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Plan du chapitre

1. Plan projectif

2. Transformations projectives

3. Espace projectif (aperçu)

   3.1. Transformation projective homogène

   3.2. Définition homogène d'un plan dans $\mathbb{P}^3$

   3.3. Représentation d'une droite dans $\mathbb{P}^3$

   3.4. Transformation projective non-homogène

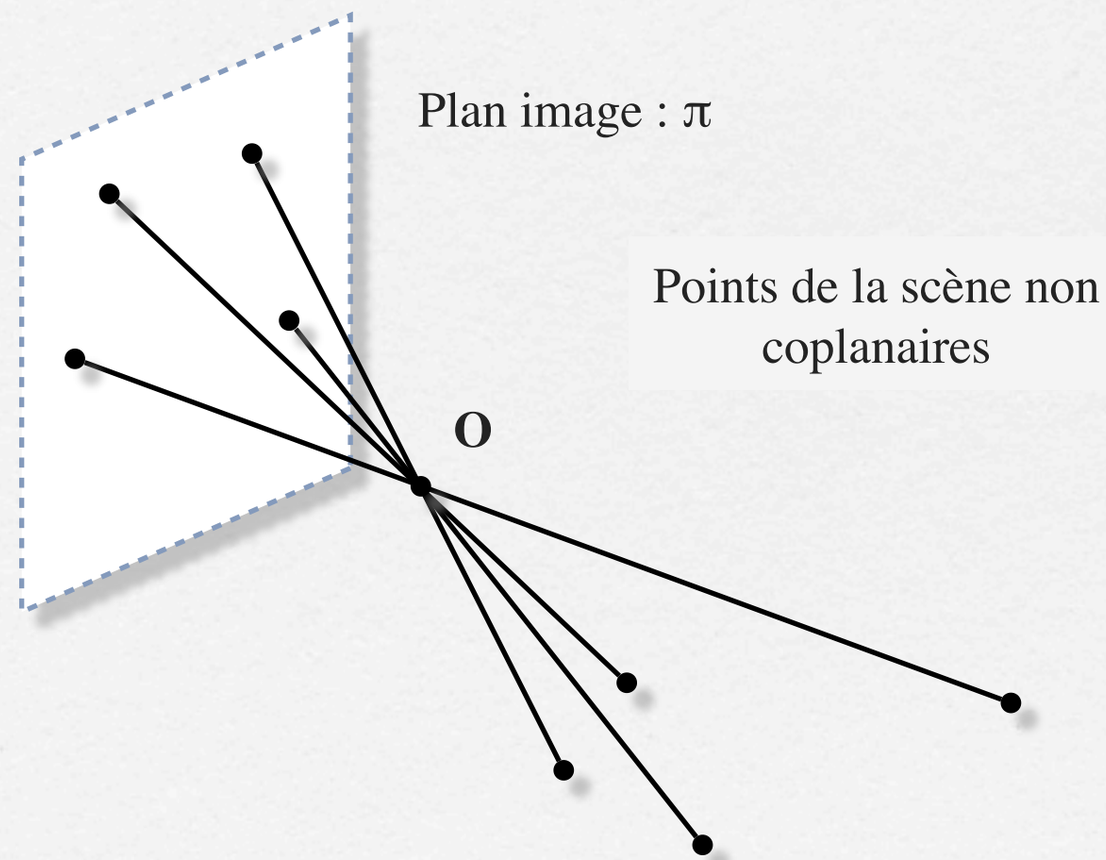
   3.5. Point idéal et plan à l'infini

   3.6. Bases projectives canoniques

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

3. Espace projectif

- *Remarque*
  - ✓ Jusqu'à présent, on a considéré des transformations de $\mathbb{P}^2$ vers $\mathbb{P}^2$
- *Problème*
  - ✓ La formation d'image ne correspond pas toujours à ce genre de transformation
- La formation de l'image NE PEUT ÊTRE VUE en géométrie projective comme une transformation projective inversible
  - ✓ **O** est le centre de projection
    - ➡ origine (0, 0, 0)



3. Espace projectif

- *Définition* : Espace projectif $\mathbb{P}^3$
  - ✓ Ensemble des classes d'équivalence de quadruplets ($\mathbb{R}^4$) où (x, y, z, t) et (x', y', z', t') sont équivalents SSI

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix}, \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0$$

- *Remarque*
  - ✓ Peut se généraliser à un nombre de dimensions quelconque
- Un point de $\mathbb{R}^3$ s'exprime dans $\mathbb{P}^3$ (coord. homogènes) en ajoutant un 1 en 4e coordonnée

$$\text{La représentation de} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \text{en } \mathbb{P}^3 \text{ est} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Espace projectif

1. Transformation projective homogène

- *Définition* : transformation inversible de $\mathbb{P}^3$ vers $\mathbb{P}^3$

  $m : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$: il existe une matrice 4×4 **H** telle que

$$\mathbf{P} = m(\mathbf{P}') = \mathbf{H}\mathbf{P}', \quad \forall \mathbf{P}, \mathbf{P}' \in \mathbb{P}^3$$

- *Remarque*
  - ✓ **H** a 15 degrés de liberté : 16 éléments de **H** – facteur d'échelle

IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

3. Espace projectif

2. Définition homogène d'un plan dans $\mathbb{P}^3$

- Équation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$

$$\pi_1 X_1 + \pi_2 X_2 + \pi_3 X_3 + \pi_4 = 0 \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

✓ Revient à dire : le point $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, 1)$ est sur le plan défini par $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$

➡ Aussi valide pour $k\,\mathbf{X}$ ou $k\,\pi$

➡ Dans $\mathbb{P}^3$, le plan est le dual du point

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

3. Espace projectif

3. Représentation d'une droite dans $\mathbb{P}^3$

- Une droite sera représentée dans $\mathbb{P}^3$ par une combinaison linéaire de 2 points

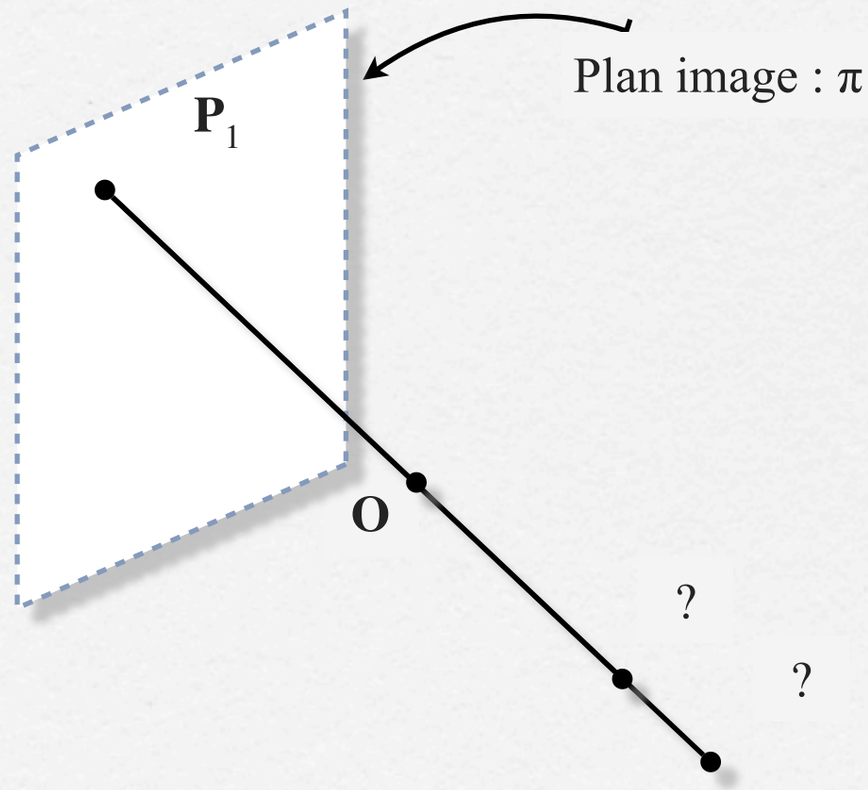
  ✓ $\mathbf{D} = \lambda \mathbf{P}_1 + \mu \mathbf{P}_2$, avec $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2 \in \mathbb{P}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- Peut aussi être vu comme l'espace vectoriel (ligne) de la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^t \\ \mathbf{P}_2^t \end{bmatrix}$$

On pourrait considérer tous les points de la scène possibles par la droite qui relie **O** et $\mathbf{P}_1$

⇨ $\mathbf{O} + \lambda \mathbf{P}_1$: combinaison linéaire



©Marie-Flavie Auclair-Fortier

3. Espace projectif

4. Transformation projective non-homogène

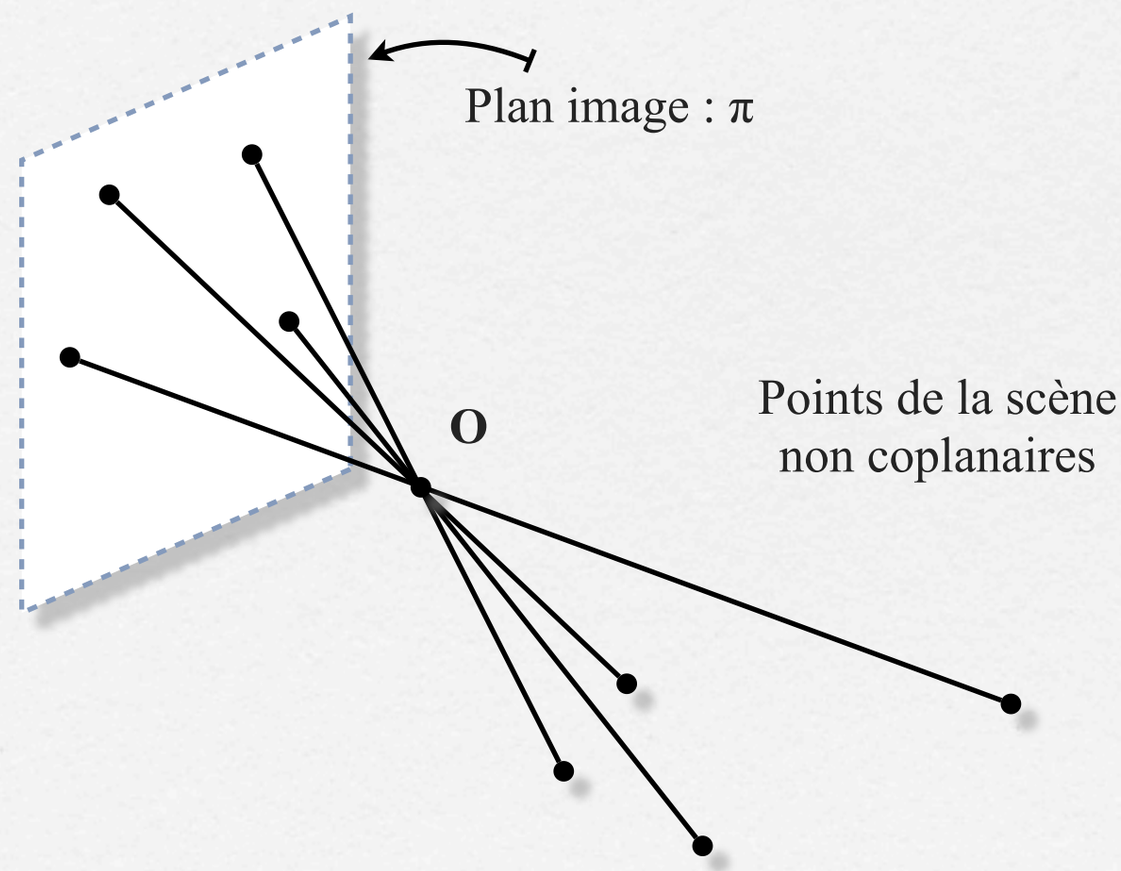
- *Définition* : transformation non-inversible de $\mathbb{P}^3$ vers $\mathbb{P}^2$

  $m : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$: il existe une matrice 3×4 **M** telle que

  ✓ $\mathbf{p} = m(\mathbf{P}) = \mathbf{MP}, \quad \forall\, \mathbf{P} \in \mathbb{P}^3$ et $\mathbf{p} \in \mathbb{P}^2$

- *Remarque* : **M** a 11 degrés de liberté

La projection d'une scène 3D vers un plan image 2D est un exemple d'une transformation projective non-homogène



3. Espace projectif

5. Point idéal et plan à l'infini

- Un point dans $\mathbb{P}^3$, $\mathbf{D} = (D_x, D_y, D_z, 0)$, est un point idéal
  - ✓ Le point idéal représente l'orientation d'un plan dans l'espace
- Le vecteur $\boldsymbol{\pi}_\infty = (0, 0, 0, 1)$ représente le plan à l'infini
  - ✓ $\boldsymbol{\pi}_\infty$ contient toutes les orientations de plans
    - ➡ $\boldsymbol{\pi}_\infty \mathbf{D} = 0$
  - ✓ Lorsqu'on projette $\boldsymbol{\pi}_\infty$ par une transformation non-homogène $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$, on obtient une ligne d'horizon
    - ➡ Une projectivité de $\mathbf{d}_\infty$

IMN269 Vision tridimensionnelle
©Marie-Flavie Auclair-Fortier

3. Espace projectif

6. Bases projectives canoniques

- *Définition* : Base canonique
  - ✓ pour un espace projectif $\mathbb{P}^n$, la base projective canonique est composée de $n + 2$ vecteurs : les $n + 1$ vecteurs unitaires augmenté du vecteur constitué de 1 partout

➡ Base projective canonique de $\mathbb{P}^2$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

➡ Base projective canonique de $\mathbb{P}^3$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Récapitulatif

➡ Plan projectif $\mathbb{P}^2$

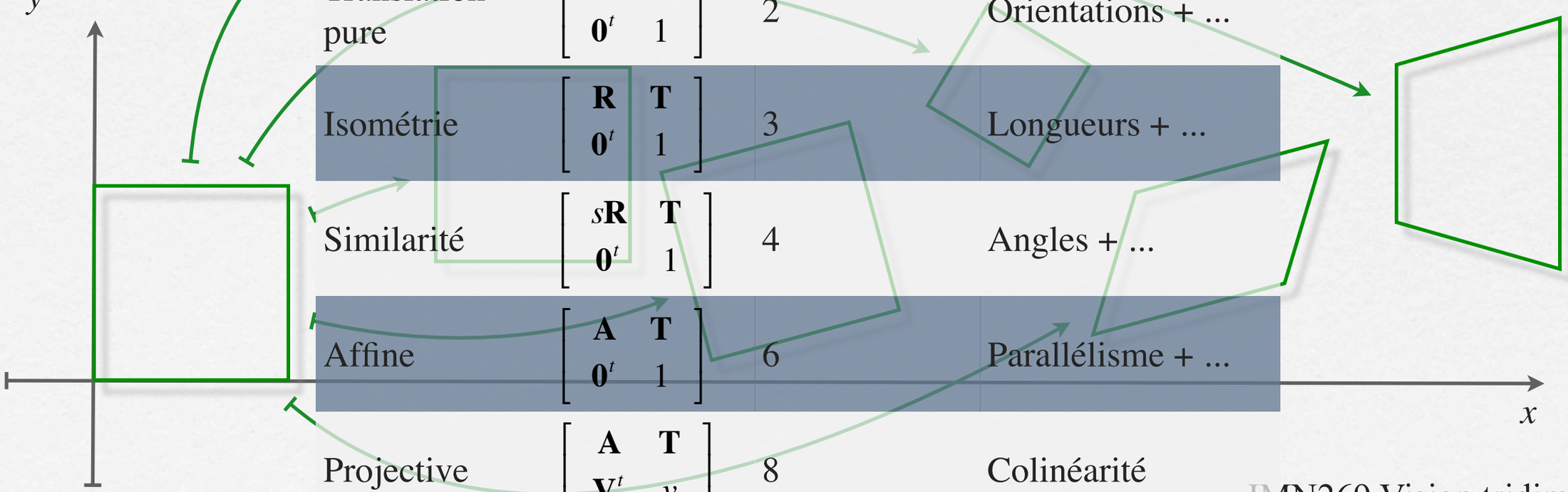
- Espace à 2 dimensions (2 degrés de liberté)
- Ensemble de rayons passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ - $(0, 0, 0)$
  - ✓ Chaque rayon correspond à un point de $\mathbb{P}^2$
- Une droite dans $\mathbb{P}^2$ correspond à un plan dans $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine
- Points et droites sont des éléments duaux dans $\mathbb{P}^2$
  - ✓ 2 rayons définissent un seul plan (2 points définissent une droite)
  - ✓ 2 plans intersectent en un seul rayon (2 droites intersectent en un point)
    - ★ Généralisable aux droites parallèles dans cette géométrie grâce à la droite à l'infini
- Points et droites dans $\mathbb{R}^2$ peuvent être obtenus en coupant l'espace $\mathbb{P}^2$ par le plan $z = 1$
- Point idéaux : 3e coordonnée à 0
- Droite à l'infini : $\mathbf{d}_\infty = (0, 0, 1)$

Récapitulatif

➡ Transformations projectives

- Hiérarchies des transformations
  - ✓ Les transformations sont organisées en **hiérarchie** allant du particulier (translation pure) au général (projective)
  - ✓ Chacune est un cas particulier de la suivante

Nom	Matrice	Degrés de liberté	Préserve
Translation pure	$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}$	2	Orientations + ...
Isométrie	$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}$	3	Longueurs + ...
Similarité	$\begin{bmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}$	4	Angles + ...
Affine	$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{bmatrix}$	6	Parallélisme + ...
Projective	$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{T} \\ \mathbf{V}^t & v \end{bmatrix}$	8	Colinéarité



Récapitulatif

- Transformations projectives
  - Transformation d'un point
  - Transformation d'une droite
  - Rectification de la perspective à partir de 4 points appartenant à un rectangle

- Espace projectif $\mathbb{P}^3$
  - Espace à 3 dimensions (3 degrés de liberté)
  - Points et plans sont des éléments duaux dans $\mathbb{P}^3$
  - Point idéaux : 4e coordonnée à 0
  - Plan à l'infini : $\boldsymbol{\pi}_\infty = (0, 0, 0, 1)$

©Marie-Flavie Auclair-Fortier

Références

Pour en savoir plus ...

- R. Hartley and A. Zisserman
  Multiple View geometry in computer vision. Cambridge University Press, 2003
- E. Trucco et A. Verri
  Introductory Techniques for 3-D Computer Vision, Prentice Hall, 1998
- Joseph L. Mundy and Andrew Zisserman (Eds.). 1992.
  Geometric Invariance in Computer Vision. MIT Press, Cambridge, MA, USA

S'il n'y a pas mention contraire, les médias numériques sont produits par MFAF

©Marie-Flavie Auclair-Fortier