Математическая статистика

Домашняя работа № 1

Вероятностные распределения

Попов Юрий, СКБ-172

Задание 1.1 *Выбор одного дискретного распределения и одного непрерывного распределения*

Из представленных в задании таблиц я выбрал **Геометрическое** (дискретное) и **Экспоненциальное**(непрерывное) распределения

Задание 1.2 *Описание основных характеристик распределения*

1.2.1 Экспоненциальное распределение

Пусть случайная величина задается законом распределения:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), x \in R, x > 0$$

Математическое ожидание

Определение 1 *Математическое ожидание* абсолютно непрерывной случайной величины ξ, распределение которой задаётся плотностью $f_x(x)$, равно

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$$

Будем искать мат.ожидание через метод моментов.

Найдем первый момент:

$$M\xi = \int\limits_{0}^{\infty} x f(x) dx = \int\limits_{0}^{\infty} x\lambda \exp(-\lambda x) dx = [-x\exp(-\lambda x)]_0^{\infty} + \int\limits_{0}^{\infty} \exp(-\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda}$$

Первый момент равен математическому ожиданию, следовательно

$$E\xi = \frac{1}{\lambda}$$

Дисперсия

Определение 2 *Дисперсией* случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания

$$D\xi = E(\xi - E(\xi))^2$$

Будем искать дисперсию также через метод моментов.
Найдем второй момент:

$$M^2\xi = \int\limits_0^\infty x^2\lambda\exp(-\lambda x)dx = [-x^2\exp(-\lambda x)]_0^\infty + \int\limits_0^\infty 2x\exp(-\lambda x)dx =$$

$$= 0 + [-\frac{2}{\lambda}x\exp(-\lambda x)]_0^\infty + \int\limits_0^\infty \exp(-\lambda x)dx = \frac{2}{\lambda}$$

Определение можно записать по-другому:$D(X) = E(\xi^2) - E(\xi)^2$

Соответственно, $D(X) = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

Дисперсия равна:

$$D\xi = \frac{1}{\lambda}$$

Производящая функция моментов

Определение 3 Если случайная величина X абсолютно непрерывна, то есть она имеет плотность $f_x(x)$), то *Производящая функция моментов* равна

$$M_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx)f_x(x)dx$$

Найдем производящую функцию моментов:

$$
\begin{aligned}
M_x(t) &= E[\exp(tX)] \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx) f_x(x) dx \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} \exp(tx) \lambda \exp(-\lambda x) dx \\
&= \lambda \int\limits_{0}^{\infty} \exp((t-\lambda)x) dx \\
&= \lambda [\tfrac{1}{t-\lambda} \exp((t-\lambda)x)]_0^{\infty} \\
&= \tfrac{\lambda}{\lambda - t}
\end{aligned}
$$

Производящая функция моментов:

$$
M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}
$$

Характеристическая функция

Определение 4 *Характеристической функцией* случайной величины ξ , принимающей действительные значения, называется функция

$$
\varphi_x(t) = E[\exp(it\xi)], \quad -\infty < t < +\infty
$$

Найдем характеристическую функцию:

$$
\begin{aligned}
\varphi_x(t) &= E[\exp(itX)] \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) f_x(x) dx \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} \exp(itx) \lambda \exp(-\lambda x) dx \\
&= \lambda \int\limits_{0}^{\infty} \cos(tx) \exp(-\lambda x) dx + i\lambda \int\limits_{0}^{\infty} \sin(tx) \exp(-\lambda x) dx
\end{aligned}
$$

Отдельно посчитаем каждый интеграл:

$$\int_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx$$

$$\begin{aligned}
&= [\tfrac{1}{t}\sin(tx)\exp(-\lambda x)]_0^\infty - \int_0^\infty \tfrac{1}{t}\sin(tx)(-\lambda\exp(-\lambda x))dx \\
&= \tfrac{\lambda}{t}\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx \\
&= \tfrac{\lambda}{t}\{[-\tfrac{1}{t}\cos(tx)\exp(-\lambda x)]_0^\infty - \int_0^\infty(-\tfrac{1}{t}\cos(tx))(-\lambda\exp(-\lambda x))dx\} \\
&= \tfrac{\lambda}{t}\left(\tfrac{1}{t} - \tfrac{\lambda}{t}\int_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx\right) \\
&= \tfrac{\lambda}{t^2} - \tfrac{\lambda^2}{t^2}\int_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx
\end{aligned}$$

Получаем:

$$\int_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{\lambda}{t^2} - \frac{\lambda^2}{t^2}\int_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx$$

$$(1+\frac{\lambda^2}{t^2})\int_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{\lambda}{t^2}$$

$$\int_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{\lambda}{(t^2+\lambda^2)}$$

Теперь считаем второй интеграл:

$$\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx$$

$$\begin{aligned}
&= [-\tfrac{1}{t}\cos(tx)\exp(-\lambda x)]_0^\infty - \int_0^\infty(-\tfrac{1}{t}\cos(tx))(-\lambda\exp(-\lambda x))dx \\
&= \tfrac{1}{t} - \tfrac{\lambda}{t}\{[\tfrac{1}{t}\sin(tx)\exp(-\lambda x)]_0^\infty - \int_0^\infty \tfrac{1}{t}\sin(tx)(-\lambda\exp(-\lambda x))dx\} \\
&= \tfrac{1}{t} - \tfrac{\lambda}{t}(\tfrac{\lambda}{t}\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx) \\
&= \tfrac{1}{t} - \tfrac{\lambda^2}{t^2}\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx
\end{aligned}$$

Получаем:

$$\int\limits_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{1}{t} - \frac{\lambda^2}{t^2}\int\limits_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx$$

$$(1+\frac{\lambda^2}{t^2})\int\limits_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{1}{t}$$

$$\int\limits_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{t}{t^2+\lambda^2}$$

Соединяем вместе:

$$\begin{aligned}\varphi_x(t) &= \int\limits_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx + i\lambda\int\limits_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx \\ &= \tfrac{\lambda^2}{(t^2+\lambda^2)} + \tfrac{i\lambda t}{t^2+\lambda^2} \\ &= \tfrac{\lambda}{\lambda - it}\end{aligned}$$

Характеристическая функция:

$$\varphi_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Функция распределения

Определение 5 Если случайная величина ξ , принимает действительные значения, то ее распределение удобно описывать *функцией распределения*

$$F_k(x) = P(k \le x), \quad -\infty < x < \infty$$

Найдем функцию распределения:
Если $x < 0$:(Потому что x не может принимать отрицательные значения)

$$F_x(x) = P(X \le x) = 0$$

Если $x > 0$:

$$\begin{aligned} F_x(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int\limits_{-\infty}^{x} f_x(t)dt \\ &= \int\limits_{0}^{x} \lambda \exp(-\lambda t)dt \\ &= [-\exp(-\lambda t)]_0^x \\ &= -\exp(-\lambda x) + 1 \end{aligned}$$

Итого, получаем:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 \ ,x < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda x) \ ,x \geq 0 \end{cases}$$

Графики

1)График плотности вероятности:

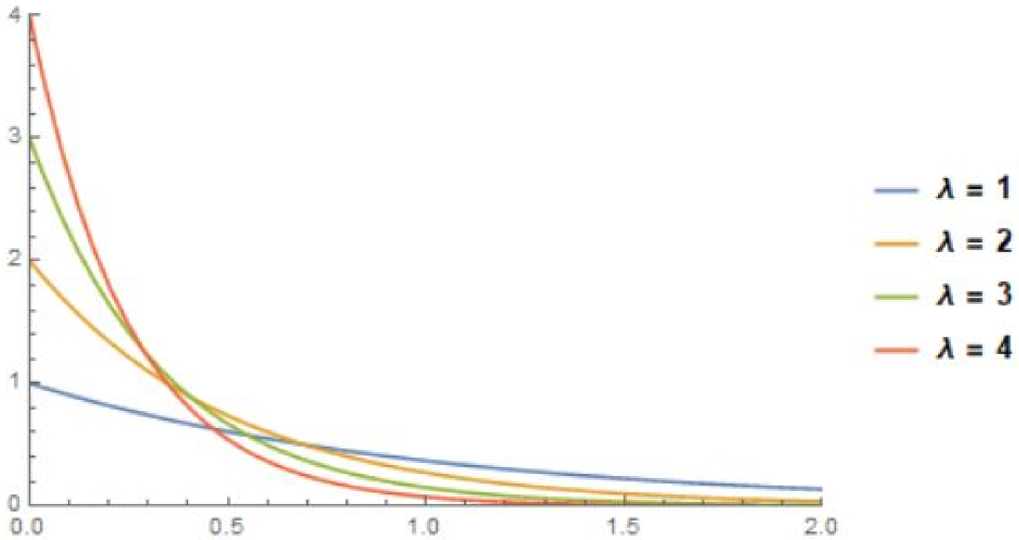

Рис.1.2.1.1

2)График функции распределения:

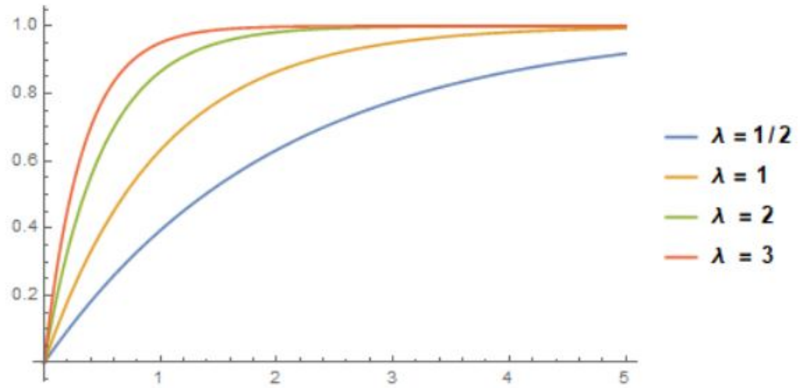

Рис.1.2.1.2

1.2.2 Геометрическое распределение

Пусть случайная величина задается законом распределения:

$$p(x) = p(1-p)^x, x \in N \bigcup \{0\}, 0 < p < 1$$

Математическое ожидание

Определение 6 *Математическим ожиданием* неотрицательной дискретной случайной величины ξ называется величина

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Будем искать мат.ожидание через метод моментов.

Найдем первый момент:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^x px \\ &= (1-p)p\sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^{x-1}x \\ &= -(1-p)p\sum_{0}^{\infty}\tfrac{d}{dp}(1-p)^x \\ &= -(1-p)p\tfrac{d}{dp}\sum_{0}^{\infty}(1-p)^x \\ &= -(1-p)p\tfrac{d}{dp}\tfrac{1}{1-(1-p)} \\ &= -(1-p)p\tfrac{d}{dp}\tfrac{1}{p} \\ &= -(1-p)p(-p^{-2}) \\ &= (p-p^2)p^{-2} \\ &= \tfrac{1}{p}-1 \\ &= \tfrac{1-p}{p} \end{aligned}$$

Математическое ожидание:

$$E[X] = \frac{1-p}{p}$$

Дисперсия

Определение 7 *Дисперсией* случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания

$$D\xi = E(\xi - E(\xi))^2$$

Будем искать дисперсию также через метод моментов
Найдем второй момент:

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_0^\infty (1-p)^x p x^2 \\
&= (1-p)^2 p \sum_{x=0}^\infty (1-p)^{x-2} x^2 \\
&= (1-p)^2 p \sum_{x=0}^\infty (1-p)^{x-2} x(x+1-1) \\
&= (1-p)^2 p \sum_{x=0}^\infty (1-p)^{x-2} x(x-1) + \sum_{x=0}^\infty (1-p)^x x \\
&= (1-p)^2 p \sum_{x=0}^\infty \tfrac{d^2}{dp^2} (1-p)^x + E[X] \\
&= (1-p)^2 p \tfrac{d^2}{dp^2} \sum_{x=0}^\infty (1-p)^x + \tfrac{1-p}{p} \\
&= (1-p)^2 p \tfrac{d^2}{dp^2} \tfrac{1}{1-(1-p)} + \tfrac{1-p}{p} \\
&= (1-p)^2 p \tfrac{d^2}{dp^2} \tfrac{1}{p} + \tfrac{1-p}{p} \\
&= 2(1-p)^2 p \cdot p^{-3} + \tfrac{1-p}{p} \\
&= 2(1-2p+p^2) p^{-2} + \tfrac{1-p}{p} \\
&= \tfrac{2-3p+p^2}{p^2}
\end{aligned}$$

Определение можно записать по-другому:$D(X) = E(\xi^2) - E(\xi)^2$

Соответственно,

$$\begin{aligned} D(X) &= \tfrac{2-3p+p^2}{p^2} - (1-pp)^2 \\ &= \tfrac{2-3p+p^2-(1-2p+p^2)}{p^2} \\ &= \tfrac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

Итого, дисперсия равна

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Производящая функция моментов

Определение 8 Если случайная величина x дискретна, то есть она имеет плотность $P(X = x_i) = p_i$, то *Производящая функция моментов* равна

$$M_x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp(tx_i)p_i$$

Найдем производящую функцию моментов:

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E[\exp(tX)] \\ &= \sum_0^{\infty}(1-p)^x p\exp(tx) \\ &= p\sum_0^{\infty}[(1-p)\exp(t)]^x \\ &= \tfrac{p}{1-(1-p)\exp|(t)} \end{aligned}$$

Но у нас есть условие на t :

$(1-p)\exp(t) < 1$

$\exp(t) < \frac{1}{1-p}$

$t < -\ln(1-p)$

Итого, производящая функция моментов геометрического распределения определена для $t < -\ln(1-p)$ и равна:

$$M_x(t) = \frac{p}{1-(1-p)\exp|(t)}$$

Характеристическая функция

Определение 9 Если случайная величина x дискретна, то есть она имеет плотность $P(X = x_i) = p_i$, то *характеристическая функция* равна

$$\varphi_x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp(tx_i)p_i$$

Найдем характеристическую функцию:

$$\begin{aligned}
\varphi_x(t) &= E[\exp(itX)] \\
&= \sum_0^{\infty}(1-p)^x p \exp(itx) \\
&= p\sum_0^{\infty}[(1-p)\exp(it)]^x \\
&= \tfrac{p}{1-(1-p)\exp(it)}
\end{aligned}$$

Итого, характеристическая функция равна:

$$\varphi_x(t) = \frac{p}{1-(1-p)\exp(it)}$$

Определение 10 Если случайная величина ξ , принимает действительные значения, то ее распределение удобно описывать *функцией распределения*

$$F_k(x) = P(k \leq x), \quad -\infty < x < \infty$$

Найдем функцию распределения:
При $x < 0 : F_x(x) = 0$ При $x > 0 :$

$$\begin{aligned}
F_x(x) &= P(X < x) \\
&= \sum_{y=0}^{x}(1-p)^y p \\
&= p\sum_{y=0}^{x}(1-p)^y \\
&= p\tfrac{1-(1-p)^{x+1}}{1-(1-p)} \\
&= 1-(1-p)^{x+1}
\end{aligned}$$

Итого, функция распределения равна:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x < 0 \\ 1-(1-p)^{x+1} \ , \ x \geq 0 \end{cases}$$

Графики

1)Гистограмма вероятностей($p = 1/6$):

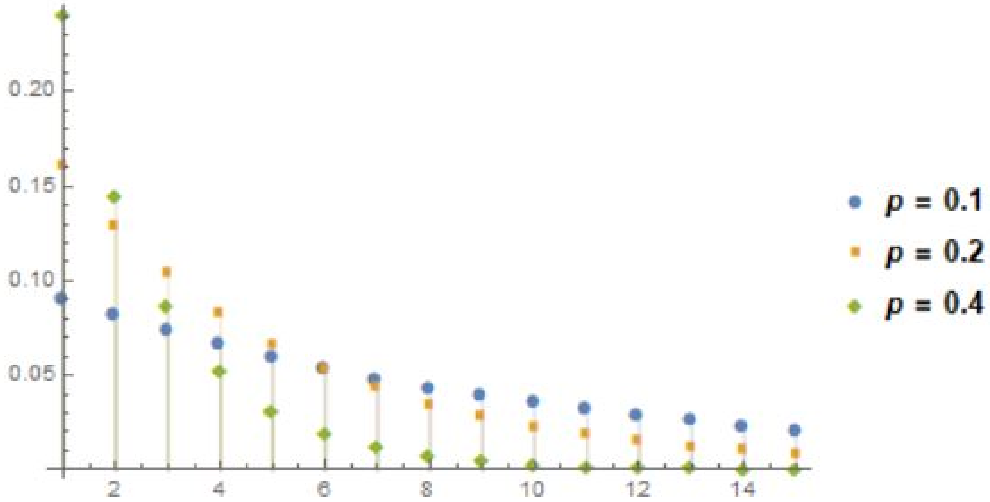

Рис.1.2.3

2)График функции распределения:

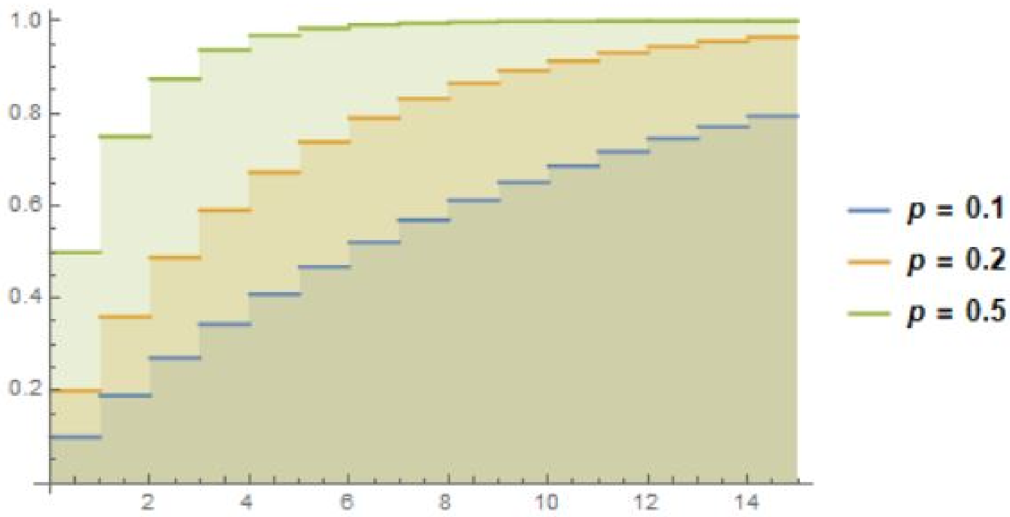

Рис.1.2.4

Задание 1.3 *Поиск примеров событий, которые могут быть описаны выбранными случайными величинами*

Типичные интерпретации экспоненциального распределения:
Экспоненциальное распределение в основном используется для тестирования надежности продукта. Экспоненциальное распределение часто моделирует время ожидания и может помочь вам ответить на такие вопросы, как:

"Сколько времени пройдет, прежде чем сильный ураган обрушится на Атлантическое побережье?" или
"Как долго будет работать трансмиссия в моей машине, прежде чем она сломается?".

Экспоненциальное распределение связано с несколькими известными распределениями. Информация взята из следующих источников:
Источник1
Источник2

1)Первое это,конечно же, связь с распределением Пуассона: Если число событий в единицу времени следует распределению Пуассона, то количество времени между событиями следует экспоненциальному распределению.

Экспоненциальное распределение связано с распределением Пуассона. В то время как экспоненциальная модель моделирует время между последовательными событиями на непрерывном временном интервале, распределение Пуассона имеет дело с событиями, которые происходят в течение фиксированного периода времени.

2)Экспоненциальное распределение является частным случаем гамма-распределения. Это непрерывный аналог геометрического распределения, которое моделирует время между успехами в серии независимых испытаний.

3)Экспоненциальное распределение также является частным случаем распределения Вейбулла, которое происходит, когда параметр формы Вейбулла $= 1$.

4)Связь с распределением Эрланга

Время обслуживания агентов(например, сколько времени требуется сотруднику, чтобы обслужить клиента) также можно смоделировать как экспоненциально распределенные переменные. Общая длина процесса(последователь из нескольких независимых задач) следует распределению Эрланга: распределение суммы нескольких независимых экспоненциально распределенных переменных

Нетипичные интерпретации экспоненциального распределения:
Это также важное распределение для построения непрерывных цепей Маркова.

Задание 1.4 *Описание способа моделирования выбран- ных случайных величин*

Теперь проделаем тоже самое для геометрического распределения!

Задание 1.2 *Описание основных характеристик распределения*