Математическая статистика

Домашняя работа № 1

Вероятностные распределения

Попов Юрий, СКБ-172

ОГЛАВЛЕНИЕ

Все графики, которые в дальнейшем будут вставлены в эту работу, были сконструированы с помощью библиотеки matplotlib в Jupyter Notebook, который будет приложен вместе с работой (Mathematical statistics DZO.ipynb)

Все определения были взяты из книги Зубкова А.М. "Учебное пособие по теории вероятностей и теории случайных процессов"

Задание 1.1 *Выбор одного дискретного распределения и одного непрерывного распределения*

Из представленных в задании таблиц я выбрал **Геометрическое** (дискретное) и **Экспоненциальное**(непрерывное) распределения

Задание 1.2 *Описание основных характеристик распределения*

1.2.1 Экспоненциальное распределение

Пусть случайная величина задается законом распределения:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), x \in R, x > 0$$

Математическое ожидание

Определение 1 *Математическое ожидание* абсолютно непрерывной случайной величины ξ, распределение которой задаётся плотностью $f_x(x)$, равно

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$$

Будем искать мат.ожидание через метод моментов.

Найдем первый момент:

$$M\xi = \int\limits_0^{\infty} x f(x) dx = \int\limits_0^{\infty} x\lambda \exp(-\lambda x) dx = [-x\exp(-\lambda x)]_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty} \exp(-\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda}$$

Первый момент равен математическому ожиданию, следовательно

$$E\xi = \frac{1}{\lambda}$$

Дисперсия

Определение 2 *Дисперсией* случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания

$$D\xi = E(\xi - E(\xi))^2$$

Будем искать дисперсию также через метод моментов.
Найдем второй момент:

$$M^2\xi = \int\limits_0^{\infty} x^2\lambda \exp(-\lambda x) dx = [-x^2\exp(-\lambda x)]_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty} 2x\exp(-\lambda x) dx =$$

$$= 0 + [-\frac{2}{\lambda} x \exp(-\lambda x)]_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty} \exp(-\lambda x) dx = \frac{2}{\lambda}$$

Определение можно записать по-другому:$D(X) = E(\xi^2) - E(\xi)^2$

Соответственно, $D(X) = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

Дисперсия равна:

$$D\xi = \frac{1}{\lambda}$$

Производящая функция моментов

Определение 3 Если случайная величина X абсолютно непрерывна, то есть она имеет плотность $f_x(x)$), то *Производящая функция моментов* равна

$$M_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx) f_x(x) dx$$

Найдем производящую функцию моментов:

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E[\exp(tX)] \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx) f_x(x) dx \\ &= \int\limits_{0}^{\infty} \exp(tx) \lambda \exp(-\lambda x) dx \\ &= \lambda \int\limits_{0}^{\infty} \exp((t-\lambda)x) dx \\ &= \lambda [\tfrac{1}{t-\lambda} \exp((t-\lambda)x)]_0^{\infty} \\ &= \tfrac{\lambda}{\lambda - t} \end{aligned}$$

Производящая функция моментов:

$$M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Характеристическая функция

Определение 4 *Характеристической функцией* случайной величины ξ , принимающей действительные значения, называется функция

$$\varphi_x(t) = E[\exp(it\xi)], \quad -\infty < t < +\infty$$

Найдем характеристическую функцию:

$$\begin{aligned}
\varphi_x(t) &= E[\exp(itX)] \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) f_x(x) dx \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} \exp(itx) \lambda \exp(-\lambda x) dx \\
&= \lambda \int\limits_{0}^{\infty} \cos(tx) \exp(-\lambda x) dx + i\lambda \int\limits_{0}^{\infty} \sin(tx) \exp(-\lambda x) dx
\end{aligned}$$

Отдельно посчитаем каждый интеграл:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \cos(tx) \exp(-\lambda x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= [\tfrac{1}{t} \sin(tx) \exp(-\lambda x)]_0^{\infty} - \int\limits_{0}^{\infty} \tfrac{1}{t} \sin(tx)(-\lambda \exp(-\lambda x)) dx \\
&= \tfrac{\lambda}{t} \int\limits_{0}^{\infty} \sin(tx) \exp(-\lambda x) dx \\
&= \tfrac{\lambda}{t} \{[-\tfrac{1}{t} \cos(tx) \exp(-\lambda x)]_0^{\infty} - \int\limits_{0}^{\infty} (-\tfrac{1}{t} \cos(tx))(-\lambda \exp(-\lambda x)) dx\} \\
&= \tfrac{\lambda}{t} \left(\tfrac{1}{t} - \tfrac{\lambda}{t} \int\limits_{0}^{\infty} \cos(tx) \exp(-\lambda x) dx \right) \\
&= \tfrac{\lambda}{t^2} - \tfrac{\lambda^2}{t^2} \int\limits_{0}^{\infty} \cos(tx) \exp(-\lambda x) dx
\end{aligned}$$

Получаем:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \cos(tx) \exp(-\lambda x) dx = \frac{\lambda}{t^2} - \frac{\lambda^2}{t^2} \int\limits_{0}^{\infty} \cos(tx) \exp(-\lambda x) dx$$

$$(1 + \frac{\lambda^2}{t^2}) \int\limits_{0}^{\infty} \cos(tx) \exp(-\lambda x) dx = \frac{\lambda}{t^2}$$

$$\int_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{\lambda}{(t^2+\lambda^2)}$$

Теперь считаем второй интеграл:

$\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx$

$$\begin{aligned}
&= [-\tfrac{1}{t}\cos(tx)\exp(-\lambda x)]_0^\infty - \int_0^\infty (-\tfrac{1}{t}\cos(tx))(-\lambda\exp(-\lambda x))dx \\
&= \tfrac{1}{t} - \tfrac{\lambda}{t}\{[\tfrac{1}{t}\sin(tx)\exp(-\lambda x)]_0^\infty - \int_0^\infty \tfrac{1}{t}\sin(tx)(-\lambda\exp(-\lambda x))dx\} \\
&= \tfrac{1}{t} - \tfrac{\lambda}{t}(\tfrac{\lambda}{t}\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx) \\
&= \tfrac{1}{t} - \tfrac{\lambda^2}{t^2}\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx
\end{aligned}$$

Получаем:

$$\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{1}{t} - \frac{\lambda^2}{t^2}\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx$$

$$(1+\frac{\lambda^2}{t^2})\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{1}{t}$$

$$\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{t}{t^2+\lambda^2}$$

Соединяем вместе:

$$\begin{aligned}
\varphi_x(t) &= \int_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx + i\lambda\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx \\
&= \tfrac{\lambda^2}{(t^2+\lambda^2)} + \tfrac{i\lambda t}{t^2+\lambda^2} \\
&= \tfrac{\lambda}{\lambda - it}
\end{aligned}$$

Характеристическая функция:

$$\varphi_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Функция распределения

Определение 5 Если случайная величина ξ , принимает действительные значения, то ее распределение удобно описывать *функцией распределения*

$$F_k(x) = P(k \leq x), \quad -\infty < x < \infty$$

Найдем функцию распределения:
Если $x < 0$:(Потому что x не может принимать отрицательные значения)

$$F_x(x) = P(X \leq x) = 0$$

Если $x > 0$:

$$\begin{aligned} F_x(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int\limits_{-\infty}^{x} f_x(t)dt \\ &= \int\limits_{0}^{x} \lambda \exp(-\lambda t)dt \\ &= [-\exp(-\lambda t)]_0^x \\ &= -\exp(-\lambda x) + 1 \end{aligned}$$

Итого, получаем:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 \ ,x < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda x) \ ,x \geq 0 \end{cases}$$

Графики

1)График плотности вероятности:

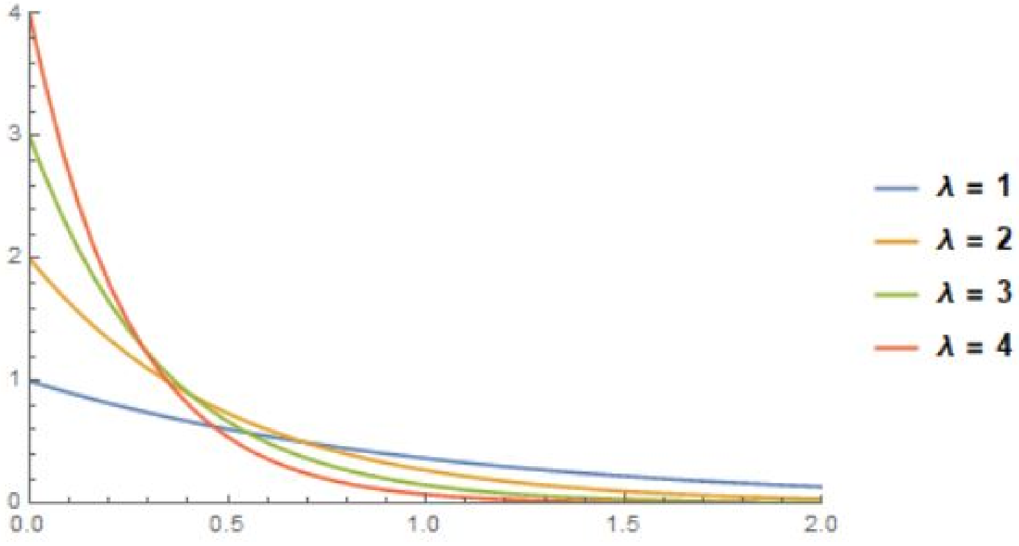


Рис.1.2.1.1

2)График функции распределения:

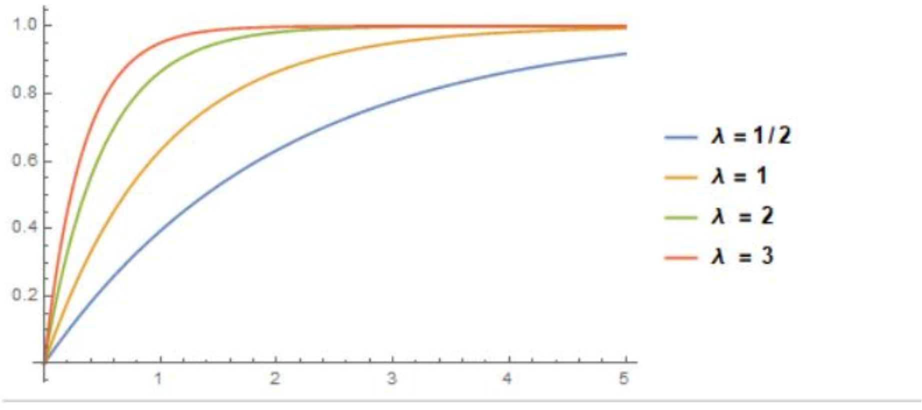


Рис.1.2.1.2

1.2.2 Геометрическое распределение

Пусть случайная величина задается законом распределения:

$$p(x) = p(1-p)^x, x \in N \bigcup \{0\}, 0 < p < 1$$

Математическое ожидание

Определение 6 *Математическим ожиданием* неотрицательной дискретной случайной величины ξ называется величина

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Будем искать мат.ожидание через метод моментов.

Найдем первый момент:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x p x \\
&= (1-p)p \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^{x-1} x \\
&= -(1-p)p \sum_{0}^{\infty} \tfrac{d}{dp} (1-p)^x \\
&= -(1-p)p \tfrac{d}{dp} \sum_{0}^{\infty} (1-p)^x \\
&= -(1-p)p \tfrac{d}{dp} \tfrac{1}{1-(1-p)} \\
&= -(1-p)p \tfrac{d}{dp} \tfrac{1}{p} \\
&= -(1-p)p(-p^{-2}) \\
&= (p-p^2)p^{-2} \\
&= \tfrac{1}{p} - 1 \\
&= \tfrac{1-p}{p}
\end{aligned}$$

Математическое ожидание:

$$E[X] = \frac{1-p}{p}$$

Дисперсия

Определение 7 *Дисперсией* случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания

$$D\xi = E(\xi - E(\xi))^2$$

Будем искать дисперсию также через метод моментов
Найдем второй момент:

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{0}^{\infty}(1-p)^x p x^2 \\
&= (1-p)^2 p \sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^{x-2}x^2 \\
&= (1-p)^2 p \sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^{x-2}x(x+1-1) \\
&= (1-p)^2 p \sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^{x-2}x(x-1) + \sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^x x \\
&= (1-p)^2 p \sum_{x=0}^{\infty}\tfrac{d^2}{dp^2}(1-p)^x + E[X] \\
&= (1-p)^2 p \tfrac{d^2}{dp^2}\sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^x + \tfrac{1-p}{p} \\
&= (1-p)^2 p \tfrac{d^2}{dp^2}\tfrac{1}{1-(1-p)} + \tfrac{1-p}{p} \\
&= (1-p)^2 p \tfrac{d^2}{dp^2}\tfrac{1}{p} + \tfrac{1-p}{p} \\
&= 2(1-p)^2 p \cdot p^{-3} + \tfrac{1-p}{p} \\
&= 2(1-2p+p^2)p^{-2} + \tfrac{1-p}{p} \\
&= \tfrac{2-3p+p^2}{p^2}
\end{aligned}$$

Определение можно записать по-другому:$D(X) = E(\xi^2) - E(\xi)^2$

Соответственно,

$$\begin{aligned} D(X) &= \tfrac{2-3p+p^2}{p^2} - (1-pp)^2 \\ &= \tfrac{2-3p+p^2-(1-2p+p^2)}{p^2} \\ &= \tfrac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

Итого, дисперсия равна

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Производящая функция моментов

Определение 8 Если случайная величина x дискретна, то есть она имеет плотность $P(X = x_i) = p_i$, то *Производящая функция моментов* равна

$$M_x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp(tx_i)p_i$$

Найдем производящую функцию моментов:

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E[\exp(tX)] \\ &= \sum_0^\infty (1-p)^x p \exp(tx) \\ &= p \sum_0^\infty [(1-p)\exp(t)]^x \\ &= \tfrac{p}{1-(1-p)\exp|(t)} \end{aligned}$$

Но у нас есть условие на t :

$(1-p)\exp(t) < 1$

$\exp(t) < \frac{1}{1-p}$

$t < -\ln(1-p)$

Итого, производящая функция моментов геометрического распределения определена для $t < -\ln(1-p)$ и равна:

$$M_x(t) = \frac{p}{1-(1-p)\exp|(t)}$$

Характеристическая функция

Определение 9 Если случайная величина x дискретна, то есть она имеет плотность $P(X = x_i) = p_i$, то *характеристическая функция* равна

$$\varphi_x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp(tx_i)p_i$$

Найдем характеристическую функцию:

$$\begin{aligned}
\varphi_x(t) &= E[\exp(itX)] \\
&= \sum_0^\infty (1-p)^x p \exp(itx) \\
&= p\sum_0^\infty [(1-p)\exp(it)]^x \\
&= \tfrac{p}{1-(1-p)\exp(it)}
\end{aligned}$$

Итого, характеристическая функция равна:

$$\varphi_x(t) = \frac{p}{1-(1-p)\exp(it)}$$

Определение 10 Если случайная величина ξ , принимает действительные значения, то ее распределение удобно описывать *функцией распределения*

$$F_k(x) = P(k \le x), \quad -\infty < x < \infty$$

Найдем функцию распределения:
При $x < 0 : F_x(x) = 0$ При $x > 0 :$

$$\begin{aligned}
F_x(x) &= P(X < x) \\
&= \sum_{y=0}^{x} (1-p)^y p \\
&= p\sum_{y=0}^{x} (1-p)^y \\
&= p\tfrac{1-(1-p)^{x+1}}{1-(1-p)} \\
&= 1-(1-p)^{x+1}
\end{aligned}$$

Итого, функция распределения равна:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x < 0 \\ 1 - (1-p)^{x+1} \ , \ x \geq 0 \end{cases}$$

Графики

1)Гистограмма вероятностей:

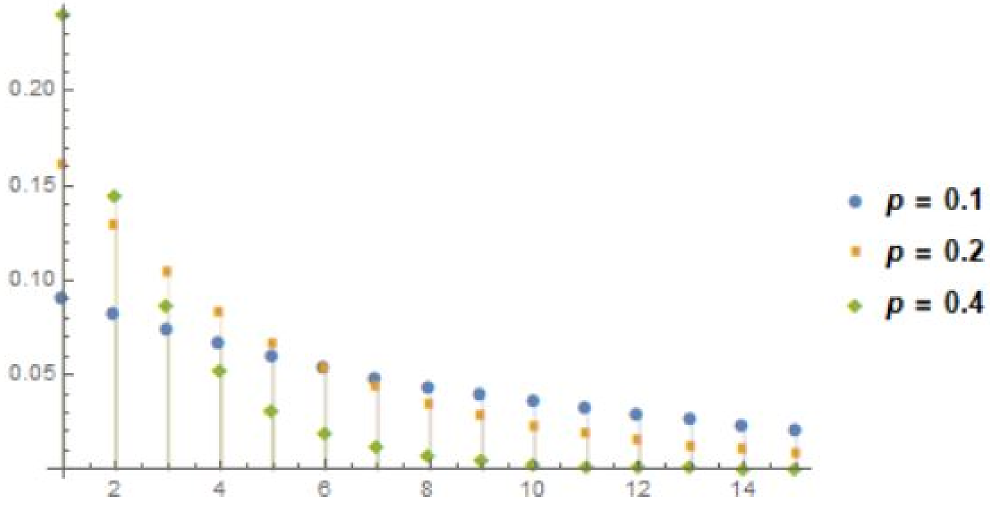


Рис.1.2.3

2)График функции распределения:

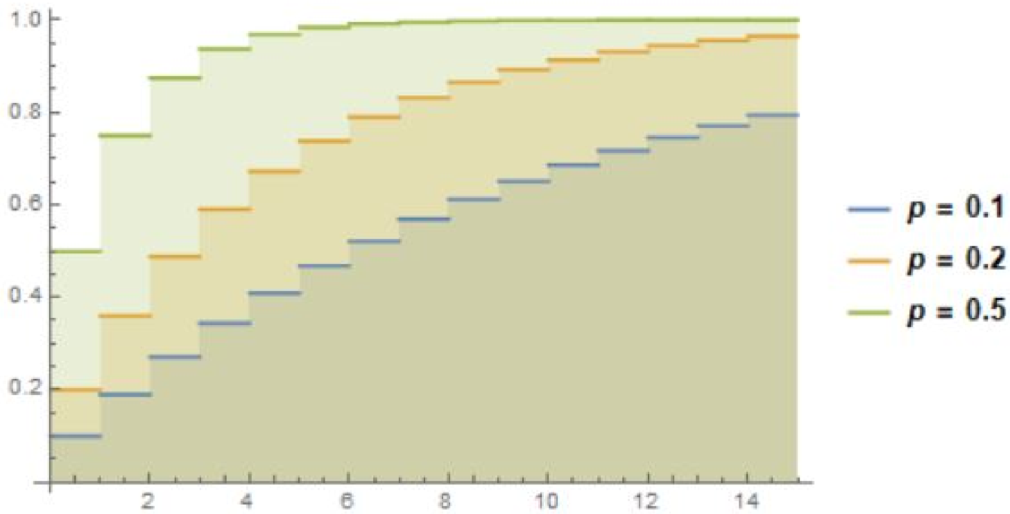


Рис.1.2.4

Задание 1.3 *Поиск примеров событий, которые могут быть описаны выбранными случайными величинами*

1.3.1 Экспоненциальное распределение

1.3.1.1 Типичные интерпретации

Экспоненциальное распределение оказывается весьма полезным в деловых приложениях, особенно при моделировании производства и систем массового обслуживания.

Оно широко используется в теории расписаний (очередей) для моделирования промежутков времени между двумя запросами, которые могут представлять собой приход клиента в банк или ресторан быстрого обслуживания, поступление пациента в больницу, а также посещение Web-сайта.

В этой модели λ - среднее количество запросов, поступающих в систему за единицу времени.

Величина $1/\lambda$ равна среднему промежутку времени, прошедшего между двумя последовательными запросами.

И тогда вероятность того, что следующий запрос поступит раньше, чем через X единиц времени, определяется по формуле: $1 - \exp(-\lambda x)$

1.3.1.2 Нетипичные интерпретации

Экспоненциальное распределение активно используется в теории надежности.[5]

Теория надёжности изучает методы обеспечения стабильности работы объектов (конструкций, изделий, устройств, систем и т. п.) в процессе проектирования, производства, приёмки, транспортировки, эксплуатации и хранения.

Экспоненциальный закон распределения называемый также основным законом надежности, часто используют для прогнозирования надежности в период нормальной эксплуатации изделий, когда постепенные отказы еще не проявились и надежность характеризуется внезапными отказами

Рассмотрим примеры неблагоприятного сочетания условий работы деталей машин,вызывающих их внезапный отказ. Для зубчатой передачи это может быть действием максимальной нагрузки на наиболее слабый зуб при его зацеплении; для элементов радиоэлектронной аппаратуры — превышение допустимого тока или температурного режима.

Когда за случайную величину принимается время работы объекта t, вероятность того, что изделие на протяжении времени t будет находиться в работоспособном состоянии, равна

$$P(t) = \exp(-\lambda t)$$

,где λ— интенсивность отказов объекта, а t время работы объекта

1.3.1.3 Известные соотношения

- Связь с Гамма-распределением

$$Exp(\lambda) \equiv (1, 1/\lambda)$$

- Связь с χ^2

$$Exp(1/2) \equiv \chi^2(2)$$

- Связь с одномерным непрерывным равномерным распределением

Можно получить экспоненциальное распределение из непрерывного равномерного распределения методом обратного преобразования. Пусть $U \sim U[0,1]$. Тогда

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln U \sim Exp[\lambda]$$

- **Экспоненциальное распределение является частным случаем распределения Вейбулла**

Экспоненциальное распределение также является частным случаем распределения Вейбулла, которое происходит, когда параметр формы Вейбулла равен 1

- **Связь с распределением Эрланга**

Время обслуживания агентов(например, сколько времени требуется сотруднику, чтобы обслужить клиента) также можно смоделировать как экспоненциально распределенные переменные. Общая длина процесса (последовательность из нескольких независимых задач) следует распределению Эрланга: распределение суммы нескольких независимых экспоненциально распределенных переменных

- **Связь с распределением Пуассона**

Экспоненциальное распределение связано с распределением Пуассона. В то время как экспоненциальная модель моделирует время между последовательными событиями на непрерывном временном интервале, распределение Пуассона имеет дело с событиями, которые происходят в течение фиксированного периода времени

- **Экспоненциальное распределение является распределением Пирсона типа X**

- **Связь с геометрическим распределением**

Дискретный вариант экспоненциального распределения — это геометрическое распределение

1.3.2 Геометрическое распределение

1.3.2.1 Типичные интерпретации

Геометрическое распределение часто используется в азартных настольных играх. В зависимости от вытащенной карты, или суммы брошенных кубиков игрок выигрывает или побеждает. Соответственно, считая вероятность в каждом раунде(при каждом броске) игрок увеличивает свои шансы на успех

1.3.2.2 Нетипичные интерпретации

Нетипичной интерпретацией использования геометрического распределения является использования его в генетике.[4]

Предположим, мы анализируем последовательности ДНК ряда генов у некоторых видов. Возможно, нас заинтересует химия, лежащая в основе этих генов, и мы захотим изучить конкретные последовательности нуклеотидов, которые имеют тенденцию происходить. В частности, предположим, что всякий раз, когда в гене присутствует Т-нуклеотид, нам хотелось бы разработать модель относительно количества нуклеотидов до следующего Т. Рассмотрим следующую часть последовательности ДНК:

$$...AAGTGGGAGGCCATCCA.....$$

Начинаем двигаться по ДНК...Как только мы столкнемся с первым Т (тем, что находится в четвертой позиции), сколько времени пройдет, пока мы не столкнемся со следующим Т? Важно, что мы определяем успех как наличие Т на определенной позиции. Это случайный процесс, и количество нуклеотидов - случайная величина. Это приведет к различному значению в зависимости от того, какой нуклеотид Т является отправной точкой, какой ген мы выбрали и другие факторы. Для этой конкретной последовательности, мы наблюдали бы $N = 10$, так как наш первый успех (еще один Т) произошел на 10-й позиции от начала. Затем можно было бы измерить количество нуклеотидов до следующего т после этого и рассмотрим еще одно наблюдение N.

Получается, что N - случайная величина, а процесс нахождения нужного нам нуклеотида подчиняется геометрическому распределению

1.3.2.3 Известные соотношения

- **Связь с отрицательным биномиальным распределением**

Геометрическое распределение является частным случаем отрицательного биномиального распределения:

$$Geom(p) \equiv NB(1, p)$$

- **Связь с экспоненциальным распределением**

Геометрическое распределение рассматривается как дискретный вариант экспоненциального распределения.

Предположим, что эксперименты Бернулли выполняются через равные промежутки времени. Тогда геометрическая случайная величина X - это время, измеренное в дискретных единицах, которое проходит до того, как мы получим первый успех. Но если мы хотим смоделировать время, прошедшее до того, как данное событие произошло в непрерывном времени, то подходящим распределением для использования является экспоненциальное распределение

Задание 1.4 *Описание способа моделирования выбран- ных случайных величин*

1.4.1 Экспоненциальное распределение

Составим программу моделирования случайной величины X.
Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$$

Согласно методу обратных функций:[1]

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x) = r$$

Получим:

$$\exp(-\lambda x) = 1 - r$$

Таким образом:

$$-\lambda x = \ln(1 - r)$$

И

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r)$$

Так как случайная величина $(1 - k)$ имеет такое же распределение, что и R, то при нахождение значений случайной величины X пользуемся формулой:

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln r$$

Соответственно, составляем программу для моделирования случайной величины.

Получаем такие результаты:

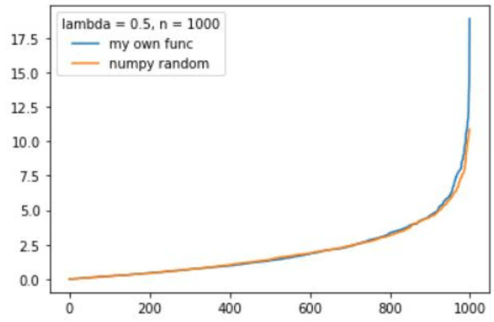


Рис. 1: n = 1000

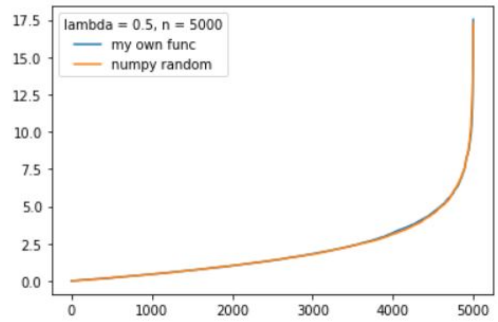


Рис. 2: n = 5000

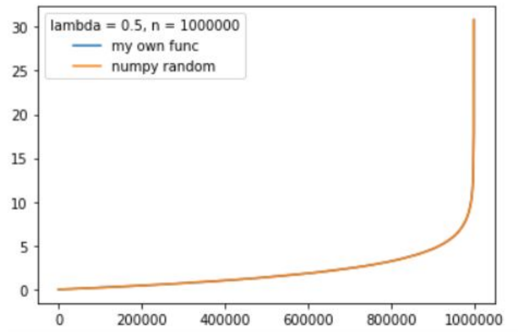


Рис.3 n = 1000000

Оценка времени

Ниже будет приведен код, который с помощью magic commands в Jupyter Notebook вычисляет работу отдельного куска кода.

В первой ячейке идет расчет времени собственного способа моделирования. А во второй встроенной функции numpy

```
%%timeit
expon(0.5, 50000)
```

```
37.6 ms ± 4.03 ms per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10 loops each)
```

```
%%timeit
py_expon(0.5, 50000)
```

```
32.2 ms ± 1.84 ms per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10 loops each)
```

По результат время моделирования приблизительно оказалось равно

1.4.2 Геометрическое распределение

Геометрическое распределение $Geom(p)$ с параметром $p \in (0, 1)$ описывается с помощью бесконечной таблицы распределения:

$$P : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_k \end{pmatrix}$$

где $p_k = p(1-p)^k$

Есть два способа способа моделирования геометрического распределения.

Первый - моделирование испытаний Бернулли с вероятностью успеха p до первого успеха с подсчетом числа неудач.

Второй - последовательный метод обратных функций, основанный на пересчете $p_n = (1-p)p_{n-1}$ с $p_0 = p$

Смоделируем первый вариант:

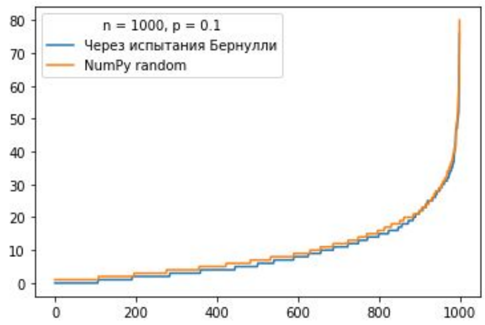


Рис. 3: n = 1000

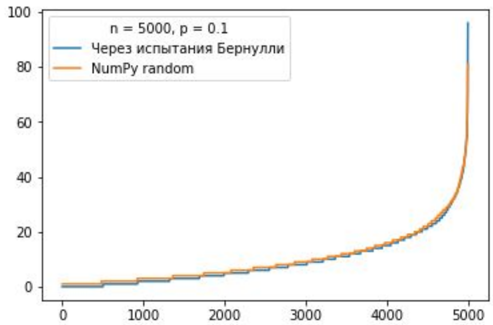
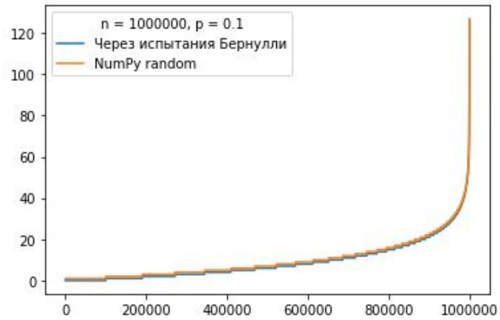


Рис. 4: n = 5000



n = 1000000

Теперь с помощью алгоритма метода обратных функций построим следующие распределения:

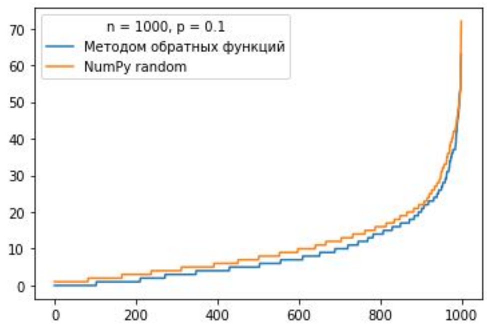


Рис. 5: n = 1000

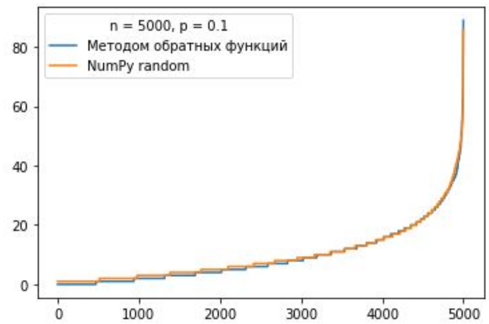
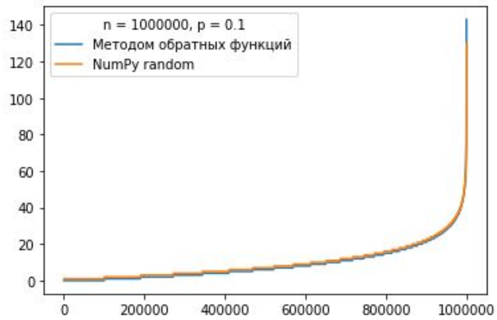


Рис. 6: n = 5000



n = 1000000

Первые два метода плохи при малых p. Существует однако такой способ реализации метода обратных функций, при котором трудоемкость по крайней мере формально не зависит от p Теперь с помощью модифицированного прямого метода обратных функций построим следующие распределения:

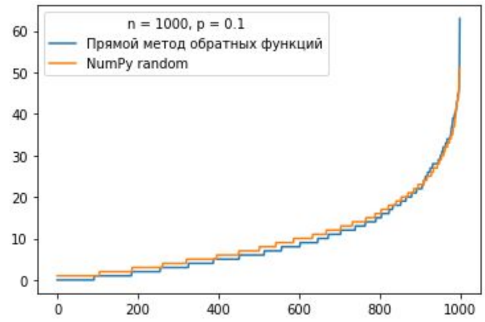


Рис. 7: n = 1000

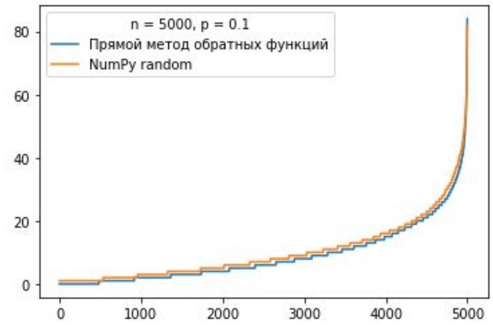
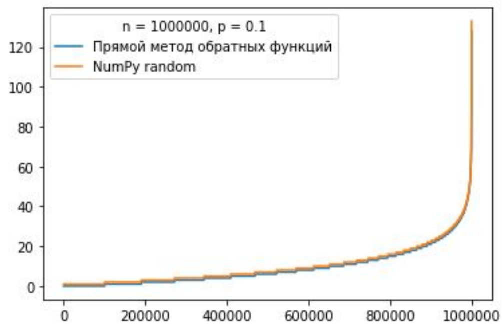


Рис. 8: n = 5000



n = 1000000

Для моделирования геометрического распределения третьим методом требуется одно обращение к генератору псевдослучайных чисел, два вычисления логарифма и одно — целой части числа. Если считать, что время вычисления значений функций $\lfloor x \rfloor$ и $\ln(z)$ ограничено при всех $x, z \in (0, 1)$ одно и той же постоянной, то трудоемкость алгоритма имеет вид O(1) равномерно по p

Оценка времени

Ниже будет приведен код, который с помощью magic commands в Jupyter Notebook вычисляет работу отдельного куска кода.

По порядку в четырёх ячейках представлены время работы каждого метода, а также время работы встроенной функции.

```
In [15]: %%timeit
         geoMB(50000, 0.1)

170 ms ± 11.3 ms per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10 loops each)
```

```
In [17]: %%timeit
         geomIS(50000,0.1)

141 ms ± 7.62 ms per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10 loops each)
```

```
In [24]: %%timeit
         geomDIM(50000,0.1)

68.1 ms ± 4.69 ms per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10 loops each)
```

```
In [27]: %%timeit
         geo_pyt(50000, 0.1)

43 ms ± 818 µs per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10 loops each)
```

Как видно из рисунков, реализация библиотечной функции примерно в 400 раз быстрее первого метода.

Литература

[1] В.В Некруткин "Моделирование распределений"

[2] Medium // ссылка1

[3] Statistics // ссылка2

[4] Paul Maiste Probablity and Statistics for Bioinformatics and Genetics // ссылка3

[5] Теория надежности // ссылка4