Математическая статистика

Домашняя работа № 1

Вероятностные распределения

Попов Юрий, СКБ-172

Задание 1.1 *Выбор одного дискретного распределения и одного непрерывного распределения*

Из представленных в задании таблиц я выбрал **Геометрическое** (дискретное) и **Экспоненциальное**(непрерывное) распределения

Ссылка на таблицу: https://clck.ru/JdRWD

Сначала проделаем всё домашнее задание для непрерывного распределения

Задание 1.2 *Описание основных характеристик распределения*

Будем искать мат.ожидание и дисперсию через метод моментов.

1)Найдем первый момент:

$$E(X) = M\xi = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty x\lambda\exp(-\lambda x)dx = [-x\exp(-\lambda x)]_0^\infty + \int_0^\infty \exp(-\lambda x)dx = \frac{1}{\lambda}$$

Первый момент == мат. ожиданию, следовательно математическое ожидание мы нашли

2)Найдем второй момент:

$$M^2\xi = \int_0^\infty x^2\lambda\exp(-\lambda x)dx = [-x^2\exp(-\lambda x)]_0^\infty + \int_0^\infty 2x\exp(-\lambda x)dx =$$

$$= 0 + [-\frac{2}{\lambda}x\exp(-\lambda x)]_0^\infty + \int\limits_0^\infty \exp(-\lambda x)dx = \frac{2}{\lambda}$$

По определению $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$
Соответственно, $D(X) = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

3)Найдем производящую функцию моментов:

$$\begin{aligned}
M_x(t) &= E[\exp(tX)] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx) f_x(x)dx \\
&= \int_0^\infty \exp(tx)\lambda\exp(-\lambda x)dx \\
&= \lambda\int_0^\infty \exp((t-\lambda)x)dx \\
&= \lambda[\tfrac{1}{t-\lambda}\exp((t-\lambda)x)]_0^\infty \\
&= \tfrac{\lambda}{\lambda-t}
\end{aligned}$$

Производящая функция моментов: $M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t}$

4)Найдем характеристическую функцию:

$$\begin{aligned}
\varphi_x(t) &= E[\exp(itX)] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) f_x(x)dx \\
&= \int_0^\infty \exp(itx)\lambda\exp(-\lambda x)dx \\
&= \lambda\int_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx + i\lambda\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx
\end{aligned}$$

Отдельно посчитаем каждый интеграл:

$\int_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx$

$$\begin{aligned}
&= [\tfrac{1}{t}\sin(tx)\exp(-\lambda x)]_0^\infty - \int_0^\infty \tfrac{1}{t}\sin(tx)(-\lambda\exp(-\lambda x))dx \\
&= \tfrac{\lambda}{t}\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx \\
&= \tfrac{\lambda}{t}\{[-\tfrac{1}{t}\cos(tx)\exp(-\lambda x)]_0^\infty - \int_0^\infty(-\tfrac{1}{t}\cos(tx))(-\lambda\exp(-\lambda x))dx\} \\
&= \tfrac{\lambda}{t}\left(\tfrac{1}{t} - \tfrac{\lambda}{t}\int_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx\right) \\
&= \tfrac{\lambda}{t^2} - \tfrac{\lambda^2}{t^2}\int_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx
\end{aligned}$$

Получаем:

$$\int\limits_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{\lambda}{t^2} - \frac{\lambda^2}{t^2}\int\limits_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx$$

$$(1+\frac{\lambda^2}{t^2})\int\limits_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{\lambda}{t^2}$$

$$\int\limits_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{\lambda}{(t^2+\lambda^2)}$$

Теперь считаем второй интеграл:

$\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx$

$$\begin{aligned}
&= [-\tfrac{1}{t}\cos(tx)\exp(-\lambda x)]_0^\infty - \textstyle\int_0^\infty(-\tfrac{1}{t}\cos(tx))(-\lambda\exp(-\lambda x))dx \\
&= \tfrac{1}{t} - \tfrac{\lambda}{t}\{[\tfrac{1}{t}\sin(tx)\exp(-\lambda x)]_0^\infty - \textstyle\int_0^\infty \tfrac{1}{t}\sin(tx)(-\lambda\exp(-\lambda x))dx\} \\
&= \tfrac{1}{t} - \tfrac{\lambda}{t}(\tfrac{\lambda}{t}\textstyle\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx) \\
&= \tfrac{1}{t} - \tfrac{\lambda^2}{t^2}\textstyle\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx
\end{aligned}$$

Получаем:

$$\int\limits_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{1}{t} - \frac{\lambda^2}{t^2}\int\limits_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx$$

$$(1+\frac{\lambda^2}{t^2})\int\limits_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{1}{t}$$

$$\int\limits_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx = \frac{t}{t^2+\lambda^2}$$

Соединяем вместе:

$$\begin{aligned}
\varphi_x(t) &= \textstyle\int_0^\infty \cos(tx)\exp(-\lambda x)dx + i\lambda\int_0^\infty \sin(tx)\exp(-\lambda x)dx \\
&= \tfrac{\lambda^2}{(t^2+\lambda^2)} + \tfrac{i\lambda t}{t^2+\lambda^2} \\
&= \tfrac{\lambda}{\lambda - it}
\end{aligned}$$

Характеристическая функция: $\varphi_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$

5)Найдем функцию распределения:

Если $x < 0$:(Потому что x не может принимать отрицательные значения)

$$F_x(x) = P(X \leq x) = 0$$

Если $x > 0$:

$$\begin{aligned} F_x(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt \\ &= \int_0^x \lambda \exp(-\lambda t)dt \\ &= [-\exp(-\lambda t)]_0^x \\ &= -\exp(-\lambda x) + 1 \end{aligned}$$

Итого, получаем:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 \ ,x < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda x) \ ,x \geq 0 \end{cases}$$

Перейдем к графикам:

1)График плотности вероятности:

```
In[31]:= p1 = Plot[{1*Exp[-1 x], 2*Exp[-2 x]}, {x, 0, 2.5}, PlotLegends → Automatic]
```

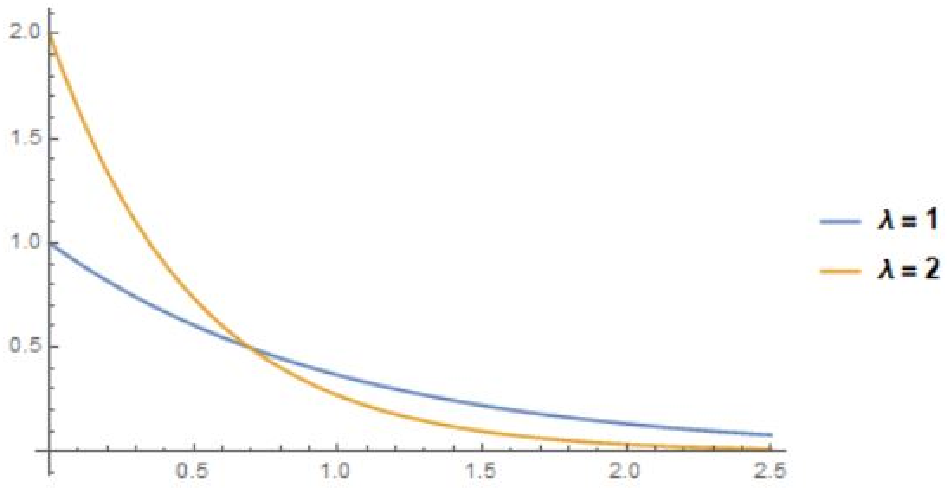

Рис.1.2.1

2)График функции распределения(при $\lambda = 1$):

```
In[47]:= Show[Plot[0, {x, -5, 0}], Plot[1 - Exp[-x], {x, 0, 5}], PlotRange → {{-3, 3}, {-3, 3}}]
         |пок··· |график функции        |график ф··· |показательная функция  |отображаемый диапазон графика
```

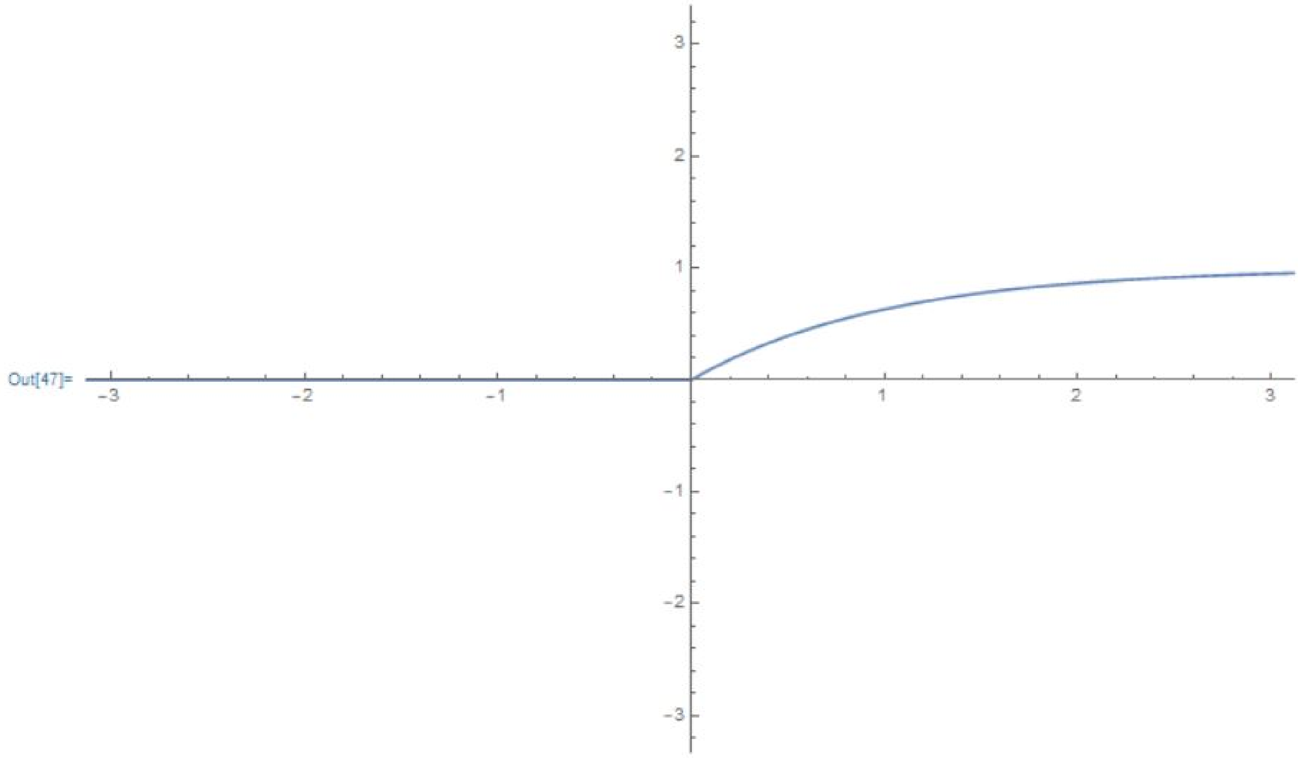

Рис.1.2.2

Задание 1.3 *Поиск примеров событий, которые могут быть описаны выбранными случайными величинами*

Типичные интерпретации экспоненциального распределения:
Экспоненциальное распределение в основном используется для тестирования надежности продукта. Экспоненциальное распределение часто моделирует время ожидания и может помочь вам ответить на такие вопросы, как:

"Сколько времени пройдет, прежде чем сильный ураган обрушится на Атлантическое побережье?" или
"Как долго будет работать трансмиссия в моей машине, прежде чем она сломается?".

Экспоненциальное распределение связано с несколькими известными распределениями. Информация взята из следующих источников:
Источник1

Источник2

1)Первое это,конечно же, связь с распределением Пуассона: Если число событий в единицу времени следует распределению Пуассона, то количество времени между событиями следует экспоненциальному распределению.

Экспоненциальное распределение связано с распределением Пуассона. В то время как экспоненциальная модель моделирует время между последовательными событиями на непрерывном временном интервале, распределение Пуассона имеет дело с событиями, которые происходят в течение фиксированного периода времени.

2)Экспоненциальное распределение является частным случаем гамма-распределения. Это непрерывный аналог геометрического распределения, которое моделирует время между успехами в серии независимых испытаний.

3)Экспоненциальное распределение также является частным случаем распределения Вейбулла, которое происходит, когда параметр формы Вейбулла $= 1$.

4)Связь с распределением Эрланга

Время обслуживания агентов(например, сколько времени требуется сотруднику, чтобы обслужить клиента) также можно смоделировать как экспоненциально распределенные переменные. Общая длина процесса(последовательность из нескольких независимых задач) следует распределению Эрланга: распределение суммы нескольких независимых экспоненциально распределенных переменных

Нетипичные интерпретации экспоненциального распределения:
Это также важное распределение для построения непрерывных цепей Маркова.

Задание 1.4 *Описание способа моделирования выбран- ных случайных величин*

Теперь проделаем тоже самое для геометрического распределения!

Задание 1.2 *Описание основных характеристик распределения*

Будем искать мат.ожидание и дисперсию через метод моментов.

1)Найдем первый момент:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^x px \\
&= (1-p)p\sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^{x-1}x \\
&= -(1-p)p\sum_{0}^{\infty}\tfrac{d}{dp}(1-p)^x \\
&= -(1-p)p\tfrac{d}{dp}\sum_{0}^{\infty}(1-p)^x \\
&= -(1-p)p\tfrac{d}{dp}\tfrac{1}{1-(1-p)} \\
&= -(1-p)p\tfrac{d}{dp}\tfrac{1}{p} \\
&= -(1-p)p(-p^{-2}) \\
&= (p-p^2)p^{-2} \\
&= \tfrac{1}{p}-1 \\
&= \tfrac{1-p}{p}
\end{aligned}
$$

Математическое ожидание: $E[X] = \frac{1-p}{p}$

2) Найдем второй момент:

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_0^\infty (1-p)^x p x^2 \\
&= (1-p)^2 p \sum_{x=0}^\infty (1-p)^{x-2} x^2 \\
&= (1-p)^2 p \sum_{x=0}^\infty (1-p)^{x-2} x(x+1-1) \\
&= (1-p)^2 p \sum_{x=0}^\infty (1-p)^{x-2} x(x-1) + \sum_{x=0}^\infty (1-p)^x x \\
&= (1-p)^2 p \sum_{x=0}^\infty \tfrac{d^2}{dp^2}(1-p)^x + E[X] \\
&= (1-p)^2 p \tfrac{d^2}{dp^2} \sum_{x=0}^\infty (1-p)^x + \tfrac{1-p}{p} \\
&= (1-p)^2 p \tfrac{d^2}{dp^2} \tfrac{1}{1-(1-p)} + \tfrac{1-p}{p} \\
&= (1-p)^2 p \tfrac{d^2}{dp^2} \tfrac{1}{p} + \tfrac{1-p}{p} \\
&= 2(1-p)^2 p \cdot p^{-3} + \tfrac{1-p}{p} \\
&= 2(1-2p+p^2)p^{-2} + \tfrac{1-p}{p} \\
&= \tfrac{2-3p+p^2}{p^2}
\end{aligned}$$

По определению $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$
Соответственно,

$$\begin{aligned}
D(X) &= \tfrac{2-3p+p^2}{p^2} - (1-pp)^2 \\
&= \tfrac{2-3p+p^2-(1-2p+p^2)}{p^2} \\
&= \tfrac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

Итого, $D(X) = \frac{1-p}{p^2}$
3)Найдем производящую функцию моментов:

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E[\exp(tX)] \\ &= \sum_0^\infty (1-p)^x p \exp(tx) \\ &= p\sum_0^\infty [(1-p)\exp(t)]^x \\ &= \tfrac{p}{1-(1-p)\exp|(t)} \end{aligned}$$

Но у нас есть условие на t :
$(1-p)\exp(t) < 1$ $\exp(t) < \frac{1}{1-p}$ $t < -\ln(1-p)$

Итого, производящая функция моментов геометрического распределения определена для $t < -\ln(1-p)$ и равна:

$$M_x(t) = \frac{p}{1-(1-p)\exp|(t)}$$

4)Найдем характеристическую функцию:

$$\begin{aligned} \varphi_x(t) &= E[\exp(itX)] \\ &= \sum_0^\infty (1-p)^x p \exp(itx) \\ &= p\sum_0^\infty [(1-p)\exp(it)]^x \\ &= \tfrac{p}{1-(1-p)\exp(it)} \end{aligned}$$

Итого, характеристическая функция равна:

$$\varphi_x(t) = \frac{p}{1-(1-p)\exp(it)}$$

5)Найдем функцию распределения:
При $x < 0 : F_x(x) = 0$ При $x > 0 :$

$$
\begin{aligned}
F_x(x) &= P(X < x) \\
&= \sum_{y=0}^{x} (1-p)^y p \\
&= p \sum_{y=0}^{x} (1-p)^y \\
&= p \frac{1-(1-p)^{x+1}}{1-(1-p)} \\
&= 1 - (1-p)^{x+1}
\end{aligned}
$$

Итого, функция распределения равна:

$$
F_x(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x < 0 \\ 1 - (1-p)^{x+1} \ , \ x \geq 0 \end{cases}
$$

Перейдем к графикам:

1)Гистограмма вероятностей($p = 1/6$):

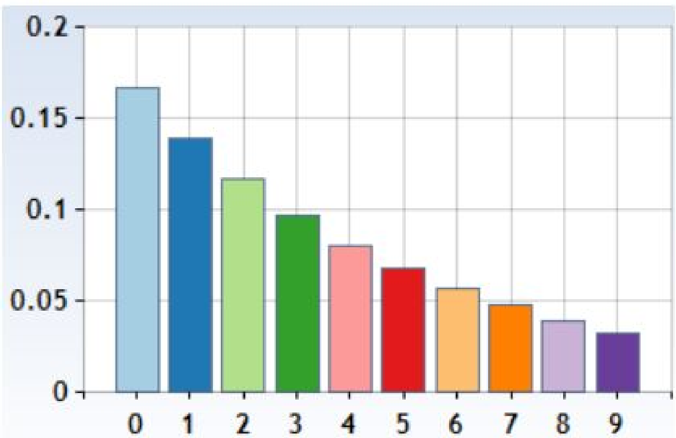

Рис.1.2.3

2)График функции распределения:

In[1]:=

```
DiscretePlot[Table[CDF[GeometricDistribution[p], k], {p, {0.1, 0.2, 0.5}}] // Evaluate,
|график послед··· |табл··· |ф··· |геометрическое распределение                    |вычислить
  {k, 0, 14}, ExtentSize → Right]
            |размер прот··· |справа
```

Out[1]=

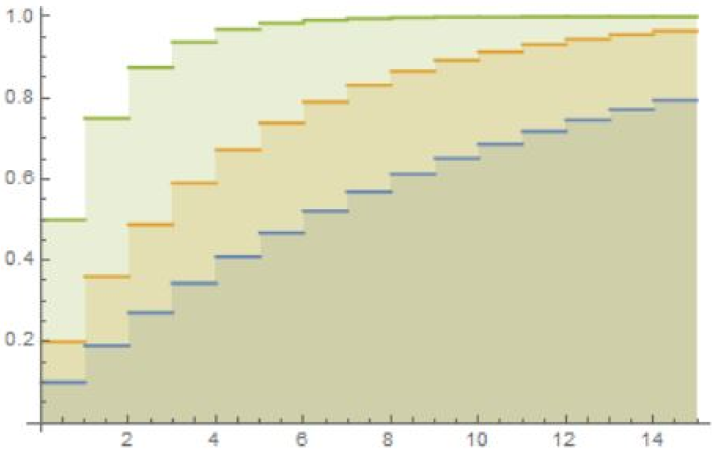

Рис.1.2.4