PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Consignes.

- Commencez par **écrire vos prénom et nom en MAJUSCULES ainsi que votre NOMA** dans l'espace prévu en haut du recto de chacune des trois feuilles de l'examen.
- Écrivez vos réponses **à l'intérieur des cadres** prévus. Justifiez lorsque c'est demandé.
- Lorsque c'est demandé **recopiez votre réponse finale dans le cadre séparé** prévu à la fin de la question.
- Écrivez vos réponses proprement au bic bleu ou noir, ou éventuellement au crayon noir bien lisible.
- En cas d'erreur, si vous ne pouvez pas effacer ou barrer proprement, demandez aux surveillants une nouvelle page d'énoncé. Dans ce cas, vous rendez la page erronée.

Question 1 [$\sim$**2.5 points**].

Soit n un entier supérieur ou égal à un. On souhaite démontrer par récurrence l'identité suivante

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i^2 = \frac{1}{2}(-1)^n n(n+1). \tag{1}$$

1a Démontrez le cas de base.

Quand $n = 1$ l'égalité à démontrer devient $(-1)^1 1^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}(-1)^1 1(1+1)$.

Les deux membres sont égaux à -1, ce qui démontre le cas de base.

1b Écrivez l'égalité qu'il faut à présent prouver dans cette preuve par récurrence.

Pour prouver l'identité (1) par récurrence, on suppose qu'elle est connue pour le cas n et on cherche à la démontrer pour le cas $n+1$, c'est-à-dire à prouver que

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i i^2 = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}(n+1)(n+2).$$

1c Démontrez l'égalité du point précédent pour terminer la preuve par récurrence de l'identité (1).

Il faut donc prouver que

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i i^2 = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}(n+1)(n+2).$$

Le membre de gauche comporte $n+1$ termes, et peut être décomposé en la somme des n premiers termes et du dernier terme $(-1)^{n+1}(n+1)^2$. Or, par l'hypothèse de récurrence, on sait que la somme de ces n premiers termes vaut $\frac{1}{2}(-1)^n n(n+1)$. L'égalité à prouver peut donc aussi s'écrire

$$\frac{1}{2}(-1)^n n(n+1) + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}(-1)^{n+1}(n+1)(n+2).$$

Multiplions chaque membre par 2 puis divisons par $(-1)^n$ (en se rappelant que $(-1)^{n+1} = (-1)^n(-1)^1 = -(-1)^n$), ce qui donne la nouvelle égalité à prouver :

$$n(n+1) + 2(-1)(n+1)^2 \stackrel{?}{=} (-1)(n+1)(n+2).$$

Il ne reste plus qu'à simplifier les deux membres : on peut diviser par $n+1$ (qui n'est jamais nul) ce qui donne

$$n - 2(n+1) \stackrel{?}{=} -(n+2)$$

et comme le membre de gauche se simplifie en $-n-2$ l'égalité est démontrée.
En combinant avec la vérification du cas de base $n = 1$ l'identité est donc prouvée par récurrence pour tout $n \geq 1$.

Remarque : en réalité l'identité est aussi vraie pour $n = 0$ (la somme à gauche devient vide, donc nulle, et l'expression de droite vaut aussi zéro), et il aurait été possible de prendre cette valeur comme cas de base.

Question 2 [$\sim$**2.5 points**].

On effectue une simulation numérique de l'atmosphère terrestre sur un super-ordinateur très puissant. L'algorithme utilisé est itératif : plus on consacre de temps de calcul à la simulation, plus le résultat de la simulation est précis.

On mesure la précision par un nombre strictement positif (plus le nombre est petit, plus le calcul est précis), et on sait que l'évolution de la précision en fonction du temps est donnée par une fonction exponentielle décroissante $p(t)$ (où t est le temps qui s'est écoulé depuis le début de la simulation, mesuré en minutes).
On observe que la précision après 10 minutes est égale à $p(10) = 1$. Vingt minutes plus tard, la précision est égale à $p(30) = \frac{1}{5}$. **Calculez** après combien de minutes au minimum la précision sera inférieure ou égale à $\frac{1}{100}$.

Une fonction exponentielle (positive) s'écrit en général Ca^t où a et C sont des constantes positive. Si la loi est décroissante on sait que $a < 1$.

L'énoncé nous indique que $Ca^{10} = 1$ et $Ca^{30} = \frac{1}{5}$. En divisant ces deux égalités on trouve que $\frac{Ca^{30}}{Ca^{10}} = \frac{1/5}{1}$ d'où on tire que $a^{20} = \frac{1}{5}$, puis que $a = (\frac{1}{5})^{\frac{1}{20}} = 5^{-1/20}$.

On tire également de la première condition que $C = 1/a^{10} = a^{-10}$, et donc $C = (5^{-1/20})^{-10} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.
Au final la fonction $p(t)$ est donc égale à $\sqrt{5} \cdot 5^{-t/20}$, ou encore $5^{1/2-t/20}$.

(notez qu'il était possible d'arriver à cette expression par d'autres moyens, par exemple en notant qu'attendre 20 minutes divise la précision par 5)

Pour répondre à la question de l'énoncé il faut résoudre $p(t) \leq \frac{1}{100}$, d'où $5^{1/2-t/20} \leq \frac{1}{100}$. En prenant le logarithme des deux côtés on trouve

$$\ln\left(5^{1/2-t/20}\right) \leq \ln\frac{1}{100} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1/2 - t/20\right)\ln 5 \leq -\ln(100)$$

et finalement on peut en extraire la condition sur le temps t (en minutes)

$$1/2 - t/20 \leq -\frac{\ln(100)}{\ln 5} \quad \Leftrightarrow \quad t/20 \geq 1/2 + \frac{\ln(100)}{\ln 5} \quad \Leftrightarrow \quad t \geq 10 + 20\frac{\ln(100)}{\ln 5}.$$

Remarque : le quotient $\frac{\ln(100)}{\ln 5}$ s'écrit aussi $\log_5(100)$; comme cela vaut environ 2.86 on trouve délai minimal de 67.23 minutes.

Réponse finale : il faudra attendre au moins $\boxed{10 + 20\log_5 100 (\approx 67) \text{ minutes}}$

Question 3 [$\sim$**1.5 points**]

Soit a un paramètre réel, et soit la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2} \text{ pour } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 3.$$

Identifiez pour quelle(s) valeur(s) du paramètre a la fonction f est continue en $x = 0$. **Justifiez** soigneusement.

Au point $x = 0$, pour que la fonction soit continue, il faut par définition que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et donc que cette limite existe et soit égale à 3.

Calculons cette limite : il s'agit d'un quotient tendant vers $\frac{1-1}{0}$, une indétermination du type $\frac{0}{0}$ qu'on peut tenter de lever via la règle de L'Hospital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2} \overset{(LH)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2ax}{2\sqrt{1+ax^2}}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{a}{2\sqrt{1+ax^2}} = \frac{a}{2}.$$

Cette limite existe donc toujours, et la continuité en $x = 0$ impose alors qu'elle soit égale à 3, d'où $\frac{a}{2} = 3 \Leftrightarrow a = 6$.
Le choix de paramètre $a = 6$ est donc le seul qui rende la fonction continue.

Réponse finale : $\boxed{a = 6}$

PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Question 4 [~**3.5 points**]

Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln\big(e^x + e^{-x} + 1\big)$, dont le domaine est l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier.

4a Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f.

L'étude du signe de la dérivée de f va nous permettre d'identifier ces intervalles. On calcule que

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} + 1}.$$

Comme le dénominateur est toujours strictement positif (puisque $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$), le signe de la dérivée est celui du numérateur $e^x - e^{-x}$, qui vaut aussi $e^{-x}(e^{2x} - 1)$; c'est donc aussi le signe de $e^{2x} - 1$.

Comme e^{2x} est strictement croissante et $e^0 = 1$, on trouve que ce numérateur est strictement positif pour $x > 0$ et strictement négatif pour $x < 0$.

Par conséquent la fonction f est (strictement) croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et (strictement) décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.

4b Déduisez quels sont les extrema de la fonction f, et **précisez** s'il s'agit de minima ou de maxima, et s'ils sont locaux ou globaux. **Justifiez** vos réponses.

Puisque la fonction décroît depuis $-\infty$ jusque $x = 0$, puis croît depuis 0 jusque $+\infty$, il est clair qu'il n'existe qu'un seul extremum, à savoir un minimum en $x = 0$, et que ce minimum est global (puisque la fonction croît strictement lorsqu'on s'éloigne de $x = 0$, que ce soit du côté $x > 0$ ou du côté $x < 0$).

4c On définit à présent la fonction g par $g(x) = \ln\big(e^x + e^{-x} + 1\big)$ sur le domaine $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$. C'est donc la même fonction que f mais dont on a réduit le domaine aux réels négatifs ou nuls. À l'aide des points précédents, **démontrez** que cette fonction g possède une fonction réciproque h, et **calculez** le domaine de cette réciproque.

La fonction g possède la même dérivée que la fonction f sur son domaine $\{x : x \leq 0\}$. Cette dérivée est strictement négative partout sur ce domaine (voir le point **4a**). La fonction g est donc strictement décroissante, et on sait que toute fonction strictement décroissante admet une fonction réciproque.

Le domaine de la réciproque de g est l'ensemble image de g. Comme on voit facilement que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \ln(e^{-\infty} + e^{\infty} + 1) = \ln(0 + \infty + 1) = +\infty$, et que g est strictement croissante jusque $x = 0$, on en conclut que l'image de g, donc le domaine de sa réciproque, est l'intervalle $]-\infty, g(0)] =]-\infty, \ln(3)]$.

4d Calculez l'expression de h, la fonction réciproque de g.

Pour calculer la réciproque de g, écrivons $g(x) = y$ et cherchons à exprimer x en fonction de y (en gardant en tête que $x \leq 0$ en raison du domaine de g) :

$$\ln\big(e^x + e^{-x} + 1\big) = y \Leftrightarrow e^x + e^{-x} + 1 = e^y.$$

Posons $t = e^x$, ce qui entraîne $e^{-x} = 1/e^x = 1/t$. L'équation devient $t + 1/t + 1 = e^y$, ou encore $t^2 + 1 + t = te^y$. Il s'agit d'une équation quadratique, qu'on peut encore écrire $t^2 + (1 - e^y)t + 1 = 0$ et qu'on résout analytiquement :

$$t = \frac{-(1 - e^y) \pm \sqrt{(1 - e^y)^2 - 4}}{2} = \frac{e^y - 1 \pm \sqrt{(1 - e^y)^2 - 4}}{2}.$$

On extrait alors la valeur de x grâce à $x = \ln t$, d'où

$$x = \ln\Big(\frac{e^y - 1 \pm \sqrt{(1 - e^y)^2 - 4}}{2}\Big).$$

Il reste à déterminer laquelle des deux racines sélectionner : comme on veut $x \leq 0$, il s'agit forcément de la plus petite des deux racines, avec le signe $-$, ce qui permet de conclure avec l'expression ci-dessous (on peut en effet démontrer qu'avec ce signe $-$ l'expression dans le logarithme est inférieure à un, et donc le logarithme négatif).

Réponse finale : $\boxed{h(y) = \ln\Big(\frac{e^y - 1 - \sqrt{(1 - e^y)^2 - 4}}{2}\Big)}$

Question 5 [$\sim$**2 points**]

Montrez que la droite $y = x + c$ (où c est une constante différente de 0) est une courbe de niveau de la fonction $F(x, y) = \ln(x^2 - 2xy + y^2) + e^{2x} \cdot e^{-2y}$.

Il faut montrer que la fonction F prend une valeur constante le long de la droite. Cette fonction peut encore s'écrire sous la forme $F(x, y) = \ln(x - y)^2 + e^{2(x-y)}$. Le long de la droite donnée, nous avons $x - y = -c$ et F vaut donc $F(x, y) = \ln c^2 + e^{-2c}$ qui est bien une constante.

Question 6 [$\sim$**2 points**]

Soit une fonction $y(x)$ définie implicitement par la relation $(1 - x^2)y^2 + 1 = y$.
Calculez l'approximation polynomiale de degré 2 de $y(x)$ au voisinage de $x = 1$.

Evaluée en $x = 1$, cette relation donne $0 \cdot y^2(1) + 1 = y(1)$, et donc $y(1) = 1$.

Par ailleurs, en prenant la dérivée par rapport à x de la relation, on obtient
$-2xy^2 + (1 - x^2)(2y)y' + 0 = y'$,
ce qui donne pour $x = 1$: $-2y^2(1) + 0 \cdot 2y(1)y'(1) + 0 = y'(1)$, et donc $y'(1) = -2$.

Prenons maintenant une nouvelle dérivée, pour faire apparaître y'' :
$-2y^2 - 4xyy' - 4xyy' + 2(1 - x^2)(y'y' + yy'') = y''$,
ce qui donne pour $x = 1$: $-2 - 4(-2) - 4(-2) + 0 = y''(1)$, et donc $y''(1) = 14$.

Par la formule de Taylor, nous pouvons maintenant écrire l'approximation polynomiale du second degré de $y(x)$ au voisinage de $x = 1$:
$y(x) \approx y(1) + y'(1) \cdot (x - 1) + \frac{1}{2}y''(1)(x - 1)^2$, soit

$$\boxed{y(x) \approx 1 - 2(x - 1) + 7(x - 1)^2}$$

Réponse finale : $\boxed{y(x) \approx 1 - 2(x - 1) + 7(x - 1)^2}$

PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Question 7 [∼**3 points**]

Soit $Q = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}$, où $u = F(x^2 + y^2 - 2xy)$. Trouvez une fonction F telle que $Q = 2$.

Posons $v = x^2 + y^2 - 2xy$, de sorte que $u = F(v)$. Alors,

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = F'(v)\dfrac{\partial v}{\partial x} = F'(v)(2x - 2y)$. Pareillement,

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = F'(v)\dfrac{\partial v}{\partial y} = F'(v)(2y - 2x)$.

On obtient alors

$Q = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = F'(v)(2x^2 - 2xy) + F'(v)(2y^2 - 2xy) = 2F'(v)v$.

On obtient $Q = 2$ lorsque $F'(v) = 1/v$.

Nous pouvons donc prendre $\boxed{F(v) = \ln(v)}$.

Réponse finale : $\boxed{F(v) = \ln(v)}$

Question 8 [∼3 points]

8a Calculez $x(t)$ solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^t \cdot x^3$ avec la condition initiale $x(0) = 1$.

Il s'agit d'une équation différentielle à variables séparées : $\frac{\mathrm{d}x}{x^3} = e^t \mathrm{d}t$. On calcule $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \int e^t \mathrm{d}t$, ce qui donne $-\frac{1}{2}x^{-2} = e^t + C$. La constante C est obtenue à l'aide de la condition initiale : $-\frac{1}{2} = e^0 + C$, soit $C = -\frac{3}{2}$.

On obtient donc $\boxed{x(t) = \frac{1}{\sqrt{3 - 2e^t}}}$

Réponse finale : $\boxed{x(t) = \frac{1}{\sqrt{3 - 2e^t}}}$

8b Esquissez le graphe de $x(t)$ pour $t \geq 0$. Que constatez-vous de particulier ?

Puisque e^t est une fonction croissante, le dénominateur $\sqrt{3 - 2e^t}$ décroit de la valeur 1 en $t = 0$ à 0 en $t = \ln(3/2)$. La solution $x(t)$ est donc croissante et tend vers l'infini lorsque t tend (par la gauche) vers $\ln(3/2)$.

On peut esquisser le graphe de cette fonction comme suit :