PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Consignes.

- Commencez par **écrire vos prénom et nom en MAJUSCULES ainsi que votre NOMA** dans l'espace prévu en haut du recto de chacune des trois feuilles de l'examen.
- Écrivez vos réponses **à l'intérieur des cadres** prévus. Justifiez lorsque c'est demandé.
- Lorsque c'est demandé **recopiez votre réponse finale dans le cadre séparé** prévu à la fin de la question.
- Écrivez vos réponses proprement au bic bleu ou noir, ou éventuellement au crayon noir bien lisible.
- En cas d'erreur, si vous ne pouvez pas effacer ou barrer proprement, demandez aux surveillants une nouvelle page d'énoncé. Dans ce cas, vous rendez la page erronée.

Question 1 [$\sim$**2.5 points**].

Démontrez par récurrence que l'identité suivante est vraie pour tout entier $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 2^{i-1} = 2^n(n^2 - 2n + 3) - 3.$$

1a Démontrez le cas de base.

Pour $n = 1$ l'égalité à démontrer devient

$$1^2 \cdot 2^{1-1} \stackrel{?}{=} 2^1(1^2 - 2 + 3) - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \cdot 2^0 \stackrel{?}{=} 2 \cdot 2 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \stackrel{?}{=} 1,$$

elle est donc bien vérifiée.

1b Si on suppose l'identité vraie pour n, **écrivez** l'égalité qu'il faut prouver pour démontrer l'identité par récurrence.

Pour démontrer l'identité par récurrence, on la suppose vraie pour n, et on doit la prouver pour $n+1$, ce qui s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 2^{i-1} \stackrel{?}{=} 2^{n+1}\big((n+1)^2 - 2(n+1) + 3\big) - 3.$$

1c Prouvez l'égalité écrite au **1b** afin d'achever la démonstration par récurrence de l'identité proposée pour tout n.

Le membre de gauche comporte $n+1$ termes, et peut être décomposé en la somme des n premiers termes et du dernier terme $(n+1)^2 2^n$ (qui correspond à $i^2 2^{i-1}$ évalué en $i = n+1$). Or, par l'hypothèse de récurrence, on sait que la somme de ces n premiers termes vaut $2^n(n^2 - 2n + 3) - 3$. L'égalité à prouver peut donc aussi s'écrire

$$2^n(n^2 - 2n + 3) - 3 + (n+1)^2 2^n \stackrel{?}{=} 2^{n+1}\big((n+1)^2 - 2(n+1) + 3\big) - 3.$$

Cette égalité est équivalente à

$$2^n\big(n^2 - 2n + 3 + (n+1)^2\big) \stackrel{?}{=} 2^{n+1}\big((n+1)^2 - 2(n+1) + 3\big).$$

ou encore à

$$2^n\big(n^2 - 2n + 3 + n^2 + 2n + 1\big) \stackrel{?}{=} 2^{n+1}\big(n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 3\big)$$

et puis à

$$2^n\big(2n^2 + 4\big) \stackrel{?}{=} 2^{n+1}\big(n^2 + 2\big).$$

En remarquant que $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$ on obtient finalement

$$2^n\big(2n^2 + 4\big) \stackrel{?}{=} 2^n\big(2(n^2 + 2)\big)$$

qui est bien vérifiée puisque $2n^2 + 4 = 2(n^2 + 2)$. L'identité est donc prouvée par récurrence pour tout $n \geq 1$.

Remarque : en réalité l'identité est aussi vraie pour $n = 0$ (la somme à gauche devient vide, donc nulle, et l'expression de droite vaut aussi zéro), et il aurait été possible de prendre cette valeur comme cas de base.

Question 2 [$\sim$**3 points**].

Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 - x^2) - \ln(2 + x^2)$.

2a **Déterminez** le domaine de la fonction f.

Pour qu'un x appartienne au domaine de cette fonction il suffit que l'argument de chaque logarithme soit strictement positif. Pour le premier logarithme cela donne $1 - x^2 > 0$ ou encore $x^2 < 1$, ce qui donne l'intervalle ouvert $]-1;1[$. Pour le second logarithme on a toujours $2 + x^2 > 0$, ce qui ne modifie pas le domaine de la fonction : il s'agit donc de l'intervalle $]-1;1[$.

2b **Identifiez** les asymptotes éventuelles au graphe de la fonction f.

Comme le domaine est borné il ne peut y avoir d'asymptotes horizontales ou obliques. Quant aux asymptotes verticales, elles ne peuvent exister qu'aux bords du domaine, c'est-à-dire en $x = \pm 1$. Calculons la limite de la fonction en ces points : on a

$$\lim_{x \to \pm 1} f(x) = \lim_{x \to \pm 1} \ln(1 - x^2) - \ln(2 + x^2) = \ln 0^+ - \ln 3 = -\infty$$

car lorsque x tend vers ± 1, l'argument $1 - x^2$ tend vers 0^+ et le premier logarithme tend vers $-\infty$. Le second logarithme tendant vers $\ln 3$, cela donne au final que la fonction tend vers $-\infty$ aux deux extrémités de son domaine, et il y a donc deux asymptotes verticales en $x = \pm 1$.

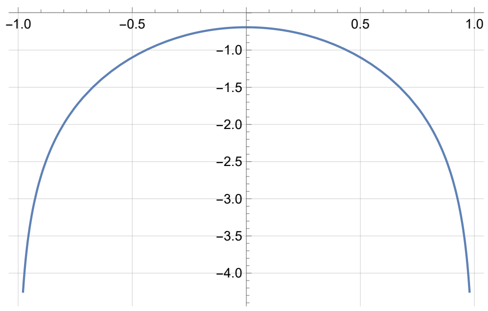
2c **Déterminez** les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f.

Pour déterminer ces intervalles on étudie la signe de la dérivée de f : on a

$$f'(x) = \frac{-2x}{1 - x^2} - \frac{2x}{2 + x^2} = \frac{-2x(2 + x^2) - 2x(1 - x^2)}{(1 - x^2)(2 + x^2)} = \frac{-4x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1 - x^2)(2 + x^2)} = -\frac{6x}{(1 - x^2)(2 + x^2)}.$$

Vu que le dénominateur est strictement positif (produit de deux termes strictement positifs sur le domaine), le signe de f' est le même que celui de $-6x$. Par conséquent on trouve que f est croissante pour $x < 0$ (puisque $f' > 0$) et décroissante pour $x > 0$ (puisque $f' < 0$). On en déduit aussi que le point $x = 0$ est un maximum de la fonction.

2d En vous aidant des points précédents, **esquissez** le graphe de la fonction f.



2e **Calculez** la fonction g réciproque de f, ou démontrez qu'elle n'existe pas.

La réciproque n'existe pas, car la fonction n'est pas injective. En effet, la fonction prend la même valeur pour une abscisse x et pour son opposé $-x$, puisque x n'apparaît dans l'expression de f qu'à l'intérieur d'un carré x^2.

On a par exemple $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \ln \frac{3}{4} - \ln \frac{9}{4} = \ln(\frac{3}{4}/\frac{9}{4}) = \ln \frac{1}{3}$, et donc la fonction réciproque $g(y)$ ne serait pas bien définie pour $y = \ln \frac{1}{3}$.

PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Question 3 [∼**2 points**].

Calculez la limite suivante $$\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1-2x+e^{2x-2}}.$$

En remplaçant x par 1 on obtient $\frac{1-1+\ln 1}{1-2+e^{2-2}} = \frac{1-1+0}{1-2+1} = \frac{0}{0}$, ce qui est un cas d'indétermination.
Appliquons la règle de l'Hospital : elle donne

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1-2x+e^{2x-2}} \stackrel{LH}{=} \lim_{x\to 1} \frac{0-1+\frac{1}{x}}{0-2+2e^{2x-2}} = \lim_{x\to 1} \frac{1+\frac{1}{x}}{-2+2e^{2x-2}}$$

et en remplaçant x par 1 on obtient $\frac{1+1}{-2+2} = \frac{0}{0}$, un nouveau cas d'indétermination.
Appliquons une seconde fois la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+\frac{1}{x}}{-2+2e^{2x-2}} \stackrel{LH}{=} \lim_{x\to 1} \frac{0-\frac{1}{x^2}}{0+4e^{2x-2}} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{4x^2e^{2x-2}}$$

et en remplaçant x par 1 on obtient finalement $\frac{-1}{4\cdot 1^2\cdot e^0} = -\frac{1}{4}$, qui est la valeur de la limite recherchée.

Réponse finale : $\boxed{\lim = -1/4}$

Question 4 [∼**2.5 points**].

Une société fabrique un certain type d'acier à haute résistance. Elle peut en fabriquer une quantité Q (mesurée en tonnes) comprise entre $Q = 0$ et $Q = 6$ (bornes incluses). Le coût total de fabrication (exprimé en milliers d'euros) de cette quantité Q d'acier est égal à $C(Q) = Q^2(\frac{7}{2} - \frac{Q}{3})$. La production est ensuite entièrement vendue au prix unitaire de 12 (milliers d'euros) par tonne. **Calculez** la quantité d'acier qu'il faut fabriquer pour maximiser le bénéfice (c'est-à-dire le total des ventes moins le coût total de fabrication). Justifiez soigneusement.

Si on exprime les montants en milliers d'euros, le total des ventes s'élève à $12Q$, et le bénéfice vaut alors $12Q-C(Q) = 12Q - Q^2(\frac{7}{2} - \frac{Q}{3})$, qu'il nous faut maximiser. Nommons cette fonction $f(Q) = 12Q - \frac{7}{2}Q^2 + \frac{1}{3}Q^3$.

Comme on cherche les extrema (le maximum en fait) d'une fonction continue (c'est un polynôme) sur l'intervalle $[0, 6]$, qui est fermé et borné, le théorème des bornes atteintes s'applique. On a donc la garantie qu'un maximum global existe, et pour le trouver il suffit de prendre la plus grande valeur parmi les points stationnaires de la fonction et les extrémités de l'intervalle (ne pas oublier ces derniers !).

Les points stationnaires annulent la dérivée, qui vaut $f'(Q) = 12 - 7Q + Q^2$. Ses deux racines se calculent aisément et sont $Q = 3$ et $Q = 4$. On peut aussi déduire du signe de ce trinôme que la fonction décroît sur l'intervalle $[3; 4]$ (dérivée négative) et croît partout ailleurs, c'est-à-dire sur les intervalles $[0; 3]$ et $[4; 6]$.

Par conséquent, le maximum de la fonction sur l'intervalle $[0; 6]$ ne peut se trouver qu'en $Q = 3$ ou en $Q = 6$ (à droite des deux intervalles de croissance). Comparons les valeurs correspondantes : $f(3) = 36 - 9(\frac{7}{2} - 1) = 13.5$ et $f(6) = 72 - 36(\frac{7}{2} - 2) = 18$: le bénéfice maximal est donc obtenu en fabriquant $Q = 6$ tonnes d'acier.

(on aurait aussi pu se passer d'identifier les intervalles de croissance/décroissance et se contenter de comparer les valeurs en quatre points : les deux points stationnaires $f(3) = 13.5$ et $f(4) = 13.333$ et les deux extrémités $f(0) = 0$ et $f(6) = 18$).

Réponse finale : quantité qui maximise le bénéfice $\boxed{Q = 6}$ tonnes

Question 5 [∼**2 points**].

Soit $Q = x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y}$, où $z = f(x^2y)$. **Calculez** Q.

Posons $u = x^2y$, de sorte que $z = f(u)$. Alors,
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xyf'(x^2y)$. Pareillement,
$\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2f'(x^2y)$. On obtient alors
$Q = x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x(2xyf'(x^2y)) - 2y(x^2f'(x^2y))$,
et donc $\boxed{Q = 0}$

Réponse finale : $\boxed{Q = 0}$

Question 6 [∼**3 points**].

L'équation $x^3 \ln x + y^3 \ln y = 2z^3 \ln z$ définit z comme une fonction de x et y. **Montrez** que, si x et y sont proches de e, alors $z(x, y) \approx \frac{1}{2}(x + y)$.

Pour ce faire, obtenons par la formule de Taylor l'approximation du premier degré de $z(x, y)$ autour de (e, e). Nous devons calculer z et ses deux dérivées partielles premières en (e, e). Evaluée en $(x, y) = (e, e)$, l'équation de l'énoncé s'écrit :
$e^3 \ln e + e^3 \ln e = 2z^3(e, e) \ln z(e, e)$, et donc $2e^3 = 2z^3(e, e) \ln z(e, e)$. Cette égalité est vérifiée par $z(e, e) = e$. Dérivons maintenant l'équation de l'énoncé par rapport à x :
$3x^2 \ln x + x^2 = (6z^2 \ln z + 2z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Pour $x = y = z(e, e) = e$, cette relation donne $\dfrac{\partial z}{\partial x}(e, e) = \dfrac{1}{2}$. On trouve de même en dérivant l'équation de l'énoncé par rapport à y que $\dfrac{\partial z}{\partial y}(e, e) = \dfrac{1}{2}$.
La formule de Taylor s'écrit alors comme suit :
$z(x, y) \approx z(e, e) + (x - e)\dfrac{\partial z}{\partial x}(e, e) + (y - e)\dfrac{\partial z}{\partial y}(e, e)$, ce qui donne bien $z(x, y) \approx \frac{1}{2}(x + y)$.

PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Question 7 [∼**2 points**].

Calculez l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Soit $u = \sqrt{x}$. Alors $u^2 = x$ et $2u\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$.
Tenant compte du fait que $e^{1-\sqrt{x}} = e \cdot e^{-\sqrt{x}}$, nous avons
$I = e\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} 2u\mathrm{d}u = 2e\int_1^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = 2e[-e^{-u}]_1^{+\infty} = 2e[0 + e^{-1}]$.
Finalement, nous obtenons $\boxed{I = 2}$

Réponse finale : $\boxed{I = 2}$

Question 8 [∼**3 points**].

Calculez la solution $y(x)$ de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^2}{y}$ avec la condition initiale $y(0) = -5$.

Il s'agit d'une équation différentielle à variables séparées : $y\mathrm{d}y = x^2\mathrm{d}x$, et donc $\displaystyle\int y\mathrm{d}y = \int x^2\mathrm{d}x$. Ceci donne $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^3}{3} + C$, où C est une constante obtenue à l'aide de la condition initiale. Cette égalité fournit y en fonction de x : $y = \pm\sqrt{\dfrac{2x^3}{3} + C^\star}$, avec $C^\star = 2C$. La condition initiale $y(0) = -5$ nous permet de choisir entre les deux signes et de calculer la constante $C^\star$: $-5 = \pm\sqrt{\dfrac{2\cdot 0}{3} + C^\star}$. Nous devons donc retenir le signe $-$ et obtenons $C^\star = 25$. Finalement, $\boxed{y(x) = -\sqrt{\dfrac{2x^3}{3} + 25}}$

Réponse finale : $\boxed{y(x) = -\sqrt{\dfrac{2x^3}{3} + 25}}$