PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Consignes.

— Commencez par **écrire vos prénom et nom en MAJUSCULES ainsi que votre NOMA** dans l'espace prévu en haut du recto de chacune des trois feuilles de l'examen.
— Écrivez vos réponses **à l'intérieur des cadres** prévus. Justifiez lorsque c'est demandé.
— Lorsque c'est demandé **recopiez votre réponse finale dans le cadre séparé** prévu à la fin de la question.
— Écrivez vos réponses proprement au bic bleu ou noir, ou éventuellement au crayon noir bien lisible.
— En cas d'erreur, si vous ne pouvez pas effacer ou barrer proprement, demandez aux surveillants une nouvelle page d'énoncé. Dans ce cas, vous rendez la page erronée.

Question 1 [$\sim$**2.5 pts**].

Soit x un réel tel que $\sin(x) \neq 0$. **Démontrez** par récurrence que l'identité suivante est vraie pour tout entier $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\big((2i-1)x\big) = \frac{1-\cos(2nx)}{2\sin(x)}$$

(intuitivement, le membre de gauche de cette identité somme les sinus des multiples impairs de x, ce qui donne une somme de type $\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) + \cdots + \sin((2n-1)x)$).
Les deux identités trigonométriques suivantes seront utiles (valables pour tout x et pour tout a, b) :

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x) \quad \text{et} \quad 2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

1a Démontrez le cas de base.

Quand $n = 1$ l'égalité à démontrer devient $\sin x \stackrel{?}{=} \dfrac{1-\cos(2x)}{2\sin(x)}$.

En remplaçant $1 - \cos(2x)$ par $2\sin^2(x)$ grâce à la première identité trigonométrique ci-dessus, l'égalité devient $\sin(x) \stackrel{?}{=} \dfrac{2\sin^2(x)}{2\sin(x)}$, puis donne après simplification du membre de droite l'égalité $\sin(x) = \sin(x)$, clairement vraie.

1b Démontrez l'identité pour tout n par récurrence. Faites apparaître clairement l'égalité que vous devez prouver.

Pour démontrer l'identité par récurrence, on la suppose vraie pour n, et on doit la prouver pour $n+1$, ce qui s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sin\big((2i-1)x\big) \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\big((2n+2)x\big)}{2\sin(x)}.$$

Le membre de gauche comporte $n+1$ termes, et peut être décomposé en la somme des n premiers termes et du dernier terme $\sin\big((2n+1)x\big)$. Or, par l'hypothèse de récurrence, on sait que la somme de ces n premiers termes vaut $\frac{1-\cos(2nx)}{2\sin(x)}$. L'égalité à prouver peut donc aussi s'écrire

$$\frac{1-\cos(2nx)}{2\sin(x)} + \sin\big((2n+1)x\big) \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\big((2n+2)x\big)}{2\sin(x)}.$$

Multiplions l'égalité par $2\sin(x)$, ce qui donne

$$1 - \cos(2nx) + 2\sin\big((2n+1)x\big)\sin(x) \stackrel{?}{=} 1 - \cos\big((2n+2)x\big).$$

Utilisons à présent la seconde identité trigonométrique fournie pour transformer le second terme : on a

$$2\sin\big((2n+1)x\big)\sin(x) = \cos(2nx) - \cos\big(((2n+2)x\big)$$

et en remplaçant dans l'égalité à prouver on obtient finalement

$$1 - \cos(2nx) + \cos(2nx) - \cos\big(((2n+2)x\big) \stackrel{?}{=} 1 - \cos\big((2n+2)x\big)$$

qui est bien vraie (les deux termes $\cos(2nx)$ se simplifient).
En combinant avec la vérification du cas de base $n = 1$ l'identité est donc prouvée par récurrence pour tout $n \geq 1$.

Remarque : en réalité l'identité est aussi vraie pour $n = 0$ (la somme à gauche devient vide, donc nulle, et l'expression de droite vaut aussi zéro), et il aurait été possible de prendre cette valeur comme cas de base.

Question 2 [$\sim$**3 pts**].

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, dont le domaine est la droite réelle.

2a Démontrez que la fonction f est strictement croissante partout sur son domaine.

Une condition nécessaire pour être strictement croissante sur un intervalle est que la dérivée y soit strictement positive. Calculons donc cette dérivée $f'(x)$ à l'aide de la formule pour la dérivée d'un quotient

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^{2x} + 1 + 1 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 1 - 1 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Cette dernière expression est strictement positive pour tout x, ce qui prouve la croissance stricte.

2b Démontrez que l'ensemble image de la fonction f est l'intervalle $]-1, 1[$
(cet ensemble image est l'ensemble des valeurs que la fonction f prend sur son domaine).

La fonction est strictement croissante sur toute la droite réelle, donc ses valeurs extrêmes se situent (à la limite) en $-\infty$ et $+\infty$. De plus toutes, les valeurs intermédiaires seront atteintes, puisqu'elle est continue (c'est un quotient de fonctions continues, puisque l'exponentielle est continue). Calculons donc les limites en $-\infty$ et $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{0 - e^{-x}}{0 + e^{-x}} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 0}{e^x + 0} = 1.$$

Comme ces valeurs limites ne sont pas atteintes, l'ensemble image sera bien constitué de l'intervalle allant de -1 à 1 sans ses extrémités, c'est-à-dire $]-1, 1[$.

2c Calculez la fonction g réciproque de f. *Indice* : le domaine de g se déduit de la question **2b**.

On sait que le domaine de la réciproque g est l'ensemble image de la fonction f, c'est donc l'intervalle $]-1, 1[$.
Pour calculer la réciproque de f, écrivons $f(x) = y$ et cherchons à exprimer x en fonction de y :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = y(e^x + e^{-x}).$$

On peut simplifier cette équation en multipliant les deux membres par e^x : cela donne alors $e^{2x} - 1 = y(e^{2x} + 1)$ (puisque $e^x e^x = e^{2x}$ et $e^{-x}e^x = 1$). En posant $t = e^{2x}$ (en notant que cela implique $t > 0$) on obtient $t - 1 = y(t + 1)$ d'où on tire facilement t en fonction de y :

$$t - 1 = y(t + 1) \Leftrightarrow t(1 - y) = y + 1 \Leftrightarrow t = \frac{1 + y}{1 - y}$$

(la division par $1 - y$ ne pose pas de problème : en effet, le domaine implique que $-1 < y < 1$).
Cela nous permet finalement de calculer x en fonction de y, en utilisant que $t = e^{2x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln t$, d'où

$$x = \frac{1}{2} \ln t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right).$$

Ceci établit que la fonction réciproque, définie pour tout $y \in]-1, 1[$, est donnée par $g(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

Réponse finale : la fonction réciproque de f est $g(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Question 3 [$\sim$**2 pts**].

Soit a et b deux paramètres réels, et soit la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{e^{4x} - 1 - bx}{x^2} \text{ pour } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = a.$$

Identifiez pour quelles valeurs des paramètres a et b la fonction f est continue en $x = 0$. **Justifiez** soigneusement.

Au point $x = 0$, pour que la fonction soit continue, il faut par définition que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et donc il faudrait choisir $a = \lim_{x\to 0} f(x)$, en supposant que la limite existe.
Calculons cette limite : il s'agit d'un quotient tendant vers $\frac{1-1-0}{0}$, une indétermination du type $\frac{0}{0}$ qu'on peut tenter de lever via la règle de L'Hospital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x} - 1 - bx}{x^2} \overset{(LH)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4e^{4x} - b}{2x}.$$

A ce stade, le numérateur de la limite tend vers $4 - b$, et le dénominateur vers zéro. Si le numérateur n'est pas nul, cette limite n'existera pas (constante/0) : il est donc nécessaire de poser $b = 4$ pour que la limite ait une chance d'exister. On obtient alors une indétermination $\frac{4-4}{0}$ du type $\frac{0}{0}$ qu'on résout à nouveau avec la règle de L'Hospital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{4e^{4x} - 4}{2x} \overset{(LH)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{16e^{4x}}{2} = \frac{16 \cdot 1}{2} = 8.$$

Au final, seuls les choix des paramètres $a = 8$ et $b = 4$ rendent la fonction continue.

Réponse finale : $\boxed{a = 8}$ et $\boxed{b = 4}$

Question 4 [$\sim$**2.5 pts**].

Pour cet exercice, on suppose que lorsqu'une personne est infectée par un virus, la quantité de virus que son corps renferme croît selon une loi exponentielle, ce qui peut par exemple s'écrire $q(t) = Aa^t$ où t est le temps écoulé depuis l'infection (en réalité, ce n'est vrai que pendant un intervalle de temps limité, et seulement approximativement).
À un certain moment, on teste une personne infectée, et cela permet de déterminer qu'elle contient 10^8 virus.
Puis, un second test effectué exactement 24h plus tard indique que cette personne contient à présent $5 \cdot 10^9$ virus.
En supposant qu'au moment précis de l'infection ce sont 10^2 virus qui ont été initialement absorbés, **calculez** combien de temps s'est écoulé entre l'infection et le premier test (**précisez** les unités de votre réponse).

L'énoncé suggère de poser que l'infection s'est produite au temps $t = 0$, d'où on peut tirer que $Aa^0 = 100 \Rightarrow A = 100$.
Soit T l'instant auquel on effectue le premier test : le délai qu'on nous demande de calculer est donc égal à T.

Au temps T la quantité de virus mesurée est $q(T) = 100a^T = 10^8$, ce qui entraîne $a^T = 10^6$.
Au temps $T + 24$ du second test (on choisit de mesurer le temps en heures), la quantité de virus mesurée est $q(T + 24) = 100a^{T+24} = 5 \cdot 10^9$. En divisant $q(T + 24)$ par $q(T)$ on trouve alors

$$\frac{q(T+24)}{q(T)} = \frac{5 \cdot 10^9}{10^8} = \frac{100a^{T+24}}{100a^T} = \frac{a^{T+24}}{a^T} = \frac{a^T a^{24}}{a^T} = a^{24} \Rightarrow 50 = a^{24}.$$

En passant aux logarithmes, on tire de cette équation $\ln 50 = 24 \ln a \Leftrightarrow \ln a = \frac{\ln 50}{24}$, et de l'équation $a^T = 10^6$ on obtient $T \ln a = \ln(10^6)$, d'où au final

$$T = \frac{\ln(10^6)}{\ln a} = 24\frac{\ln(10^6)}{\ln 50}.$$

Réponse finale : délai entre infection et premier test = $\boxed{24\frac{\ln(10^6)}{\ln 50} \text{ heures } (\approx 3.5 \text{ jours})}$

Question 5 [∼**2 pts**].

Soit $Q = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z}$, où $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$. **Calculez** Q.

Posons $v = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, de sorte que $u = \ln v$. Alors,
$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{v}(3x^2 - 3yz)$. Pareillement,
$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{v}(3y^2 - 3xz)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{1}{v}(3z^2 - 3xy)$. On obtient alors
$Q = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{1}{v}(3x^3 - 3xyz) + \dfrac{1}{v}(3y^3 - 3xyz) + \dfrac{1}{v}(3z^3 - 3xyz) = \dfrac{3v}{v}$
et donc $\boxed{Q = 3}$

Réponse finale : $\boxed{Q = 3}$

Question 6 [∼**3 pts**].

Soit $f(x, y) = (1 + x)^a(1 + y)^b - 1$, où a et b sont des constantes. Montrez que, si x et y sont proches de 0, alors $f(x, y) \approx ax + by$.

Pour ce faire, calculons par la formule de Taylor l'approximation du premier degré de f autour de $(0, 0)$. Nous avons
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = a(1 + x)^{a-1}(1 + y)^b$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = b(1 + x)^a(1 + y)^{b-1}$, et donc
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = a$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = b$. De plus, $f(0, 0) = 0$.
La formule de Taylor s'écrit comme suit :
$f(x, y) \approx f(0, 0) + (x - 0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + (y - 0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, ce qui donne bien $f(x, y) \approx ax + by$.

PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Question 7 [∼**2 pts**].

On considère deux fonctions f et g continues sur $[-1, 3]$ telles que
$\int_{-1}^{3}(f(x)+g(x))\mathrm{d}x = 6$ et $\int_{-1}^{3}(3f(x)+4g(x))\mathrm{d}x = 9$.
Calculez l'intégrale $I = \int_{-1}^{3}(f(x)-g(x))\mathrm{d}x$.

Soit $A = \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ et $B = \int_{-1}^{3} g(x)\mathrm{d}x$. La propriété de linéarité de l'opérateur d'intégration nous permet d'écrire :
$\int_{-1}^{3}(f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3} g(x)\mathrm{d}x = A + B = 6$,
$\int_{-1}^{3}(3f(x)+4g(x))\mathrm{d}x = 3\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x + 4\int_{-1}^{3} g(x)\mathrm{d}x = 3A + 4B = 9$.
Nous obtenons ainsi un système algébrique linéaire de deux équations à deux inconnues A et B. Nous tirons de la première équation que $B = 6 - A$. La seconde équation donne alors $3A + 4(6 - A) = 9$. Nous obtenons donc $A = 15$ et $B = -9$.
Par linéarité de l'intégration, nous avons également $I = \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{3} g(x)\mathrm{d}x = A - B$.

Finalement, nous obtenons $\boxed{I = 24}$

Réponse finale : $\boxed{I = 24}$

Question 8 [∼**3 pts**].

Calculez la solution $y(x)$ de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2xy}{1+x^2}$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Il s'agit d'une équation différentielle à variables séparées : $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$, et donc
$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$. Posons $u = 1 + x^2$, ce qui donne $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ et donc $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u}$.
Nous obtenons alors $\ln(y) = \ln(u) + C$, où C est une constante obtenue à l'aide de la condition initiale. Cette égalité s'écrit également sous la forme suivante :
$e^{\ln(y)} = e^{(\ln(u)+C)}$, et donc $y = ue^C$. Désignons par k la constante e^C.
Nous avons donc $y = k(1 + x^2)$. La condition initiale $y(0) = 1$ donne $k = 1$.

Finalement, $\boxed{y(x) = 1 + x^2}$

Réponse finale : $\boxed{y(x) = 1 + x^2}$