PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Consignes.

- Commencez par **écrire vos prénom et nom en MAJUSCULES ainsi que votre NOMA** dans l'espace prévu en haut du recto de chacune des deux feuilles de l'examen.
- Écrivez vos réponses **à l'intérieur des cadres** prévus. Justifiez lorsque c'est demandé.
- Lorsque c'est demandé **recopiez votre réponse finale dans le cadre séparé** prévu à la fin de la question.
- Écrivez vos réponses proprement au bic bleu ou noir, ou éventuellement au crayon noir bien lisible.
- En cas d'erreur, si vous ne pouvez pas effacer ou barrer proprement, demandez aux surveillants une nouvelle page d'énoncé. Dans ce cas, vous rendez la page erronée.

Question 1 [$\sim$ **2 pts**]. **Démontrez** l'égalité ci-dessous pour tout entier $n \geq 1$.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i)^3 = 2n^2(n+1)^2.$$

On va démontrer cette égalité par récurrence sur n.

L'égalité est vraie pour $n = 1$: en effet, elle affirme dans ce cas que $2^3 = 2 \cdot 1^2 \cdot 2^2$.

Supposons à présent que l'égalité soit déjà démontrée pour n, et cherchons à la démontrer pour $n+1$.
On souhaite donc démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i)^3 \stackrel{?}{=} 2(n+1)^2(n+2)^2.$$

La somme de gauche peut-être décomposée en deux parties : les n premiers termes d'une part (pour l'indice i allant de 1 à n), et le dernier terme $\big(2(n+1)\big)^3$ d'autre part (pour l'indice $i = n+1$). L'égalité à prouver peut donc se réécrire

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(2i)^3\right) + \big(2(n+1)\big)^3 \stackrel{?}{=} 2(n+1)^2(n+2)^2.$$

Utilisons à présent l'hypothèse de récurrence, qui nous fournit précisément la valeur de la somme apparaissant au membre de gauche : $\sum_{i=1}^{n}(2i)^3 = 2n^2(n+1)^2$. En remplaçant on obtient pour le membre gauche $2n^2(n+1)^2 + \big(2(n+1)\big)^3$ qu'on simplifie en suite comme ceci :

$$2n^2(n+1)^2 + \big(2(n+1)\big)^3 = 2n^2(n+1)^2 + 8(n+1)^3 = 2(n+1)^2\big(n^2+4(n+1)\big) = 2(n+1)^2(n+2)^2$$

ce qui est bien la valeur du membre de droite qu'il fallait obtenir. L'égalité est donc prouvée pour tout entier $n \geq 1$.

Question 2 [$\sim$ **0.5 pts**]. Soit f une fonction définie sur le domaine $D = [2;5]$, dont on cherche à identifier les maxima globaux. On sait que la fonction f est dérivable partout, et que sa dérivée vérifie les conditions suivantes :

$f'(x) < 0$ pour tout $x \in [2;3[$ $\qquad f'(3) = f'(4) = 0$ $\qquad f'(x) > 0$ pour tout $x \in]3;4[$ et pour tout $x \in]4;5]$.

Parmi les quatre points du domaine D ci-dessous, **cochez** celui ou ceux où il est possible que la fonction atteigne un maximum global sur l'intervalle $[2;5]$. Il n'est pas demandé de justifier.

- ☒ au point $\mathbf{x = 2}$ il est possible que la fonction f admette un maximum global sur son domaine D
- ☐ au point $\mathbf{x = 3}$ il est possible que la fonction f admette un maximum global sur son domaine D
- ☐ au point $\mathbf{x = 4}$ il est possible que la fonction f admette un maximum global sur son domaine D
- ☒ au point $\mathbf{x = 5}$ il est possible que la fonction f admette un maximum global sur son domaine D

Justification (non demandée) : un maximum global de f sur son domaine D doit être soit un point stationnaire ($x = 3$ ou $x = 4$), soit une extrémité de l'intervalle ($x = 2$ ou $x = 5$). Or la fonction décroît sur $[2;3]$ (donc $x = 3$ n'est pas un maximum global) puis croît sur $[3;5]$ (donc $x = 4$ ne peut pas être non plus un maximum global). Restent $x = 2$ et $x = 5$ qui pourraient être chacun un maximum global (voire les deux), selon la fonction f.

Question 3 [$\sim$ **2 pts**]. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. **Calculez** la fonction réciproque de f.

Pour calculer la réciproque de f, écrivons $f(x) = y$ et cherchons à exprimer x en fonction de y :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y.$$

Posons $t = e^x$ (en notant que cela implique $t > 0$) : cela permet aussi d'écrire $e^{-x} = \frac{1}{t}$, d'où l'équation $t - \frac{1}{t} = 2y$ ou encore, après multiplication par t (qui n'est jamais nul) $t^2 - 1 = 2yt$. Cette équation du second degré en t possède les deux racines suivantes

$$t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Puisqu'il est clair que $\sqrt{y^2 + 1} > y$, la racine $t = y - \sqrt{y^2 + 1}$ est strictement négative, et donc à rejeter puisque $t > 0$. Il reste donc l'unique racine $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$ d'où au final on tire $x = \ln t = \ln\big(y + \sqrt{y^2 + 1}\big)$.

Ceci établit que la fonction réciproque est bien définie pour tout y et vaut $g(y) = \ln\big(y + \sqrt{y^2 + 1}\big)$.

Réponse finale : la fonction réciproque de f est $g(y) = \ln\big(y + \sqrt{y^2 + 1}\big)$

Question 4 [$\sim$ **2 pts**]. Soit a un paramètre réel, et soit la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2)}{x-1} & \text{pour } x \neq 1, \\ a & \text{pour } x = 1. \end{cases}$$

4a Identifiez pour quelle valeur du paramètre a la fonction f est continue en $x = 1$. **Justifiez** soigneusement.

Au point $x = 1$, pour que la fonction soit continue, il faut par définition que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ et donc il faudrait choisir $a = \lim_{x\to 1} f(x)$ (si cette limite existe). Calculons cette limite : il s'agit d'un quotient tendant vers une expression du type $\frac{0}{0}$, une indétermination qu'on peut tenter de lever via la règle de L'Hospital :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2)}{x-1} \stackrel{(LH)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2}2x}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{x} = 2$$

et donc c'est le choix du paramètre $a = 2$ qui rend la fonction continue.

Réponse finale : $a = 2$

4b En fixant la valeur de a identifée au **4a**, **calculez** la dérivée de la fonction en $x = 1$. **Justifiez** soigneusement.

En raison de la forme particulière de la fonction, on doit repasser par la définition de la dérivée : elle vaut $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$. Évaluons les deux termes du numérateur : $f(1+h) = \frac{\ln\left((1+h)^2\right)}{1+h-1} = \frac{2\ln|1+h|}{h}$ et $f(1) = 2$, d'où

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2\ln|1+h|}{h} - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\ln|1+h| - 2h}{h^2} \stackrel{(LH)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{1+h} - 2}{2h} \stackrel{(LH)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{2}{(1+h)^2} - 0}{2} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(1+h)^2} = -1$$

(où on a utilisé deux fois successivement la règle de L'Hospital pour éliminer les indéterminations de type $\frac{0}{0}$).

Réponse finale : $f'(1) = -1$

PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Question 5 [$\sim$ **2 pts**].
Soit une fonction $y(x)$ définie implicitement par la relation $(1-x)y^2+1=y$. A l'aide d'une approximation du premier degré de $y(x)$ au voisinage de $x=1$, **calculez** une valeur approchée de $y(2)$. **Justifiez** votre réponse.

Evaluée en $x=1$, cette relation donne $0\cdot y^2(1)+1=y(1)$, et donc $y(1)=1$.
Par ailleurs, en prenant la dérivée par rapport à x de la relation, on obtient

$$(-1)\cdot y^2+(1-x)\cdot(2y)\cdot y'+0=y',$$

ce qui donne pour $x=1$: $-y^2(1)+0\cdot 2y(1)\cdot y'(1)+0=y'(1)$, et donc $y'(1)=-1$.
Nous pouvons maintenant écrire l'approximation du premier degré de $y(x)$ au voisinage de $x=1$:

$$y(x)\approx y(1)+y'(1)\cdot(x-1)=1-(x-1)=2-x.$$

L'approximation demandée vaut donc $\boxed{y(2)\approx 0}$

Réponse finale : $\boxed{y(2)\approx 0}$

Question 6 [$\sim$ **2 pts**].
A l'aide d'un changement de variable adéquat, **calculez** l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^e 12\frac{(1+4\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x$.
Justifiez votre réponse.

Posons $u=1+4\ln x$. Nous avons $\mathrm{d}u=\dfrac{4}{x}\mathrm{d}x$.
La nouvelle variable d'intégration u varie entre les bornes $u=1+4\ln 1=1$ et $u=1+4\ln e=5$.
Nous obtenons $\boxed{I}=12\cdot\frac{1}{4}\int_1^5 u^2\mathrm{d}u=\boxed{124}$.

Réponse finale : $\boxed{I=124}$

Question 7 [$\sim$ **2 pts**].
Montrez que la droite $x - y = c$ (où c est une constante différente de 0) est une courbe de niveau de la fonction $F(x, y) = \ln(x^2 - 2xy + y^2) + e^{2x} \cdot e^{-2y}$. **Justifiez** votre réponse.

Il faut montrer que la fonction F prend une valeur constante le long de la droite. Cette fonction peut encore s'écrire sous la forme $F(x, y) = \ln(x - y)^2 + e^{2(x-y)}$. Le long de la droite $x - y = c$, elle vaut donc $F(x, y) = \ln c^2 + e^{2c}$ qui est bien une constante.

Question 8 [$\sim$ **2 pts**].
Calculez $x(t)$ solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^{2t} \cdot x^3$ avec la condition initiale $x(0) = 1$.
Justifiez votre réponse.

Il s'agit d'une équation différentielle à variables séparées : $\frac{\mathrm{d}x}{x^3} = e^{2t}\mathrm{d}t$. On calcule $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \int e^{2t}\mathrm{d}t$, ce qui donne $-\frac{1}{2}x^{-2} = \frac{1}{2}e^{2t} + C$. La constante C est obtenue à l'aide de la condition initiale : $-\frac{1}{2} \cdot 1^{-2} = \frac{1}{2}e^0 + C$, soit $C = -1$.
Finalement, $\boxed{x(t) = (2 - e^{2t})^{-\frac{1}{2}}}$

Réponse finale : $\boxed{x(t) = (2 - e^{2t})^{-\frac{1}{2}}}$

Question 9 [$\sim$ **2 pts**].
Soit la fonction $u(x, y) = Ax^a y^b$ (où A, a et b sont des constantes).
Calculez le rapport $R = \frac{uu''_{xy}}{u'_x u'_y}$ quand ce calcul est possible. **Justifiez** votre réponse.

Le calcul des dérivées partielles donne successivement :
$u'_x = Aax^{a-1}y^b = \frac{au}{x}$; $u'_y = \frac{bu}{y}$; $u''_{xy} = \frac{a}{x}u'_y = \frac{abu}{xy}$.

Finalement, $\boxed{R} = \frac{u \cdot \frac{abu}{xy}}{\frac{au}{x} \cdot \frac{bu}{y}} = \boxed{1}$.

Réponse finale : $\boxed{R = 1}$