| **PRÉNOM** et **NOM** : | **NOMA** |
|---|---|

**Consignes**.

- Commencez par **écrire vos prénom et nom en MAJUSCULES ainsi que votre NOMA** dans l'espace prévu en haut du recto de chacune des trois feuilles de l'examen.
- Écrivez vos réponses **à l'intérieur des cadres** prévus. Justifiez lorsque c'est demandé.
- Lorsque c'est demandé **recopiez votre réponse finale dans le cadre séparé** prévu à la fin de la question.
- Écrivez vos réponses proprement au bic bleu ou noir, ou éventuellement au crayon noir bien lisible.
- En cas d'erreur, si vous ne pouvez pas effacer ou barrer proprement, demandez aux surveillants une nouvelle page d'énoncé. Dans ce cas, vous rendez la page erronée.

**Question 1** [∼**2.5 points**].

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à un. On souhaite démontrer par récurrence l'identité suivante

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3). \qquad (1)$$

**1a Démontrez** le cas de base.

Quand $n = 1$ l'égalité à démontrer devient $1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, qui est bien vraie puisque chaque membre est égal à 6.

*Remarque* : l'identité est aussi vraie pour $n = 0$ (la somme à gauche devient vide, donc nulle, et l'expression de droite vaut aussi zéro), et il aurait été possible de prendre cette valeur comme cas de base.

**1b Écrivez** l'égalité qu'il faut à présent prouver dans cette preuve par récurrence.

Pour prouver l'identité (1) par récurrence, on suppose qu'elle est connue pour le cas $n$ et on cherche à la démontrer pour le cas $n+1$, c'est-à-dire à prouver que

$$\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1)(i+2) = \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

**1c Démontrez** l'égalité du point précédent pour terminer la preuve par récurrence de l'identité (1).

Il faut donc prouver le cas $n+1$, qui s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1)(i+2) = \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

La somme du membre de gauche comporte $n+1$ termes, et peut être décomposée en la somme des $n$ premiers termes et du dernier terme $(n+1)(n+2)(n+3)$. Or, par l'hypothèse de récurrence, on sait que la somme de ces $n$ premiers termes vaut $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$. L'égalité à prouver peut donc aussi s'écrire

$$\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3) \stackrel{?}{=} \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

On remarque que chacun des termes (deux au membre de gauche et un au membre de droite) comporte un facteur commun $(n+1)(n+2)(n+3)$ : après simplification par ce facteur on trouve l'égalité équivalente

$$\frac{1}{4}n + 1 \stackrel{?}{=} \frac{1}{4}(n+4)$$

qui est bien vraie, terminant ainsi la preuve.

En combinant avec la vérification du cas de base $n = 1$ l'identité est donc prouvée par récurrence pour tout $n \geq 1$.

**Question 2** [$\sim$**3.5 points**].

Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \ln(1-x) - \ln(2+x)$.

**2a Déterminez** le domaine de la fonction $f$.

Pour qu'un $x$ appartienne au domaine de cette fonction il suffit que l'argument de chaque logarithme soit strictement positif. Pour le premier logarithme cela donne $1-x > 0$ ou encore $x < 1$, tandis que pour le second logarithme il faut $2+x > 0$ ou encore $x > -2$. Le domaine est donc l'intervalle ouvert $]-2;1[$.

**2b Identifiez** les asymptotes éventuelles au graphe de la fonction $f$.

Comme le domaine est borné il ne peut y avoir d'asymptotes horizontales ou obliques. Quant aux asymptotes verticales, elles ne peuvent exister qu'aux bords du domaine, c'est-à-dire en $x = -2$ ou $x = 1$. Calculons la limite de la fonction en ces points (limite à droite pour $x = -2$ et à gauche pour $x = 1$) : on a

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \ln 3 - \ln 0^+ = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \ln 0^+ - \ln 3 = -\infty.$$

La fonction tend vers l'infini aux deux extrémités de son domaine (deux infinis de signes opposés), et il y a donc deux asymptotes verticales en $x = -2$ et $x = 1$.

**2c Identifiez** tous les extrema locaux de la fonction $f$.

On sait que pour qu'un point de l'intervalle ouvert $]-2;1[$ soit un extremum (local), il est nécessaire qu'il s'agisse d'un point critique où la dérivée s'annule. Calculons cette dérivée : on a

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{2+x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{3}{(x-1)(x+2)}.$$

Comme cette expression n'est jamais nulle, il n'existe pas de point critique et donc pas d'extremum local.

**2d Démontrez** que la fonction $f$ admet une fonction réciproque $g$, et **calculez** le domaine de cette réciproque.

La dérivée calculée au point précédent est toujours strictement négative (puisque $x-1 < 0$ et $x+2 > 0$ sur le domaine $]-2;1[$). Par conséquent la fonction $f$ est strictement décroissante, ce qui implique qu'elle possède une fonction réciproque.

Le domaine de la réciproque est l'image de la fonction $f$. Comme on a établi au point 2b l'existence d'une asymptote verticale tendant vers $+\infty$ et d'une seconde asymptote verticale tendant vers $-\infty$, on peut en déduire par le théorème des valeurs intermédiaires (qui s'applique puisque $f$ est continue sur son domaine) que l'image de la fonction $f$ est $\mathbb{R}$ tout entier. Le domaine de la réciproque $g$ est donc aussi $\mathbb{R}$.

**2e Calculez** la fonction $g$ réciproque de $f$.

Pour calculer la réciproque on pose $f(x) = y$ et on résout en $x$ : on trouve en utilisant les propriétés des logarithmes que

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln(1-x) - \ln(2+x) = y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1-x}{2+x}\right) = y \Leftrightarrow \frac{1-x}{2+x} = e^y \Leftrightarrow (1-x) = (2+x)e^y$$

et cette dernière équation s'écrivant aussi $1 - 2e^y = x(1+e^y)$, on en tire finalement la solution en $x$ et l'expression de la fonction réciproque $g$

$$x = \frac{1-2e^y}{1+e^y} \Rightarrow g(y) = \frac{1-2e^y}{1+e^y}$$

(et on observe au passage que la fonction $g$ est bien définie pour tout réel $y \in \mathbb{R}$, puisque $1+e^y$ n'est jamais nul).

| **PRÉNOM** et **NOM** : | **NOMA** |
|---|---|

**Question 3** [$\sim$**2.5 points**].

Pour cet exercice, on suppose que lorsqu'une personne est infectée par un virus, la quantité de virus que son corps renferme croît selon une loi exponentielle, ce qui peut par exemple s'écrire $q(t) = Aa^t$ où $t$ est le temps écoulé depuis l'infection (en réalité, ce n'est vrai que pendant un intervalle de temps limité, et seulement approximativement).
À un certain moment, on teste une personne infectée, et cela permet de déterminer qu'elle contient $2 \cdot 10^9$ virus. Puis, un second test effectué exactement 2 jours plus tard indique que cette personne contient à présent $10^{11}$ virus.

En supposant qu'au moment précis de l'infection ce sont $2 \cdot 10^3$ virus qui ont été initialement absorbés, **calculez** combien de temps s'est écoulé entre l'infection et le premier test (exprimé en jours).

L'énoncé suggère de poser que l'infection s'est produite au temps $t = 0$, d'où on peut tirer que $Aa^0 = 2 \cdot 10^3 \Rightarrow A = 2000$. Soit $T$ l'instant auquel on effectue le premier test : le délai qu'on nous demande de calculer est donc égal à $T$.

Au temps $T$ la quantité de virus mesurée est $q(T) = 2000a^T = 2 \cdot 10^9$, ce qui entraîne $a^T = 10^6$.
Au temps $T + 2$ du second test, la quantité de virus mesurée est $q(T+2) = 100a^{T+2} = 10^{11}$. En divisant $q(T+2)$ par $q(T)$ on trouve alors

$$\frac{q(T+2)}{q(T)} = \frac{10^{11}}{2 \cdot 10^9} = \frac{2000a^{T+2}}{2000a^T} = \frac{a^{T+2}}{a^T} = a^2 \Rightarrow a^2 = 50 \Rightarrow a = \sqrt{50}.$$

L'équation $a^T = 10^6$ devient alors $\sqrt{50}^T = 10^6$ et, pour la résoudre, on prend le logarithme de chaque membre, ce qui donne $T\frac{1}{2}\ln 50 = \ln(10^6)$, d'où $T = \frac{2\ln(10^6)}{\ln 50}$.
On aurait aussi pu prendre le logarithme en base 10, ce qui permet de simplifier un peu la réponse. On a dans ce cas $T\frac{1}{2}\log_{10} 50 = \log_{10}(10^6) = 6$, d'où $T = \frac{12}{\log_{10} 50}$.

**Réponse finale** : temps écoulé entre infection et premier test = $\boxed{\frac{12}{\log_{10} 50} (\approx 7.06) \quad \text{jours}}$

**Question 4** [$\sim$**1.5 points**]

**Calculez** la limite suivante

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}}{x^3} - \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x}.$$

Remplacer $x$ par zéro dans l'expression nous donne un cas d'indétermination de type $\infty - \infty$. Pour lever cette indétermination on applique la règle de L'Hospital et, pour cela, on réécrit l'expression comme un quotient en la réduisant au même dénominateur :

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x^3} \overset{LH}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x} - 2 - 4x}{3x^2}.$$

Comme on obtient encore une indétermination $(0/0)$ on applique à nouveau L'Hospital

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{4e^{2x} - 4}{6x}$$

et puisqu'on tombe encore sur une indétermination $(0/0)$ on réapplique une dernière fois L'Hospital

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{8e^{2x}}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

qui cette fois nous fournit la valeur de la limite, $L = \frac{4}{3}$.

**Réponse finale** : la limite vaut $\boxed{L = \frac{4}{3}}$

**Question 5** [$\sim$**3 points**]

L'équation $x^4 \ln x + y^4 \ln y = 2z^4 \ln z$ définit $z$ comme une fonction de $x$ et $y$. Montrez que, si $x$ et $y$ sont proches de $e$, alors $z(x, y) \approx \frac{1}{2}(x + y)$.

Pour ce faire, obtenons par la formule de Taylor l'approximation du premier degré de $z(x, y)$ autour de $(e, e)$. Nous devons calculer $z$ et ses deux dérivées partielles premières en $(e, e)$. Evaluée en $(x, y) = (e, e)$, l'équation de l'énoncé s'écrit :

$$e^4 \ln e + e^4 \ln e = 2z^4(e, e) \ln z(e, e),$$

et donc $2e^4 = 2z^4(e, e) \ln z(e, e)$. Cette égalité est vérifiée par $z(e, e) = e$.

Dérivons maintenant l'équation de l'énoncé par rapport à $x$ : $4x^3 \ln x + x^3 = (8z^3 \ln z + 2z^3)\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Pour $x = y = z(e, e) = e$, cette relation donne $\dfrac{\partial z}{\partial x}(e, e) = \dfrac{1}{2}$.

On trouve de même en dérivant l'équation de l'énoncé par rapport à $y$ que $\dfrac{\partial z}{\partial y}(e, e) = \dfrac{1}{2}$.

La formule de Taylor s'écrit alors comme suit :

$z(x, y) \approx z(e, e) + (x - e)\dfrac{\partial z}{\partial x}(e, e) + (y - e)\dfrac{\partial z}{\partial y}(e, e)$, ce qui donne bien $z(x, y) \approx \frac{1}{2}(x + y)$.

**Question 6** [$\sim$**2 points**]

Calculez l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{2(1-\sqrt{x})}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

Soit $u = \sqrt{x}$. Alors $u^2 = x$ et $2u\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$.

Tenant compte du fait que $e^{2(1-\sqrt{x})} = e^2 \cdot e^{-2\sqrt{x}}$, nous avons

$$I = e^2 \int_1^{+\infty} \frac{e^{-2u}}{u} 2u\mathrm{d}u = 2e^2 \int_1^{+\infty} e^{-2u}\mathrm{d}u = 2e^2[-\tfrac{1}{2}e^{-2u}]_1^{+\infty} = e^2[0 + e^{-2}].$$

Finalement, nous obtenons $\boxed{I = 1}$

**Réponse finale :** $\boxed{I = 1}$

| **PRÉNOM** et **NOM** : | **NOMA** |
|---|---|

**Question 7** [$\sim$**2 points**]

Soit $Q = x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y}$, où $z = f(x^2y)$. Calculez $Q$.

Posons $u = x^2y$, de sorte que $z = f(u)$. Alors,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyf'(x^2y).$$

Pareillement,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = x^2f'(x^2y).$$

On obtient alors

$$Q = x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x(2xyf'(x^2y)) - 2y(x^2f'(x^2y)),$$

et donc $\boxed{Q = 0}$

**Réponse finale :** $\boxed{Q = 0}$

**Question 8** [∼**3 points**]

**8a** Calculez $x(t)$ solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^{3t} \cdot x^2$ avec la condition initiale $x(0) = 1$.

Il s'agit d'une équation différentielle à variables séparées : $\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = e^{3t}\mathrm{d}t$. On calcule $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int e^{3t}\mathrm{d}t$, ce qui donne $-x^{-1} = \frac{1}{3}e^{3t} + C$. La constante $C$ est obtenue à l'aide de la condition initiale : $-1 = \frac{1}{3}e^0 + C$, soit $C = -\frac{4}{3}$.

Finalement, $\boxed{x(t) = \frac{3}{4 - e^{3t}}}$

**Réponse finale :** $\boxed{x(t) = \frac{3}{4 - e^{3t}}}$

**8b** Esquissez le graphe de $x(t)$ pour $t \geq 0$. Que constatez-vous de particulier ?

Puisque $e^{3t}$ est une fonction croissante, le dénominateur $(4 - e^{3t})$ décroit de la valeur 3 en $t = 0$ à 0 en $t = \ln(4)/3$. La solution $x(t)$ est donc croissante et tend vers l'infini lorsque $t$ tend (par la gauche) vers $\ln(4)/3$. On peut esquisser le graphe de cette fonction comme suit :