PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Consignes.

- Commencez par **écrire vos prénom et nom en MAJUSCULES ainsi que votre NOMA** dans l'espace prévu en haut du recto de chacune des trois feuilles de l'examen.
- Écrivez vos réponses **à l'intérieur des cadres** prévus. Justifiez lorsque c'est demandé.
- Lorsque c'est demandé **recopiez votre réponse finale dans le cadre séparé** prévu à la fin de la question.
- Écrivez vos réponses proprement au bic bleu ou noir, ou éventuellement au crayon noir bien lisible.
- En cas d'erreur, si vous ne pouvez pas effacer ou barrer proprement, demandez aux surveillants une nouvelle page d'énoncé. Dans ce cas, vous rendez la page erronée.

Question 1 [∼**2.5 points**].

Une société fabrique un certain type de vitrage à hautes performances. Elle peut en fabriquer une quantité Q (mesurée en tonnes) comprise entre $Q = 1$ et $Q = 4$ (bornes incluses). Le coût total de fabrication (exprimé en dizaines de milliers d'euros) de cette quantité Q de vitrage est égal à $C(Q) = Q^4 - 11Q^2 + 20Q + 4$.
Quelle quantité faut-il fabriquer pour minimiser le coût unitaire de fabrication (c'est-à-dire le coût total de fabrication divisé par la quantité produite) ?

1a Démontrez sans effectuer aucun calcul que ce problème admet nécessairement un minimum global.

La fonction à minimiser, qui donne le coût unitaire, est $f(Q) = C(Q)/Q = Q^3 - 11Q + 20 + \frac{4}{Q}$. Comme elle est continue sur l'intervalle $[1, 4]$ borné et fermé des quantités permises (car $Q \neq 0$), le théorème des bornes atteintes garantit l'existence d'un minimum global.

1b Vrai ou faux : avant d'effectuer les calculs, on peut être sûr que la dérivée de la fonction exprimant le coût unitaire en fonction de la quantité produite s'annule en ce minimum global. **Justifiez** votre réponse.

Faux : on ne peut pas en être sûr. En effet, on a vu au cours que le minimum peut se trouver à une extrémité de l'intervalle ($Q = 1$ ou $Q = 4$) et que dans ce cas il n'est pas nécessaire que la dérivée de f soit nulle.

1c Calculez la solution optimale du problème. **Justifiez** soigneusement.

En vertu de ce qui précède on sait que le minimum de la fonction f se trouve soit en un point stationnaire (où la dérivée est nulle), soit à une extrémité de l'intervalle $[1, 4]$.

Calculons la dérivée de f : on trouve $f'(Q) = 3Q^2 - 11 - \frac{4}{Q^2}$. Les points stationnaires s'obtiennent en résolvant $f'(Q) = 0$, ce qui peut se faire en posant $t = Q^2$: on trouve alors $3t - 11 - \frac{4}{t} = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 11t - 4 = 0$, une équation du second degré. Ses racines sont $t = \frac{11 \pm 13}{6}$, c'est-à-dire $t = -\frac{1}{3}$ et $t = 4$. La racine négative est à rejeter (puisque $t = Q^2$ est toujours positif ou nul), et au final on trouve $Q^2 = 4$ d'où les points stationnaires $Q = 2$ et $Q = -2$. Seul le point $Q = 2$ est dans l'intervalle qui nous intéresse.

Il reste à comparer les valeurs en $Q = 1$ (borne inférieure), $Q = 2$ (point stationnaire) et $Q = 4$ (borne supérieure) : on trouve respectivement $f(1) = 14$, $f(2) = 8$ et $f(4) = 41$: le minimum global correspond donc à la quantité $Q = 2$.

Remarque : on pouvait aussi étudier la croissance/décroissance de f et en déduire que $Q = 2$ est forcément un minimum global (décroissance sur $[1, 2]$ puis croissance sur $[2, 4]$).

Réponse finale : le coût unitaire est minimal pour la quantité $\boxed{Q = 2}$

Question 2 [$\sim$**2.5 points**].

On rappelle que, par définition, l'exponentielle b^p est strictement positive et vérifie $b^p = e^{p \ln b}$ pour toute base $b > 0$ et tout exposant p. Soit la fonction $f(x) = x^{2x}$, définie pour tout réel x strictement positif.

2a Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f sur son domaine $D = \{x : x > 0\}$.

La fonction étant dérivable sur son domaine, le signe de cette dérivée va nous indiquer les intervalles de croissance et décroissance. La dérivée de f est

$$f'(x) = \left(x^{2x}\right)' = \left(e^{2x \ln x}\right)' = e^{2x \ln x}\left(2x \ln x\right)' = e^{2x \ln x}\left(2 \ln x + 2x\frac{1}{x}\right) = 2x^{2x}\left(\ln x + 1\right).$$

Comme $2x^{2x}$ est strictement positif pour tout x, les racines de f' sont celles de $\ln x + 1$: on résout $\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$, ou encore $x = \frac{1}{e}$. On voit alors facilement que puisque $f'(x) < 0$ pour $x < \frac{1}{e}$ et $f'(x) > 0$ pour $x > \frac{1}{e}$ les intervalles de croissance et décroissance sont ceux repris ci-dessous.

Réponse finale : la fonction croît sur $\boxed{[1/e, +\infty[}$ et décroît sur $\boxed{]0, 1/e]}$.

Soit une nouvelle fonction g définie pour tous les réels selon

$$g(x) = \begin{cases} x^{2x} & \text{pour tout } x > 0 \\ a & \text{pour tout } x \leq 0 \end{cases},$$

où a est un paramètre réel à déterminer.

2b Déterminez pour quelle valeur du paramètre a la fonction g est continue pour tout x. **Justifiez** votre réponse

La fonction est clairement continue pour $x > 0$ (car elle vaut $e^{2x \ln x}$ et l'exponentielle et le logarithme sont continus sur cet intervalle). Elle est aussi continue pour $x < 0$ puisque constante sur cet intervalle. Il reste à examiner le cas $x = 0$, et pour cela il faut calculer la limite $\lim_{x\to 0} g(x)$: si cette limite est égale à $g(0)$ la fonction sera bien continue en $x = 0$, et donc partout.

La limite à gauche $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ est clairement égale à a (puisque $g(x) = a$ pour tout $x < 0$), et donc à $g(0)$. Il faudrait donc que la limite à droite existe et soit aussi égale à $g(0) = a$ pour que la fonction soit continue. Calculons cette limite à droite :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{2x \ln x} = e^{0\times(-\infty)}$$

qui est un cas d'indétermination $0 \times \infty$. On peut le lever en écrivant par exemple

$$2x \ln x = \frac{2 \ln x}{1/x} \text{ d'où par L'Hospital } \lim_{x\to 0^+} \frac{2 \ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2 \ln x}{1/x} \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -2x = 0$$

(une autre technique consisterait à poser $x = e^t$ et prendre la limite en $t \to -\infty$) ce qui permet de conclure que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{2x \ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} 2x \ln x} = e^0 = 1$.

La fonction g sera donc continue lorsque $a = 1$, puisque dans ce cas on a bien $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 1$.

Réponse finale : la fonction est continue pour $\boxed{a = 1}$.

PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Question 3 [$\sim$**3 points**].

L'équation $x^2 \ln x + y^2 \ln y = 2z^2 \ln z$ définit z comme une fonction de x et y.
Montrez que, si x et y sont proches de e, alors $z(x,y) \approx \frac{1}{2}(x+y)$.

Pour ce faire, obtenons par la formule de Taylor l'approximation du premier degré de $z(x,y)$ autour de (e,e). Nous devons calculer z et ses deux dérivées partielles premières en (e,e). Evaluée en $(x,y)=(e,e)$, l'équation de l'énoncé s'écrit :
$e^2 \ln e + e^2 \ln e = 2z^2(e,e) \ln z(e,e)$, et donc $2e^2 = 2z^2(e,e)\ln z(e,e)$. Cette égalité est vérifiée par $z(e,e)=e$. Dérivons maintenant l'équation de l'énoncé par rapport à x :
$2x \ln x + x = (4z \ln z + 2z)\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Pour $x = y = z(e,e) = e$, cette relation donne $\dfrac{\partial z}{\partial x}(e,e) = \dfrac{1}{2}$. On trouve de même en dérivant l'équation de l'énoncé par rapport à y que $\dfrac{\partial z}{\partial y}(e,e) = \dfrac{1}{2}$.
La formule de Taylor s'écrit alors comme suit :
$z(x,y) \approx z(e,e) + (x-e)\dfrac{\partial z}{\partial x}(e,e) + (y-e)\dfrac{\partial z}{\partial y}(e,e)$, ce qui donne bien $z(x,y) \approx \frac{1}{2}(x+y)$.

Question 4 [$\sim$**2 points**].

A l'aide d'un changement de variable adéquat, calculez l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^e 4\frac{(1+\ln x)^3}{x}\mathrm{d}x$.

Posons $u = 1 + \ln x$. Nous avons $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.
La nouvelle variable d'intégration u varie entre les bornes $u = 1 + \ln 1 = 1$ et $u = 1 + \ln e = 2$.
Nous obtenons $\boxed{I} = 4\int_1^2 u^3 \mathrm{d}u = 2^4 - 1^4 = \boxed{15}$

Réponse finale : $\boxed{I = 15}$

Question 5 [$\sim$**3 points**].

Soit $Q = x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y}$, où $z = f(x^a y)$. Calculez la constante a telle que $Q = 0$.

Posons $u = x^a y$, de sorte que $z = f(u)$. Alors,
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x} = ax^{a-1}yf'(x^a y)$. Pareillement,
$\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^a f'(x^a y)$. On obtient alors
$Q = x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x(ax^{a-1}yf'(x^a y)) - 2y(x^a f'(x^a y)) = (a-2)x^a y f'(x^a y)$.
La quantité Q est donc identiquement nulle lorsque $\boxed{a = 2}$.

Réponse finale : $\boxed{a = 2}$

Question 6 [$\sim$**2 points**].

Calculez $x(t)$ solution de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^{3t} \cdot x^2$ avec la condition initiale $x(0) = 1$.

Il s'agit d'une équation différentielle à variables séparées : $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} = e^{3t}\mathrm{d}t$. On calcule $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int e^{3t}\mathrm{d}t$, ce qui donne $-x^{-1} = \frac{1}{3}e^{3t} + C$. La constante C est obtenue à l'aide de la condition initiale : $-1 = \frac{1}{3}e^0 + C$, soit $C = -\frac{4}{3}$.
Finalement, $\boxed{x(t) = \dfrac{3}{4 - e^{3t}}}$

Réponse finale : $\boxed{x(t) = \dfrac{3}{4 - e^{3t}}}$