连续控制系统：连续的被控对象（传感+执行）+连续的控制器
采样系统：连续的被控对象+离散的控制器+采样器+保持器
离散系统：软件实现，可有效抑制噪声，抗干扰强，适于网络化，历史数据存储方便，可分时控制若干系统提高设备使用率，采样使大延迟系统稳定。离散控制器设计时需考虑量化误差和采样周期影响。对小规模对象成本高，对工作环境要求高，计算机能处理离散时间信号，适合进行复杂运算。

连续系统：系统中所有环节的信号均为时间的连续信号。
离散系统：系统中含采样开关或数字处理环节，存在离散信号（分为采样系统和数字系统）。采样：连续→离散，用开关符号表示。
理想采样：采样开关闭合时间满足 $\nu \ll T_s$，$\nu \ll T|_{f(t)}$。$f^*(t)=f(t)\delta_T(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)$，单位脉冲序列傅里叶展开：$\delta_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\omega_s t}$、
$f^*(t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(j(\omega-\omega_s))$。频谱互不干涉条件：$\omega_s>2\omega_m$（采样定理）。
实际应用中通常采用保持器作为低通滤波保证 f^* 复现为 f。$G_h(s)=\frac{F_h(s)}{F^*(s)}$。
$|G_h(j\omega)|=1,|\omega|<\omega_s/2$ or $0,|\omega|>\omega_s/2$。保持器可以保存采样信号，作低通滤波器

$\boxed{z变换}$ $z=e^{sT}=e^{\sigma T}e^{j\omega T}$，$T=\frac{2\pi}{\omega_s}$。
$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{st}dt$
$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)z^{-k}$

ZOH $G_h(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$。
$G(z)=(1-z^{-1})Z[G_1(s)/s]$。

定义法、部分分式法。

留数法：$F(z)=\hat{F}(z)+\beta$。
$\hat{F}(z)=\sum Res[F(p_i)/(1-e^{-(s-p_i)T}]=\sum Res(F(p_i)/(1-e^{p_iT}z^{-1})]$
$\beta=\lim_{s\to\infty}sF(s)-\lim_{z\to\infty}\hat{F}(z)$。

一阶极点：$Res=\lim_{s\to p_i}[s-p_i]F(s)\frac{z}{z-e^{sT}}$
q阶：$Res=\frac{1}{(q-1)!}\lim_{s\to p_i}\frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}}[(s-p_i)^qF(s)\frac{z}{z-e^{sT}}]$。

$\boxed{z变换性质}$

1. 移位：$Z[y(t-kT)]=z^{-k}Y(z)$　$Z[x(k+1)]=zX(z)-zx(0)$。
$Z[y(t+kT)]=z^kY(z)-z^ky(0)-z^{k-1}y(T)-\cdots-zy[(k-1)T]$
2. 初值：$\lim_{k\to 0}f(kT)=f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)$。
3. 终值：极点在单位圆内。$f(\infty)=\lim_{k\to\infty}f(kT)=\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})F(z)]$。
4. $Z[e^{\mp at}x(t)]=X[e^{\pm at}z]$。
5. $Z[tx(t)]=-Tz\frac{dX(z)}{dz}$。$Z[kx(k)]=-z\frac{dX(z)}{dz}$。
6. $Z[x_1(t)*x_2(t)]=X_1(z)X_2(z)$。

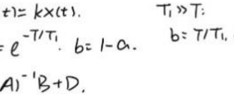
$\boxed{z反变换}$ 部分分式法：对 $\frac{X(z)}{z}$ 进行拆分。
留数法：$y(kT)=\sum Res[Y(z)z^{k-1}]_{z=p_i}$。

$\boxed{观察法求脉冲传递函数}$ $G_0(z)$ 有负反馈加负号。
若前向通道（在环内的部分）有一个 _/_ 存在。
$G_0(z)$ 为开环传函，沿任意一处断开走一圈；
$Gf(z)$ 是包括输入的前向通道的z变换。
$$Y(z)=\frac{Gf(z)}{1-G_0(z)}$$

给定输入的系统响应 $x(t)=e^{At}x(0)$
$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

拉氏变换 $Y(s)$	采样函数 $y(kT)$	Z变换 $Y(z)$
1	$\delta(kT)$	1
e^{-nTs}	$\delta[(k-n)T]$	z^{-n}
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(kT)^2$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{z(e^{-aT}-e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-(1+akT)e^{-akT}$	$\frac{z}{z-1}-\frac{z^2-z(1-aT)e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin akT$	$\frac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos akT$	$\frac{z^2-z\cos aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh akT$	$\frac{z\sinh aT}{z^2-2z\cosh aT+1}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh akT$	$\frac{z^2-z\cosh aT}{z^2-2z\cosh aT+1}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT}\cos bkT$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos bT}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$
$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT}\sin bkT$	$\frac{ze^{-aT}\sin bT}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$

$\boxed{离散系统状态空间模型}$ 1. 差分方程求解：z变换

2. 微分方程离散化：$T_1\dot{y}(t)+y(t)=kx(t)$。　$T_1\gg T$：
$y[(k+1)T]-ay(kT)=kbx(kT)$。$a=e^{-T/T_1}$。$b=1-a$。　$b=T/T_1$，$a=1-b$。
3. 状态方程→G：$G(z)=C(zI-A)^{-1}B+D$。
$X(z)=(zI-A)^{-1}zx(0)+(zI-A)^{-1}BU(z)$。
4. G→状态方程：
① 能控：$A_c=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\\ -a_0 & \cdots & & -a_{n-1}\end{pmatrix}$。$b_c=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ $C_c=(\beta_0\cdots\beta_{n-1})$。$d_c=b_n$
$\beta_i=b_i-a_ib_n$。
② 观：$A_o=A_c^T$ · $b_o=C_c^T$ · $C_o=b_c^T$ · $d_o=d_c$。
③ 正则：$A=diag(\lambda_1,\lambda_2\cdots)$。$b=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$。$C=(C_1\cdots C_n)$。$d=b_n$。
$G(s)=b_n+\sum\frac{C_i}{s-\lambda_i}$。
④ 串联分解：$D(z)=\frac{b}{z+a}$。


5. 连续系统状态方程离散化：
$G(T)=e^{AT}=\mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1}$。$H(T)=\int_0^T e^{A\tau}Bd\tau$
$\begin{cases}x(k+1)=G(T)x(k)+H(T)u(k)\\ y(k)=Cx(k)+Du(k)\end{cases}$。不一定能保持连续系统的能控能观性。

$\boxed{离散系统稳定性判断}$ 二阶系统稳定 ⟺ 特征方程所有系数同号。

1. 求稳态误差：误差脉冲传函 $\Phi_e(z)=\frac{1}{1+G(z)}$
$e(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)E(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\Phi_e(z)X(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{R(z)}{1+G(z)}$
$K_p=\lim_{z\to 1}G(z)$。$K_v=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)$。$K_a=\lim_{z\to 1}(z-1)^2G(z)$。

0型	$e^*(\infty)=\frac{R_0}{1+K_p}=\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
1型	0	$T\frac{R_1}{K_v}=\frac{1}{K_v}$	∞
2型	0	0	$T^2\frac{R_2}{K_a}=\frac{1}{K_a}$

2. 稳定性判断：① 劳斯判据：$z=\frac{w+1}{w-1}$ 代入 $1+G(z)=0$。
② 根轨迹法：是否在单位圆以内。
└→ 右边零极点之和为奇。
渐近线 $\sigma=(\sum p-\sum z)/(n-m)$。
分离点 $\sum\frac{1}{d-p_i}=\sum\frac{1}{d-z_i}$。
③ 差分方程特征根的模 $|\alpha_i|<1$。
④ 特征方程 $1+GH(z)=0$ 所有特征根在单位圆内。

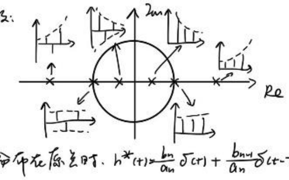
⑤ 朱利判据：$D(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n=0$，$a_n>0$。

	z^0	z^1	z^2	$\cdots$	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2		a_{n-1}	a_n
2	(1倒过来)					
3	b_0	b_1	b_2		b_{n-1}	
4	(3…)					
⋮						
2n-5	p_0	p_1	p_2	p_3		
2n-4	p_3	p_2	p_1	p_0		
2n-3	q_1	q_2	q_3			

$b_k=\begin{vmatrix}a_0 & a_{n-k}\\ a_n & a_k\end{vmatrix}$。$C_k=\begin{vmatrix}b_0 & b_{n-k-1}\\ b_{n-1} & b_k\end{vmatrix}$
$q_0=\begin{vmatrix}p_0 & p_3\\ p_3 & p_0\end{vmatrix}$，$q_1=\begin{vmatrix}p_0 & p_2\\ p_3 & p_1\end{vmatrix}$

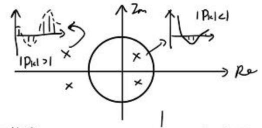
条件：$D(z)$ 的根在单位圆内 ⟺ $D(1)>0$，$D(-1)>0$（n偶）or <0（n奇）。
且 $|a_0|<a_n$。$|b_0|>|b_{n-1}|\cdots|q_0|>|q_2|$。
二阶sys：$|D(0)|<1$。$D(1)>0$。$D(-1)>0$。
△零阶保持：引入滞后角，影响稳定性。
△采样周期：T一定，加大开环增益会使离散系统稳定性变差。
K一定，T↑，丢失的信息↑。

3. 瞬态响应：$C(z)=G(z)R(z)=\frac{C(1)}{R(1)}\frac{z}{z-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{C_kz}{z-p_k}$。
$C_k=\lim_{z\to p_k}k\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{j=1,j\ne k}^{n}(z-p_j)}\cdot\frac{1}{z-1}$。$C_k(nT)=C_kp_k^n$。
p_k 为负实根：$C_k(nT)=C_kp_k^n$。
闭环零极点与瞬态响应的关系：$G_B(z)=\frac{K\prod(z-z_i)}{\prod(z-p_k)}$。

若 p_k 全为实数：


闭环极点应在右半单位圆中，尽量靠近原点。

所有极点分布在原点时，$h^*(t)=\frac{b_n}{a_n}\delta(t)+\frac{b_{n-1}}{a_n}\delta(t-T)+\cdots+\frac{b_0}{a_0}\delta(t-nT)$。
单位脉冲作用下，系统瞬态响应能在nT内结束。

若 p_k 有复数：$p_k=|p_k|e^{j\theta_k}$。$C_k=|C_k|e^{j\phi_k}$。振荡周期 $T_d=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi T}{\theta_k}$。


$C_{k,k+1}(nT)=2|C_k||p_k|^n\cos(n\theta_k+\phi_k)$
$n=\frac{2\pi}{\theta_k}$ 为一个振荡周期中的脉冲数。

采样器：$T_p\downarrow$，$T_s\downarrow$，$\sigma\uparrow$。保持器：T_p，T_s，$\sigma\uparrow$。相角滞后稳定性降低。
ZOH使系统 T_p 和 T_s↑，σ 和振荡次数↑，因为ZOH的相角滞后降低了系统的稳定程度。

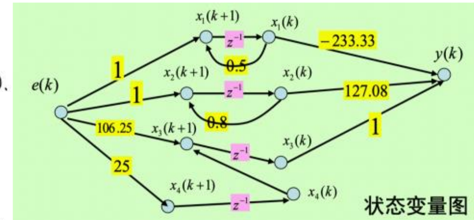
4. 模拟化设计方法：$e^{-Ts}\approx-(s-\frac{2}{T})/(s+\frac{2}{T})$。⇐ Pade近似。
则ZOH近似表示为 $H_0(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}=\frac{2T}{Ts+2}$
① 后向差分法：PID增量公式
$\Delta u(k)=K_c\{e(k)-e(k-1)+\frac{T}{T_i}e(k)+\frac{T_d}{T}[e(k)-2e(k-1)+e(k-2)]\}$
② 极点零点匹配映射法：
$G(s)=k\frac{s+a}{s+b}\to D(z)=C\frac{z-A}{z-B}$。$A=e^{-aT}$。$B=e^{-bT}$。$C\frac{1-A}{1-B}=k\frac{a}{b}$。
③ Tustin法：将 $s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$ 代入。且瞬态响应和频率响应有畸变。

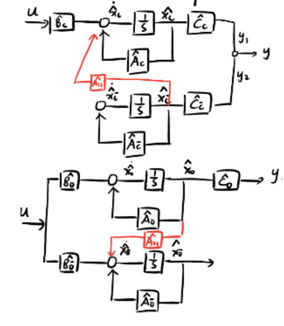
5. 数字化设计方法：
$\Phi(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}$。　$\Phi_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+D(z)G(z)}=1-\Phi(z)$。
$D(z)=\frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$。
6. 无稳态误差的最小拍系统设计（m拍）：→ $Y(z)=\Phi(z)X(z)$。
$X(z)=\frac{\sim}{(1-z^{-1})^m}$。$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^m$。$\Phi(z)=1-\Phi_e(z)$。$D(z)=\frac{\Phi(z)}{HG_0(z)\Phi_e(z)}$
实际上 $\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^mF(z)=(1-z^{-1})^m(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots)$
如果 $F(z)=1$ 无解，则用 $\Phi(z)=1-\Phi_e(z)$ 待定系数求解。
无波纹：$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^m(1+\alpha_1z^{-1})$。$\Phi(z)=z^{-1}\underbrace{(a+bz^{-1})}_{G(z)中类似a+bz^{-1}的项}(\beta_0+\beta_1z^{-1})$
$\Phi_e(z)+\Phi(z)=1$。$D(z)=\frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$。

$\boxed{能控能观判别}$
$Q_c=(b\ \ Ab\ \ A^2b)$　$Q_o=\begin{pmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{pmatrix}$
(A,B,C,D) 能控 ⟺ (A^T,B^T,C^T,D^T) 能观。
PBH判据：能控：$\forall i$，$rank(\lambda_iI-A\ \ B)=n$ or $\forall s$，$rank(sI-A\ \ B)=n$。
能观：$\forall i$，$rank\begin{pmatrix}C\\ \lambda_iI-A\end{pmatrix}=n$ or $\forall s$，$rank\begin{pmatrix}C\\ sI-A\end{pmatrix}=n$。

PBH秩向量判据：控：对A的∀特征值 λ_i，只有 $z=0$ 满足 $z^TA=\lambda z^T$，$z^TB=0$。
观：…… …… $Az=\lambda z$，$Cz=0$。
若A为对角标准型，则能控：B不含全0行。能观：C不含全0列。
$G_{xu}(s)=(sI-A)^{-1}B$ or $G(s)$ 无零极点相消现象，则完全能控。

A阵为n阶友矩阵（A_c 形式），且有互异特征根 $\lambda_1,\cdots\lambda_n$，用T可以把A化为对角规范型。
$T=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & & \lambda_n\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}$（方阵）



能控(观)子空间分解


化为标准型

能控标准型：$T_c = Q_c \bar{Q}_c^{-1}$，Q_c 是 (A,b) 能控矩阵。

$A_c = T_c^{-1} A T_c$，$b_c = T_c^{-1} b$，$c_c = cT_c$，$\bar{Q}_c$ 是标准型 (A_c, b_c) 的能控矩阵

能观标准型：$T_o^{-1} = \bar{Q}_o^{-1} Q_o$，$A_o = T_o^{-1} A T_o$，$b_o = T_o^{-1} b$，$C_o = cT_o$

$$\bar{Q}_c^{-1} = \bar{Q}_o^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & 1 \\ \alpha_2 & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

能控能观子空间分解

1. 能控分状态 $\hat{x}_c$，不能控分状态 $\hat{x}_{\bar{c}}$。

非奇异线性变换 T：对能控取 p 个线性无关列凑方阵；能观取行 (T^{-1})。

$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \hat{A}_c & \hat{A}_{c\bar{c}} \\ 0 & \hat{A}_{\bar{c}} \end{pmatrix}$，$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} \hat{B}_c \\ 0 \end{pmatrix}$，$\hat{C} = cT = (\hat{C}_c \ \ \hat{C}_{\bar{c}})$

分解后的状态空间模型：$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$

能控子系统：$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_c = \hat{A}_c \hat{x}_c + \hat{A}_{c\bar{c}} \hat{x}_{\bar{c}} + \hat{B}_c u \\ y_c = \hat{C}_c \hat{x}_c \end{cases}$　完全不能控系统：$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{\bar{c}} = \hat{A}_{\bar{c}} \hat{x}_{\bar{c}} \\ y_{\bar{c}} = \hat{C}_{\bar{c}} \hat{x}_{\bar{c}} \end{cases}$

2. 能观：$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \hat{A}_o & 0 \\ \hat{A}_{o\bar{o}} & \hat{A}_{\bar{o}} \end{pmatrix}$，$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} \hat{B}_o \\ \hat{B}_{\bar{o}} \end{pmatrix}$，$\hat{C} = cT = (\hat{C}_o \ \ 0)$

能观子系统：$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_o = \hat{A}_o \hat{x}_o + \hat{B}_o u \\ y_o = \hat{C}_o \hat{x}_o = y \end{cases}$　完全不能观：$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{\bar{o}} = \hat{A}_{o\bar{o}} \hat{x}_o + \hat{A}_{\bar{o}} \hat{x}_{\bar{o}} + \hat{B}_{\bar{o}} u \\ y_{\bar{o}} = 0 \end{cases}$

不先判断能控能观

状态反馈控制

令 $u(t) = r(t) - Kx(t)$，则状态反馈闭环系统 $\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A-BK)x(t) + Br(t) \\ y = (C-DK)x(t) + Dr(t) \end{cases}$

$A-BK$ 称闭环状态矩阵，$\Delta_u(\lambda) = |\lambda I - (A-BK)| = 0$。

$\Sigma_u = (A-BK, B, C)$，不会改变能控性，可能改变能观性。

$\Sigma_{cl} = (A-BFC, B, C)$，采用输出反馈控制式，不改变能控能观性。

状态反馈极点配置

1. 设 $K = (k_1, k_2 \cdots)$，让 $\Delta^*(s) = \Delta_u(s)$。

2. 能控标准型设计方法：系统特征多项式 $\Delta(s)$，求 $\alpha_0, \alpha_1 \cdots$　$\Delta^*(s)$，求 $\alpha_0^*, \alpha_1^* \cdots$

用 $T_c = Q_c \bar{Q}_c^{-1}$ 求能控标准型。

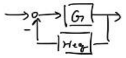
$K_c = (\alpha_0^* - \alpha_0 \ \ \alpha_1^* - \alpha_1 \cdots)$，$K = K_c T_c^{-1}$，$\dot{x} = (A-bK)x + br$。

3. 状态反馈镇定：(A,B) 镇定 $\Leftrightarrow$ (A,B) 的完全不能控子系统稳定。

i.e. 把不能控子系统的极点加到闭环极点中。

状态反馈的极性质（相变量）

1. $H_{eq}(s)$ 有 $n-1$ 个零点，零点由 K_i 确定；2. $G(s)H_{eq}(s)$ 与 $G(s)$ 有相同的 n 个极点。



3. $G(s)H_{eq}(s)$ 根轨迹有 $n-1$ 条分支，一条根轨迹终止于负实轴。若 $H_{eq}(s)$ 所有极点在 s 平面左半平面，可选较大 $K_{\bar{c}}$ 值保证系统稳定性。

4. 配置 $G(s)H_{eq}(s)$ 零点位置来配置闭环极点，状态反馈不改变系统零点。

5. $\frac{Y(s)}{R(s)}$ 极点数－零点数 ＝ $G(s)$ 极点数－零点数。

要达到对增益的不灵敏，期望的闭环系统中必须有 β 个主导闭环极点位于 $H_{eq}(s)$ 的 β 个零点的附近，其余的 $(n-\beta)$ 个极点是非主导的。

状态观测器

1. 动态方程：$\dot{\hat{x}}(t) = (A-HC)\hat{x}(t) + (B-HD)u(t) + Hy(t)$。

误差：$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$，$\dot{\tilde{x}}(t) = (A-HC)\tilde{x}(t)$。

① 令 $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$，$\Delta_o(s) = |sI - (A-hc)|$　$\Delta_o(s) = \Delta^*(s)$。

② 采用能观标准型：系统特征多项式 $\Delta(s)$，求 $\alpha_0, \alpha_1 \cdots$

用 $T_o^{-1} = \bar{Q}_o^{-1} Q_o$ 求能观标准型。　$\Delta^*(s)$，求 $\alpha_0^*, \alpha_1^* \cdots$

$H_o = \begin{pmatrix} \alpha_0^* - \alpha_0 \\ \alpha_1^* - \alpha_1 \end{pmatrix}$，$h = T_o H_o$，$\dot{\hat{x}}(t) = (A-hc)\hat{x}(t) + (b-hd)u(t) + hy(t)$。

2. 分离定理：当且仅当 (A,B,C,D) 能控能观时，状态反馈系统和状态观测器的设计可以独立运行，即系统极点可以由 K 和 H 分别配置到任意位置

方法：单独计算 K 和 H。

$2n$ 维 $\Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BK \\ HC & A-BK-HC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} r(t) \\ y(t) = (C \ \ -DK) \begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{pmatrix} + Dr(t) \end{cases}$

3. 降维状态观测器：C 行满秩，构造 Q 使 $\begin{pmatrix} Q \\ C \end{pmatrix}$ 非奇异，$T = \begin{pmatrix} Q \\ C \end{pmatrix}^{-1}$

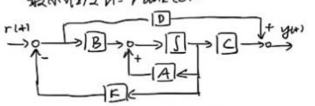
对系统作状态变换 $x(t) = T\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$：

变换后的系统为 $\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t)$。

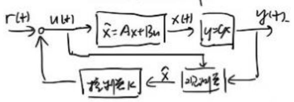
$\Delta_{c1} = |sI - (A_{11} - hA_{21})| = \Delta^*$。$\Rightarrow$ 计算 h。

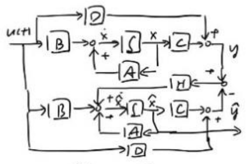
$$\begin{cases} \dot{\hat{w}}(t) = (A_{11} - HA_{21})\hat{w}(t) + (A_{12} - HA_{22} + A_{11}H - HA_{21}H)y(t) + (B_1 - A_{12}D - HB_2 - HA_{22}D - A_{11}HD + HA_{21}HD)u(t) \\ \hat{x}(t) = T\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\hat{w}(t) + T\begin{bmatrix} H \\ I \end{bmatrix}y(t) - T\begin{bmatrix} HD \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \end{cases}$$

最小维度 $n - \mathrm{rank}(C)$。



状态反馈控制。

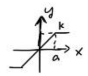




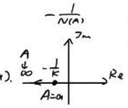
状态观测器。

描述函数

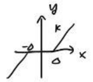
饱和特性



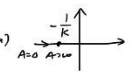
$N(A) = \frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{a}{A} + \frac{a}{A}\sqrt{\left(1-\frac{a}{A}\right)^2}\right] \ (A \geq a)$



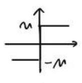
死区特性



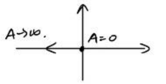
$N(A) = \frac{2k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\Delta}{A} - \frac{\Delta}{A}\sqrt{\left(1-\frac{\Delta}{A}\right)^2}\right] \ (A \geq a)$



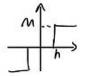
理想继电



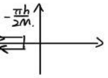
$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$



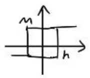
死区继电



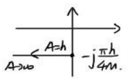
$N(A) = \frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{h}{A}\right)^2} \ (A \geq h)$



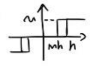
滞环继电



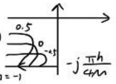
$N(A) = \frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{h}{A}\right)^2} - j\frac{4Mh}{\pi A^2} \ (A \geq h)$



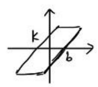
死区＋滞环继电



$N(A) = \frac{2M}{\pi A}\left[\sqrt{1-\frac{mh^2}{A}} + \sqrt{1-\left(\frac{h}{A}\right)^2}\right] + j\frac{2Mh}{\pi A^2}(m-1) \ (A \geq h)$



间隙特性

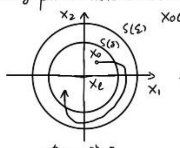


$N(A) = \frac{k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1-\frac{2b}{A}\right) + 2\left(1-\frac{2b}{A}\right)\sqrt{\frac{b}{A}\left(1-\frac{b}{A}\right)}\right] + j\frac{4kb}{\pi A}\left(\frac{b}{A}-1\right) \ (A \geq b)$

Lyapunov 稳定性分析

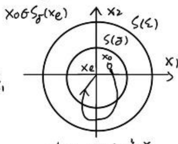
自治系统 $\dot{x}(t) = f(x(t))$，$f(x_e) = 0$，x_e 平衡状态。

1. Lyapunov 稳定性定义：对 ∀ 小的 $\varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0 \cdots$



在 x_e 稳定。

$x_0 \in S_\delta(x_e)$



在 x_e 渐近稳定。

对任意初始状态，都有 $\|x(t;x_0) - x_e\| \to 0$，全局稳定。

一致稳定：不管选哪个 x_0，轨迹都在同一个 $S(\varepsilon)$ 内。

Lyapunov 间接判别法

线性：$\dot{x} = Ax$ 渐近稳定：A 特征值全位于左半平面。

非线性：令 $z = x - x_e$，近似于 $\dot{z} = Az$，$A = \frac{\partial}{\partial x^T} f(x) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \cdots & \partial f_n/\partial x_n \end{bmatrix}$

描述函数判断稳定性

$G(j\omega)$ 曲线不能包含 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线。

自激振荡：$G(j\omega)$ 曲线与 $-\frac{1}{N(A)}$ 交点，i.e. $G(j\omega)N(A) = -1 \Rightarrow |\ | = 1$，$\angle = -\pi$。

稳定区　$G(j\omega)$　不稳定区。$-\frac{1}{N(A)}$ 前往不稳定区：不稳定极限环；前往稳定区：稳定…

Lyapunov 直接判别法

1. 正定性：$V(0) = 0$，其他 x 处 $V(x) > 0$。　2. 负定性：$-V(x)$ 正定。

3. 正半定：$V(0) = 0$，其他 x 处 $V(x) \geq 0$。　4. 负半定：$-V(x)$ 正半定。　5. 不定性。

二次型：记 $V(x) = x^T P x$，其中 P 主对角对称。

Sylvester 准则：① 正定：$p_{11} > 0$，$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0 \cdots$

② 负定：P 的各阶顺序主子行列式负正相间。

判断稳定性：1. 若 $V(x)$ 正定，$\dot{V}(x)$ 负定，则系统在原点渐近稳定。

2. 满足以上条件以外，$\|x\| \to \infty$ 时，$V(x) \to \infty$，则在原点全局渐近稳定。

$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \cdots$，$V(x)$ 自己取。$x_e = 0$。

3. $V(x)$ 正定，$\dot{V}(x)$ 负半定，$\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$，此外对于任意非零初始状态 x_0，其 $\frac{dV[x(t;x_0)]}{dt}$ 不恒等于0，则在原点全局渐近稳定。

4. $V(x)$ 正定，$\dot{V}(x)$ 负半定，系统在原点 Lyapunov 意义下稳定。

5. $V(x)$ 正定，$\dot{V}(x)$ 正定，系统在原点不稳定。

对 $x_e = -a \neq 0$，令 $z = x + a$，代入 $\dot{x} = f(x)$。

线性连续定常系统 Lyapunov 稳定性分析

1. 线性系统 (A,B,C,D) 内稳定 $\Leftrightarrow$ $\dot{x}(t) = Ax(t)$ 原点处全局渐近稳定

2. ∀ 正定实对称矩阵 Q，∃ 正定对称矩阵 P 满足 $A^TP + PA = -Q$，则 $V(x) = x^TPx$ 是一个 Lyapunov 函数（i.e. 线性定常系统渐近稳定）。

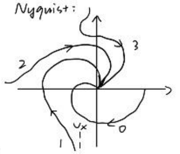
① 取 $Q = I$。② 计算 P（$p_{11}, p_{12} \cdots$ 待定系数）。③ 求 P，判断是否正定

正定 $\Leftrightarrow$ 各阶主子行列式 > 0。

3. 若 $\dot{V}(x) = -x^TQx$ 沿任一条轨迹不恒等于0，Q 可取正半定阵。

4. 离散（$x(k+1) = Gx(k)$）：$G^TPG - P + Q = 0$。

Nyquist：



$V_x = \lim_{\omega \to 0} \mathrm{Re}[G(j\omega)H(j\omega)]$

$= -K_1(T_q + T_c + T_m)$。

$Z_R = P_R - N$。P_R：开环不稳定极点数。

N：G_H 绕 $(-1, j0)$ 逆时针圈数。

$Z_R = 0$ 稳定。

阻尼振荡频率

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

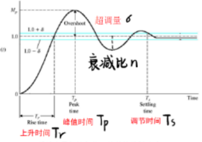
$\sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

$T_r = \frac{\pi - \phi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

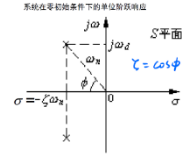
$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

$T_s = \begin{cases} \frac{3}{\zeta\omega_n} & 5\% \\ \frac{4}{\zeta\omega_n} & 2\% \end{cases}$

$n = e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$



系统在零初始条件下的单位阶跃响应



等 ζ：$z = e^{-\omega T \cot\phi} \angle \omega T$　螺线

1) **开环幅相曲线的起点**，取决于比例环节K和系统积分或微分环节的个数m（系统的型别），因为其他环节当$\omega=0$时为1。

$m<0$，起点为原点；

$m=0$，起点为实轴上的点K处（K为系统开环增益，K有正负之分）；

$m>0$，$K>0$时，起点为$m\times(-90°)$的无穷远处，$K<0$时，起点为$m\times(-90°)-180°$的无穷远处。

令虚部为零，可求出频率特性与实轴的交点；令实部为零，可求出频率特性与虚轴的交点。

2) **开环幅相曲线的终点**，取决于开环传递函数分子、分母多项式中最小相位环节和非最小相位环节的阶次和。

设系统开环传递函数分子、分母多项式的阶次分别为w和n，记除K外，分子多项式中最小相位环节的阶次和为w_1，非最小相位环节的阶次和为w_2，分母多项式中最小相位环节的阶次和为n_1，非最小相位环节的阶次和为n_2，则有

$$w = w_1 + w_2 \qquad \phi(\infty) = \begin{cases} [(w_1 - w_2) - (n_1 - n_2)] \times 90° & K > 0 \\ [(w_1 - w_2) - (n_1 - n_2)] \times 90° - 180° & K < 0 \end{cases}$$
$$n = n_1 + n_2$$

特别地，当开环系统为最小相位系统时，

若　$n = w$，　$G(j\infty)H(j\infty) = K^*$

　　$n > w$，　$G(j\infty)H(j\infty) = 0\angle(n-w)\times(-90°)$

其中K^*为系统开环根轨迹增益

3) **若开环系统存在特殊振荡环节**，重数 l 为正整数，即开环传递函数具有下述形式

$$G(s)H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 1\right)^l} G_1(s)H_1(s)$$

$G_1(s)H_1(s)$不含$\pm j\omega_n$的极点，当ω趋于ω_n时，$|GH(j\omega)|$趋于无穷，而

$$\phi(\omega_{n-}) \approx \phi_1(\omega_n) = \angle G_1(j\omega_n)H_1(j\omega_n)$$
$$\phi(\omega_{n+}) \approx \phi_1(\omega_n) - l\times180°$$

即$\Phi(\omega)$在$\omega=\omega_n$的附近，相角突变$-l\times180°$。