智能控制报告

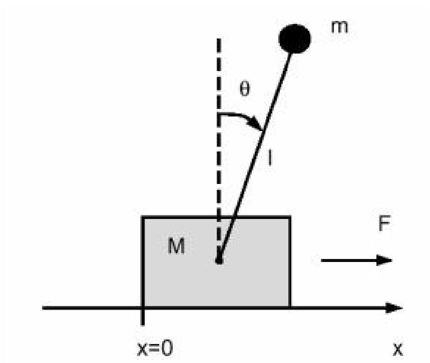
2.专家控制

3220101111 洪晨辉

一、问题分析

倒立摆（Inverted Pendulum）是动力学和控制理论中的经典问题，常用于测试和验证各种控制算法的有效性，如 PID 控制器、状态空间方法、类神经网络、模糊控制和遗传算法等。

倒立摆系统由一个质心位于枢纽点上方的摆组成，由于重心高于支点，系统在力学上呈现不稳定状态。在没有外部控制的情况下，倒立摆会因微小扰动而倒下。为了维持其平衡，需要引入控制系统，实时监测摆杆的角度，并在其开始倾倒时调整质心位置，使摆杆保持直立。本报告着力于一个普通台车倒立摆的专家控制系统设计，如下：



其各项参数有，

参数	大小
球质量 m	0.5kg
小车质量 M	1kg
摆杆长度 l	0.5m
夹角 θ	[0, π]
重力加速度 g	$9.8m/s^2$
水平外力限制 F	[-Fm, Fm]N
小车水平位移 x	无限制

考虑其动力学，该系统具有动能：

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}M{v_1}^2 + \frac{1}{2}m{v_2}^2$$

其中，v_1和v_2的广义坐标表示为

$$v_1 = \dot{x}$$

$$v_2 = \frac{d}{dt}^2(x + l\sin\theta) + \frac{d}{dt}^2(l\cos\theta)$$

则动能 T 的广义坐标表示为

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

x及θ坐标下的广义力分别为

$$Q_x = F$$

$$Q_\theta = mgl\sin\theta$$

由 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$$

得到倒立摆动力学约束方程

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta + ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F$$

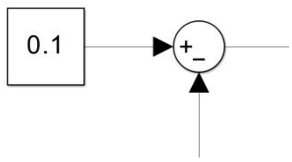
$$l\ddot{\theta} - g\sin\theta = \ddot{x}\cos\theta$$

（注：文档当中提供的动力学方程有误）

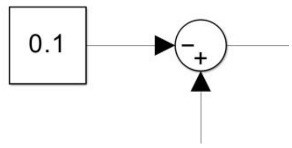
可知倒立摆可视作 FIFO 系统，因此适合采用 PID 控制算法。下设计普通 PID 及专家 PID 算法，以资对比，显示专家控制的优势所在。

二、算法设计

需要注意的是，由于该系统 F 增大会导致θ减小，也即具有开环正反馈根轨迹（主要原因是物理模型角度θ正方向选择与力方向 F 相同），本例中的所有 PID 控制参比部分符号都与《自动控制原理》所述的标准负反馈相反。经验证，将θ正方向规定为逆时针后，利用标准负反馈模型得到的控制结果和此报告中使用的相同。



标准负反馈符号



本例中采用的符号。实际相同

1. 普通连续/离散 PID

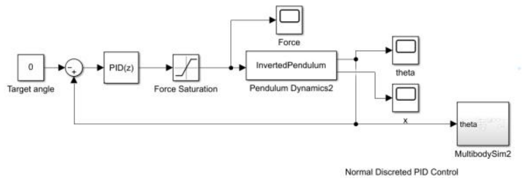
普通 PID，仅存在比例、积分及微分控制。其连续版本可视作通过模拟电路环节提供控制环反馈，

经处理偏差角度输入Δθ输出模拟量 F。而离散版本主要通过 MCU 进行数字信号的输出进行控制。对于本例而言，由于响应时间远远大于采样时间($Ts = 0.0001s$)的关系，两者区别不大。对比采用离散形式，更符合 60 年代以降现实产线的实际情况。

离散 PID 控制传递函数为有（含滤波器系数 $N = 100$），

$$C(z) = K_p + K_i T_s \frac{1}{z-1} + K_d \frac{N}{1 + N T_s \frac{1}{z-1}}$$

其 Simulink 模型如下:



其中，倒立摆的输出角度与要求角度进行参比，输入 PID 以输出力控制量，受电机力矩上限截断后控制倒立摆。右下为多体 3D 模型模拟。

2. 离散专家 PID

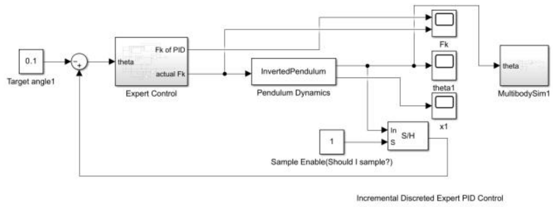
专家模型以增量形式为基础，在离散 PID 之上增加各专家规则。其设定规则如下（其中，$\Delta\theta(k) = \theta(k) - \theta(k-1)$）：

1. 如果$|\theta(k)| \geq \theta_m$，$F(k) = sgn(\theta) F_m$。
2. 如果$\theta_2 \leq |\theta(k)| < \theta_m$：
   1. 如果 $\theta(k)\,\Delta\theta(k) > 0$，则 $K = K_b$；
   2. 如果 $\theta(k)\,\Delta\theta(k) < 0$：
      a. 如果$\Delta\theta(k)\,\Delta\theta(k-1) > 0$，则$K = 1$；
      b. 如果$\Delta\theta(k)\,\Delta\theta(k-1) < 0$，则$K = K_b$。
3. 如果 $\theta_1 \leq |\theta(k)| < \theta_2$：
   1. 如果 $\theta(k)\,\Delta\theta(k) > 0$，则 $K = 1$；
   2. 如果 $\theta(k)\,\Delta\theta(k) < 0$：
      a. 如果$\Delta\theta(k)\,\Delta\theta(k-1) > 0$，则$K = K_s$；
      b. 如果$\Delta\theta(k)\,\Delta\theta(k-1) < 0$，则$K = 1$。
4. 如果 $|\theta(k)| < \theta_1$，则 $K = 1$。

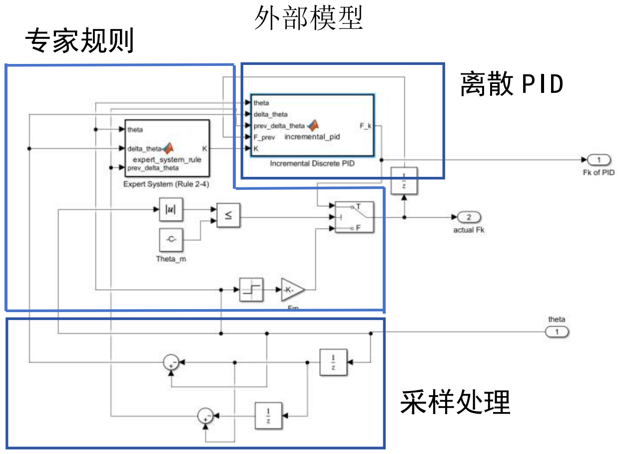
该离散 PID 为适配 MCU 等计算机语言处理，采用了增量形式书写：

$$F(k) = F(k-1) + K[K_p \Delta\theta(k) + \frac{T_s}{T_i}\theta(k) + \ldots + \frac{T_d}{T_s}(\Delta\theta(k) - \Delta\theta(k-1))]$$

其 Simulink 模型如下：



外部模型



子系统(专家控制)

其中，外部模型表现同普通 PID 相同，仅 PID 模块替换为专家系统。专家系统子系统由三部分组成。左上为专家规则段，用以在饱和段将 Fk 锚定在最大值 Fm，及在非饱和段控制外围比例参数 K 的大小。其后为 PID 算法段，仅负责 PID 计算。下为采样行，经滞后环节输出$\theta(k-1)$，$\theta(k-2)$及参比而成的$\Delta\theta(k)$，$\Delta\theta(k-1)$。参数埋设于模型工作区中。

（另：对于想要复现的人，由于 Simulink 本体并不存在较好的采样模块，该模型的采样是由 Simscape Electrical 模块做出的，需要预先加载。）

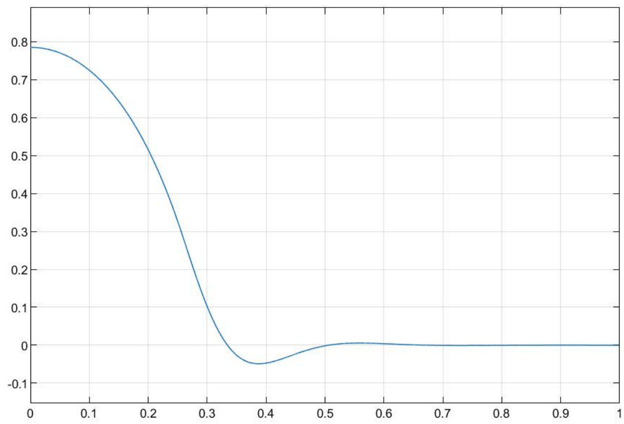
三、结果表现

1. 问题一

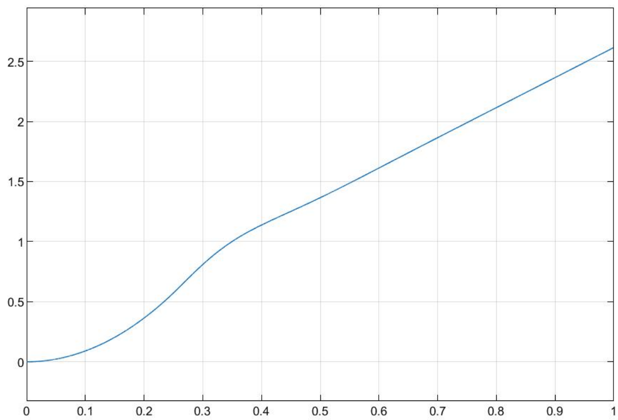
设$F_m = 25N$，$Ts = 0.0001s$，$K_p = 200$，$T_i = 0.001s$，$T_d = 10s$（也即$K_i = 0.1$，$K_d = 10$），摆杆初始角度为$\theta(0) = \frac{\pi}{4}$，系统无初速度。

普通 PID 得到的结果如下。可以看到在约 0.5 秒左右，系统已可视为稳定。小车的 x 在轻微抖动后，化作一条斜线，说明其已开始向右做匀速直线运动。由于本例不涉及对小车位置的控制，该结果可以接受。

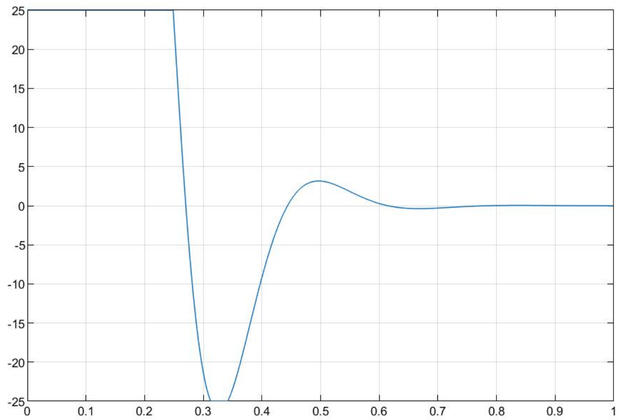
普通 PID



摆杆角度θ



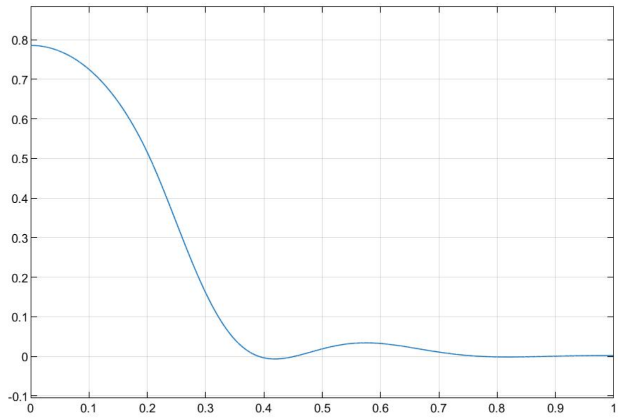
小车位置 x



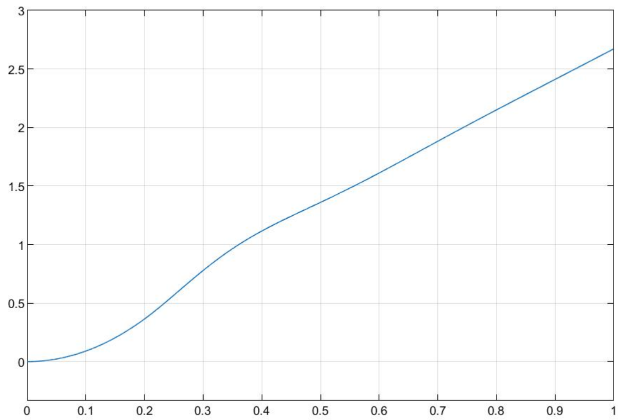
水平力 F

对于专家系统，尝试$\theta_1 = 0.1$，$\theta_2 = 0.3$，$\theta_m = 0.5$，$K_s = 1$，$K_b = 1.3$，得到一个尽管减少了超调量，但是调节时间显著变长的结果，约 0.7 秒。因此，在该问题下，专家控制的优势似乎并没有普通 PID 显著。然而，对于此专家系统而言，如果对题设限制进行改良，使得 Ks 可以大于 1，我们仍然能够调整参数，以期达到更好的控制效果。

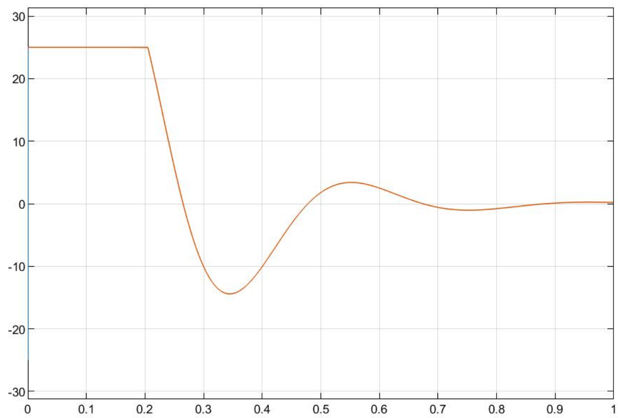
专家 PID（未改良）



摆杆角度θ



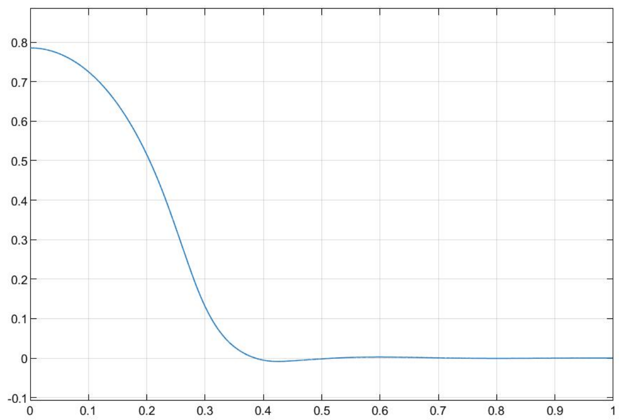
小车位置 x



水平力 F

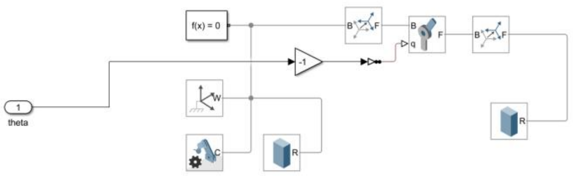
经过观察专家规则，发现θ_1作为小偏差范围下故意引入的修正量，其值过大，导致出现其无法调节而成的巨大震荡峰（且具有不管怎么改其他参数，都能将调节时间稳定在 0.7 秒的神奇性质），因此需要减小；θ_m过大，导致系统无法快速响应，因此要适当减小；K_s 作为中等偏差内的控制增益太小，导致力变化不够迅速，需要调大。经过修整后，改换参数为$\theta_1 = 0.007$，$\theta_2 = 0.24$，$\theta_m = 0.42$，$K_s =$

4，$K_b = 2$。再次进行仿真，得：

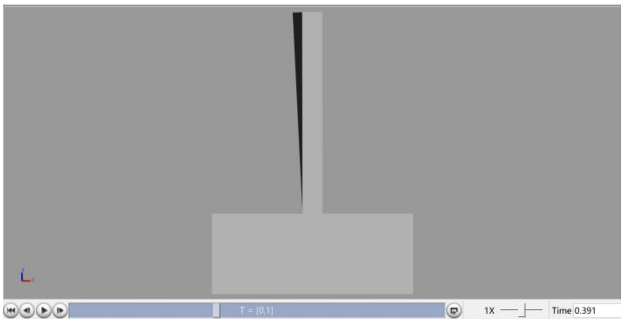


摆杆角度θ

可看到效果显著改善，不仅超调量远远小于普通 PID 结果，且调节时间被缩减至 0.4 秒左右。这在 Simscape Multibody 的 3D 仿真中也可一观。此子模块树有：



如下图所示，在 0.391 秒处，利用专家 PID 的倒立摆已基本完成控制（灰色），而利用普通 PID 的摆杆仍然存在超调量，需要后续过程的进一步修正。

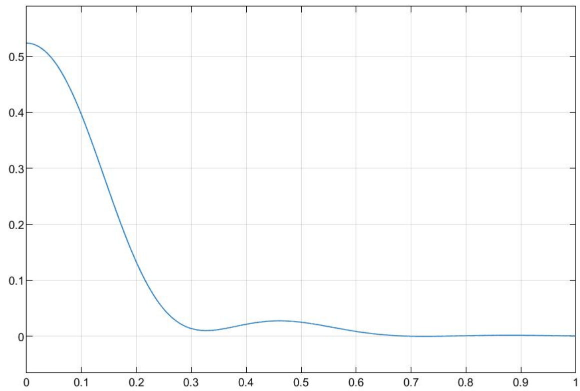


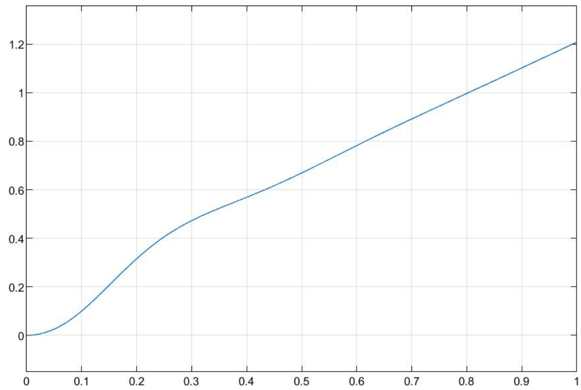
2. 问题二

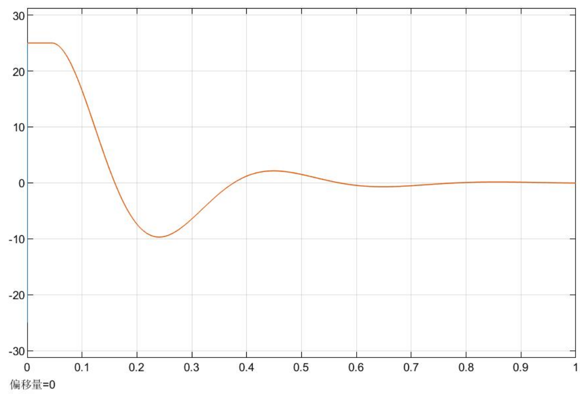
经测试，该问题可以分类讨论为三种情况：

1. Fm 内可调整

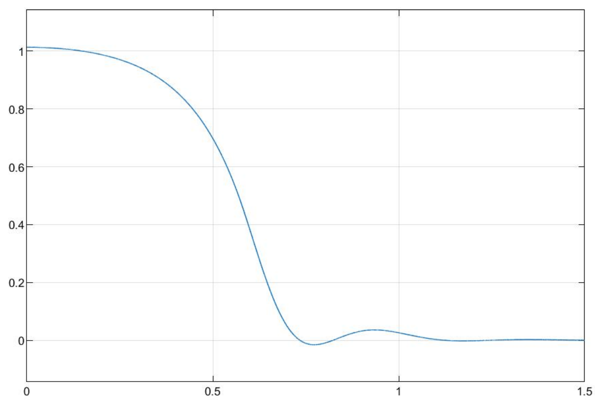
静力分析，在$F_m = 25N$时，带入动力学方程（此时$\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$），得$\theta(0)_{max} = 59.54°$。也即在该角度内，利用专家 PID 算法均可调整。在实操中，原本打算改换θ_1等参数，但实际发现用原本参数就已经足够好，因此为对比方便，不再改换。

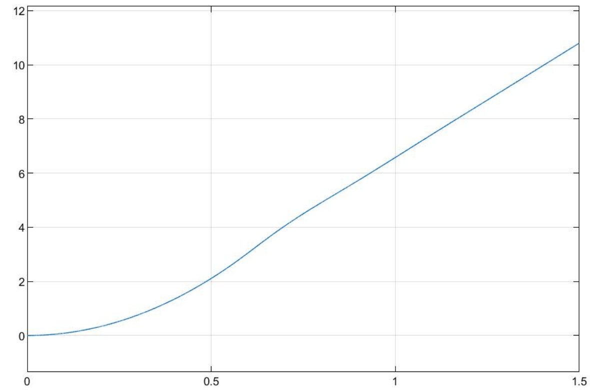


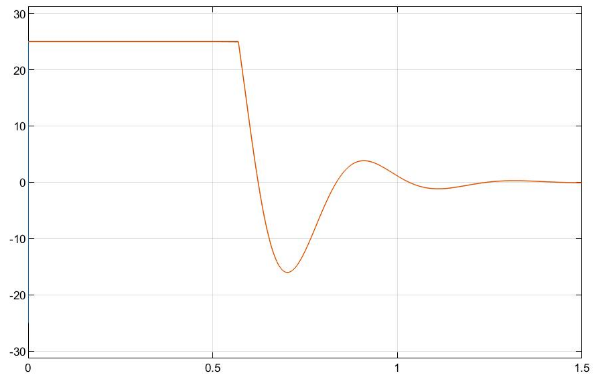




$$\theta(0) = \frac{\pi}{6}$$





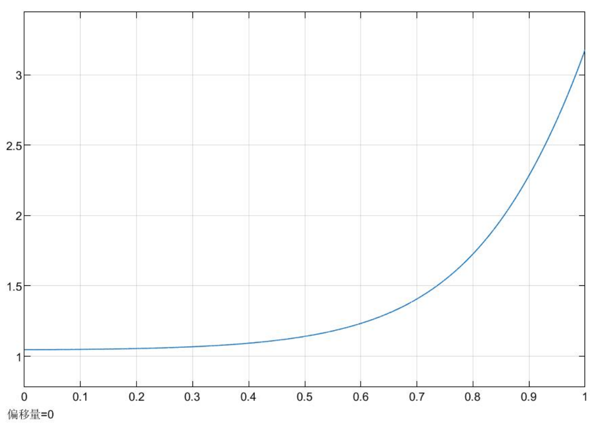


$$\theta(0) = \frac{\pi}{3.1}$$，处于不可控边缘

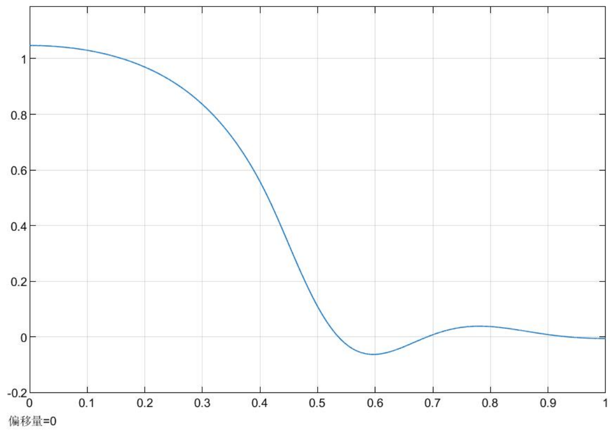
2. Fm 内不可调整，但角度未超过$\frac{\pi}{2}$。

如$\theta(0)$超过 59.54 度，则即使 Fk 一直维持 25N，也无法将θ调回 0。当其并未超过 90 度时，可通过增大 Fm 的方式加以控制。

例如，对于正好处于不可控边缘的 60 度，只需要将 Fm 改为 30N 即可：

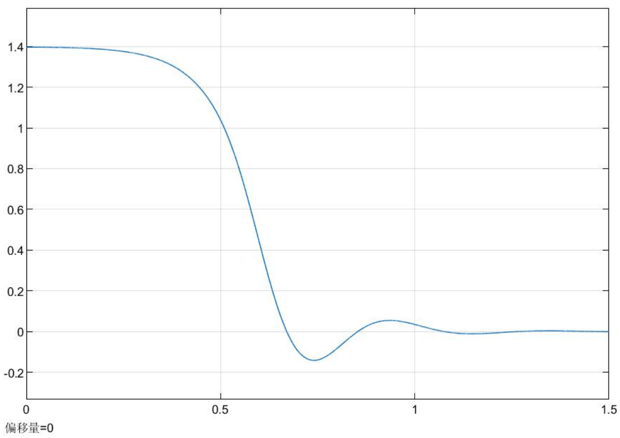


Fm = 30N，成功飞了出去



Fm = 30N，可控

即使对于非常刁钻的角度，譬如 80 度，通过改大 Fm = 85N 也可以实现控制。当然，参数需要相应变更，主要是更改$\theta_m = 1$，$K_b = 3$，使得其能够稳定，否则会反向飞出法线，永不回头。



$$\theta(0) = \frac{4\pi}{9}$$

3. Fm 内不可调整，且角度超过$\frac{\pi}{2}$。

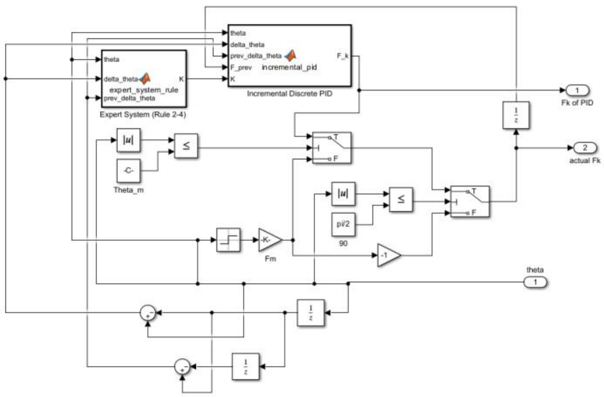
由 1 可知（推导过程已略），$\theta(0)_{max}$同F_m的关系为：

$$\theta(0)_{max} = \tan^{-1}\frac{F_m}{g(M+m)}$$

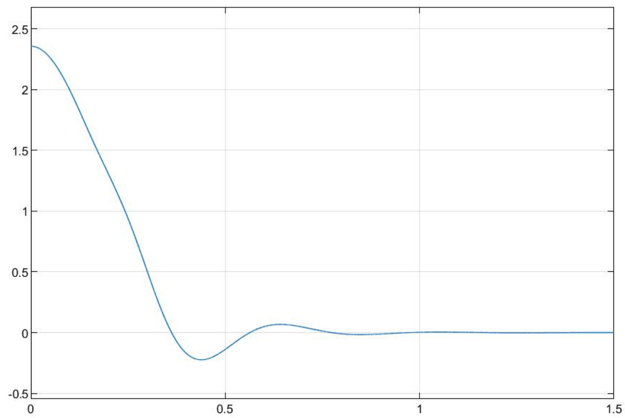
知$F_m \in R^+$时，$\theta(0)_{max} \in [0, \frac{\pi}{2}]$。因此，当$\theta(0)_{max}$大于$\frac{\pi}{2}$时，仅改变力上限爱莫能助。此时，应当同时改变专家 PID 规则，使得摆杆在地平下时可以成功上翻。

最简单地，增加如下专家规则：

如果 $|\theta(k)| > \frac{\pi}{2}$，则 $F(k) = -sgn(\theta)\,F_m$ 。



新专家控制的 Simulink 实现



$$\theta(0) = \frac{4\pi}{9}$$

便已经可以将本来在下半平面的摆上翻并控制在 0 位置。

综上，该专家控制能控的角度有限——仅在 59.5 度内。如果要很好地控制剩余区域的角度，则需要更改专家规则，以适应各种实际情况。

四、后记——神奇问题

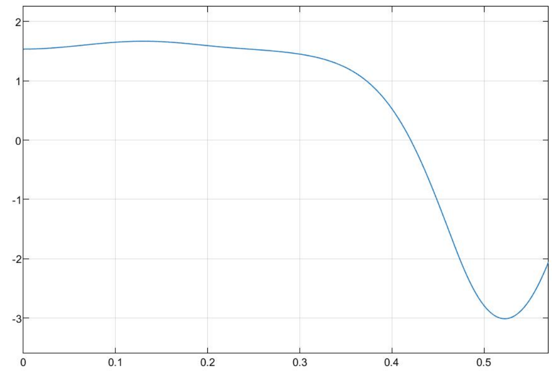
1. 关于$\frac{\pi}{2}$

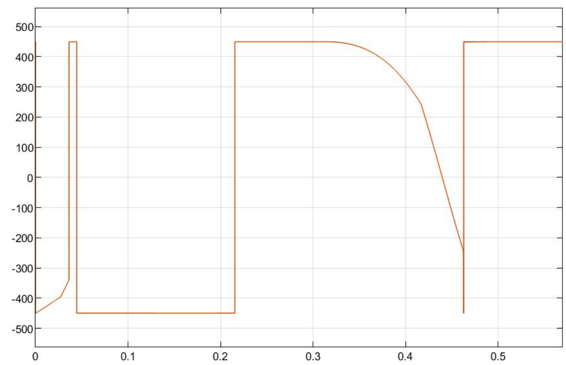
问题二的回答刻意回避了一个问题——那么，如果$\theta(0) = \frac{\pi}{2}$怎么办？更进一步地说，所有处在$\frac{\pi}{2}$周围的角度是不是也能被轻松控制？还是另有情况？答案是，这一扇区的角度很难控制，需要进一步修改专家规则。为什么？

考虑函数

$$\theta(0)_{max} = \tan^{-1}\frac{F_m}{g(M+m)}$$

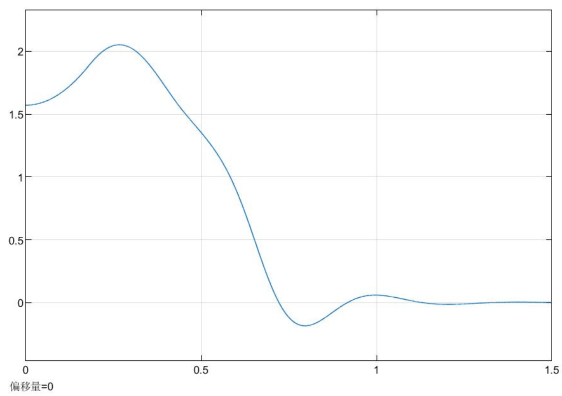
……的性质。尽管在 80 度时，Fm 只需要为 85N 就可以轻松控制，但当角度为 88 度时，看起来位置区别不大，然而 Fm 却起码需要 450N，且越靠近 90 度，需要的力越接近无穷。首先，不可能存在能提供无上限的力的电机；其次，在如此大的力面前，施力时间过长将导致摆杆过调整，最终让其反方向飞出。

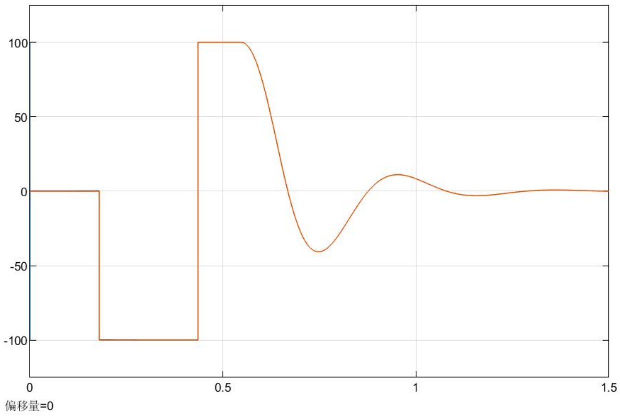




Fm 时间太长。注意：调节任何参数都无用

而$\theta(0) = \frac{\pi}{2}$更为棘手。该角度不论施加多大的力，由于方向和摆杆方向相同，都甚至无法维持在本位，遑论控制到 0 度。对于这类角度，笔者能想到的办法包括在该角度时先不施加力，使其自然落下，到一定角度后再施加力，化为**问题二的 3** 来控制。





这样，即使是 Fm = 25N，也可以翻上去。视频附在文件夹中

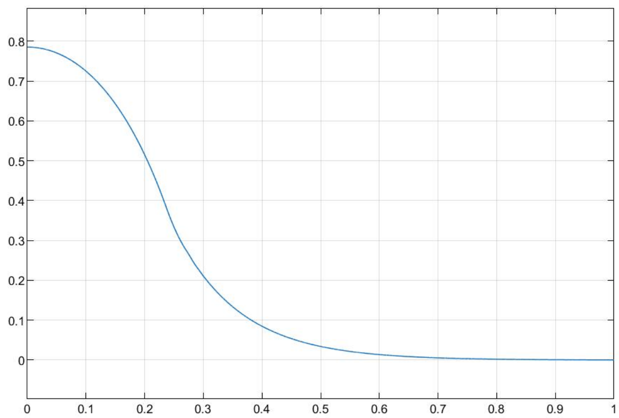
```
function y = fcn(u, theta)
    persistent flag % Persistent variable to retain its value between function calls
    if isempty(flag) % Initialize flag on first call
        flag = 0;
    end

    y = 0; % Default value for y

    if theta > 3 * pi / 5
        y = -u;
        flag = 1;
    elseif theta <= 3 * pi / 5 && theta >= pi / 2.5
        if flag == 0
            y = 0;
        elseif flag == 1
            if theta < pi / 2
                y = u;
            elseif theta > pi / 2
                y = -u;
            end
        end
    end
end
```

更改后的增设专家规则

2. 关于大 K

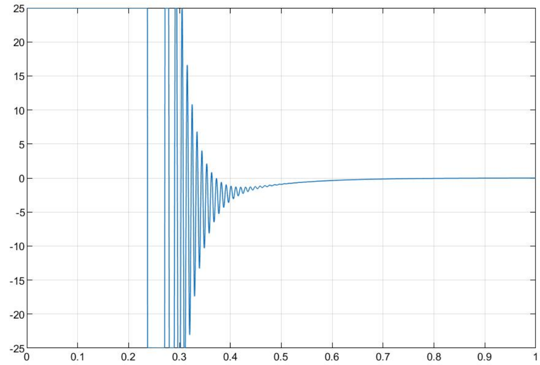
有没有好奇过为什么本题强制设置了 Ks < 1?因为对于这样的系统，不断增大外围的 K 将导致控制的效果变得“越来越好”。我们拿普通 PID 说明这一点。

将原来的K_p, K_i, K_d全部变为原来的十倍，对应于 K = 10。



好像变得更加平滑了？过冲也全部消失了。当我们将其改为 100 倍时同理，且变得更加顺滑了。

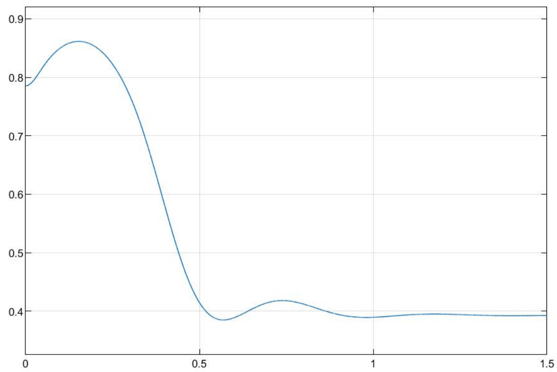
欸？这是不是意味着，对于任何问题，我们其实只需要无脑地增大 K 就可以了？并不是。我们来看看 K =100 时，控制力的情况。



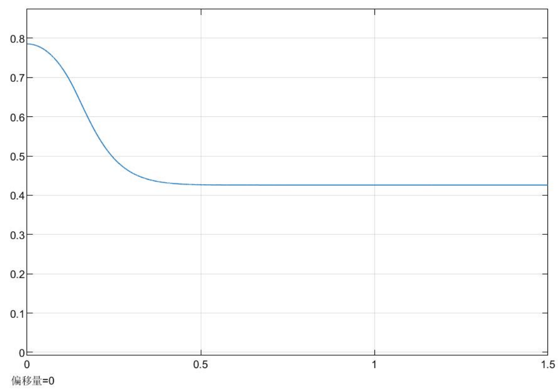
哦……很遗憾，F_K产生了高频的振铃信号。该种信号即使没有被电路、机械系统滤除，也并不利于电机控制。因此，K需要取合理的值。

3. 关于终角度不是 0

在控制了这么多种情况后，我们自然会产生疑问：如果终角度不是 0，PID 还可以胜任倒立摆控制任务吗？答案是……大概可以。反正专家 PID 可以。



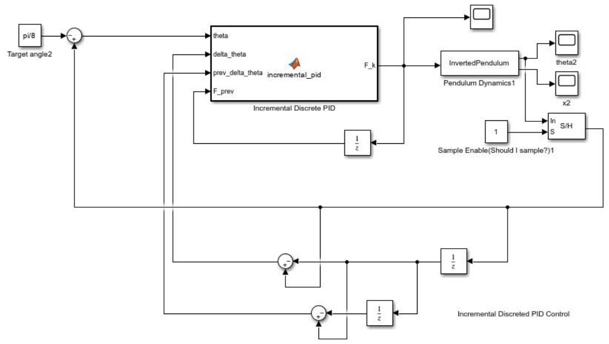
专家，$\theta_{desire} = \frac{\pi}{8}$



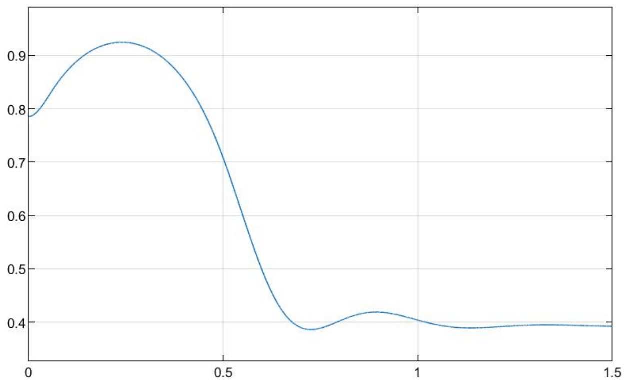
普通，$\theta_{desire} = \frac{\pi}{8}$

……然而很显然地，普通 PID 存在一个固定差值，并没有很好地收敛。经过实验，当增大 K 时，这个固然存在的误差会越来越小，直至“看上去”似乎消失。然而遗憾地是，这一固有误差并没有实际消失。这有可能是由系统的非线性特性导致的。

不过吊诡的是，当改用增量的离散 PID 时，该系统便能被更好地控制了：



增量离散 PID



增量，$\theta_{desire} = \frac{\pi}{8}$

在专家控制中，所采用的是增量离散 PID，其与普通的 PID 在数学上并不等价。离散 PID 控制器直接计算控制器的输出，

$$u[k] = K_p e[k] + K_i \sum_{i=0}^{k} e[i] + K_d(e[k] - e[k-1])$$

而离散增量 PID 控制的是增量。

$$\Delta u[k] = K_p(e[k] - e[k-1]) + K_i e[k] + K_d\left(e[k] - 2e[k-1] + e[k-2]\right)$$
$$u[k] = u[k-1] + \Delta u[k]$$

这一核心区别影响了两者的控制效果。然而，本作业所述的是“与普通 PID 的区别”，因此在对比的时候，仍然采用与普通 PID 对比的方式。

4. x 能控制吗？

答案是，能。只需要在角度环的基础上再加设位置环即可。是为双环系统。当然，环路不一定需要利用 PID，还可以采用别的方法，但是这已经超出了本报告所要讨论的内容，因此不再陈述，读者可自行寻找论文。

2024.11.30