Trigonometría

Departamento de Matemáticas

Objetivos

Al término de la clase, el estudiante deberá ser capaz de:

- Conocer las relaciones trigonométricas sobre el triángulo rectángulo.
- Conocer las propiedades básicas de las relaciones trigonométricas, para ángulos agudos.
- Resolver problemas utilizando las propiedades básicas de las relaciones trigonométricas.
- Conocer y aplicar el teorema del seno y teorema del coseno.

Coneptualización previa.

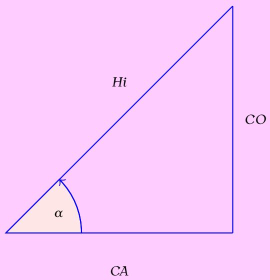
Considerando los temas tratados en las lecturas previas, responda las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuál es el teorema de Pitágoras?
2. ¿Cuál es es teorema de Thales?
3. ¿Qué es una relación trigonométrica?

A continuación se definen seis razones trigonométricas asociadas con al ángulo agudo de un triángulo rectángulo. Las cuales serán de utilidad en la resolución de diversos problemas de aplicación.

Definición. Considere α un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, como se ilustra en la figura. Se definen las relaciones trigonométricas:

- $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{\text{CO}}{\text{Hi}}$
- $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{CA}}{\text{Hi}}$
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{CO}}{\text{CA}}$
- $\cot(\alpha) = \dfrac{\text{CA}}{\text{CO}}$
- $\sec(\alpha) = \dfrac{\text{Hi}}{\text{CA}}$
- $\csc(\alpha) = \dfrac{\text{Hi}}{\text{CO}}$

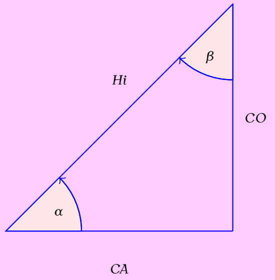


Observación. Es importante mencionar que la definición de las relaciones trigonométricas no dependen de la elección del triángulo.

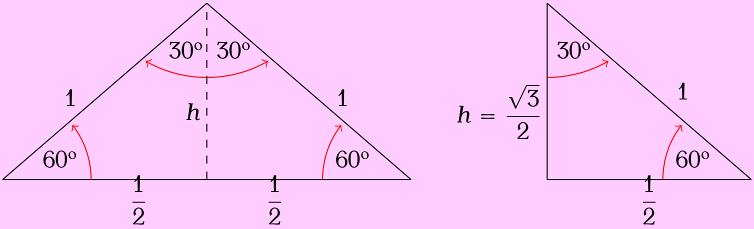
Identidades básicas

Considere α, β ángulos agudos de un triángulo rectángulo, como se ilustra en la figura, entonces son válidas las siguientes identidades:

- $\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1.$
- $\operatorname{sen}(\alpha) = \cos(\beta)$, es decir
$$\operatorname{sen}(\alpha) = \cos(90 - \alpha)$$
- $\operatorname{tg}(\alpha) = \cot(\beta)$ es decir
$$\operatorname{tg}(\alpha) = \cot(90 - \alpha)$$
- $\sec(\alpha) = \csc(\beta)$, es decir
$$\sec(\alpha) = \csc(90 - \alpha)$$



De la definición anterior es posible determinar las relaciones trigonométricas de los denominados ángulos notables, a saber $0^o, 30^o, 45^o$ y 60^o. En efecto considere las siguiente situación

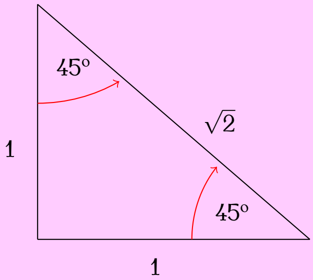


Así de la definición de relaciones trigonométricas se deduce:

$$\cos(30^o) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \wedge \quad \text{sen}(30^o) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(60^o) = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \text{sen}(60^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

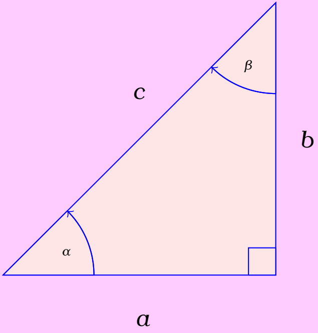
De manera análoga, si considera un triángulo isosceles, es posible deducir:



$$\operatorname{sen}(45^{\circ}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

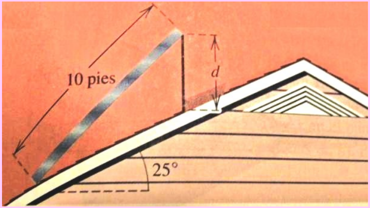
$$\cos(45^{\circ}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1. En cada caso explique por qué:
   a. $\text{sen}(\alpha) < 1$ para todo α ángulo agudo.
   b. $\cos(\alpha) < 1$ para todo α ángulo agudo.
   c. $\sec(\alpha) > 1$ para todo α ángulo agudo.
2. En cada caso determine toda la información asociada al triángulo rectángulo de la figura.
   a. $\beta = 17.8^{o}, c = 3.45$
   b. $\beta = 33.7^{o}, b = 22.4$
   c. $\alpha = 23^{o}, a = 54.0$
   d. $\alpha = 54^{o}, c = 4.3$
   e. $a = 6.00, b = 8.46$
   f. $a = 22.0, b = 46.2$
   g. $b = 10.0, c = 12.6$



3. Un árbol y un observador se encuentran en laderas opuestas de un río. El observador mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 60º; retrocede 10 metros y mide de nuevo el ángulo, obteniendo ahora un valor de 30º. ¿Cuál es la altura que tiene el árbol?

4. En la figura se ilustra un panel solar de 10 pies de ancho, que debe ser instalado en un techo que forma un ángulo de 25º con la horizontal. Determine la longitud d del puntal que se requiere para que el panel forme un ángulo de 45º con la horizontal.

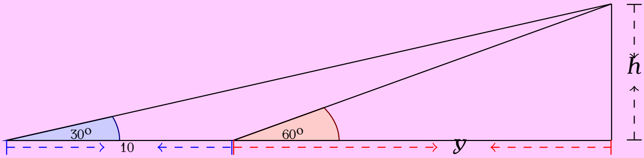


5. Desde una altura de 4 m. se observa la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 50°, y la base de este con un ángulo de depresión de 20°. Determine la distancia desde el punto de observación hasta el edificio, y su altura (redondee al entero más cercano).

6. Un hombre esta en la azotea de un edificio observando un edificio vecino. Respecto de la horizontal, mide ángulos de depresión y de elevación de 27° y 41.42° respectivamente a la base y la azotea del edificio vecino. Si la altura del edificio del observador es de 150 pies ¿Cual es la altura del edificio vecino?
7. Desde una altura de h m. se observa un auto en dirección Este con un ángulo de depresión de 40°, y otro en dirección Oeste con un ángulo de depresión de 25°. Si la distancia entre los automóviles es de 20 m., determine h.

Un árbol y un observador se encuentran en laderas opuestas de un río. El observador mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 60º; retrocede 10 metros y mide de nuevo el ángulo, obteniendo ahora un valor de 30º. ¿Cuál es la altura que tiene el árbol?

Solución. Primero realicemos un bosquejo de la situación:



De lo anterior se deduce que:

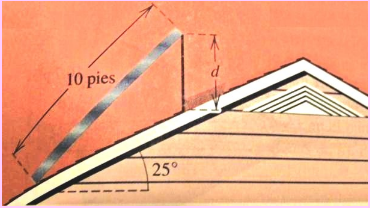
$$\operatorname{tg}(60) = \frac{h}{y} \wedge \operatorname{tg}(30) = \frac{h}{10+y}$$

es decir:

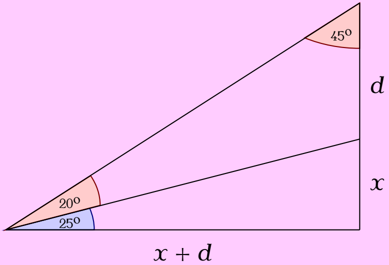
$$y = \frac{h}{\sqrt{3}} \wedge \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{10+y}$$

Por lo tanto: $10 + \dfrac{h}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}h$, de lo cual se deduce que la altura del árbol es $h = 5\sqrt{3}$.

En la figura se ilustra un panel solar de 10 pies de ancho, que debe ser instalado en un techo que forma un ángulo de 25º con la horizontal. Determine la longitud d del puntal que se requiere para que el panel forme un ángulo de 45º con la horizontal.



Solución. Observe que un bosquejo de la situación se puede observar en la siguiente figura



Solución pregunta 4.

Así:

$$\operatorname{sen}(45^{o}) = \frac{x+d}{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x + d = 5\sqrt{2}$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{tg}(25^{o}) = \frac{x}{5\sqrt{2}} \Rightarrow d = 5\sqrt{2}\operatorname{tg}(25^{o})$$

De lo anterior se deduce que $x = 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}\operatorname{tg}(25^{o}) \approx 3,7737747$. Por lo tanto de lo anterior se tiene que el puntal debe tener una longitud aproximada de 3,7737747 pies, para que el panel forme un ángulo de 45º con la horizontal.