Polinomios

Coneptualización previa.

Considerando los temas tratados en las lecturas previas, responda las siguientes interrogantes:

1. ¿Qué es un polinomio?
2. ¿Qué es una raíz de un polinomio?
3. ¿Todo polinomio admite raíces reales?
4. ¿Un polinomio de grado n admite siempre una raíz real?

Definición. Un polinomio en una variable sobre $\mathbb{R}$, es una expresión de la forma:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

Donde $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ son constantes, $n \in \mathbb{N}$ y x es la indeterminada, la cual toma valores en $\mathbb{R}$.

Ejemplo.

- $p(x) = 2 + 3x - 5x^2$
- $p(x) = 0$
- $p(x) = 2x + 3x^2 - 5x^7$

Observación. El conjunto de los polinomios con coeficientes reales en la indeterminada x se denota por $\mathbb{R}[x]$.

Definición. Considere $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, se define el grado de $p(x)$ por $\rho(p(x))$, como aquel $m \in \mathbb{N}_0$ tal que a_m es el último coeficiente no nulo.

- Si $p(x) = 2 + 3x - 5x^2$, entonces $\rho(p(x)) = 2$.
- Sea $p(x) = c$, donde c es una constante, entonces $\rho(p(x)) = 0$.
- $p(x) = 2x + 3x^2 - 5x^7$, entonces $\rho(p(x)) = 7$.

Definición. El conjunto de los polinomios de grado menor o igual a n se define por $\mathbb{R}_n[x]$, es decir:

$$\mathbb{R}_n[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \,|\, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, ..., n\}$$

Ejemplo. El conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 1 está definido por:

$$\mathbb{R}_1[x] = \{p(x) = a + bx \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Definición. Considere $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, donde

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \wedge q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

Entonces $p(x) = q(x)$ si:

$$a_0 = b_0 \wedge a_1 = b_1 \wedge ... \wedge a_n = b_n$$

Es decir, dos polinomios son iguales si soon de igual grado y poseen los mismos coeficientes.

Para definir la operatoria con polinomios, es necesario introducir una nueva representación, la cual se detalla a continuación.

Definición. Dado un polinomio de coeficientes reales $p(x)$, este se puede representar por:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $a_i \neq 0$ para un conjunto finito de índices.

Definición. Considere $p(x), q(x), r(x)$ polinomios con coeficientes reales tales que:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

Se definen las siguientes operaciones:

- **Adición.** $p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$.
- **Diferencia.** $p(x) - q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) x^k$.
- **Multiplicación.** $p(x) \cdot q(x) = \sum^{\infty} c_k x^k$, donde $c_k = \sum^{k} a_i b_{k-i}$.

Propiedades.

1. La adición de polinomios satisface las siguientes propiedades.
   - **Conmutatividad.** $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$.
   - **Asociatividad.** $[p(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)]$.
   - **Existencia de Neutro.** $p(x) + 0(x) = 0(x) + p(x) = p(x)$, donde $0(x) = 0$ es el polinomio nulo.
   - **Elemento inverso.** El inverso aditivo de $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ está dado por

     $$q(x) = -p(x) = \sum_{k=0}^{n} -a_k x^k$$

2. El producto de polinomios satisface las siguientes propiedades.
   - **Conmutatividad.** $p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$.
   - **Asociatividad.** $[p(x) \cdot q(x)] \cdot r(x) = p(x) \cdot [q(x) \cdot r(x)]$.
   - **Distributividad.** $[p(x) \cdot [q(x) + r(x)] = p(x)q(x) + p(x)r(x)$.

1. Sean $p(x) = (a-b)x^4 + (c-1)x^3 + (d+c)x$ y $q(x) = 7x^3 + (2d+b)x^2 - 2x$ dos polinomios con coeficientes reales. Determine condiciones sobre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para que $p(x) = q(x)$.

2. Considere $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x, q(x) = 2x^2 + 5x - 2 \in \mathbb{R}[x]$ y defina $r(x) = p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$, determine d_2.

3. Se construirá una caja con abertura en la parte superior a partir de una pieza rectangular de cartón con dimensiones de 12 por 20 pulgadas cortando cuadros iguales de lado x en cada esquina y luego doblando los lados hacia arriba. Determine:
    a. El polinomio que representa el volumen de la caja:
    b. Para que valores de x se puede tener la representación anterior:
    c. El volumen de la caja si x es de 4 pulgadas:
    d. El polinomio que representa el área lateral de la caja:

Considere $p(x), q(x)$ polinomios tal que $q(x) \neq 0$, entonces existen polinomios $s(x)$ y $r(x)$ tales que:

- $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$
- $\rho(r(x)) < \rho(q(x))$

Observación. El polinomio $s(x)$ se denomina cuociente, mientras que el polinomio $r(x)$ se denomina resto.

Ejemplo. Considere $p(x) = x^3+2x^2-3x-4, q(x) = x-2 \in \mathbb{R}[x]$. Determine el resto y el cuociente que se produce al dividir $p(x)$ por $q(x)$.

Solución. Observe que:

$$
\begin{array}{rl}
x^3 + 2x^2 - 3x - 4 & : x - 2 \quad = x^2 + 4x + 5 \\
-\underline{(x^3 - 2x^2)} & \\
4x^2 - 3x - 4 & \\
-\underline{(4x^2 - 8x)} & \\
5x - 4 & \\
-\underline{(5x - 10)} & \\
6 &
\end{array}
$$

De lo anterior se deduce que $s(x) = x^2 + 4x + 5, r(x) = 6$ y por ende:

$$p(x) = (x-2)(x^2 + 4x + 5) + 6$$

Definición. Considere $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{R}$ se denomina raíz de $p(x)$ si a es solución de la ecuación $p(x) = 0$. Es decir $a \in \mathbb{R}$ es una raíz de $p(x)$ si $p(a) = 0$.

Ejemplo. Considere $p(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$, observe que:

$$p(1) = 0 \wedge p(-2) = 0$$

Por lo tanto $a = 1$ y $a = -2$ son raíces de $p(x)$

Teorema. Considere $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Si a es una raíz real de $p(x)$, entonces $x - a$ divide a $p(x)$. Es decir existe $q(x)$ polinomio tal que $p(x) = (x - a)q(x)$.

Ejemplo. Considere $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, observe que $p(1) = 0$. Por lo tanto $x - 1$ divide a $p(x)$, en efecto:

$$p(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x - 1) + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$$

Por lo tanto $p(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$

Taller 2. Trabajo grupal.(3 integrantes)

1. Analice el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones:
   - a) Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, entonces $p(x)$ no admite inverso multiplicativo.
   - b) Si $p(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$, entonces existe $q(x)$ polinomio de grado menor a 3, tal que $p(x) = (x-1)q(x) + 2$
   - c) Si $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ entonces $p(x)q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$.
   - d) Existen polinomios $q(x), t(x)$ tales que $p(x) = (x-1)q(x)$ y $p(x) = (x+2)t(x)$, donde $p(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$
2. En cada caso determine cuociente y resto.
   - a) $(x^3 - 5x^2 + 10x - 7) : (x-2) =$
   - b) $(2x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x + 7) : (x^2 + x + 1) =$
   - c) $(2x^5 + x^3 - 4x) : (x^2 + 1) =$
3. En cada caso determine si existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para que r_1 y r_2 sean raíces de $p(x)$.
   - a) $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ y $p(x) = (b+2a)x^3 - 8x^2 + (2a+b)x + (3a-1)$
   - b) $r_1 = -1$, $r_2 = 3$ y $p(x) = x^4 - (2a+b)x^3 - (a-3b)x^2 - 2x - (5a+2b)$
   - c) $r_1 = -2$, $r_2 = 3$ y $p(x) = x^4 + (b-a)x^3 - (2a+b)x^2 - 3x - 6(a+b)$