Función Lineal

Departamento de Matemáticas

Conceptualización inicial.

Considerando los temas tratados en las lecturas previas, responda las siguientes interrogantes:

1. ¿Que es una función afín?
2. ¿Que propiedades satisfacen las funciones afines?
3. ¿Porque se denominan funciones lineales, las funciones afines?
4. ¿Cuál es el dominio de una función afín?

Dentro del conjunto de funciones de variable real, es importante destacar un subconjunto de funciones denominadas funciones elementales. Este tipo de funciones permiten modelar y resolver diversos problemas de aplicación. Dentro de las funciones a destacar podemos mencionar: función lineal, función cuadrática, función racional, función exponencial y función logarítmica.

Definición. Toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = mx + n$ donde $m, n \in \mathbb{R}$, se denomina **Función Afín.** Las constantes m y n se denominan pendiente y coeficiente de posición respectivamente.

Ejemplo.

- $f(x) = 3x + 1$, es una función afín con pendiente $m = 3$ y coeficiente de posición $n = 1$.
- $f(x) = 2x$, es una función afín con pendiente $m = 2$ y coeficiente de posición $n = 0$.

Observación. En diversos contextos, la función afín se denomina función lineal. Esto se debe al hecho que la función $f(x) = ax + b$ es una función polinomial de grado 1.

Función Lineal y sus propiedades.

Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función lineal definida por $f(x) = mx + n$, entonces:

1. f está definida en todo $\mathbb{R}$, es decir, el dominio de la función está dado por: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. La Imagen de la función lineal depende de la naturaleza de la constante m, la cual se denomina pendiente. De hecho:

$$\text{Im}(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } m \neq 0 \\ \\ \{n\} & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

3. Si $m > 0$, es decir si la pendiente de la función es positiva, entonces $f(x) = mx + n$ es una función creciente.
4. Si $m < 0$, es decir si la pendiente de la función es negativa,entonces $f(x) = mx + n$ es una función decreciente.
5. Si $m \neq 0$ entonces f tiene función inversa $f^{-1}(y) = \dfrac{y - b}{m}$.

Como se ha mencionado, el concepto de función es relevante en la modelación y resolución de problemas. A continuación se desarrollan un par de ejemplos donde el concepto de función lineal es trascendental para resolverlos.

Ejemplo. Un negocio con un capital inicial de \$200.000 tiene ingresos y gastos semanales de \$40.000 y \$32.000, respectivamente. Si todas las utilidades se conservan en el negocio:

1. Exprese el valor del negocio en términos del número de semanas t.

   Solución. Observe que el valor del negocio se incrementa semanalmente en \$8.000 (que corresponde a la diferencia entre lo que ingresa y lo que gasta), por lo tanto la función que relaciona el valor del negocio y el número de semanas es:

$$v(t) = 200000 + 8000t$$

2. Después de cuántos meses el valor del negocio es \$328.000.

   Solución. Para determinar cuándo el valor del negocio será de \$328000 debemos resolver la siguiente ecuación:

$$v(t) = 328000 \quad \Leftrightarrow 200000 + 8000t = 328000$$
$$\Leftrightarrow 8000t = 128000$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{128}{8} = 16$$

Por lo tanto el negocio alcanzará el valor de \$328000 en la semana 16.

1. En cuántas semanas el negocio adquirirá un valor que duplique el capital inicial.

   Solución. Para determinar cuándo el valor del negocio será el doble del capital debemos resolver la siguiente ecuación:

$$v(t) = 400000 \quad \Leftrightarrow 200000 + 8000t = 400000$$
$$\Leftrightarrow 8000t = 200000 \Leftrightarrow t = \frac{200}{8} = 25$$

Por lo tanto el negocio alcanzará el valor de \$400.000 en la semana 25.

En la fabricación de un componente para una máquina, el costo inicial de un troquel es de US$850 y todos los costos adicionales son de US$ 3 por unidad producida:

1. Exprese el costo C como función lineal del número q de unidades producidas.
   Solución. Observe que el costo de producir unidades es:

   $$c(q) = 3q + 850$$

2. ¿Cuántas unidades se producen si el costo total es de US$ 1.600?
   Solución. Para determinar cuántas unidades producen un costo de 1600 dólares, debemos resolver la siguiente ecuación:

   $$\begin{aligned} c\left(q\right) = 1600 \quad & \Leftrightarrow 850 + 3q = 1600 \\ & \Leftrightarrow 3q = 750 \\ & \Leftrightarrow q = 250 \end{aligned}$$

   Por lo tanto el costo total es de 1600 dólares si se producen 250 unidades.

1. Considere la función lineal $f(x) = mx + n$ donde $m.n \in \mathbb{R}$. Determine condiciones sobre m y n para os cuales se satisface cada una de las siguientes afirmaciones:
   a. f^{-1} existe y es igual a f.
   b. f^{-1} existe y es igual a $-f$.
   c. f es una función impar.
   d. f es una función par.
2. Después de observar una fotocopiadora automática de trabajo continuo, el técnico descubre que por un defecto de funcionamiento, la producción disminuirá en un número constante de hojas impresas por hora, arrojando 4480 hojas impresas durante la primera hora con desperfectos. Si la hora 30 con desperfecto produjo 3900 hojas.
   a. Determine un modelo lineal que sea capaz de predecir la cantidad de hojas arrojadas por la fotocopiadora con defecto, N, en función de la cantidad de horas t.
   b. ¿Después de cuántas horas la cantidad de hojas arrojadas por la fotocopiadora alcanza las 4420?

3. El costo de fabricación de x artículos incluye un costo fijo de 25 dólares. El costo fijo está dado por gastos tales como luz y calefacción. Por otro lado el costo variable asociado a cada articulo es de 9 dólares. Si la función lineal $C(x) = 9x + 25$, representa el costo total de fabricación de artículos. Determine:
   - a. El costo total de fabricación de 120 artículos.
   - b. El número total de artículos para los cuales el costo total es de 2878 dólares.
   - c. Grafique la función costo total.