

Inecuaciones con expresiones radicales

Departamento de Matemáticas

Al terminar la sección, el estudiante deberá ser capaz de:

- Resolver inecuaciones que involucren expresiones radicales.

En base a las lecturas previas responda las siguientes preguntas.

- ① ¿Qué es una expresión radical?
- ② ¿Que es una inecuación con expresiones radicales?
- ③ ¿Si $\sqrt{x+1} < 2$ entonces $x+1 < 4$?
- ④ ¿Qué es el conjunto restricción de una inecuación que involucra expresiones radicales?

Definición. Una inecuación que este compuesta por una o varias expresiones radicales donde este involucrada la variable se denomina inecuación con radicales.

Ejemplo. $\sqrt{x^2 - x} < 3$ es una inecuación radical.

Ejemplo. $\sqrt{1 - x} < 3\sqrt{x + 1} + 1$ es una inecuación radical.

Observación. Para resolver una inecuación lineal es necesario tener presente:

- ❶ las leyes de cancelación:
 - a $a \leq b \Leftrightarrow [a + c \leq b + c]$.
 - b Si $c > 0$ y $a \leq b$ entonces $ac \leq bc$.
 - c Si $c < 0$ y $a \leq b$ entonces $ac \geq bc$.
- ❷ El conjunto de restricción asociado, el cual se define como el subconjunto de los números reales, en el cual están definidas todas las expresiones radicales involucradas y la inecuación.

Para poder resolver una inecuación que involucra expresiones radicales, utilizando las leyes de cancelación o las propiedades:

$$[0 < a < b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}] \vee [a < b \Rightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}]$$

donde $n \in \mathbb{N}$, para eliminar las raíces. Es necesario definir el conjunto de restricción R , el cual se conforma de las restricciones asociadas a las expresiones radicales y de las restricciones que hacen posible determinar el conjunto solución.

Ejemplo. Considere la inecuación

$$\sqrt{2x-1} < 3x-2$$

Observe que el conjunto restricción asociado está definido por:

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x-1 \geq 0 \wedge 3x-2 \geq 0\}$$

Donde la condición $3x-2 \geq 0$ es una condición necesaria.

Ejemplo 1.

Considere la inecuación planteada en las preguntas de discusión:

$$\sqrt{x+1} \leq 2$$

Observe que el conjunto restricción asociado está definido por:

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \geq 0\} = [-1, \infty[$$

Así bajo el supuesto que $x \in R = [-1, \infty[$, se tiene que la inecuación es equivalente a:

$$\sqrt{x+1} \leq 2 \Leftrightarrow x+1 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\infty, 3 \right]$$

Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación es

$$\begin{aligned} S &= R \cap \left] -\infty, 3 \right] = [-1, \infty[\cap \left] -\infty, 3 \right] \\ &= \left[-1, 3 \right] \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

Considere la inecuación $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-3} \leq 1$. Observe que el conjunto restricción asociado está definido por:

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \geq 0 \wedge x-3 \geq 0\}$$

es decir $R = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \wedge 3 \leq x\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x\} = [3, \infty[$. Así bajo el supuesto que $x \in R = [3, \infty[$, se tiene que la inecuación es equivalente a:

$$\sqrt{x-1} \leq 1 + \sqrt{x-3} \Leftrightarrow x-1 \leq 1 + 2\sqrt{x-3} + x-3$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{4} \leq x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{13}{4}, \infty\right[$$

Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación es:

$$\begin{aligned} S &= R \cap \left[\frac{13}{4}, \infty\right[= [3, \infty[\cap \left[\frac{13}{4}, \infty\right[\\ &= \left[\frac{13}{4}, \infty\right[\end{aligned}$$

- ➊ Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones.
 - a $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1} < 1.$
 - b $\sqrt{x^2+1} < \sqrt{x+3}.$
 - c $0 \leq \sqrt{x^2-5x+6}.$
 - d $\frac{\sqrt{x^2+6x-7} \cdot (x+1)}{x^2+x+1} \leq 0.$
- ➋ Los costos de producción, en millones de pesos, de una determinada empresa están dados por $c(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{x}$, donde x es la cantidad de artículos producidos(en cientos de miles). Determine cual debe ser el rango de producción para tener como máximo 3 millones de costos de producción.
- ➌ Los costos de producción, en millones de dólares, de dos empresas refinadoras están dados por $c_1(x) = \sqrt{2x+6}$ y $c_2(x) = 3x+1$, donde x está dado en millones de toneladas. Determine el volumen de toneladas que debe refinar la compañía 1 para que los costos de producción sean menores que los costos de producción de la compañía 2.