Inecuaciones Racionales

Departamento de Matemáticas

Al terminar de estudiar esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

- Resolver inecuaciones racionales.
- Utilizar inecuaciones racionales para modelar y resolver problemas de aplicación.

Conceptualización inicial.

En base a las lecturas previas responda las siguientes preguntas.

1. ¿Que es un punto crítico?
2. ¿Que es una expresión racional?
3. ¿Que es una inecuación racional?
4. ¿Si $\dfrac{x-a}{x-b} < 2$ entonces $x - a < 2(x-b)$?
5. ¿Cuál es la mejor estrategia para resolver una inecuación de la forma $\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q} < 1$?

Definición. Una inecuación se denomina racional si es de la forma:

$$\frac{p(x)}{q(x)} < 0 \vee \frac{p(x)}{q(x)} \leq 0$$

Donde $p(x), q(x)$ son polinomios.

Ejemplo. $\dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1} < 1$ es una inecuación racional ya que.

$$\frac{x^2 - x + 1}{x + 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{x + 1} < 0$$

Ejemplo. $\dfrac{x + 1}{x - 2} \leq \dfrac{x}{x - 1}$ es una inecuación racional ya que:

$$\frac{x + 1}{x - 2} \leq \frac{x}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{x + 1}{x - 2} - \frac{x}{x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{(x - 2)(x - 1)} \leq 0$$

Observación. Para resolver una inecuación lineal es necesario tener presente las leyes de cancelación estudiadas anteriormente

1. $a \leq b \Leftrightarrow [a + c \leq b + c]$.
2. Si $c > 0$ y $a \leq b$ entonces $ac \leq bc$.
3. Si $c < 0$ y $a \leq b$ entonces $ac \geq bc$.

Resolución de inecuaciones racionales

Para determinar el conjunto solución de inecuaciones racionales o reducible a racional es necesario realizar los siguientes pasos.

1. Utilizar las leyes de cancelación para determinar una inecuación equivalente de la forma:
$$\frac{p(x)}{q(x)} < 0 \tag{1}$$
2. Determinar los factores lineales y cuadraticos irreductibles de $p(x)$ y $q(x)$ para expresar la inecuación (1) de la forma:
$$\frac{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_kx^2+b_kx+c_k)}{(A_1x+B_1)(A_2x+B_2)\cdots(A_nx^2+B_nx+C_n)} < 0 \tag{2}$$
3. Usar la factorización anterior para calcular los puntos críticos de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$
4. Utilizar los puntos críticos para analizar el cambio de signos de
$$\frac{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_kx^2+b_kx+c_k)}{(A_1x+B_1)(A_2x+B_2)\cdots(A_nx^2+B_nx+C_n)} < 0 \tag{3}$$
y así determinar la solución general de la inecuación.

Ejemplo

Determine el conjunto solución de $\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+x} \leq 1.$

Solución. Observe que la inecuación dada es equivalente a:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2+2x+5}{x^2+x} \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+5}{x^2+x} - 1 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+5-x^2-x}{x^2+x} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x+5}{x(x+1)} \leq 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, para determinar los los puntos críticos asociados es necesario resolver las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x+5=0 \quad &\Rightarrow x=-5 \\
x+1=0 \quad &\Rightarrow x=-1 \\
x=0 \quad &\Rightarrow x=0
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Para finalizar con la resolución de la inecuación es necesario analizar los cambios de signos de la expresión $\dfrac{x+5}{x(x+1)}$, para lo cual se construye la siguiente tabla de signos:

	$-\infty$	-5	-1	0	∞
x		$-$	$-$	$-$	$+$
$x+5$		$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$		$-$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{x+5}{x(x+1)}$		$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación $\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+x} \leq 1$ es

$$S =]-\infty, -5] \cup]-1, 0[$$

1. Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

   a. $\dfrac{x+1}{4x} < 1$

   b. $1 + \dfrac{2}{x+1} \leq \dfrac{2}{x}$

   c. $\dfrac{x+2}{x+3} < \dfrac{x-1}{x-2}$

   d. $\dfrac{x^2+1}{4x} < 1$

2. La fuerza gravitacional F ejercida por la Tierra sobre un cuerpo que tiene una masa de 100 kg está dada por la ecuación

$$F = \frac{4 \times 10^6}{d^2}$$

   donde d es la distancia (en km) del objeto desde el centro de la Tierra, y la fuerza F se mide en newtons (N). ¿Para qué distancias será entre 0.0004 N y 0.01 N la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre este cuerpo?

3. En la cercanía de una fogata, la temperatura T en ºC a una distancia de x metros del centro de la fogata está dada por

$$T = \frac{6 \times 10^5}{x^2 + 300}$$

   ¿A qué intervalo de distancias desde el centro de la fogata era la temperatura menor a 500ºC?