Identidades trigonométricas

Departamento de Matemáticas

Antes de realizar el estudio de las funciones trigonométricas es necesario contar con un conjunto de identidades, algunas de las cuales e pueden deducir de la identidad básica $\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$. En efecto:

1. $\sec^2(x) = 1 + \text{tg}^2(x)$, ya que:

$$\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1 \Rightarrow 1 + \frac{\text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

2. $\csc^2(x) = 1 + \cot^2(x)$, ya que:

$$\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1 \Rightarrow 1 + \frac{\cos^2(x)}{\text{sen}^2(x)} = \frac{1}{\text{sen}^2(x)}$$

Observación. El siguiente teorema establece un conjunto de identidades esenciales, las cuales serán una herramienta esencial en la demostración de identidades más complejas.

Teorema. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que se satisfacen las siguientes identidades trigonométricas:

1. $\text{sen}(x - y) = \text{sen}(x)\cos(y) - \text{sen}(y)\cos(x)$
2. $\text{sen}(x + y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$
3. $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(y)\text{sen}(x)$
4. $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\text{sen}(x)$

Ejemplos de identidades trigonometricas.

A continuación se exhiben un conjunto de identidades que son consecuencia directa del teorema.

- $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$. En efecto, observe:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2x) &= \operatorname{sen}(x+x) \\
&= \operatorname{sen}(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)
\end{aligned}$$

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$. En efecto, observe:

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

- $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg}(x) \pm \operatorname{tg}(y)}{1 \mp \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$. En efecto, observe:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{sen}(x \pm y)}{\operatorname{sen}(x \pm y)} = \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(y) \pm \operatorname{sen}(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)} \pm \dfrac{\operatorname{sen}(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)}}{1 \mp \dfrac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)}{\cos(x)\cos(y)}} = \frac{\operatorname{tg}(x) \pm \operatorname{tg}(y)}{1 \mp \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}
\end{aligned}$$

En cada caso analice si la igualdad dada determina o no una identidad trigonométrica.

1. $\operatorname{tg}(2x) = \dfrac{2\operatorname{tg}(x)}{1 - \operatorname{tg}^2(x)}$.
2. $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$.
3. $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$.
4. $\dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \dfrac{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$
5. $\dfrac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cos(2x)} - \dfrac{\tan(x)}{1 - \tan^2(x)} = 0$
6. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(2\alpha)}{1 + \cos(\alpha) + \cos(2\alpha)} = \tan(\alpha)$
7. $\cos(2\alpha) = \dfrac{\csc^2(\alpha) - 2}{\csc^2(\alpha)}$
8. $\dfrac{\cos(2\alpha)}{1 - \operatorname{sen}(2\alpha)} = \dfrac{1 + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)}$

Conclusiones.