Funciones Biyectivas

Departamento de Matemáticas

Coneptualización previa.

Considerando los temas tratados en las lecturas previas, responda las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuando una función f es inyectiva?
2. ¿Cuando una función f es epiyectiva?
3. ¿Cuando una función f es biyectiva?
4. Si f es una función invertible,¿entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$?

Funciones inyectivas

Definición. Sea $f : A \to B$ una función. f se denomina función inyectiva:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Es decir, una función f es inyectiva si dados dos elementos distintos del dominio ellos admiten imágenes distintas.

Ejemplo. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función definida por $f(x) = x^2 - 6x + 9$. Observe que $f(2) = f(4) = 1$. Por lo tanto f no es inyectiva ya que 2 y 4 admiten la misma imagen.

Ejemplo. Considere $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, función definida por $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$. Observe que:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad & \Rightarrow \frac{3x+1}{x-1} = \frac{3y+1}{y-1} \\ & \Rightarrow (3x+1)(y-1) = (3y+1)(x-1) \\ & \Rightarrow 3xy - 3x + y - 1 = 3xy - 3y + x - 1 \\ & \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Por lo tanto f es una función inyectiva

Definición. Sea $f : A \to B$ una función. f se denomina función epiyectiva o sobreyectiva si:

$$\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$$

Es decir, una función f es epiyectiva si todo elemento del conjunto de llegada admite preimage.

Ejemplo. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función definida por $f(x) = x^2 + 9$. Observe que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto f no es epiyectiva ya que $-1 \in \mathbb{R}$ y no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -2$.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$, función definida por $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$. Observe que:

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad & \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-1} = y \\ & \Leftrightarrow (3x+1) = y(x-1) \\ & \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-3} \in \mathbb{R} - \{1\}; \end{aligned}$$

Por lo tanto f es una función epiyectiva

Definición. Sea $f : A \to B$ una función. f se denomina función invertible si existe $g : B \to A$ función tal que:

$$(g \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in A$$

$$(f \circ g)(y) = y, \quad \forall y \in B$$

g se denomina función inversa de f y se denota por f^{-1}. Es importante mencionar que una función $f(x)$ que tiene función inversa se denomina **Función Biyectiva.**

Ejemplo. Considere $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$, definida por $f(x) = \dfrac{5-x}{x-1}$. Suponiendo que $f(x)$ es biyectiva calcule su función inversa.

Solución. Observe: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$. Por otro lado $f(x) = y$ si y solamente si:

$$\begin{aligned} \frac{5-x}{x-1} = y \quad &\Leftrightarrow 5 - x = xy - y \\ &\Leftrightarrow 5 + y = xy + x \Leftrightarrow \frac{5+y}{y+1} = x \end{aligned}$$

Así de lo anterior es posible establecer que f admite función inversa:

$$f^{-1}(y) = \frac{5+y}{y+1}$$

Ejemplo. Considere $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{3x+1}{9x-18}$. Determine $A, B \subset \mathbb{R}$ máximos, de manera que f admita función inversa y determínela.

Solución. Observe que $\operatorname{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}/9x - 18 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$. Por otro lado:

$$
\begin{aligned}
f(x) = y \quad & \Leftrightarrow \frac{3x+1}{9x-18} = y \\
& \Leftrightarrow 3x + 1 = 9xy - 18y \\
& \Leftrightarrow x(3 - 9y) = -1 - 18y \\
& \Leftrightarrow x = \frac{1+18y}{9y-3}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$. Así $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ es una función epiyectiva. Para determinar la existencia de la función inversa solo basta analizar si f es inyectiva. De hecho:

$$
\begin{aligned}
f(a)=f(b) \quad &\Leftrightarrow \frac{3a+1}{9a-18}=\frac{3b+1}{9b-18} \\
&\Leftrightarrow (9b-18)(3a+1)=(3b+1)(9a-18) \\
&\Leftrightarrow 27ab+9b-54a-18=27ab+9a-54b-18 \Leftrightarrow a=b
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ es biyectiva con $f^{-1}(y)=\dfrac{1+18y}{9y-3}$.

Observación. De la definición de función inversa es posible establecer las siguientes propiedades:

1. Si $f:A\to B$ es una función biyectiva, entonces:

$$(f\circ f^{-1})(y)=y \quad \forall y\in B$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=x \quad \forall x\in A$$

2. Considere $f:A\to B$ y $g:B\to C$ funciones biyectivas, entonces $g\circ f:A\to C$ es una función biyectiva con inversa $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

Taller 1. Trabajo grupal.(3 integrantes)

1. En cada caso determine bajo que condiciones existe la inversa de la función dada.

   a. $f(x) = 3x + 1,\ x \in \mathbb{R}$
   b. $A(r) = \pi r^2,\ r \geq 0$
   c. $V(r) = \dfrac{4\pi r^2}{3},\ r \geq 0$

2. Considere $f : A \to B$ función definida por $f(x) = \dfrac{x+2}{x+a}$. Determine A y B máximos de manera que f admita inversa y determínela.
3. Utilice el resultado del ítem anterior para determine si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(f(x)) = x$.
4. Considere f una función creciente, determine si f es inyectiva.
5. Determine si toda función impar es inyectiva.