Lógica proposicional.

Departamento de Matemáticas

La utilización de tablas de verdad para clasificar una una proposición, no es el método mas eficaz. Sin embargo es posible abordar este tipo de problemas aplicando la equivalencia de proposiciones.

Ejemplo. Considere las proposiciones compuestas

$$p \wedge (q \vee r) \quad y \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Observe que las proposiciones dadas son equivalentes, lo cual se puede comprobar construyendo las tablas de verdad asociadas, es decir

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Así de lo anterior es posible establecer que el producto lógico es distributivo respecto de la adición lógica.

Utilizando lo anterior es posible simplificar la proposición compuesta

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q})$$

En efecto:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q}) \equiv p \wedge (q \vee \overline{q}) \equiv p \wedge 1 \equiv p$$

Por lo tanto $(p \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q}) \equiv p$

Álgebra proposicional

Teorema 1. Considere p, q, r proposiciones. Entonces se tiene que la suma y el producto lógico son:

1. Involutivos, es decir:
$$p \vee p \equiv p \quad y \quad p \wedge p \equiv p$$
2. Conmutativos, es decir:
$$p \vee q \equiv q \vee p \quad y \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$$
3. Asociativos, es decir:
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \quad y \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$
4. Distributivos, uno respecto del otro, es decir:
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad y \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Teorema 2. Considere p, q, r proposiciones, entonces son válidas las siguientes equivalencias:

1. $\overline{(p \vee q)} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$
2. $\overline{(p \wedge q)} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$
3. $p \wedge 0 \equiv 0$
4. $p \vee 0 \equiv p$
5. $p \wedge 1 \equiv p$
6. $p \vee 1 \equiv 1$
7. $p \vee \overline{p} \equiv 1$
8. $p \wedge \overline{p} \equiv 0$
9. $\overline{(\overline{p})} \equiv p$

Ejemplo. Dadas las proposiciones lógicas p, q y r. Utilice algebra proposicional para clasificar la proposición compuesta$(p \wedge r) \Rightarrow (\overline{q} \vee r)$

Solución. Observe:

$$\begin{aligned}
(p \wedge r) \Rightarrow (\overline{q} \vee r) &\equiv [\overline{(p \wedge r)} \vee (\overline{q} \vee r)] \\
&\equiv (\overline{p} \vee \overline{r}) \vee (\overline{q} \vee r)] \\
&\equiv (\overline{p} \vee \overline{r}) \vee (r \vee \overline{q}) \\
&\equiv \overline{p} \vee (\overline{r} \vee r) \vee \overline{q}) \\
&\equiv (\overline{p} \vee \overline{q}) \vee 1 \\
&\equiv 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto $[(p \wedge r) \Rightarrow (\overline{q} \vee r)$ es una tautología.

Ejemplos

Ejemplo. Simplifique la máximo la siguiente proposición:

$$[(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Solución. Observe:

$$\begin{aligned}
[(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}] \Rightarrow (p \Rightarrow q) &\equiv [\overline{(p \wedge \overline{q})} \vee \overline{p}] \Rightarrow (\overline{p} \vee q) \\
&\equiv [(\overline{p} \vee q) \vee \overline{p}] \Rightarrow (\overline{p} \vee q) \\
&\equiv [\overline{p} \vee q] \Rightarrow (\overline{p} \vee q) \\
&\equiv \overline{[\overline{p} \vee q]} \vee (\overline{p} \vee q) \\
&\equiv 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto la proposición $[(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ es una tautología.

Ejemplo. Utilice algebra proposicional para clasificar la proposición compuesta $p \Rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)]$.

Solución. Observe que:

$$
\begin{aligned}
[(p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)] &\equiv (p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee p)) \\
&\equiv [(p \wedge \overline{p}) \vee q] \wedge (\overline{q} \vee p)) \\
&\equiv q \wedge (\overline{q} \vee p)) \\
&\equiv (q \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge p) \\
&\equiv 0 \vee (q \wedge p) \equiv (q \wedge p)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
p \Rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)] &\equiv p \Rightarrow (p \wedge q) \\
&\equiv \overline{p} \vee (q \wedge p) \\
&\equiv (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \vee p) \equiv (\overline{p} \vee q) \wedge 1 \equiv \overline{p} \vee q
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la proposición dada es una contingencia

Taller 1. Trabajo grupal.(3 integrantes)

1. Clasifique las siguientes proposiciones.
   a. $(p \Rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
   b. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \{(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)\}$
   c. $\{(p \vee r) \Rightarrow q\} \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
   d. $(p \wedge q) \Rightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$
   e. $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$
2. Utilice álgebra proposicional para determinar si las siguientes siguientes equivalencias son válidas:
   a. $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
   b. $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$
   c. $(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \overline{q})$
   d. $(p \Leftrightarrow q) \equiv (\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q})$
   e. $((p \vee q) \Rightarrow r) \equiv ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$

En Matemática la relación de implicación se usa como un método de razonamiento: $p \Rightarrow q$ significa ahora q se deducee lógicamente de p. En general, un teorema expresa: si p es verdadera entonces q es verdadera. Bajo este contexto p se denomina hipótesis y q tesis.

La implicancia lógica $p \Rightarrow q$ se puede transcribir al lenguaje común de las siguientes maneras: si p entonces q, p es condición suficiente para q, q es condición necesaria para p, q si p y p sólo si q.

Observación. Bajo el contexto de los teoremas es importante mencionar que:

1. $p \Rightarrow q$ se denomina teorema directo.
2. $q \Rightarrow p$ se denomina teorema recíproco.
3. $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ se denomina teorema inverso.
4. $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ se llama denomina teorema contrarecíproco.

Taller 2. Trabajo grupal.(3 integrantes)

1. Considere el Teorema. SI n^2 es un número impar, entonces n es un número impar. $n \in \mathbb{N}$.
    a. Exprese de tres formas equivalentes el teorema anterior.
    b. Enuncie los teorema recíproco, Inverso y contrarecíproco asociados.
2. En cada caso analice el valor de verdad de los teoremas recíprocos.
    a. Todo Triángulo equilátero es isósceles.
    b. Si n^2 es un número par entonces n es un número par.
    c. Si $a > b$ entonces $a^2 > b^2$.
3. Considere el teorema.

    "Si n^2 es un número par entonces n es un número par."

    Realice un pauteo de los pasos a seguir para realizar al demostración