

Funciones

Concepto de función

Departamento de Matemáticas

Coneptualización previa.

Considerando los temas tratados en las lecturas previas, responda las siguientes interrogantes:

- ❶ ¿Que es una función?
- ❷ ¿Que diferencia existe entre una función y una relación?
- ❸ ¿Cómo se puede representar una función?
- ❹ ¿Qué es el dominio de una función?
- ❺ ¿Que es la imagen de una función?

Coloquialmente una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos, la cual satisface algunas propiedades asociadas tanto a los conjuntos donde se relacionan los elementos, como al tipo de correspondencia entre estos. Por ejemplo la correspondencia entre el número de cédula de identidad y los ciudadanos chilenos es una función. Una de las propiedades de esta correspondencia es que un ciudadano chileno no puede tener dos números de cédula de identidad.

Definición. Una función es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento de un conjunto A un único elemento de un conjunto B . Para denotar una función f de A en B se utilizan las siguientes nomenclaturas:

$$f : A \rightarrow B \quad \text{ó} \quad A \xrightarrow{f} B$$

Observación. Si una función le asigna un valor y a un elemento $x \in A$, es posible denotar esta correspondencia por medio de la siguiente notación

$$y = f(x).$$

Bajo este contexto, la variable x se denomina **variable independiente** y la variable y , **variable dependiente**.

Ejemplo. Considere f una función de variable real, con regla de correspondencia $y = 2x + 3$ o de manera equivalente $f(x) = 2x + 3$. Observe que al evaluar distintos valores de x en la relación de correspondencia es posible obtener el valor de y para cada x . En efecto:

- $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$
- $f(-3) = 2 \cdot -3 + 3 = -3$
- $f(0.5) = 2 \cdot 0.5 + 3 = 4$

Definición. Si f es una función de A en B Se define:

- Dominio de f por:

$$\text{Dom}(f) = \{x \in A / \exists y \in B : f(x) = y\}$$

Es decir en el Dominio de f se encuentran todos los valores de $x \in A$ para los cuales existe un único y en B tal que $f(x) = y$.

- Imagen de f por:

$$\text{Im}(f) = \{y \in B / \exists x \in A : f(x) = y\}$$

Es decir en la Imagen de f se encuentran todos los valores de $y \in B$ para los cuales existe al menos un valor de $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Ejemplo. Determine dominio e imagen de $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$.

Solución. Observe que:

$$\begin{aligned}\text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} / 2x - 3 \neq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{3}{2}\right\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}\end{aligned}$$

Por otro lado, para encontrar la imagen de $f(x)$ despejamos x en términos de y

$$\begin{aligned}f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{x+1}{2x-3} = y \\ &\Leftrightarrow x+1 = 2xy - 3y \\ &\Leftrightarrow x - 2xy = -1 - 3y \Leftrightarrow x = \frac{-1 - 3y}{1 - 2y} (*)\end{aligned}$$

Al igual que para el cálculo del Dominio, se necesario analizar cuando el denominador es distinto de cero. Por lo tanto, $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Ejemplo. Determine dominio e imagen de $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Solución. Recuerde que para el caso de las raíces cuadradas se debe tener presente que el argumento debe ser mayor o igual a 0. Por lo tanto

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \geq 0\}$$

Considerando que la expresión $x^2 + 1 \geq 0$ para cualquier valor de x se tiene que:

$$\text{Dom}f(x) = \mathbb{R}$$

Por otro lado, para calcular la Imagen de $f(x)$:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = y^2 \quad \text{siempre que } y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{siempre que } y^2 - 1 \geq 0$$

Por lo tanto:

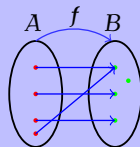
$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0 \wedge y^2 - 1 \geq 0\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0 \wedge y^2 \geq 1\} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 1\} = [1, \infty[$$

Representación de funciones

Para representar funciones se utilizan diferentes tipos de registro, como por ejemplo diagramas, gráficas y tablas, lo cuales se detallan a continuación

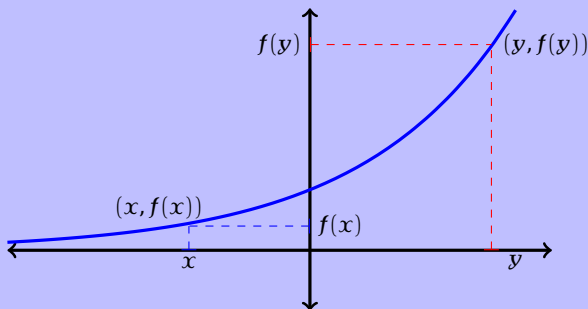
- 1 **Diagramas.** Este tipo de registro se utiliza para ilustrar la correspondencia de todos los elementos de conjunto con algunos o todos los elementos del conjunto.



x		y
1	\rightarrow	1
2	\rightarrow	3
3	\rightarrow	7
4	\rightarrow	9
5	\rightarrow	11
6	\rightarrow	13
7	\rightarrow	15

- 2 **Tablas.** Este tipo de registro se utiliza con la misma finalidad que los diagramas, sin embargo permite tener una visión mas estructurada de la correspondencia entre los elementos del conjunto A y el conjunto B . Es importante señalar que la utilización de tablas esta condicionada al número de elementos de los conjuntos con que se trabaje.

- ③ **Graficas.** Este registro cumple el mismo papel que los registros anteriores. Sin embargo una de las propiedades fundamentales tiene relación con la visión geométrica del comportamiento de la función. Este registro es útil en algunas ramas de la matemática que estudian la modelamiento de fenómenos físicos.



Taller. Trabajo grupal.(3 integrantes)

1 En cada caso determine el dominio de la función.

a $f(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{3x-2}}.$

b $f(x) = \frac{3}{x+|x|}.$

c $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}.$

d $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{4-x}.$

e $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}+1}.$

f $f(x) = \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+1}+1}.$

2 En cada caso determine la imagen de la función.

a $f(x) = \frac{x+4}{x-2}.$

b $f(x) = \frac{3x}{2} + 4.$

c $f(x) = 9 - x^2.$

d $f(x) = \frac{3}{x^2+1}.$

e $f(x) = x|x|.$

f $f(x) = \sqrt{x+1} - 2.$

3 Con una placa metálica rectangular de 2 metros de ancho por 3 metros de largo se va a construir una caja abierta cortando en cada esquina cuadrados iguales. Determine el volumen de la caja en función de la arista del cuadrado y calcule el dominio de contextualización de esta función.

Taller. Trabajo grupal.(3 integrantes)

- 4 Un depósito de agua tiene la forma de un cono circular recto con 4 metros de radio y 15 metros de altura. El depósito está lleno hasta una profundidad de h metros. Si r es el radio del círculo en la parte superior del nivel del agua.
 - a Exprese la altura h en función del radio r y luego exprese el volumen del agua en función del radio, indicando el dominio de la función.
 - b Determine el dominio de contextualización de la función.
- 5 Exprese la superficie de un cilindro circular recto de volumen 9 metros cúbicos en función de su radio r e indique el dominio de definición de la función.
- 6 Se desea construir una caja rectangular abierta con base cuadrada de longitud r y volumen 20.000 centímetros cúbicos. Exprese el área de la superficie de la caja en función de la altura x de la caja.
- 7 Se desea construir una estanque de almacenamiento de modo que su capacidad sea de 30 metros cúbicos. El estanque tiene base cuadrada y cuatro caras verticales todas hechas de concreto y una tapa de acero. Si el concreto tiene un costo de \$1.500 por metro cuadrado y el acero \$3.500 el metro cuadrado, determine el costo total de construcción en función de la longitud de la base cuadrada del estanque

