Relaciones trigonométricas para ángulos no agudos

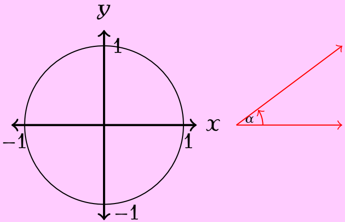
Departamento de Matemáticas

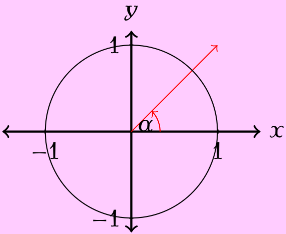
Objetivos

Al término de la clase, el estudiante deberá ser capaz de:

- Conocer la extensión de la definición de las relaciones trigonométricas para ángulos no agudos.
- Calcular relaciones trigonométricas de ángulos no agudos.
- Graficar funciones sinusoidales con desplazamiento vertical

Hasta el momento es posible calcular las seis relaciones trigonométricas para ángulos agudos.
La definición de estas relaciones se pueden extender para ángulos no agudos. Para iniciar esta extensión considere un ángulo agudo α y el círculo unitario centrado en el origen, como se ilustra en la siguiente figura.



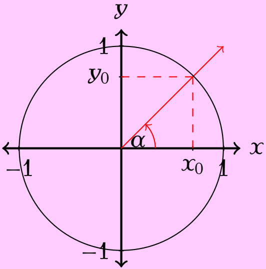


Note que siempre es posible medir un ángulo α considerando como uno de los rayos del ángulo el semieje positivo de las abscisas y vértice el origen. La medida del ángulo se considera en el sentido anti horario, lo cual se ilustra a continuación.

Observe que el rayo terminal del ángulo intersecta a la circunferencia en un punto (x_0, y_0). Considerando este punto y aplicando la definición de relación trigonométrica en el triángulo, es posible deducir que:

$$\cos(\alpha) = \frac{x_0}{1} = x_0$$

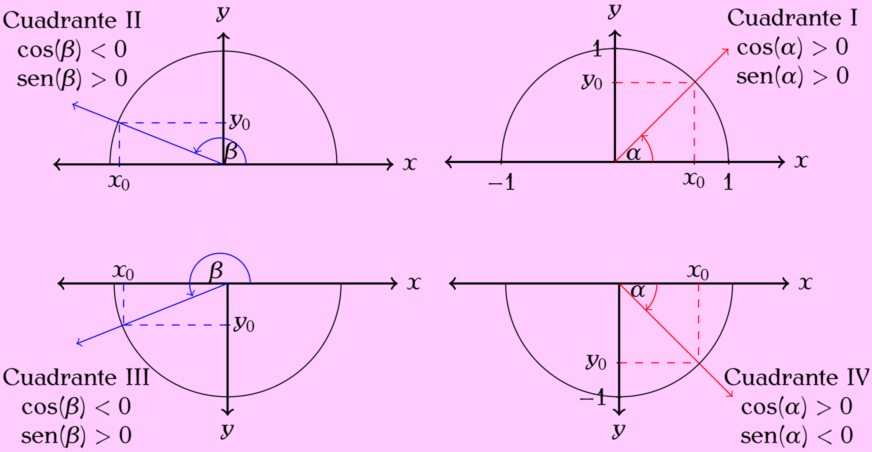
$$\text{sen}(\alpha) = \frac{y_0}{1} = y_0$$



Es decir, el punto determinado por el rayo terminal del ángulo sobre el círculo unitario está dado por $(\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$. Observe que esta construcción permite extender la definición de las relaciones trigonométricas a ángulos que no sean agudos, ya sean estos positivos o negativos.

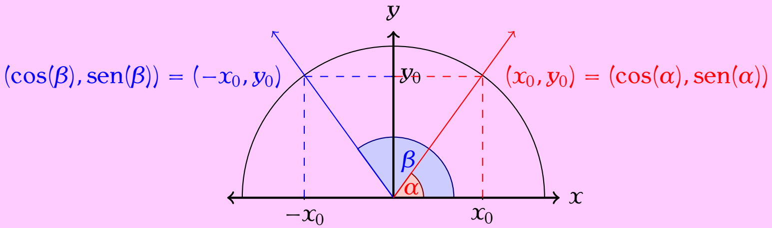
Relaciones trigonométricas para ángulos no agudos.

El signo de las relaciones trigonométricas $\cos(\alpha)$ y $\operatorname{sen}(\alpha)$ dependen de la posición en el plano del punto asociado a cada ángulo definido sobre la circunferencia. En la siguiente figura se ilustra el signo de las relaciones trigonométricas dependiendo si el ángulo define un punto sobre la circunferencia que pertenezca al primer o segundo cuadrante.



Una de las propiedades de la construcción de de las relaciones trigonométricas sobre el circulo tiene relación con poder determinar el valor de las relaciones trigonométricas de un ángulo reduciéndolo al ángulo asociado en el primer cuadrante, lo cual se desarrolla a continuación.

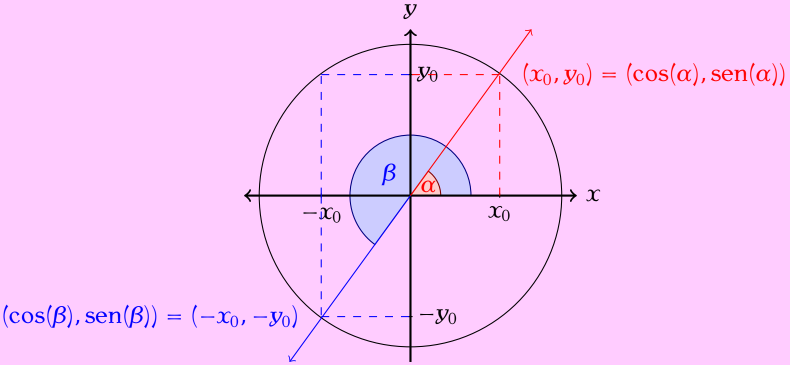
Reducción del segundo al primer cuadrante. Considere β un ángulo cuyo lado terminal está en el segundo cuadrante, como se ilustra en la siguiente figura.



Observe que de la situación anterior es posible deducir que :

$$\beta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[\Rightarrow \begin{cases} \cos(\beta) = -\cos(\pi - \beta) \\ \operatorname{sen}(\beta) = \operatorname{sen}(\pi - \beta) \end{cases}$$

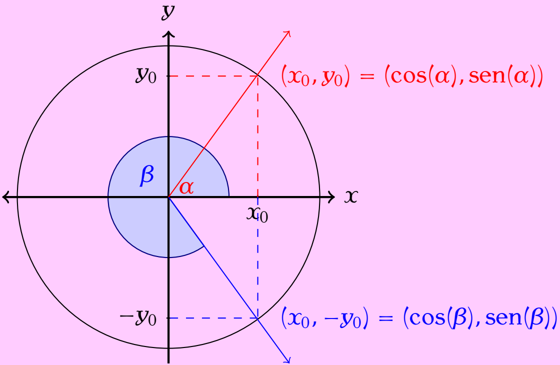
Reducción del tercer al primer cuadrante. Considere β un ángulo cuyo lado terminal está en el tercer cuadrante, como se ilustra en la siguiente figura.



Observe que de la situación anterior es posible deducir que:

$$\beta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\Rightarrow \begin{cases} \cos(\beta) = -\cos(\beta - \pi) \\ \mathrm{sen}(\beta) = -\mathrm{sen}(\beta - \pi) \end{cases}$$

Reducción del cuarto cuadrante al primer cuadrante. Considere β un ángulo cuyo lado terminal está en el cuarto cuadrante, como se ilustra en la siguiente figura.



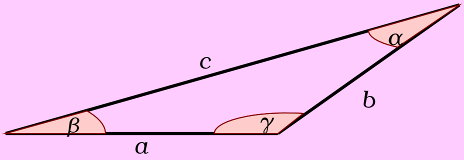
Observe que de la situación anterior es posible deducir que:

$$\beta \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[\Rightarrow \begin{cases} \cos(\beta) = \cos(2\pi - \theta) \\ \mathrm{sen}(\beta) = -\mathrm{sen}(2\pi - \beta) \end{cases}$$

1. En cada caso, determinar los valores de las restantes funciones trigonométricas sabiendo que:
   a. $\operatorname{sen}(\alpha) = -\frac{1}{2}$, con α en el tercer cuadrante.
   b. $\cos(\alpha) = \frac{2}{5}$, con α en el cuarto cuadrante.
   c. $\tan(\alpha) = 2$, con α en el tercer cuadrante.
   d. $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{3}$ y $\cos\alpha < 0$.
2. Determine, sin usar calculadora, el valor exacto de las siguientes expresiones:
   a. $\cos(225°)$
   b. $\tan(150°)$
   c. $\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{6})$
   d. $\sec(\frac{4\pi}{3})$
   e. $\cot(\frac{7\pi}{4})$
   f. $\csc(300°)$
   g. $\operatorname{sen}(315°)$
   h. $\cos(-150°)$
3. Si $3\cot(\alpha) = 2$ con α en el tercer cuandrante, calcule $\dfrac{10\operatorname{sen}(\alpha) - 6\cos\alpha}{4\operatorname{sen}(\alpha) + 3\cos(\alpha)}$
4. Si $\cot(\alpha) = \dfrac{a}{2}$ con α en el primer cuadrante, calcule $\operatorname{sen}(\alpha)$.
5. Si $\operatorname{sen}(x)\tan(x) = 2$, calcule $\cos(x)$.
6. Si $\alpha = \dfrac{11\pi}{4}$, determine el valor de $\operatorname{sen}^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) + 2\tan(\alpha)$.

Con la ampliación de las relaciones trigonométricas para ángulos no agudos y los siguientes teoremas es posible abordar problemas de aplicación que involucran todo tipo de triángulo,

Teorema del Coseno. En un triángulo cualquiera con su elementos dispuestos de la forma

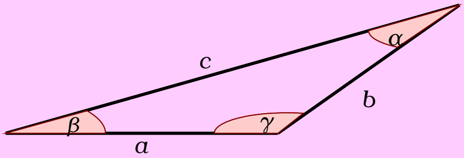


Se tiene que son válidas las relaciones:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{aligned}$$

Observación. El teorema del coseno es una generalización del Teorema de Pitágoras, de hecho si $\gamma = 90^\circ$, se obtiene $c^2 = a^2 + b^2$, que es lo que establece el Teorema de Pitágoras.

Teorema del seno. En un triángulo cualquiera con su elementos dispuestos de la forma

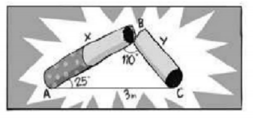


Se tiene que:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{c}$$

1. Dos jóvenes que llevan radios están en la intersección de dos caminos rurales que se cruzan en un ángulo de 105°. Uno comienza a caminar por uno de los caminos a una velocidad de 5 millas por hora; al mismo tiempo la otro camina por el segundo camino al doble de velocidad. Los radios tiene un alcance de 10 millas. ¿Durante cuánto tiempo se mantendrán en comunicación las muchachas?

2. El cartel de una campaña publicitaria contra el tabaco se muestra en la figura. ¿Cuánto mide el cigarro que aparece en él?



3. Una torre de 30 m para agua está situada en lo alto de un cerro. De una distancia de 120 m bajando por el cerro, se observa que el ángulo formado entre lo alto y la base de la torre es de 8º. Encuentre el ángulo de inclinación del cerro.

4. Un árbol en una ladera proyecta una sombra de 215 pies ladera abajo. Si el ángulo de inclinación de la ladera es 22º con respecto a la horizontal y el ángulo de elevación del Sol es 52º, encuentre la altura del árbol.