Inecuaciones con Valor Absoluto

Departamento de Matemáticas

Objetivos

Al terminar de estudiar esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

- Resolver ecuaciones e inecuaciones que involucren valor absoluto.
- Utilizar inecuaciones con valor absoluto para resolver problemas de aplicación.

Conceptualización inicial.

En base a las lecturas previas responda las siguientes preguntas.

1. Si $|x| = |y|$ ¿entonces $x = y$?
2. ¿Bajo que condiciones $|x + y| = |x| + |y|$?
3. ¿Bajo que condiciones $|x - y| = |x| + |y|$?
4. ¿Si $|x - 1| < 2$ entonces $x - 1 < 2$?
5. ¿Si $x - 1 < 2$ entonces $|x - 1| < 2$?

Definición. Considere x un número real. Se define el valor absoluto de x, el cual se denota por $|x|$, por la distancia de x al cero.

Ejemplo. $|2| = 2$, ya que $2 > 0$.

Ejemplo. $|-4| = -(-4) = 4$, ya que $-4 < 0$.

Propiedades básicas del valor absoluto. Observe que de la definición de valor absoluto es posible establecer:

- $|x| \geq 0$.
- $|-x| = |x|$.
- $|x| = |y|$ si $x = y$ o $x = -y$.
- $\Big|xy\Big| = |x| \cdot |y|$.
- $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Para determinar el conjunto solución de ecuaciones que involucran valor absoluto es necesario utilizar esencialmente las propiedades básicas de valor absoluto, descritas anteriormente. A continuación se desarrollan algunos ejemplos que servirán de base en a resolución de este tipo de ecuaciones

Ejemplo. Determine el conjunto solución de la ecuación $|2x-1|=2$.

Solución. En este caso, observe que la ecuación dada es equivalente a:

$$|2x-1|=|2|$$

Por lo tanto al aplicar la propiedad $|x|=|y|$ si $x=y$ o $x=-y$, se obtiene

$$|2x-1|=2 \Leftrightarrow [2x-1=2 \vee 2x-1=-2]$$

Así el conjunto solución de la ecuación $|2x-1|=2$, es

$$S=\left\{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\}$$

Ejemplo. Determine el conjunto solución de la ecuación $|2x-1| = |3x+4|$.

Solución. Observe que al aplicar la propiedad $|x| = |y|$ si $x = y$ o $x = -y$, se obtiene

$$|2x-1| = |3x+4| \Leftrightarrow [2x-1 = 3x+4 \vee 2x-1 = -3x-4]$$

Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación $|2x-1| = |3x+4|$, es:

$$S = \left\{ -5, -\frac{3}{5} \right\}$$

Actividad Colaborativa. Grupo de 3 integrantes.

1. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones indicando propiedades y procedimientos adecuados a utilizar.

   a. $|5x + 1| = |3x + 3|$.

   b. $|2x + 1| = x + 2$.

   c. $|x - 1| + |x - 3| = |x + 1|$.

2. Según la revista Europea Cars2, la diferencia del precio de venta del citycar Shua (de una empresa emergente china) y el valor promedio de venta de los citycar europeos será igual a 1500 euros. Si el valor promedio de venta es de 12000 euros. Determine los posibles valores de Shua.

Para resolver inecuaciones con valor absoluto es necesario tener presente las siguientes propiedades:

1. $|x| \geq 0$.
2. $|x| \leq a \Leftrightarrow [-a \leq x \wedge x \leq a]$.
3. $|x| \geq a \Leftrightarrow [x \leq -a \vee x \geq a]$.

Ejemplo. Determine el conjunto solución de la inecuación $\left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right| \leq 1$.

Solución. Observe que la inecuación por la propiedad 2 se tiene que:

$$\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left[-1 \leq \frac{x-1}{2x+1} \wedge \frac{x-1}{2x+1} \leq 1\right]$$

Por lo tanto, para determinar el conjunto solución es necesario resolver dos inecuaciones racionales y posteriormente intersectar los conjuntos soluciones. Es decir:

$$Solucion = solucion_1 \cap solucion_2$$

Inecuación 1. Considere la inecuación $-1 \leq \frac{x-1}{2x+1}$, la cual es equivalente a:

$$0 \leq \frac{3x}{2x+1}$$

Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación 1 es:

$$sol_1 = \Big] -\infty, -\frac{1}{2}\Big[\cup \Big[0, \infty\Big] = \mathbb{R} - \Big[-\frac{1}{2}, 0\Big[$$

Inecuación 2. Considere la inecuación $\frac{x-1}{2x+1} \leq 1$, la cual es equivalente a:

$$0 \leq \frac{x+2}{2x+1}$$

Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación 2 es:

$$sol_2 = \Big] -\infty, -2\Big] \cup \Big] -\frac{1}{2}, \infty\Big] = \mathbb{R} - \Big] -2, -\frac{1}{2}\Big]$$

Por lo tanto la solución de la inecuación $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| \leq 1$ es:

$$Solucion = sol_1 \cap sol_2 = \Big] -\infty, -2\Big] \cup \Big[0, \infty\Big[$$

Ejemplo. Determine el conjunto solución de la inecuación $|x-2|+|x-3| \geq 3$.

Solución. Para resolver la inecuación, es necesario utilizar los puntos críticos asociados a los factores con valor absoluto. En nuestro caso los puntos críticos asociados son

$$x = 2 \wedge x = 3$$

Considere la siguiente tabla de signos asociada,

$-\infty$	2	3	∞
$x-2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$

Para resolver la inecuación es necesario analizar los siguientes casos:

- $x \in]-\infty, 2[$. En este caso al inecuación dada es equivalente a:

$$-x + 2 - x + 3 \geq 3 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Así, en este caso se tiene la solución $sol_1 =]-\infty, 1]$

- $x \in]2,3[$. En este caso al inecuación dada es equivalente a:

$$x - 2 - x + 3 \geq 3 \Leftrightarrow 3 \leq 1 (\Rightarrow \mid \Leftarrow)$$

  Así, en este caso se tiene la solución $sol_2 = \emptyset$

- $x \in]3, \infty[$. En este caso al inecuación dada es equivalente a:

$$x - 2 + x - 3 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 4$$

  Así, en este caso se tiene la solución $sol_3 = [4, \infty[$

De lo anterior es posible establecer que la solución de la inecuación

$$|x - 2| + |x - 3| \geq 3$$

es

$$Sol = sol_1 \cup sol_2 \cup sol_3 =]-\infty, 1] \cup [4, \infty[$$

1. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones indicando propiedades y procedimientos adecuados a utilizar.

    a. $|5x+1|+|3x+3|<2x+1.$

    b. $|2x+1|-|x-1|\leq 3x+1.$

    c. $|x^2+3x|+x|x+3|\geq 8.$

2. De acuerdo con una encuesta de bienes raíces, la diferencia entre el precio de arriendo de un departamento(de un dormitorio) en la comuna de Santiago Centro y el valor promedio de arriendo no es mayor a \$30,000. Determine el precio más alto y el más bajo del departamento si el valor promedio es de \$210.000.

3. En la fabricación de artefactos, la dimensión promedio de una parte es 0.01 cm. Utilizando el símbolo de valor absoluto, exprese el hecho de que una medida individual x de una parte, no debe diferir del promedio en más de 0.005 cm.