Introducción a la Lógica Simbólica.

Departamento de Matemáticas

Coneptualización previa.

Considerando los temas tratados en las lecturas previas, responda las siguientes interrogantes:

1. ¿Qué es la Lógica?
2. ¿Qué es una proposición lógica?
3. ¿Qué es un conectivo lógico?
4. ¿Qué es una Tautología?
5. ¿Qué es una Contradicción?
6. ¿Cómo se clasifican las proposiciones lógicas?

Definición. La Lógica es la ciencia que estudia las condiciones formales de validez de una inferencia y, en general, de una argumentación cualquiera. Es puramente formal y la verdad de sus principios no depende de hechos empíricos.

Proposición. Una proposición es una sentencia declarativa la cual puede ser verdadera o falsa, pero no ambas al mismo tiempo.

Ejemplo. Considere los enunciados.

a. "Las rosas son rojas y el mar es azul."

b. "2 es mayor que 3."

c. "todos los cuadriláteros son rectángulos."

d. "$x < 3$".

e. "esta afirmación es falsa."

Conectivos. Las proposiciones lógicas se pueden combinar para confeccionar proposiciones lógicas mas complejas, denominadas proposiciones compuestas. Para confeccionar este tipo de proposiciones se utilizan los conectivos lógicos.

Los conectivos lógicos elementales son:

a. **Disyunción.** También denominada suma lógica. La disyunción entre p y q se denota por $p \vee q$.

b. **Conjunción.**También denominada producto lógico. La conjunción entre p y q se denota por $p \wedge q$.

c. **Condicional.** También denominada implicancia lógica. La implicancia lógica entre p y q se denota por $p \Rightarrow q$.

d. **Bicondicional.** El bicondicional p y q se denota por $p \Leftrightarrow q$.

Observación. Las proposiciones que no están conformadas con conectivos lógicos se denominan proposiciones simples.

Al conectar dos proposiciones simples se conforma una proposición compuesta, cuyo valor de verdad depende tanto de las proposiciones simples como del conectivo utilizado.

a. **Disyunción.** $p \vee q$ es falsa solo si p y q son proposiciones falsas.
b. **Conjunción.** $p \wedge q$ es verdadera solo si p y q son proposiciones verdaderas.
c. **Condicional.** $p \Rightarrow q$ es falsa solo si p es verdadera y q es falsa.
d. **Bicondicional.** $p \Leftrightarrow q$ es verdadera solo si p y q tienen el mismo valor de verdad.

El valor de verdad de las proposiciones anteriores se pude representar en las siguientes tablas

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1. Considere las siguientes funciones proposicionales
   - $p(x)\ :\ x^2+1\ >\ 3$
   - $q(x)\ :\ x$ es un número primo
   - $r(x)\ :\ x$ es divisible por 4

   Determine el valor de verdad de:

   a) $\overline{r(2)} \Rightarrow \left(\overline{p(1)} \vee q(3)\right)$

   b) $\left[r(8) \vee \overline{(r(6) \vee p(2))}\right] \Rightarrow q(9)$

2. Determine el valor de verdad de la siguiente proposición compuesta: $[(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee q)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$ sí:
   - $p : \sqrt[3]{5^3+3^3} = 5+3$
   - $q : 2^4 \neq 4^2$
   - $r : a^3 - b^3 = (a-b)^3$

3. Si la proposición compuesta $[(p \vee q) \Rightarrow p] \Rightarrow [r \Rightarrow p]$ es falsa, determine le valor de verdad de:
   - $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \overline{(p \vee r)}$
   - $[(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow (r \vee q)] \Leftrightarrow p$

Dada una proposición lógica compuesta, es posible clasificarla según el valor de verdad de la proposición.

a) Si la proposición es siempre verdadera, independiente de las proposiciones simples que la compongan, entonces esta proposición se denomina **Tautología**.

b) Si la proposición es siempre falsa, independiente de las proposiciones simples que la compongan, entonces la proposición se denomina **Contradicción**.

c) Si el valor de verdad de la proposición depende de las proposiciones simples que la componen, entonces la proposición se denomina **Contingencia**.

Observación. Para determinar el valor de verdad de una proposición es posible construir su tabla de verdad asociada.

Analice el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

a) $(p \wedge q) \Rightarrow q$. Observe que la tabla asociada a la proposición es:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Por lo tanto la proposición $(p \wedge q) \Rightarrow q$ es una Tautología.

b) $(p \wedge q) \vee q$. Observe que la tabla asociada a la proposición es:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	0	0

Por lo tanto la proposición $(p \wedge q) \vee q$ es una contingencia.

1. Considere las proposiciones p : los precios son elevados y q : los precios no bajan. Transcriba al lenguaje corriente las siguientes expresiones simbólicas:

   - $\overline{p \vee \overline{q}}$
   - $p \wedge q$
   - $p \wedge \overline{q}$
   - $\overline{p} \wedge \overline{q}$

2. Dos proposiciones compuestas se denominan equivalentes si sus tablas de verdad asociadas son equivalentes. Utilizando esta definición verifique las siguientes equivalencias.

   - $[p \wedge \overline{q}] \Rightarrow r \equiv \overline{p} \vee (q \vee r)$.
   - $[((p \wedge q) \vee r) \wedge \overline{q}] \equiv (r \wedge (\overline{q}))$

3. Se define Δ como la conjunción negativa, es decir, $p \Delta q$ se lee ni p ni q. Construya la tabla de verdad de $p \Delta q$ y Verifique si

   - $p \vee q \equiv (p \Delta q) \Delta (p \Delta q)$
   - $p \wedge q \equiv (p \Delta p) \Delta (q \Delta q)$

4. Dadas p y q proposiciones, definimos el operador lógico $p \diamondsuit q$ como la proposición que es verdadera solo cuando q es verdadera y p es falsa. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

   a. $(\sim p) \diamondsuit (\sim q) \equiv q \diamondsuit p$.
   b. $(p \vee q) \diamondsuit r \equiv (p \diamondsuit r) \wedge (q \diamondsuit r)$

5. Utilizando tablas de verdad clasifique las siguientes proposiciones:
   - a) $\{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\} \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$
   - b) $\left\{\overline{(\overline{p} \vee q)} \wedge p\right\} \Leftrightarrow p$
   - c) $[(p \vee r) \wedge [q \Rightarrow (p \vee r)]\} \vee \overline{p}$
   - d) $\overline{[(p \vee q) \wedge (p \vee r)]} \Rightarrow p$

6. En cada caso determine la proposición asociada a cada tabla de verdad:

a)

p	q	r	$<>$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

b)

p	q	$<>$
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

c)

p	q	$<>$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1