Funciones trigonométricas

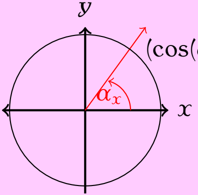
Departamento de Matemáticas

Tomando en cuenta que las relaciones trigonométricas fueron extendidas a ángulos no agudos, ya sean estos positivos o negativos. Es posible definir un conjunto de funciones, denominadas funciones trigonométricas, las cuales de definen a continuación.

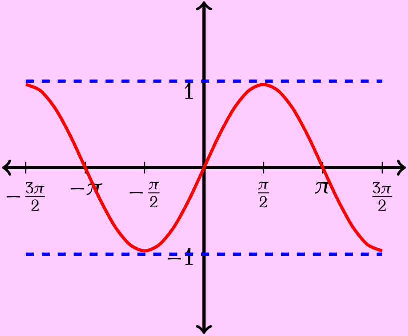
Se define la función seno por:

$$\begin{array}{rcl} \text{sen} : \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \to & \text{sen}(x) = \text{sen}(\alpha_x) \end{array}$$

Donde α_x es el ángulo de medida x radianes definido por x sobre la circunferencia unitaria.



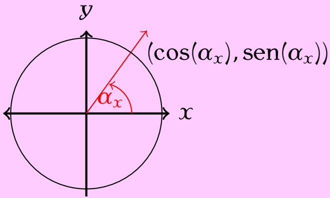
La gráficamente la función $\text{sen}(x)$ se puede representar por:



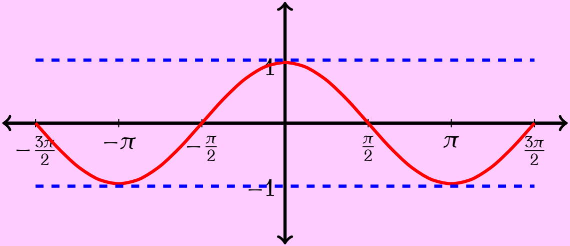
Se define la función coseno por:

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\rightarrow [-1,1] \\ x &\rightarrow \cos(x) = \cos(\alpha_x) \end{aligned}$$

Donde α_x es el ángulo de medida x radianes definido por x sobre la circunferencia unitaria.



La gráfica de la función $\cos(x)$ se ilustra en la siguiente figura.

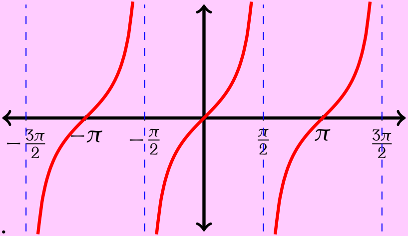


Considerando las relaciones trigonométricas y las definiciones de las funciones seno y coseno es posible definir las siguientes funciones:

Función Tangente. Se define la función Tangente por:

$$\begin{aligned} \mathrm{tg} : \mathbb{D} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \mathrm{tg}(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} \end{aligned}$$

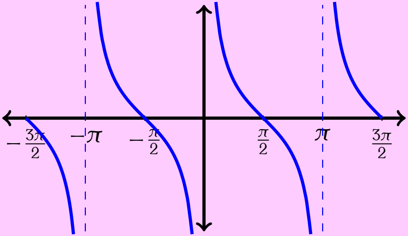
Donde $\mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.



Función Cotangente. Se define la función cotangente por:

$$\begin{aligned} \cot : \mathbb{D} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)} \end{aligned}$$

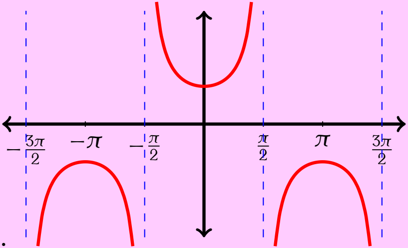
Donde $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.



Función Secante. Se define la función secante por:

$$\begin{array}{rcl} \sec : \mathbb{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} \end{array}$$

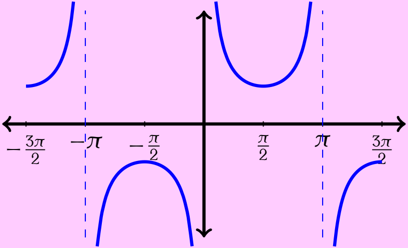
Donde $\mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.



Función Cosecante. Se define la función cosecante por:

$$\begin{array}{rcl} \csc : \mathbb{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \csc(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)} \end{array}$$

Donde $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.



Observación. De las definiciones anteriores es posible deducir que:

- Las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$, son periódicas de período 2π.
- $f(x) = \text{sen}(x)$ es impar, es decir, $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- $g(x) = \cos(x)$ es par, es decir, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- La función $f(x) = \text{tg}(x)$ y $g(x) = \cot(x)$, son periódicas de periodo π. Mientras que las funciones $h(x) = \sec(x)$ y $t(x) = \csc(x)$ son periódicas de periodo 2π.
- La función $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{tg}(x)$, es biyectiva.
- La función $g :]0, \pi[\to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \cot(x)$, es biyectiva.

Las funciones trigonométricas permiten modelar diversos problemas físicos. De ahi la iportancia de conocer el comportamiento de funciones del tipo

$$f(x) = A\text{sen}(Bx + C) \wedge g(x) = A\cos(Bx + C)$$

Donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ y $B \neq 0$. A continuación se analizan las funciones mencionadas anterioemente y se desarrollan un conjunto de ejemplos donde se ilustra su utilidad en la resolución de problemas aplicados, como se ilustran en el siguiente ejemplo:

Ejemplo. La variación N del nivel del agua en un puerto de la región relacionada con el nivel medio del mar para un periodo particular de 24 hrs se modela mediante la función sinusoidal:

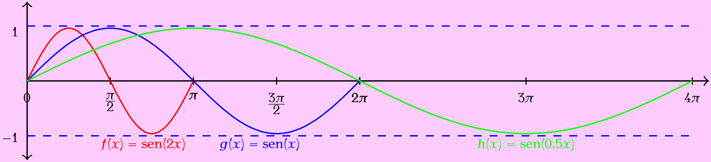
$$N(t) = 0.8\text{sen}\left(\frac{t\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)$$

donde t es el tiempo en horas, con $t \in [0, 24]$ y N está medido en metros. Determine en que instantes el nivel del agua es mínimo y máximo. Ademas calcule tales extremos.

Considere $f(x) = A\text{sen}(Bx)$, donde $A \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathbb{R}^+, B \neq 1$. Observe que:

- f es una función periódica, de periodo $P = \dfrac{2\pi}{B}$.
- El valor máximo de f está dado por $|A|$, mientras que el valor mínimo es $-|A|$. Bajo este contexto $|A|$ se denomina amplitud de f.
- Los ceros de f son de la forma $\dfrac{k\pi}{B}$, donde $k \in \mathbb{Z}$.
- La gráfica de f , es una expansión de la grafica de $g(x) = \text{sen}(x)$ para $0 < B < 1$. Mientras que si $B > 1$ la gráfica de f se obtiene comprimiendo la grafica de $g(x) = \text{sen}(x)$

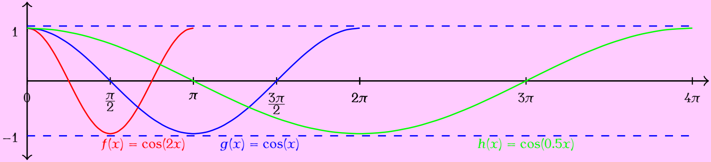
Ejemplo. Considere las funciones $f(x) = \text{sen}(2x)$y $h(x) = \text{sen}(0.5x)$. Observe que las gráficas de f, h están dadas por:



Considere $f(x) = A\cos(Bx)$, donde $A \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathbb{R}^+, B \neq 1$. Observe que:

- f es una función periódica, de periodo $P = \dfrac{2\pi}{B}$.
- El valor máximo de f está dado por $|A|$, mientras que el valor mínimo es $-|A|$. Bajo este contexto $|A|$ se denomina amplitud de f.
- Los ceros de f son de la forma $\dfrac{\pi}{2B} + \dfrac{k\pi}{B}$, donde $k \in \mathbb{Z}$.
- La gráfica de f , es una expansión de la grafica de $g(x) = \cos(x)$ para $0 < B < 1$. Mientras que si $B > 1$ la gráfica de f se obtiene comprimiendo la grafica de $g(x) = \cos(x)$

Ejemplo. Considere las funciones $f(x) = \cos(2x)$ y $h(x) = \cos(0.5x)$. Observe que las gráficas de f, h están dadas por:



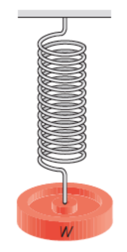
1. En cada caso, determine periodo amplitud, desfase y gráfica de la función trigonométrica dada:

   a. $f(x) = 3\cos(6x - \pi)$
   b. $f(x) = -2\cos(2x - 3\pi) + 1$
   c. $f(x) = -4\text{sen}(x - \pi)$
   d. $f(x) = 2\text{sen}(.5x - \pi)$

2. Un peso de 6 libras que cuelga del extremo de un resorte se estira el pie por debajo de la posición de equilibrio y se suelta (ver figura). Si la resistencia del aire y la fricción se desprecian, entonces la distancia x del peso peso a la posición de equilibrio con respecto al tiempo t (en segundos) está dada por:

$$x(t) = \frac{1}{3}\cos(8t)$$

Determine periodo, amplitud y gráfica de x para $0 \leq t \leq \pi$



3. La variación N del nivel del agua en un puerto de la región relacionada con el nivel medio del mar para un periodo particular de 24 hrs se modela mediante la función sinusoidal:

$$N(t) = 0.8\mathrm{sen}\left(\frac{t\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)$$

donde t es el tiempo en horas, con $t \in [0, 24]$ y N está medido en metros. Determine en que instantes el nivel del agua es mínimo y máximo. Ademas calcule tales extremos.

4. La corriente en un circuito eléctrico está dada por

$$I(t) = 30\cos(120\pi t - \pi), 0 \leq t \leq \frac{1}{20}$$

Donde I se mide en amperios. Determine amplitud A, periodo P y gráfico de I.