Polinomios

Fracciones Parciales

Definición. Toda expresión de la forma:

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

se denomina fracción racional si $p(x)$ y $q(x)$ polinomios con coeficientes reales. Si m y n representan los grados de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ respectivamente, entonces se define el grado de $R(x)$ por:

$$\rho(R(x)) = m - n = \rho(p(x)) - \rho(q(x))$$

Ejemplo.

1. $R(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ es una fracción racional de grado $\rho = -2$.
2. $R(x) = \dfrac{3x^3+2x-1}{x^2+6x+1}$ es una fracción racional de grado $\rho = 1$.
3. $R(x) = \dfrac{x-2}{x-4}$ es una fracción racional de grado $\rho = 0$.

Definición. Una fracción racional $R(x)$, se denomina propia si $\rho(R(x)) < 0$, caso contrario se denomina impropia.

Definición. Dos polinomios $p(x)$, $q(x)$ se denomina primos entre si, si no admiten divisores comunes.

Ejemplo. $p(x) = x^2 - 1$ y $q(x) = x^2 - 3x + 2$ no son primos relativos ya que $q(x) = x - 1$ es un divisor común.

El siguiente teorema generaliza la descomposición de una fracción racional en fracciones parciales.

Teorema. Considere la fracción racional propia $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ tal que:

$$q(x) = q_1(x) \cdot q_2(x) \cdots q_n(x)$$

Donde $q_1(x), q_2(x), ..., q_n(x)$ son polinomios no nulos y dos a dos primos relativos entre si, entonces existen polinomios $t_1(x), t_2(x), ...t_n(x)$ tal que:

$$R(x) = \frac{t_1(x)}{q_(x)} + \frac{t_2(x)}{q_2(x)} + ... + \frac{t_n(x)}{q_n(x)}$$

y $\rho(t_i(x)) < \rho(q_i(x)), i = 1, 2, ..., n.$

Algunos casos especiales.

Considere una fracción racional propia $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, entonces:

1. Si $q(x) = (a_1x + b_1)(a_1x + b_2)...(a_nx + b_n)$, donde $a_ix + b_i$ y $a_jx + b_j$ son primos relativos si $i \neq j$, entonces existen $A_1, ...A_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$R(x) = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + ... + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

2. Si $q(x) = (a_1x + b_1)^{n_1}(a_2x + b_2)^{n_2}...(a_kx + b_k)^{n_k}$, donde los polinomios $a_ix + b_i$ y $a_jx + b_j$ son primos relativos si $i \neq j$, entonces existen constantes $A_{n_1 1}, ...A_{n_1 n_1}, ..., A_{n_k 1}, ..., A_{n_k n_k} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$R(x) = \frac{A_{n_1 1}}{a_1x + b_1} + \frac{A_{n_1 2}}{(a_1x + b_1)^2} + ... + \frac{A_{n_1 n_1}}{(a_1x + b_1)^{n_1}} + ... + \frac{A_{n_k n_k}}{(a_nx + b_n)^{n_k}}$$

3. Si $q(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2)...(a_kx^2 + b_kx + c_k)$, donde los polinomios $a_ix^2 + b_ix + c_i$ y $a_jx^2 + b_jx + c_j$ son primos relativos si $i \neq j$, entonces existen constantes $A_1, B_1, ...A_n, B_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$R(x) = \frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + ... + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}$$

En cada caso determine la descomposición en fracciones parciales de la fracción racional dada.

1. Considere $R(x) = \dfrac{2x^2 + 9x + 6}{x\,(x+2)\,(x+1)}$, observe que:

$$R(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x}$$

Es decir:

$$2x^2 + 9x + 6 = ax(x+2) + bx(x+1) + c(x+1)(x+2)$$

Si considera la igualdad anterior y los valores para x, 0, -1 y -2 se obtiene:

$$x = 0 \qquad \Rightarrow 6 = 2c \Rightarrow c = 3$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow -1 = -a \Rightarrow a = 1$$

$$x = -2 \quad \Rightarrow -4 = 2b \Rightarrow b = -2$$

Por lo tanto $R(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{3}{x}$

2. Considere $R(x) = \dfrac{x+1}{x^3+x}$, observe que:

$$R(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

Es decir:

$$x + 1 = a(x^2+1) + (bx+c)x$$

Si considera la igualdad anterior y los valores para x, 0, -1 y 1 se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= 0 && \Rightarrow 1 = a \Rightarrow a = 1 \\ x &= -1 && \Rightarrow 0 = 2a + b - c \\ x &= 1 && \Rightarrow 2 = 2a + b + c \Rightarrow b = -2, c = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto $R(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{-x+1}{x^2+1}$

1. En cada caso descomponga en fracciones parciales la fracción racional dada
   a. $R(x) = \dfrac{6x^2 + 8x + 4}{2x^3 + x^2 - 2x - 1}$
   b. $R(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$
   c. $R(x) = \dfrac{x^3 + 7x^2 + 3x + 6}{x^4 + x^2 + 2x^3 + 2x}$
2. Determine si $a + b + c + d = 10$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que:

$$\frac{6x^3 + 3x^2 - 5}{x^4 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

3. Considere los polinomios $p(x) = x^2 - x - 6$ y $q(x) = x^4 - x^3 - hx^2 - kx - 6$.
   a. Determine si existen valores reales de h y k de modo que los binomios $x - 3$ y $x + 2$ dividan a $q(x) = x^4 - x^3 - hx^2 - kx - 6$.
   b. Utilice los valores de de h y k determinados en el ítem anterior para descomponer en fracciones parciales la fracción racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$.