Axiomas de Orden

Departamento de Matemáticas

Objetivos

Al terminar de estudiar esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

- Comprender la diferencia entre inecuación *y* desigualdad
- Conocer los axiomas de orden en $\mathbb{R}$
- Resolver inecuaciones lineales.
- Expresar la solución de una inecuación lineal en términos de intervalos.

En base a las lecturas previas responda las siguientes preguntas.

1. ¿Que es una desigualdad?
2. ¿Que es una inecuación?
3. ¿Que es un intervalo abierto?
4. ¿Que es un intervalo cerrado?
5. ¿Es verdadero que si c es negativo y $a - b$ negativo entonces $bc - ac$ es negativo?

Definición. El conjunto de los números Reales se denota por $\mathbb{R}$. El cual esta conformado por: el conjunto de los números reales positivo $\mathbb{R}^+$, el conjunto de los números reales negativos $\mathbb{R}^-$ y el conjunto 0. Es decir:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

De la definición es posible formular la ley de tricotomía, la cual establece:

Ley de tricotomía. Si $x \in \mathbb{R}$ entonces se cumple sólo una de las siguientes afirmaciones:

- $x \in \mathbb{R}^-$
- $x = 0$
- $x \in \mathbb{R}^+$

Observación. Una de las propiedades relevantes de los números reales positivos, tiene relación con la clausura de la suma y la multiplicación, es decir:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, x + y \in \mathbb{R}^+ \wedge xy \in \mathbb{R}^+$$

Definición. En el conjunto de los números reales se definen las siguientes relaciones de orden.

1. **Relación mayor que.** Considere $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces a es mayor que b si $a - b \in \mathbb{R}^+$, lo cual se denota por:

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+$$

2. **Relación menor que.** Considere $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces a es menor que b si $b - a \in \mathbb{R}^+$, lo cual se denota por:

$$a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$$

   Observe que $a < b \Leftrightarrow b > a$.

3. **Relación mayor o igual que.** Considere $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces a es mayor o igual que b si $a > b \vee a = b$, lo cual se denota por:

$$a \geq b \Leftrightarrow [a > b \vee a = b]$$

4. **Relación menor o igual que.** Considere $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces a es menor o igual que b si $a < b \vee a = b$, lo cual se denota por:

$$a \leq b \Leftrightarrow [a < b \vee a = b]$$

   Observe que $a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$.

Analice el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones:

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$ entonces $a^2 < b^2$.
2. Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$ entonces $a^3 < b^3$.
3. Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a \leq b$ entonces $a < b$.
4. Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a > b$ entonces $a \geq b$.
5. Considere $a, b, c, \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < 0$ y $c > 0$ entonces
$$a^2 < b^2 < c$$
6. Considere $a, b, c, \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < 0$ y $c < 0$ entonces
$$ac < bc$$

Para utilizar las relaciones de orden, definidas anteriormente, en la resolución de inecuaciones o problemas de aplicación es necesario tener presente los siguientes axiomas de orden.

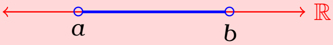
Axiomas. Considere $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces son válidas las siguientes afirmaciones:

1. $a^2 \geq 0$.
2. Si $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$.
3. Si $a > b > 0 \Rightarrow b^{-1} > a^{-1}$.
4. Si $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$
5. Si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$.
6. $a \leq b \Leftrightarrow [a + c \leq b + c]$.
7. Si $c > 0$ y $a \leq b$ entonces $ac \leq bc$.
8. Si $c < 0$ y $a \leq b$ entonces $ac \geq bc$.

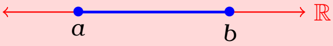
Intervalos

Definición. Considere $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $a < b$, se define el intervalo:

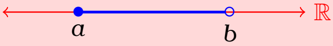
1. abierto $]a, b[$, por $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Gráficamente:



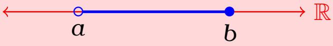
2. cerrado $[a, b]$, por $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Gráficamente:



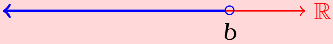
3. semi abierto por derecha $[a, b[$, por $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$. Gráficamente:



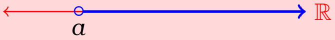
4. semi abierto por izquierda $]a, b]$, por $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$. Gráficamente:



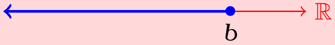
5. infinito abierto por por derecha $]-\infty, b[$, por $]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$. Gráficamente:



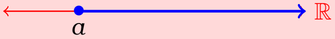
6. infinito abierto por la izquierda $]a, +\infty[$, por $]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.
Gráficamente:



7. infinito cerrado por la derecha $]-\infty, b]$, por $]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.
Gráficamente :



8. infinito cerrado por la izquierda $[a, +\infty[$, por $[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.
Gráficamente:



Definición. Una desigualdad es una relación matemática que compara el valor de dos números o expresiones algebraicas (del tipo mayor o menor). Por ejemplo, $2 < 5$ es una desigualdad.

Definición. Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas que involucra una o mas incógnitas. Por ejemplo:

- $\dfrac{2x+y}{x-y} \leq 1$
- $\dfrac{2x-x^2}{x-1} \leq x+1$
- $\sqrt{x+x^2-3}+\sqrt{x+1} \leq 1$

Definición. Una inecuación con una incógnita se denomina lineal si esta es de la forma:

$$ax+b<0 \vee ax+b \leq 0 \vee ax+b>0 \vee ax+b \geq 0$$

Observación. Para resolver una inecuación lineal es necesario aplicar los axiomas de orden, mas específicamente las leyes de cancelación de la adición y multiplicación

Ejemplos

En cada caso determine el conjunto solución de la inecuación dada

1. $2x - 1 \leq 5$
   Solución. Observe que.

$$\begin{aligned} 2x - 1 \leq 5 &\Leftrightarrow 2x - 1 + 1 \leq 5 + 1 && \text{[Ley de cancelación de la adición]} \\ &\Leftrightarrow 2x \leq 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x \leq \frac{1}{2} \cdot 6 && \text{[Ley de cancelación de la multiplicación]} \\ &\Leftrightarrow x \leq 3 \end{aligned}$$

   Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación es:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\} =]-\infty, 3]$$

2. $\dfrac{x}{2} - 3 > \dfrac{x}{3} + 1$.

Solución. Observe:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2} - 3 > \frac{x}{3} + 1 \quad & \Leftrightarrow \frac{x}{2} - 3 + 3 > \frac{x}{3} + 1 + 3 \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{2}x > \frac{1}{3}x + 4 \\
& \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > \frac{x}{3} - \frac{x}{3} + 4 \\
& \Leftrightarrow \frac{3x - 2x}{6} > 4 \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{6}x > 4 \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{1}{6}x > 6 \cdot 4 \Leftrightarrow x > 24
\end{aligned}$$

Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación es

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x > 24\} =]24, \infty[$$

En una distribuidora de insumos computacionales había una cierta cantidad de discos externos en bodega. Se duplicó el numero de discos externos y se vendieron 27, quedando menos de 54 en stock. Se reabastece el stock de bodega, triplicando el numero de discos externos que había inicialmente, si se venden 78 discos quedan más de 39. ¿Cuantos discos externos había inicialmente?

Solución. Sea x el número de discos en la bodega inicialmente. Por lo tanto del enunciado es posible construir la sigueinte tabla:

	stock inicial	venta	stock final
venta 1	$2x$	27	$2x - 27 < 54$
venta 2	$3x$	78	$39 < 3x - 78$

De lo anterior se deduce:

$$117 < 3x \wedge 2x < 81 \Rightarrow 39 < x < 40.5 \Rightarrow x = 40$$

Por lo tanto inicialmente habían 40 discos duros.

1. Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones
   1. $\dfrac{1-x}{2} < \dfrac{3x-7}{3}$.
   2. $\dfrac{3(2-2x)}{4} > \dfrac{6x-7}{5} + 1$.
   3. $(x-2)(x-4) < (x-5)(x-1) + 1$.
2. Cada mes del año pasado, Jesus ahorró más de \$25.000 pero menos de \$75.000. Si A representa el total de los ahorros de Jesus, determine cual es el ahorro máximo y mínimo posible.
3. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos x es menor que 4 veces el otro ángulo agudo más 10 grados. Determine el rango de variación del ángulo x.
4. Luis tiene \$360.000 para gastar en un tornamesa y algunos discos de vinilo. Si compra el tornamesa en \$219.000 y el costo de los discos es de \$18.950 cada uno, determine el mayor número de discos que puede comprar Luis.