Teoría de Conjuntos

Departamento de Matemáticas

Considerando los temas tratados en las lecturas previas, responda las siguientes interrogantes:

1. ¿Qué es una conjunto?
2. ¿Existe el conjunto Universo?
3. ¿Qué es un conjunto universo referencial?
4. ¿Como se pueden representar los conjuntos?
5. ¿Qué operaciones se pueden realizar con los conjuntos?

De un punto de vista intuitivo, un conjunto puede ser comprendido como cualquier colección de objetos, Sin embargo esta idea intuitiva nos hace llegar a una paradoja, denominada paradoja de Russell.

Bajo este contexto, se supondrá que todos los conjuntos son elementos de un conjunto universal denotado por U. Es importante mencionar que por lo general el conjunto universo no se menciona explícitamente.

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas:

$$A, B, X, S, T, \ldots$$

y los elementos por letras minúsculas

$$a, b, x, y, \ldots$$

Para denotar que un elemento a pertenece a un conjunto X, se usará la siguiente simbología

$$a \in X$$

Existen dos formas de definir un conjunto, a saber:

- **Explícitamente.** En este caso se exhiben todos los elementos del conjunto entre llaves. Por ejemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- **Implícitamente.** En este caso se describen los elementos del conjunto por medio de una propiedad común. Por ejemplo:

$$A = \{x \in \mathbb{N} |\ x \leq 5\}$$

Definición. Dos conjunto A y B se denominan iguales, lo cual se denota por $A = B$, si cada elemento de A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A. En símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow [[x \in A \Rightarrow] x \in B] \wedge [x \in B \Rightarrow x \in A]]$$

Por ejemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{x \in \mathbb{N} |\ x \leq 5\}$$

Definición. Considere A, B conjuntos. Se dice que A es un subconjunto de B si cada elemento de A es un elemento de B. Lo cual se denota por:

$$A \subseteq B$$

Observación.

- Si $A \subseteq B$, pero $A \neq B$ entonces A se denomina subconjunto propio de B y se denota por $A \subset B$. Por ejemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \mathbb{N}$$

- Observe que bajo este contexto se tiene que:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Definición. El conjunto que no posee elementos, se denomina conjunto vacío y se denota por $\emptyset$.

Observe que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, es decir:

$$\emptyset \subset A, \ \forall A \text{ conjunto}$$

Definición. Considere A, B conjuntos, se define:

- la unión entre A y B por:

$$A \cup B = \{x \in U | \, x \in A \vee x \in B\}$$

- la intersección entre A y B por:

$$A \cap B = \{x \in U | \, x \in A \wedge x \in B\}$$

- el complemento de A por:

$$A^c = \{x \in U | \, x \notin A\}$$

- la diferencia entre A y B (también definido como el complemento relativo de A respecto de B) por:

$$A - B = \{x \in A | \, x \notin B\}$$

1. Considere $A = \{0, 1, \emptyset, \{\emptyset\}\}$. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones.
   - $0 \in A$.
   - $\emptyset \subset A$
   - $\emptyset \in A$
   - $0 \subset A$
   - $\{0, 1\} \subset A$
   - $\{\{\emptyset\}\} \in A$
   - $\{\{\emptyset\}\} \subset A$
   - $\{\emptyset\} \subset A$

2. Considere A, B, C conjuntos analice si son válidas las siguientes afirmaciones:
   - $A \cup B = B \cup A$.
   - $A - B = B - A$
   - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

Propiedades

Considere A, B, C conjuntos, son válidas las siguientes propiedades.

- Idempotencia $A \cap A = A \qquad A \cup A = A$
- Conmutatividad $A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$
- Asociatividad
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
- Distributividad
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
- Acotación $\emptyset \cap A = \emptyset \qquad U \cup A = U$
- Complemento $A \cup A^c = U \qquad A \cap A^c = \emptyset$
- De Morgan
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Taller colaborativo. Grupos de 3 integrantes

1. Dados los conjuntos $A = \{-2, 0, 1, 3, 4\}$ y $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   a. $\exists a \in A / a^2 + a - 2 = 0$
   b. $\forall b \in B / (2b + 1 < 3 \vee 3b + 1 > 3)$
   c. $\forall b \in B, \exists a \in A / a + 2b = 2$

2. Considere el conjunto universo $U = \{x \in \mathbb{Z} / -4 < x < 5\}$. y los conjuntos $A = \{-2, 0, 1, 3, 4\}$, $B = \{-3, -2, 1, 2, 4\}$ y $C = \{-1, 0, 1, 3\}$, determine:
   a. $(A^c \cup B) - C$
   b. $(B - C^c)^c$
   c. $A \cap (B^c \cap C)^c$
   d. $(A - B^c)^c \cap C$

3. Considere A, B conjuntos y simplifique al máximo las siguientes expresiones utilizando las propiedades de conjuntos.
   a. $(A \cup B) \cup (A^c \cap B^c) =$
   b. $[(A \cap B) - A] \cup [B - (A \cap B)] =$
   c. $(A - B) \cup (B - A) =$
   d. $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^c) =$

4. Utilice propiedades de conjuntos para determinar si las siguientes afirmaciones son válidas:
   a. $(A - B) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
   b. $(A - C) - (B - C) = (A - B) - C$.
   c. $[A - (B - A)] \cup [(B - A) - A] = A \cup B$.
   d. $(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) - (A^c \cup B)$
   e. Si $A \subset B \subset C$ entonces $C - (B - A) = A = (C - B)$
   f. $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \Leftrightarrow A = \emptyset$
   g. $A \Delta B = B \Delta A$.
   h. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
   i. $B \Delta \emptyset = B$.
   j. $A \Delta A = \emptyset$.
   k. $A \Delta B = C \Leftrightarrow A \Delta C = B$.

Conclusiones