Inecuaciones Cuadráticas

Departamento de Matemáticas

Objetivos

Al terminar de estudiar esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

- Resolver inecuaciones cuadráticas y polinomiales.
- Utilizar inecuaciones para modelar y resolver problemas de aplicación.

En base a las lecturas previas responda las siguientes preguntas.

1. ¿Que es una inecuación cuadrática?

2. ¿Que es un punto crítico?

3. ¿Si $(x-a)(x-b) < 0$ entonces $x \in \mathbb{R} -]a, b[$?

4. ¿Cuál es la mejor estrategia para resolver una inecuación de la forma $ax^2 + bx + c > 0$?

Definición. Una inecuación se denomina polinomial de grado n si es de la forma:

- $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n < 0$, o
- $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n > 0$, o
- $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \leq 0$, o
- $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \geq 0$.

Donde $a_k \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.

Ejemplo. $2x^2 + 6x - 3 < 0$ es una inecuación polinomial de grado 2.

Ejemplo. $x^5 + 1 > 0$ es una inecuación polinomial de grado 5.

Observación. Para resolver una inecuación lineal es necesario tener presente las leyes de cancelación estudiadas anteriormente:

1. $a \leq b \Leftrightarrow [a + c \leq b + c]$.
2. Si $c > 0$ y $a \leq b$ entonces $ac \leq bc$.
3. Si $c < 0$ y $a \leq b$ entonces $ac \geq bc$.

Resolución de inecuaciones polinomiales

Para determinar el conjunto solución de inecuaciones polinomiales es necesario realizar los siguientes pasos.

1. Utilizar las leyes de cancelación para determinar una inecuación equivalente de la forma:
$$p(x) < 0 \tag{1}$$
2. Determinar los factores lineales y cuadráticos irreductibles de $p(x)$ para expresar la inecuación (1) de la forma:
$$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_kx^2 + b_kx + c_k) < 0 \tag{2}$$
3. Determinar las soluciones de las ecuaciones:
$$(a_1x + b_1 = 0), (a_2x + b_2 = 0)\cdots(a_kx^2 + b_kx + c_k = 0) \tag{3}$$
Las cuales se denominan puntos críticos.
4. Utilizar los puntos críticos para analizar el cambio de signos de
$$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_kx^2 + b_kx + c_k) \tag{4}$$
para obtener la solución general de la inecuación $p(x) < 0$.

Determine el conjunto solución de la inecuación:

$$2x^3 + 10x - 9x^2 - 3 < 0$$

Solución. Observe que la inecuación dada es equivalente a:

$$\begin{aligned} 2x^3 + 10x - 9x^2 - 3 < 0 \quad &\Leftrightarrow 2(x^3 - x^2) + 7(x - x^2) + 3(x - 1) < 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 - 7x + 3) < 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)(2x-1)(x-3)}_{p(x)} < 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto los puntos críticos asociados se obtienen al resolver las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - 1 = 0 &\quad x = 1 \\ 2x - 1 = 0 &\quad x = \tfrac{1}{2} \\ x - 3 = 0 &\quad x = 3 \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que los puntos críticos son $x = 1, x = 3$ y $x = \dfrac{1}{2}$

Ejemplo

Para finalizar con la resolución de la inecuación es necesario analizar los cambios de signos de la expresión $(x-1)(2x-1)(x-3)$, para lo cual se construye la siguiente tabla de signos:

∞	$\frac{1}{2}$	1	3	∞
$2x-1$				
$x-1$				
$x-3$				
$p(x)$				

Para determinar los signos de cada una de las celdas de la tabla es necesario evaluar los factores $x-1, x-3$ y $2x-1$ en cada uno de los intervalos definidos por los puntos críticos. Por ejemplo al evaluar los factores en $x = 0 \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ se obtiene

$$\begin{aligned} [x-1]_{x=0} &= -1 < 0 \\ [x-3]_{x=0} &= -3 < 0 \\ [2x-1]_{x=0} &= -1 < 0 \end{aligned}$$

Ejemplo

Por lo tanto la tabla de signos se transforma en:

∞	$\frac{1}{2}$	1	3	∞
$2x-1$	$-$			
$x-1$	$-$			
$x-3$	$-$			
$p(x)$	$-$			

Realizando el proceso anterior para los intervalos restantes se obtiene la tabla de signos.

∞	$\frac{1}{2}$	1	3	∞
$2x-1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$p(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Así de la tabla anterior, es posible deducir que el conjunto solución de la inecuación es $S =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]1, 3[$

1. Una empresa desea enviar una cierta cantidad de datos mensuales vía Internet, para lo cual tiene que comprar un servidor. La empresa después de cotizar los valores en el mercado debe decidir si compra el servidor Compaq el cual tiene un costo de operación mensual dado por la formula $K(x) = 3(x^2 - 2x)$ donde x es el número de gigas de información enviados mensualmente, expresados en miles, mientras que el servidor IBM tiene un costo de operación mensual dado por la formula $I(x) = 5\left(\dfrac{x^2}{3} + 2x\right)$. ¿Para que volumen de información mensual el costo de operación del servidor Compaq es a lo más un 50% del costo de operación del servidor IBM?
2. El costo de producir x lámparas está dado por $C = 300 + 70x + x^2$. Si estas se pueden vender a 140 dólares. ¿Cuántas lámparas se deben producir y vender para obtener utilidades semanales de al menos 900 dólares?

3. Una industria estima que sus ingresos diarios I en UF están determinados por la expresión $I(x) = 90x - x^2 - 900$, donde x es la cantidad diaria de artículos que se producen. Determine el intervalo de producción de artículos x de manera que los ingresos diarios siempre sean superiores a UF 900.

4. Un grupo de estudiantes decide asistir a un concierto. El costo de contratar un autobús para que los lleve al concierto es de $450, lo cual se debe repartir en forma uniforme entre los estudiantes. Los promotores del concierto ofrecen descuentos a grupos que lleguen en autobús. Los boletos cuestan normalmente $50 cada uno, pero se reducen 10 centavos de dólar del precio del boleto por cada persona que vaya en el grupo (hasta la capacidad máxima del autobús). ¿Cuántos estudiantes deben ir en el grupo para que el costo total por estudiante sea menor a $54?