Polinomios

Raíces racionales

Coneptualización previa.

Considerando los temas tratados en las lecturas previas, responda las siguientes interrogantes:

1. ¿Un polinomio con coeficientes reales, siempre admite raíces racionales?
2. ¿Si un polinomio admite una raíz positiva entonces admite una raíz real negativa?
3. ¿Un polinomio de grado n admite siempre una raíces positivas y negativas?
4. ¿Un polinomio de grado par puede admitir solo raíces reales negativas?

Uno de los resultados relevantes respecto de la existencia de raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros, establece lo siguiente:

Considere $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ un polinomio de grado n con coeficientes enteros. Si a es una raíz racional de $p(x)$ entonces se tiene que $a = \dfrac{\alpha}{\beta}$, donde α es un divisor de a_0 y β es un divisor de a_n.

Ejemplo. Considere el polinomio $p(x) = 2x^4 - x^3 + 17x^2 - 9x - 9$. Observe que $a_0 = -9$, $a_n = 2$, por lo tanto los divisores de a_0 y a_n son

divisores de a_0	$\{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$
divisores de a_n	$\{1, -1, 2, -2\}$

Así las posibles raíces racionales de $p(x)$ son $\left\{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{3}{2}, \pm\dfrac{9}{2}\right\}$.

Por otro lado:

$p(1) = 0$	$p(-1) = 20$	$p(\frac{1}{2}) = -9.25$	$p(-\frac{1}{2}) = 0$
$p(3) = 252$	$p(-3) = 360$	$p(\frac{3}{2}) = 22.5$	$p(-\frac{3}{2}) = 56.25$
$p(9) = 13680$	$p(-9) = 15300$	$p(\frac{9}{2}) = 1023.75$	$p(-\frac{9}{2}) = 1287$

Así de lo anterior es posible deducir que las raíces racionales de $p(x)$ son 1 y $-\frac{1}{2}$:

1. En cada caso determine analice la existencia de raíces racionales y de ser posible factorice al máximo $p(x)$.
   a. $p(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$
   b. $p(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x - 3.$
   c. $p(x) = x^4 - 2x^2 - 3.$
   d. $p(x) = 6x^4 - 7x^3 - 36x^2 + 7x + 6.$
2. Al dividir $p(x)$ por $x-1$ y $x+1$ se obtienen restos 2 y 3 respectivamente. ¿Cuál es el resto que se obtiene al dividir $p(x)$ por $(x-1)(x+1)$?
3. Considere $p(x) = x^3 - 11x^2 + kx + 32$, donde $k \in \mathbb{R}$. Determine la constante k y las raíces del polinomio, si una raíz $a \in \mathbb{Z}^+$ es la mitad de otra.

Definición. Considere $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes reales. Dos coeficientes consecutivos a_k y a_m tienen una variación de signo si $a_k \cdot a_m < 0$. La variación total de signos de $p(x)$ se de nota por V.

Ejemplo.

- Considere $p(x) = 2 - 3x - 5x^2$. Observe que p admite solo una variación de signos. Así $V = 1$.
- Considere $p(x) = 2 - 3x + 2x^2 - 3x^3$. Observe que p admite tres variaciones de signos. Así $V = 3$.
- Considere $p(x) = 1 + 3x + 2x^2$. Observe que p no admite variación de signos. Así $V = 0$

Observación. La variación de signos de un polinomio, permite analizar el número de raíces reales positivas y negativas que admite un polinomio de coeficientes reales. Este resultado se denomina Regla de signos de Descartes.

Teorema. Regla de los signos de Descartes. Considere un polinomio de coeficientes reales $q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Si V es el número de variaciones de signo de p, entonces el número de raíces positivas de $q(x)$ está dada por

$$P = V - 2k$$

donde k es un número entero no negativo. Es decir el número de raíces positivas de un polinomio de coeficientes reales es igual al número de variaciones de signos menos un número positivo.
Por otro lado si Si V^- es el número de variaciones de signo de $q(-x)$, entonces el número de raíces negativas de $q(x)$ está dada por

$$N = V^- - 2k$$

donde k es un número entero no negativo. Es decir el número de raíces negativas de un polinomio de coeficientes reales es igual al número de variaciones V^- menos un número positivo.

Ejemplo. Considere el polinomio $p(x) = 2x^4 - 5x + 1$. Analice la naturaleza de sus raíces.
Solución. Observe que $p(x)$ tiene dos variaciones de signo, entonces el polinomio admite 2 raíces positivas o ninguna.

Por otro lado $p(-x) = 2(-x)^4 - 5(-x) + 1 = 2x^4 + 5x + 1$ entonces la variación de signos de $p(-x)$ es $V = 0$, por lo tanto es posible establecer que $p(x)$ no admite raíces negativas.

Finamente es posible establecer que $p(x)$ posee 2 raíces reales y 2 raíces complejas o 4 raíces complejas.

Ejemplo. Dado el polinomio $p(x) = 3x^3 + 11x^2 + 8x - 4$, determine todas sus raíces.

Solución. Observe que las posibles raíces racionales de $p(x)$ son de la forma $\dfrac{c}{d}$ donde c es un divisor de -4 y d es un divisor de 3. Así las posibles racionales son:

$$\left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3} \right\}$$

Por ejemplo observe que:

$$p(-2) \quad = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ es una raíz de } p(x)$$

$$p(\tfrac{1}{3}) \quad = 0 \Rightarrow x = \tfrac{1}{3} \text{ es una raíz de } p(x)$$

Por otro lado al dividir $p(x)$ por $x + 2$ se obtiene que:

$$p(x) = (x + 2)(3x^2 + 5x + 2)$$

Al factorizar $s(x) = 3x^2 + 5x + 2$, se obtiene que:

$$p(x) = (x + 2)(3x - 1)(x + 2)$$

Por lo tanto $x = -2$ es una raíz de multiplicidad 2 y $x = \dfrac{1}{3}$ es una raíz simple y

$$p(x) = (x + 2)(3x - 1)(x + 2)$$

Taller. Trabajo grupal.(3 integrantes)

1. En cada caso determine todas las raíces del polinomio.
   a. $p(x) = 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3$.
   b. $p(x) = 4x^3 + 12x^2 - x - 3$.
   c. $p(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$.

2. Analice el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones.
   a. $x^n - a^n$ es divisible exactamente por $x + a$ si n es par.
   b. $x^n + a^n$ es divisible exactamente por $x + a$.

3. Determine si existen $a, b, c \in \mathbb{R}$, para los cuales el polinomio de coeficientes reales $p(x) = x^3 - 2ax^2 + 3bx + c$, admite raíces $1, -2, 2$.

4. Demuestre que $x-1$ y $x+2$ son factores de $p(x) = x^4+2x^3-7x^2-8x+12$ y determinar los factores restantes.

5. Considere $p(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$, compruebe que 2 y -4 son raíces de $p(x)$ y halle las raíces restantes.