Función Exponencial y Logarítmica.

Departamento de Matemáticas

Coneptualización previa.

Considerando los temas tratados en las lecturas previas, responda las siguientes interrogantes:

1. ¿Que es una función exponencial?
2. ¿Cuál es el dominio de la función exponencial?
3. ¿Cuales son las propiedades de la función exponencial?
4. ¿Que es una función logarítmica?
5. ¿Qué relación existe entre las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas?

Las funciones exponenciales y logarítmicas, que estudiaremos en esta sección son un tipo especial de funciones denominadas “funciones trascendentales”, las cuales difieren de las funciones especiales que hemos estudiado, las cuales se denominan “funciones algebraicas”.

Para poder definir las funciones exponenciales es necesario utilizar el siguiente axioma, el cual garantiza la existencia de a^x, donde $a \in \mathbb{R}^+$ y $x \in \mathbb{R}$.

Axioma 1. *Para cualquier número real x, la expresión a^x representa un único número real(donde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$). Además las leyes de potenciación son válidas para todos los exponentes reales.*

Definición. Considere $a \in \mathbb{R}^+$, con $a \neq 1$. Se define la función exponencial de base a por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = a^x$.

Observe que la función exponencial esta bien definida en $\mathbb{R}$, es decir el dominio de definición es el conjunto de los números reales. Lo cual se debe esencialmente al **Axioma 1.**

A continuación realizaremos un estudio detallado de las funciones exponenciales. Analizaremos la inyectividad, sobreyectividad, intervalos de monotonía, intersección con los ejes y comportamiento asintótico.

1. Utilizando el Axioma 1, se deduce que el dominio de la función exponencial es el conjunto de los números reales.

2. Para determinar la Imagen de la función, es necesario tener presente que el Axioma 1 establece que las reglas de potenciación se satisfacen para $a^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $Im(f) = \mathbb{R}^+$. [1]

3. De la observación anterior, es posible deducir que la ecuación $a^x = 0$. no admite solución en $\mathbb{R}$, es decir $a^x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De hecho $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

4. La gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$, intersecta al eje las ordenadas en el punto $(0, 1)$.

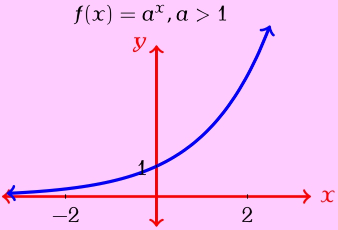
5. La monotonía de la función exponencial $f(x) = a^x$, depende de a. Siendo creciente si $a > 1$ y decreciente si $a < 1$

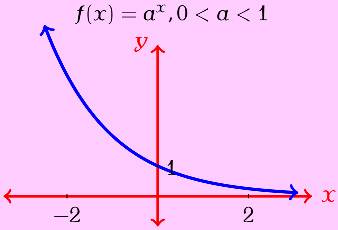
[1] Para revisar la demostración de este hecho, conultar el texto: Calculus vol 1, Tom M. Apostol.

6. El eje de las abscisas es una asíntota horizontal de la gráfica de la función exponencial. Más precisamente, dependiendo de la base de la función exponencial si esta es mayor que 1 o menor que 1, la gráfica se aproxima a cero, a medida que tiene a infinito negativo o a infinito positivo respectivamente.

7. Como consecuencia directa del Axioma 1, se tiene que la función exponencial $f(x) = a^x$ es inyectiva, es decir $f(x) = f(y) \Leftrightarrow a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

8. Considerando los puntos anteriores es posible establecer que la gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$ está dada por:





1. Un lago formado por un dique contiene inicialmente 1.000 peces. Se espera que su población aumente según $N(t) = \dfrac{30}{1 + 29e^{-kt}}$, donde N es el número de peces, en miles, que se espera después de t años. Si se sabe que al cabo de 6 meses la población aumentó a 1900 peces y se planea que el lago estar· abierto a la pesca cuando el número de peces sea de 20000. ¿Cuántos años pasarán para que se abra el lago a la pesca?

2. Las acciones en los últimos tiempos han tenido una alza de comportamiento exponencial. Durante el año 2015 el comportamiento fue descrito por el modelo $A(t) = 4^{(3t-19)/2} - 2^{t-1}$, donde t representa el mes del año 2015(siendo $t = 1$ el mes de enero). Determine, ¿En que mes del año 2015 el alza de las acciones fue nula? y ¿Qué aumento se obtuvo el mes de Octubre?

3. Un elemento radioactivo decae de tal manera que después de t días el número de N miligramos presentes, está dado por $N(t) = 100e^{-0.062t}$,
   a. ¿Cuantos miligramos están presentes inicialmente?
   b. ¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 días?
   c. ¿Cuál es la vida media del elemento radioactivo?

4. Una sustancia radiactiva decrece según la fórmula $q(t) = q_0 e^{-0.0063t}$, donde q_0 es la cantidad inicial de sustancia y t el tiempo en días. Determine después de cuánto tiempo la cantidad de sustancia será la mitad de la inicial.

5. La presión atmosférica, P, varía con la altitud, h, sobre la superficie de la tierra. Para altitudes hasta casi los 10 kilómetros, la presión P (en milímetros de mercurio) está dada en forma aproximada por $P = 760e^{-0.125h}$, donde h está en kilómetros.

   a. Determine la presión a una altitud de 7.3 km.
   b. ¿A qué altitud la presión será de 400 milímetros de mercurio?

6. Los elementos radiactivos tienen la particularidad de que su cantidad disminuye con respecto al tiempo de manera exponencial $N = N_0 e^{kt}$, donde N está en miligramos y t en años. Suponga que al principio hay 100 miligramos de una sustancia radiactiva y después de 20 años hay 50 miligramos. En base a esto se pide, determine completamente el modelo que representa el fenómeno y calcule después de cuanto tiempo la cantidad de sustancia radiactiva es la cuarta parte de la inicial.

Definición. Se define la función inversa asociada a la función exponencial $f(x) = a^x$, donde $a \in \mathbb{R} + -\{1\}$, por:

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad &: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \quad y \longrightarrow f^{-1}(y) = \log_a(y) \end{aligned}$$

Donde la relación $\log_a(y) = x$ se debe entender en el contexto:

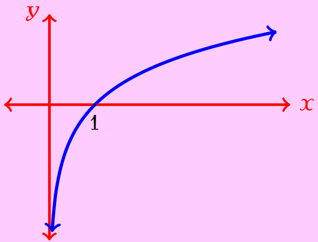
$$\log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Observación. La función inversa de la función exponencial $f(x) = a^x$, se denomina función logaritmo de base a. Esta función satisface las siguientes propiedades:

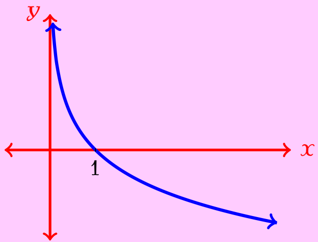
1. La gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a(x)$, intersecta al eje las abscisas en el punto $(1, 0)$.
2. La monotonía de la función logarítmica $f(x) = \log_a(x)$, depende de a. Siendo creciente si $a > 1$ y decreciente si $a < 1$
3. El eje de las ordenadas es una asíntota vertical de la gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a(x)$.

4. Considerando los puntos anteriores es posible establecer que la gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$ está dada por:

$f(x) = \log_a(x), a > 1$



$f(x) = \log_a(x), 0 < a < 1$



Analice la siguiente situación.

Intensidad de un terremoto. La energía liberada por un terremoto, medida en Joules, es aproximadamente de 100 mil millones de veces la energía liberada por un terremoto de poca intensidad. En 1.935 el sismólogo de California Charles Richter desarrollo una escala logarítmica que lleva su nombre y se usa ampliamente en Estados Unidos. La magnitud en la escala de Richter esta definida por:

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Donde E es la energía liberada por el terremoto, medida en Joules, y E_0 es la energía liberada por un terremoto de muy poca intensidad, medida que se ha estandarizado a $E_0 = 10^{4.4}$ Joules.

Utilice lo descrito anteriormente para resolver el siguiente problema: La magnitud del terremoto de San Francisco el año 1906 se calcula en 8.25 en la escala de Richter. Por otro lado en el año 1979 San Francisco se enfrento nuevamente a un terremoto, sin embargo la magnitud del movimiento telúrico fue de 5.95. ¿Qué relación existe entre las intensidades de ambos terremotos?

1. La función definida por

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-(b+mx)}}$$

se denomina función logística y fue introducida por el biólogo matemático alemán Verhulst hacia el año 1840 para describir el crecimiento de poblaciones con recursos alimentarios limitados. Determine si:

$$\ln\left(\frac{f(x)}{1-f(x)}\right) = b + mx$$

2. Si x es la presión atmosférica (medida en milímetros de mercurio), h la altura (medida en metros sobre el nivel del mar) y T es la temperatura (en °C), entonces:

$$h = (30T + 8000) \cdot \log\left(\frac{760}{x}\right)$$

Calcular

a. La altura de una montaña si los instrumentos ubicados en la cima registran 5°C y presión de 500 milímetros de mercurio.
b. La presión fuera del avión volando a 10000 metros de altura, si la temperatura exterior es -10°C.

Conclusiones