Практическое занятие №4.

Опять эти матрицы... или тренируемся и набираем баллы

В решении следующих задач запрещается использование дополнительных библиотек. Все матрицы задаются самостоятельно.

1. Реализовать функцию, вычисляющую определитель матрицы 2x2:

$\mathrm{smalldet}(\mathbf{A}) = a_{0,0}a_{1,1} - a_{0,1}a_{1,0}$.

Вычислить определитель матрицы:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Внешний тест:

- $smalldet(A) = 1$

2. Вычисление *дополнительного минора* для элемента с индексами i и j осуществляется исключением из матрицы i-й строки и j-го столбца и нахождением определителя полученной матрицы. Реализовать функцию $\mathrm{submatrix}(\mathbf{A}, i, j)$, исключающую из матрицы i-ю строку и j-й столбец, и возвращающую полученную матрицу. Вычислить результат для:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Внешние тесты:

- $submatrix(A, 0, 0) = [[4, 3], [1, 1]]$
- $submatrix(A, 1, 1) = [[0, 1], [2, 1]]$
- $submatrix(A, 2, 1) = [[0, 1], [1, 3]]$

Подсказка: в решении рекомендуется использовать оператор continue.

3. Используя функции `smalldet(A)` и `submatrix(A, i, j)`, реализовать рекуррентную функцию, вычисляющую определитель матрицы размера $n \times n$. Вычислить определитель для матрицы 4×4 разложением при $i = 0$:

$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{i+j} a_{ij} \det\left(\mathrm{submatrix}(\mathbf{A}, i, j)\right)$,

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Внешний тест:

- $det(A, i = 0) = 47$

4. Реализовать функцию, вычисляющую дополнительный минор элемента с индексами i и j по формуле:

$\mathrm{minor}(\mathbf{A}, i, j) = det(submatrix(\mathbf{A}, i, j))$, вычислить дополнительный минор элемента $a_{0,1}$ матрицы $\mathbf{A}$ из задачи 3.

Внешний тест:

- $minor(A, 0, 1) = -4$

5. Реализовать функцию, вычисляющую алгебраическое дополнение элемента с индексами i и j:

$\mathrm{alg}(\mathbf{A}, i, j) = (-1)^{i+j} minor(\mathbf{A}, i, j)$, вычислить алгебраическое дополнение элемента $a_{1,1}$ матрицы $\mathbf{A}$ из задачи 3.

Внешний тест:

- $alg(A) = -16$

6. Реализовать функцию $\mathrm{algmatrix}(\mathbf{A})$, вычисляющую матрицу алгебраических дополнений для заданной матрицы. В матрице $\mathbf{A}_m$ алгебраических дополнений каждый элемент с индексами i и j заменяется результатом применения функции alg к матрице $\mathbf{A}$. Вычислить обратную матрицу к $\mathbf{A}$ из задачи 3.

Внешний тест:

- $algmatrix(A) = [[-17, 4, -1, 10], [21, -16, 4, 7], [-18, 7, 10, -6], [26, 16, -4, -7]]$

7. Реализовать функцию, вычисляющую обратную матрицу для матрицы $\mathbf{A}$ из задачи 3 по следующей формуле:

$\mathrm{inv}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathrm{algmatrix}(\mathbf{A})^T}{\det(\mathbf{A})}$.

8. Псевдообращение Мура-Пенроуза применяется в машинах экстремального обучения - современных искусственных нейронных сетях, которые не требуется обучать с помощью классических градиентных методов, что существенно ускоряет процесс обучения. Предлагается реализовать обращение Мура-Пенроуза в виде функции `moore_penrose` для матрицы $\mathbf{A}$ из задачи 3 по формуле:

$\mathbf{H}^{\dagger} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T$.

Выполнение данных заданий в течение практического занятия №6 даёт возможность получить следующие баллы:

- ***Любые 2 задачи: 0,5 балла***
- ***Любые 4 задачи: 1 балл***
- ***Любые 6 задач: 2 балла***
- ***Все 8 задач: 4 балла***