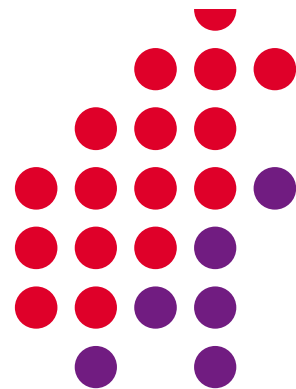




# 离散数学



计算机科学与工程学院  
电子科技大学 示范性软件学院

杨国武 18908197029

2023年3月1日 星期三

# Computer Science Curricula 2013

Curriculum Guidelines for  
Undergraduate Degree Programs  
in Computer Science

December 20, 2013

The Joint Task Force on Computing Curricula  
Association for Computing Machinery (ACM)  
IEEE Computer Society

# 离散数学教学安排与要求

---

**学时数：** 56

**教材：** 《离散数学及其应用》 傅彦等

**内容：** 《离散数学及其应用》 第1章~第11章

**课后辅导：** 创新中心302

**作业：** 每章结束后上交本章作业

**考核：** 平时成绩：不定时点名和作业共计 20%

期中考试 10%

期末考试 70%

## 18 Knowledge Areas (KA)

---

- AL - Algorithms and Complexity
- AR - Architecture and Organization
- CN - Computational Science

### ● **DS - Discrete Structures**

- GV - Graphics and Visualization
- HCI - Human-Computer Interaction
- IAS - Information Assurance and Security
- IM - Information Management
- IS - Intelligent Systems

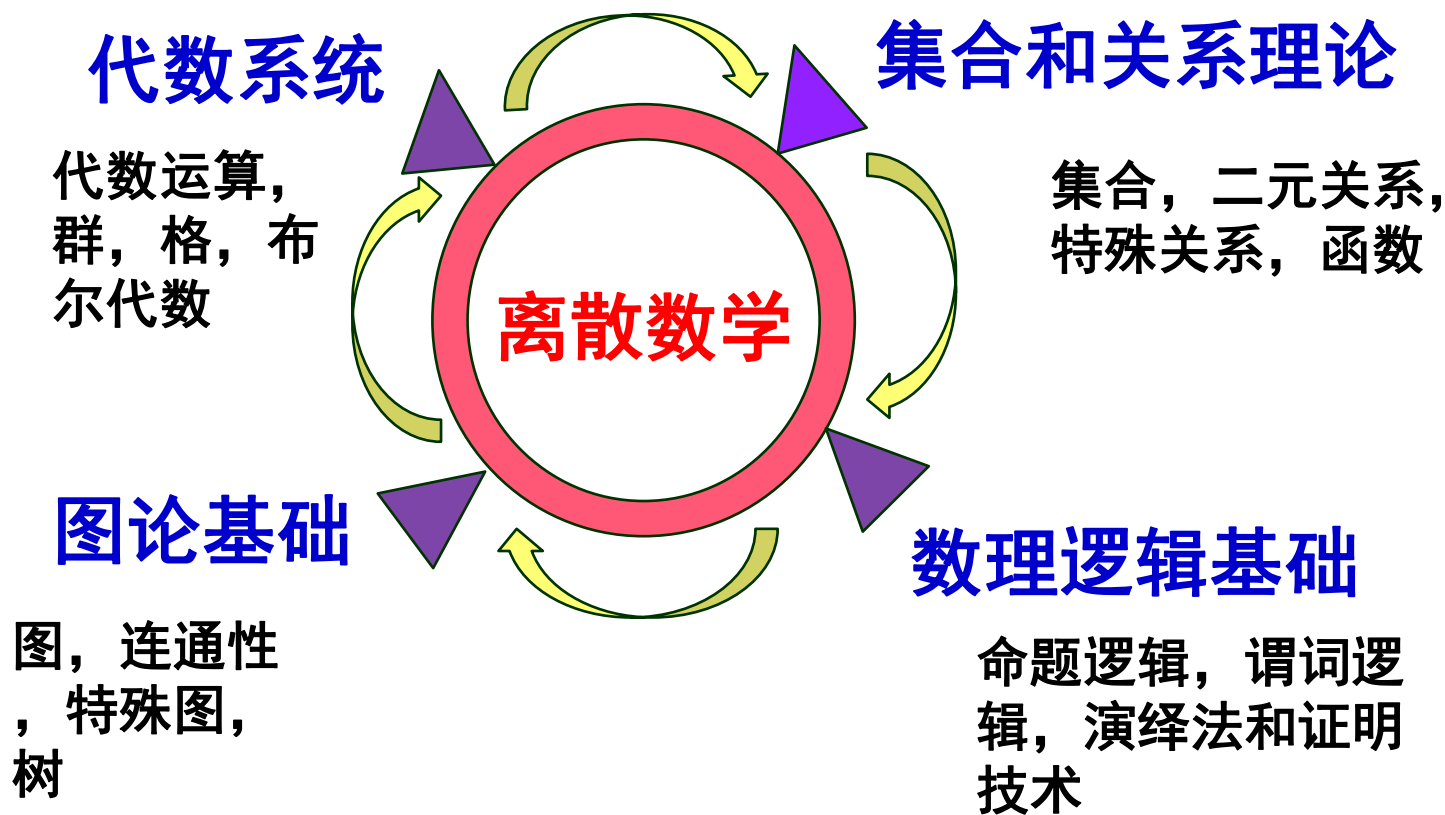
- NC - Networking and Communications
- OS - Operating Systems
- PBD - Platform-based Development
- PD - Parallel and Distributed Computing
- PL - Programming Languages
- SDF - Software Development Fundamentals
- SE - Software Engineering
- SF - Systems Fundamentals
- SP - Social Issues and Professional Practice

# 什么是离散结构

---

离散结构是计算机科学的基本理论。这里所谓基本理论，意味着很少有计算机科学的学者将离散结构作为主要研究方向，但从事计算机专业其他众多方向的学者却需要理解和运用离散结构的相关概念。离散结构涉及到集合论、逻辑、图论和概率论等方向中的一些重要理论。

# 课程内容





# 离散数学与连续数学

	离散数学	连续数学
研究对象	离散量，值是离散的	连续量
问题求解	必须有解，有限步	允许无解 / 证明存在，可无限步

# 课程概述

---

离散数学是研究各种各样的**离散量的结构及离散量之间的关系**的一门学科，是计算机科学和其它相关学科中基础理论的核心课程。



# 离散数学的应用领域

离散结构的相关理论被广泛应用于数据结构和算法中，在计算机科学的其它方向也有很多应用。

- 构造和理解证明（形式化符号化证明或不够形式化但数学上严格的论断）的能力对于计算机科学的几乎每个方向都很重要，包括（但不限于）形式化规范说明、验证、数据库及密码学等；
- 在网络、操作系统和编译器等方向会用到图论的相关概念；
- 在软件工程和数据库方向会用到集合论的相关概念；
- 在智能系统、互联网及很多计算机应用方向会用到概率论。

# 离散数学与计算机

- 第一, 目前使用最广泛的各种架构的机器都是所谓“数字模式”的, 即这种机器的内部有且仅有两种不同的信息元, 在硬件内用高、低电平或者介质的不同磁化方向或晶相等加以记录, 数学上用“离散量”0和1对这两种信息元加以描述(抽象的对应物)。
- 第二, 当今通过计算机运算的绝大多数课题, 都是基于若干离散对象之间的种种联系, 即使是诸如求某一连续函数的积分这样的问题, 由计算机来处理时, 仍然要将连续函数做离散化处理, 即所谓数值分析方法。
- 第三, 计算机系统本身就是一个有限结构或有限离散结构。

## 学习离散数学的目的

- 掌握离散数学知识，为后续课程（如**数据结构**、**操作系统**、**计算机网络**、编译理论、数字逻辑理论、数据库系统、算法分析、系统结构、人工智能等）的学习打下坚实的理论基础；
- 通过对这门课程的学习，掌握**证明**问题的方法，培养抽象思维的能力、缜密概括的能力和严密逻辑推理的能力。

# 教材和参考书

---

## 教材：

《离散数学及其应用》，付彦等著，高等教育出版社

## 参考书：

《离散数学实验与习题解析》，付彦等著，高等教育出版社

《离散数学》，屈婉玲等，清华大学出版社

《离散数学及其应用》，Kenneth H. Rosen, 机械工业出版社

《离散数学》，Richard Johnsonbaugh, 人民邮电出版社

# 常用运算符号

---

$$1) \sum_{i=1}^n a_i \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

$$2) \prod_{i=1}^n a_i \quad \prod_{i=1}^{\infty} a_i$$

$$3) a \mid b$$

$$4) \max(a, b) \text{ 或 } \max\{a, b\}$$

$$5) \min(a, b) \text{ 或 } \min\{a, b\}$$

$$6) \gcd(a, b), \operatorname{lcm}(a, b)$$

$$7) |x|$$

$$8) [x], \lceil x \rceil, \lfloor x \rfloor$$

# 常用证明方法

---

1. 公理、定理、引理、推论
2. 充分必要条件
3. 反证法
4. 数学归纳法

# 第一篇 预备知识

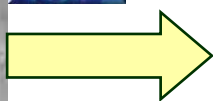
---

## 第一章 集合论

# 集合论的历史



康托尔



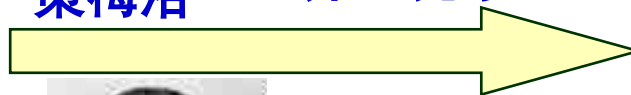
朴素集合论



策梅洛



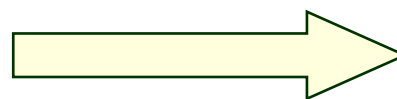
弗兰克尔



ZF公理集合论



斯科伦



ZFS公理集合论



# 1.0 内容提要

---

1

集合的概念和表示

2

集合间的关系

3

集合的运算

4

特殊集合

5

无限集的基本概念

# 1.1 本章学习要求

重点掌握

1

- 1 集合的概念及集合间关系
- 2 集合的表示
- 3 集合运算及定律
- 4 幂集 $P(A)$

一般掌握

2

- 1 集合的归纳法表示
- 2 集合的对称差运算

了解

3

- 1 集合的递归指定法表示
- 2 了解无限集的基本概念

## 1.2 集合

---

### 一、集合的概念

康托尔的集合定义：

By a "set" we mean any collection  $M$  into a whole of definite, distinct objects  $m$  (which are called the "elements" of  $M$ ) of our perception [Anschauung] or of our thought.

教材定义：**集合** (SET) 由指定范围内的某些特定对象聚集在一起构成。指定范围内的每一个对象称为这个**集合的元素** (element)。

## 可有下列的集合：

---

- 1) 中国所有的真皮沙发
- 2) 所有的海鸥
- 3) 在-1和1之间的所有有理数
- 4) 全体亚洲人
- 5) 所有欧洲人和松木椅子
- 6) 天安门广场所有的路灯和树
- 7) 所有C语言中的标识符

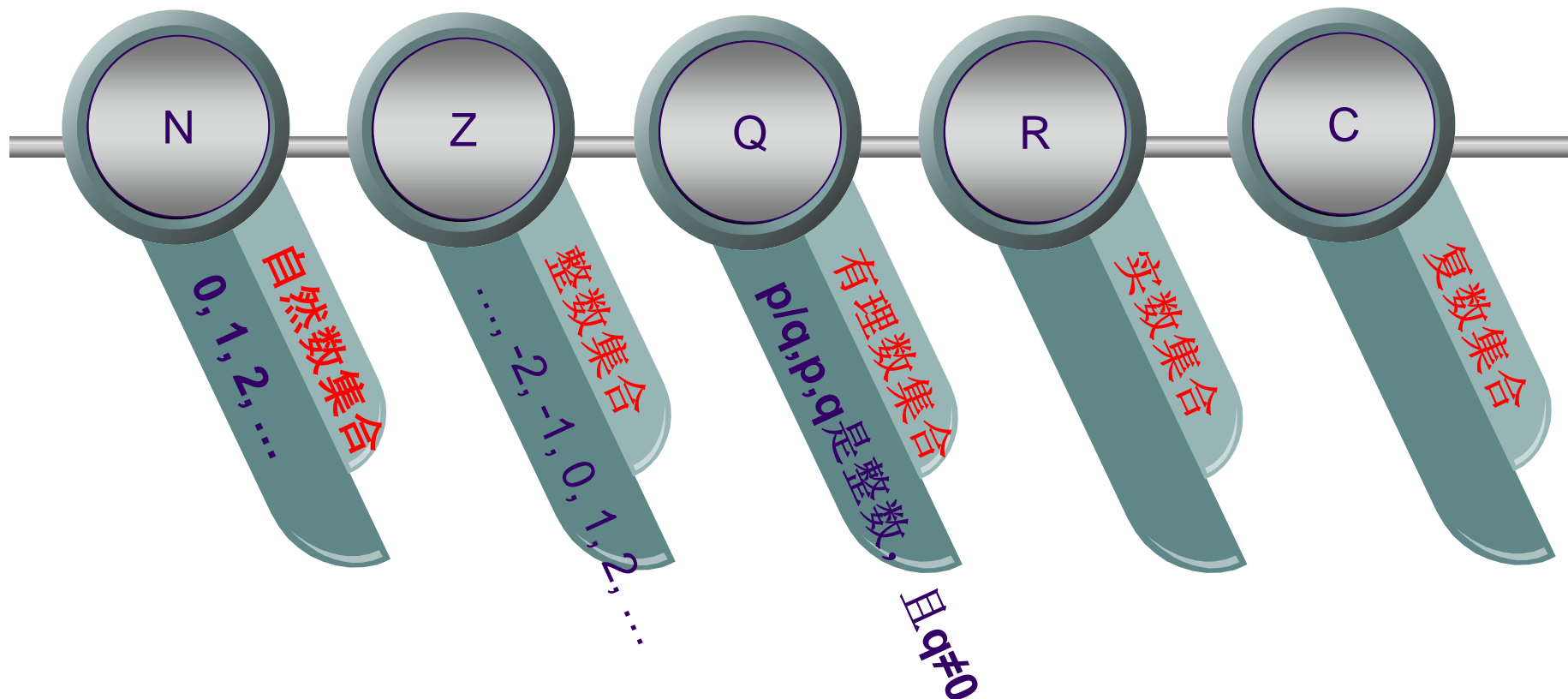
## 二、集合的记法

---

通常用带(不带)标号的大写字母 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $\dots$ 、 $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ 、 $\dots$ 、 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 、 $\dots$ 表示**集合**；

通常用带(不带)标号的小写字母 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $\dots$ 、 $a_1$ 、 $b_1$ 、 $c_1$ 、 $\dots$ 、 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $\dots$ 表示**元素**。

# 常用集合



## 1.2.1 集合的表示方法

---

集合是由它包含的元素完全确定的，为了表示一个集合，通常有：

- ✓ 枚举法
- ✓ 隐式法（叙述法）
- ✓ 归纳法
- ✓ 递归指定
- ✓ 文氏图

# 1、枚举法（显式法）

——列出集合中全部元素或部分元素的方法叫**枚举法**

**适用场景：**

- ◆一个集合仅含有限个元素
- ◆一个集合的元素之间有明显关系

## 例1.2.1

$$(1) A = \{a, b, c, d\}$$

$$(2) B = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$$



# 枚举法的优缺点

---

是一种**显式表示法**

**优点：**具有**透明性**

**缺点：**在表示具有某种特性的集合或集合中元素过多时受到了一定的**局限**，而且，从计算机的角度看，显式法是一种“静态”表示法，如果一下子将这么多的“数据”输入到计算机中去，那将占据大量的“内存”。

## 2、隐式法（叙述法）

通过刻画集合中**元素所具备的某种特性**来表述集合的方法称为叙述法（隐式法）

X所具有的性质p

一般表示方法： $P = \{x | \underline{P(x)}\}$

代表元

适用场景：

一个集合含有很多或无穷多个元素；

一个集合的元素之间有容易刻画共同特征

其**突出优点**是原则上不要求列出集合中全部元素，而只要给出该集合中元素的特性。

## 例1.2.2

---

(1)  $A = \{x \mid x \text{ 是 “discrete mathematics” 中的所有字母}\};$

(2)  $Z = \{x \mid x \text{ 是一个整数}\};$

(3)  $S = \{x \mid x \text{ 是整数, 并且 } x^2 + 1 = 0\};$

(4)  $Q^+ = \{x \mid x \text{ 是一个正有理数}\}。$

### 3、归纳法

归纳法是通过归纳定义集合，主要由三部分组成：

- 第一部分：基础。**指出某些最基本的元素属于某集合；
- 第二部分：归纳。**指出由基本元素造出新元素的方法；
- 第三部分：极小性。**指出该集合的界限。

**注意：**第一部分和第二部分指出一个集合至少包括的元素，第三部分指出一个集合至多要包含的元素

## 例1.2.3

---

集合A按如下方式定义：

- (1) 0和1都是A中的元素；
- (2) 如果a, b是A中的元素, 则 $ab$ ,  $ba$ 也是A中的元素；
- (3) 有限次使用(1)、(2)后所得到的字符串都是A中的元素。

试指出其定义方式。并举出集合A中的3个元素

## 4、递归指定集合

---

通过**计算规则**定义集合中的元素

例1.2.4 设  $a_0 = 1$ ,

$$a_{i+1} = 2a_i \quad (i \geq 0)$$

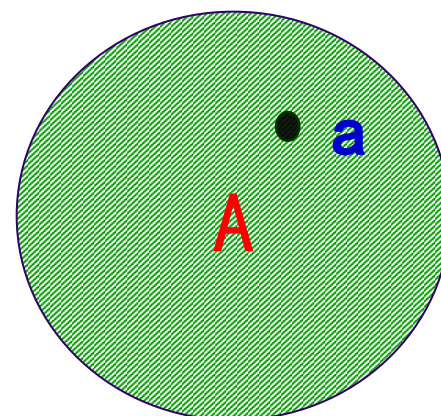
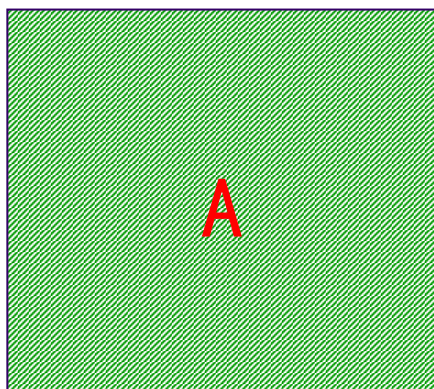
定义  $S = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

$$= \{a_k \mid k \geq 0\},$$

试写出集合S中的所有元素。

## 5、文氏图解法

**文氏图解法**是一种利用平面上点的集合作成的对集合的图解。一般用平面上的**圆形或方形**表示一个**集合**。而集合中的**元素**用**小圆点**来表示。



## 1.2.2 集合与元素的关系

元素与集合之间的“属于关系”是“明确”的。

对某个集合 $A$ 和元素 $a$ 来说，

✓  $a$ 属于集合 $A$ ，记为 $a \in A$

✓ 或者

✓  $a$ 不属于集合 $A$ ，记为 $a \notin A$

两者必居其一且仅居其一。

例如，对元素 $2$ 和 $N$ ，就有 $2$ 属于 $N$ ，即 $2 \in N$ ，

对元素 $-2$ 和 $N$ ，就有 $-2$ 不属于 $N$ ，即 $-2 \notin N$ 。



## 罗素悖论

---

**例** 在一个很僻静的孤岛上，住着一些人家，岛上只有一位理发师，该理发师专给那些并且只给那些自己不刮脸的人刮脸。那么，谁给这位理发师刮脸？

**解：** 设  $C = \{x \mid x \text{ 是不给自己刮脸的人}\}$

$b$  是这位理发师

如  $b \in C$ ，则  $b \notin C$ ；

如  $b \notin C$ ，则  $b \in C$ 。

## 1.2.3 集合与集合的关系

### 一、集合的三大特征

1、**互异性**—集合中的元素都是不同的，凡是相同的元素，均视为同一个元素；

$\{1, 1, 2\}$  与  $\{1, 2\}$  是同一个集合。

2、**确定性**—能够明确加以“区分的”对象；

3、**无序性**—集合中的元素是没有顺序的。

$\{2, 1\}$  与  $\{1, 2\}$  是同一个集合。

## 例1.2.5

设  $E = \{x \mid (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0\}, x \in \mathbb{R}$

$F = \{x \mid (x \in \mathbb{Z}^+) \text{ 且 } (x^2 < 12)\}$ 。

试指出集合E和F中的元素。

解 集合  $E = \{1, 2, 3\}, F = \{1, 2, 3\}$ 。

显然，集合E, F中的元素完全相同，我们称这样的两个集合相等。

### 二、外延性原理

$A=B$ 当且仅当A与B具有相同的元素，否则， $A \neq B$ 。

## 例1.2.6

---

设  $A = \{\text{BASIC}, \text{PASCAL}, \text{ADA}\},$

$B = \{\text{ADA}, \text{BASIC}, \text{PASCAL}\},$

$C = \{\text{ADA}, \text{PASCAL}\}$

请判断A和B, C的关系。

解 根据集合元素的**无序性和外延性原理**可得,

$A = B; A \neq C.$

**C**中的所有元素都在**A**中, 这种关系就是**包含**关系,  
可记做 **$C \subseteq A$** 。

### 三、包含和真包含关系

**定义1.2.1** 设 $A, B$ 是任意两个集合，如果  
 $B$ 的每个元素都是 $A$ 的元素，  
则称 $B$ 是 $A$ 的子集合，简称**子集** (Subset)，  
这时也称 **$A$ 包含 $B$** ，或 **$B$ 被 $A$ 包含**，记作 $A \supseteq B$  或  $B \subseteq A$ ，  
称“ $\subseteq$ ”或“ $\supseteq$ ”为**包含关系** (Inclusion Relation)。  
如果 $B$ 不被 $A$ 所包含，则记作 $B \not\subseteq A$ 。

上述包含定义的数学语言描述为：

$B \subseteq A \Leftrightarrow$  对任意 $x$ ，如 $x \in B$ ，则 $x \in A$ 。

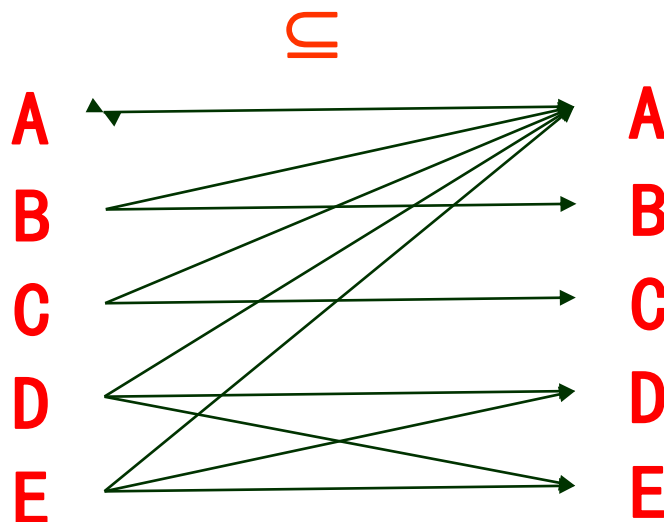
显然，对任意集合 $A$ ，都有 $A \subseteq A$ 。

## 例1.2.7

设  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{a, b, d\}$ ,  $C = \{c, d\}$ ,  
 $D = \{b, c\}$ ,  $E = \{c, b\}$ 。

请判断各集合之间的包含关系。

解



## 例1.2.7

设  $D = \{b, c\}$ ,

$E = \{c, b\}$ ,

根据集合间包含关系的定义知,  $D \supseteq E$  且  $D \subseteq E$ 。

根据外延性原理, 又知, 集合  $D = E$ , 于是我们有:

**定理1.2.2** 设  $A$ 、 $B$  是任意两个集合, 则

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

## 真包含关系

**定义1.2.2** 设 $A, B$ 是任意两个集合，如果

$$B \subsetneq A \text{ 并且 } A \neq B$$

则称 $B$ 是 $A$ 的**真子集** (Proper Subset)，记作 $B \subsetneq A$ ，  
称“ $\subsetneq$ ”为**真包含关系** (Properly Inclusion Relation)。

如果 $B$ 不是 $A$ 的真子集，则记作 $B \not\subsetneq A$ 。

上述真子集的数学语言描述为：

$B \subsetneq A \Leftrightarrow$  对任意 $x$ ，如 $x \in B$ ，则 $x \in A$ ，并且， $\exists y \in A$ ，  
但是 $y \notin B$



## 例1.2.8

---

判断下列集合之间是否具有真包含关系。

(1)  $\{a, b\}$  和  $\{a, b, c, d\}$  ;

(2)  $\{a, b, c, d\}$  和  $\{a, b, c, d\}$  。

**解** 根据真子集的定义，有

(1)  $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$  ;

(2) 因为  $\{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$  ,

所以  $\{a, b, c, d\}$  **不是**  $\{a, b, c, d\}$  的真子集。

## 例1.2.9

设 $A = \{a\}$ 是一个集合,  $B = \{\{a\}, \{\{a\}\}\}$ , 试问

$\{A\} \in B$ 和 $\{A\} \subseteq B$

同时成立吗?

**分析**  $\because \{A\} = \{\{a\}\}, \{\{a\}\} \in B$

$\therefore \{A\} \in B$ 成立;

$\because \{A\} = \{\{a\}\}, \{a\} \in B$

$\therefore \{A\} \subseteq B$ 成立。

**解**  $\{A\} \in B$ 和 $\{A\} \subseteq B$ 同时成立。

## 1.2.4 几个特殊集合

### 1、空集

**定义1.2.3** 不含任何元素的集合叫做空集 (Empty Set), 记作  $\Phi$ 。

空集可以符号化为

$$\Phi = \{x | x \neq x\}$$

空集是客观存在的。

### 定理1.2.3

- (1) 空集是一切集合的子集;
- (2) 空集是绝对唯一的。

## 定理1.2.3 (2) 的证明

对“唯一性”的证明通常采用反证法。

分析

即假设“不唯一”，得出矛盾，从而说明结论正确

假设  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  是两个空集，且  $\Phi_1 \neq \Phi_2$ ，

再证明  $\Phi_1 = \Phi_2$ ，出现矛盾，从而说明结论成立

那么怎么证明  $\Phi_1 = \Phi_2$ ？

与  $\Phi_1 \neq \Phi_2$  矛盾

根据定理1.2.2,  $\Phi_1 = \Phi_2 \Leftrightarrow \Phi_1 \subseteq \Phi_2, \Phi_2 \subseteq \Phi_1$

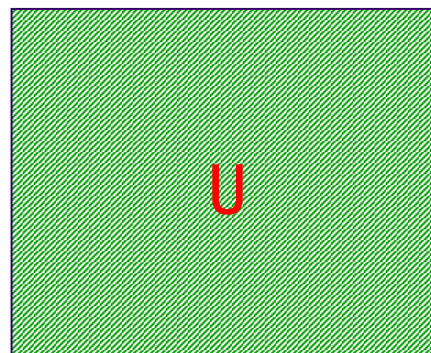
根据定理1.2.3 (1) 空集是一切集合的子集

$\therefore \Phi_1 \subseteq \Phi_2, \Phi_2 \subseteq \Phi_1$ ,

## 2、全集

**定义1.2.4** 在一个相对固定的范围内，包含此范围内所有元素的集合，称为**全集或论集** (Universal Set)，用 $U$ 或 $E$ 表示。

用文氏图描述如下：



## 例1.2.12

---

- (1) 在立体几何中，全集是由空间的全体点组成；
- (2) 在我国的人口普查中，全集是由我国所有人组成。

**定理1.2.5 全集是相对唯一的.**

## 有限集和无限集

- 集合A中元素的数目称为集合A的**基数** (base number)，记为  $|A|$ 。
- 如  $|A|$  是有限的，则称集合A为**有限集**，
- 如  $|A|$  是无限的，则称集合A为**无限集**。

**例1.2.13** 求下列集合的基数。

$$(1) A = \Phi ; \quad (2) B = \{\Phi\};$$

$$(3) C = \{a, b, c\}; \quad (4) D = \{a, \{b, c\}\}.$$

**解**  $|A| = 0, |B| = 1, |C| = 3, |D| = 2.$

## m元子集

**定义1.2.6** 如果一个集合A含有n个元素，则称集合A为**n元集**，称A的含有m个 ( $0 \leq m \leq n$ ) 元素的子集为**A的m元子集**。  
任给一个n元集，怎样求出它的全部m元子集？

**例1.2.14** 设  $A = \{1, 2\}$ ，求出A的全部m元子集。

**分析**  $\because n = |A| = 2, m \leq n$

$\therefore m = 0, 1, 2$ 。

$\therefore$  当  $m = 0$  时，得到0元子集： $\Phi$ ；

当  $m = 1$  时，得到1元子集： $\{1\}, \{2\}$ ；

当  $m = 2$  时，得到2元子集： $\{1, 2\}$ 。

**解** A的全部m元子集是  $\Phi$ 、 $\{1\}$ 、 $\{2\}$  和  $\{1, 2\}$ 。



# 子集总数

---

一般来说，对于n元集A，它的m ( $0 \leq m \leq n$ ) 元子集有  $C_n^m$  个，  
所以不同的子集总数有：

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

所以，n元集共有  $2^n$  个子集。

## 幂集

**定义1.2.7** 设A为任意集合，把A的所有不同子集构成的集合叫做A的**幂集** (power set)，记为 **$P(A)$**  或  **$2^A$** 。其符号化表示为

$$P(A) = \{x \mid \text{一切 } x \subseteq A\}$$

该集合又称为**集族** (family of set)。

对集族的研究在数学方面、知识库和表处理语言以及人工智能等方面都有十分重要的意义。

## 例1.2.15 计算下列幂集

(1)  $P(\Phi)$ ; (2)  $P(\{\Phi\})$ ; (3)  $P(\{a, \{b, c\}\})$ 。

**解**

$$(1) P(\Phi) = \{\Phi\};$$

$$(2) P(\{\Phi\}) = \{\Phi, \{\Phi\}\};$$

$$(3) P(\{a, \{b, c\}\}) = \{\Phi, \{a\}, \{\{b, c\}\}, \{a, \{b, c\}\}\}。$$

显然，若集合  $A$  有  $n$  个元素，则集合  $A$  共有  $2^{|A|}$  个子集，即：

$$|P(A)| = 2^{|A|}。$$

## 1.2.5 集合的运算

**定义1.2.8** 设A、B是两个集合，

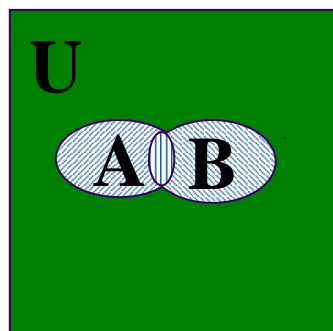
(1) 并集  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

(2) 交集  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

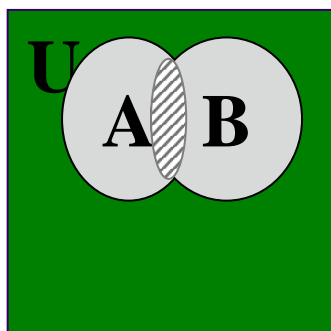
(3) 差集  $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$

(4) 补集  $\bar{A} = U - A = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$  ( $A'$ ,  $\sim A$ ,  $A^c$ )

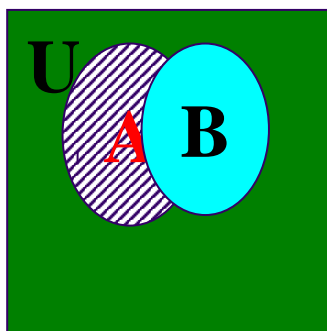
(5) 对称差集  $A \oplus B = \{x \mid (x \in A) \text{ 且 } (x \notin B) \text{ 或 } (x \in B) \text{ 且 } (x \notin A)\}$



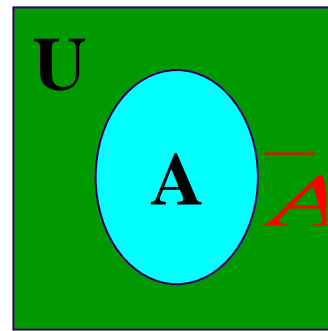
并集



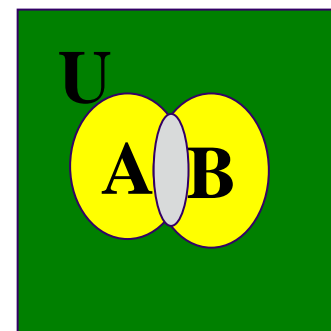
交集



差集



补集



对称差集

## 注意

---

集合对称差的运算符合，在不同的书中，可能用的符号不一样。

# 推广

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \\ = \{x \mid (x \in A_1) \text{ 或 } (x \in A_2) \text{ 或 } \dots \text{ 或 } (x \in A_n)\}$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n \\ = \{x \mid (x \in A_1) \text{ 且 } (x \in A_2) \text{ 且 } \dots \text{ 且 } (x \in A_n)\}$$

当n无限增大时，可以记为：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$$

## 定理1.2.5

---

1. 等幂律:  $A \cup A = A$ ;  $A \cap A = A$ ;
2. 交换律:  $A \cup B = B \cup A$ ;  $A \cap B = B \cap A$
3. 结合律:  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ;  
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ;
4. 恒等律:  $A \cup \Phi = A$ ;  $A \cap U = A$ ;
5. 零律:  $A \cup U = U$ ;  $A \cap \Phi = \Phi$ ;
6. 分配律:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$   
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. 吸收律:  $A \cap (A \cup B) = A$ ;  $A \cup (A \cap B) = A$ ;

## 定理1.2.5(续)

8.  $A - A = \Phi$ ;      9.  $A - B = A - (A \cap B)$ ;

10.  $(A - B) - C = A - (B \cup C)$ ;

11.  $A \cup (B - A) = A \cup B$ ;    12.  $A - B = A \cap \bar{B}$ ;

13. 否定律:  $\overline{\bar{A}} = A$ ;

14. DeMorgan律:  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ,  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ;

15. 矛盾律:  $A \cap \bar{A} = \Phi$ ;

16. 排中律:  $A \cup \bar{A} = U$ 。



# 证明:

**DeMorgan律:**  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

## 分析

**定理1.2.2** 设A、B是任意两个集合，则

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A=B$$

$$(1) \quad \overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$(2) \quad \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

## 证明 (a) :

$$\textcircled{1} \quad \forall x \in \overline{A \cup B}$$

$$\Rightarrow \forall x \notin A \cup B$$

$$\Rightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B$$

$$\Rightarrow x \in \bar{A} \text{ 且 } x \in \bar{B}$$

$$\Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\textcircled{2} \quad \forall x \in \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\Rightarrow x \in \bar{A} \text{ 且 } x \in \bar{B}$$

$$\Rightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B$$

$$\Rightarrow \forall x \notin A \cup B$$

$$\Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$$

$$\Rightarrow \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

由①、②知,  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

## 证明 (b) :

(b) 在  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$  中, 用  $\bar{A}$  和  $\bar{B}$  分别取代A和B, 则有

$$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \overline{\bar{A}} \cap \overline{\bar{B}} = A \cap B$$

$$\Rightarrow \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \overline{\bar{A} \cap B}$$

$$\Rightarrow \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

## 1.3 无限集

---

有限集  $\longrightarrow$  无限集  
量 变  $\longrightarrow$  质 变

无限集合无法用确切的个数来描述，因此，无限集合有许多有限集合所没有的一些特征，而有限集合的一些特征也不能任意推广到无限集合中去，即使有的能推广，也要做某些意义上的修改。

## 1.3.1 可数集合和不可数集合

---

问题1：  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  与集合  $\{1, 4, 9\}$  那个包含的元素个数多？

问题2： 集合  $\{1, 2, 3, \dots\}$  与  $\{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$  哪个集合的元素更多？

## 1.3.1 可数集合与不可数集合

### 引入：自然数集合

二十世纪初，集合成为数学的基本概念之后，由冯·诺依曼（Von Neumann, J.）用集合的方式来定义自然数取得了成功，提出了用序列  $\Phi$ ,  $\{\Phi\}$ ,  $\{\Phi, \{\Phi\}\}$ ,  $\{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$ ,  $\dots$  来定义自然数。

# 自然数集合N的定义

$\Phi \in N$ ,

若  $n \in N$ , 则  $n' := n \cup \{n\} \in N$ 。

也即:  $0 := \Phi$ ,

$1 := \{\Phi\} = \{0\}$ ,

$2 := \{\Phi, \{\Phi\}\} = \{0, 1\}$

...

$n := \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$

...

故  $N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

## 等势的概念

**定义1.3.1** 设A, B是两个集合, 若在A, B之间存在**1-1对应**的关系:

$$\psi : A \rightarrow B$$

则称A与B是**等势的** (equipotential), 记为:  **$A \sim B$** 。

也称集合A与B**等势** (equipotent)。

注意: 若 $A=B$ , 则  $A \sim B$ . (✓)

若 $A \sim B$ , 则  $A=B$  (✗)



## 可数集合(可列集)

**定义1.3.2** 凡是与**自然数集合**等势的集合，统称为**可数集合**(可列集)(Countable Set)。

记为： $\aleph_0$  (读作**阿列夫零**)。

**例1.3.1** 下列集合都是可数集合：

- 1)  $O^+ = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ 是奇数}\}$ ;
- 2)  $P = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ 是素数}\}$ ;
- 3) 有理数集合 $Q$ .

# 解：1)

---

在 $0^+$ 与 $N$ 之间建立1-1对应的关系  $f: N \rightarrow 0^+$  如下：

$N$      $0$      $1$      $2$      $3$      $4$      $\dots$      $n$      $\dots$

$f$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\dots$      $\downarrow$      $\dots$

$0^+$      $1$      $3$      $5$      $7$      $9$      $\dots$      $2n+1$      $\dots$

所以， $0^+$ 是可数集合。

## 2)

在P与N之间建立1-1对应的关系

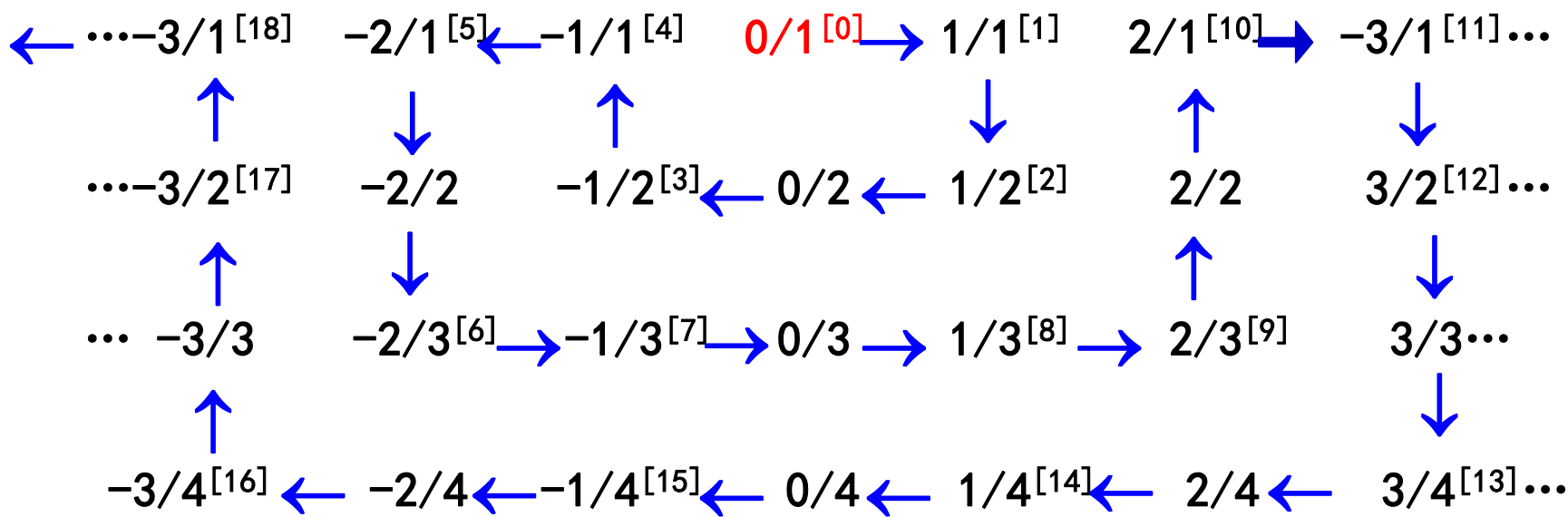
$f: N \rightarrow P$ 如下:

N    0    1    2    3    4    ...

f    ↓    ↓    ↓    ↓    ↓    ...

P    2    3    5    7    11    ...

所以, P是可数集合。



**所以，有理数集合必是可数集合。**

## 定理1.3.1

---

两个有限集合等势当且仅当它们有相同的元素个数；

有限集合不和其任何真子集等势；

可数集合可以和其可数的真子集等势。

# 不可数集合

---

## 定义1.3.3

开区间  $(0, 1)$  称为不可数集合，其基数设为  $\aleph$  (读作阿列夫)；

凡是与开区间  $(0, 1)$  等势的集合都是不可数集合。

- 例1.3.2 (1) 闭区间  $[0, 1]$  是不可数集合；  
(2) 实数集合  $\mathbb{R}$  是不可数集合。

## 例1.3.2 解

(1) 在闭区间 $[0, 1]$ 和开区间 $(0, 1)$ 之间建立如下对应关系:

$$R : \begin{cases} 0 \rightarrow 1/4, \\ 1 \rightarrow 1/2, \\ \frac{1}{2^n} \rightarrow \frac{1}{2^{n+2}} (n = 1, 2, 3, \dots), \\ x \rightarrow x \quad (\text{其他 } x \in (0, 1)). \end{cases}$$

则上述对应是**一一对应**的关系。所以 $[0, 1]$ 与 $(0, 1)$ 一定是等势的, 即 **$[0, 1]$ 是不可数集合**。

## 例1.3.2 解（续）

---

(2) 在实数集  $\mathbb{R}$  和开区间  $(0, 1)$  之间建立如下对应关系：

$$x \rightarrow \tan \pi \left( \frac{2x-1}{2} \right), \quad x \in (0, 1)$$

显然此对应关系是**一一对应**关系，即  $(0, 1)$  与  $\mathbb{R}$  之间是等势的，所以 **$\mathbb{R}$ 是一个不可数集合**。



## 1.4 集合的应用

---

**例1.4.1** 用H代表硬币正面，T代表硬币反面。试写出当扔出三个硬币时可能出现的结果所组成的集合。

**解：**8种可能： $\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$ 。但这三个硬币没有顺序之分，即HHT和HTH是同一个元素，所以

$$A = \{HHH, HHT, HTT, TTT\}。$$

## 例1.4.2

一个正三角形被均分为三个小三角形，如图1.4.1所示。现**用黑、白二色**对其小三角形着色，假设**经旋转能使之重合的图像算一种**。试写出由不同图像构成的集合。

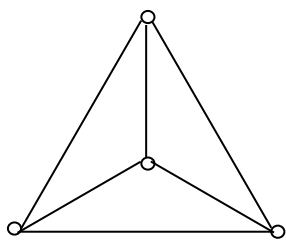


图1.4.1

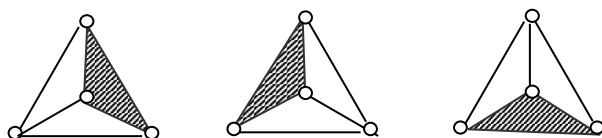
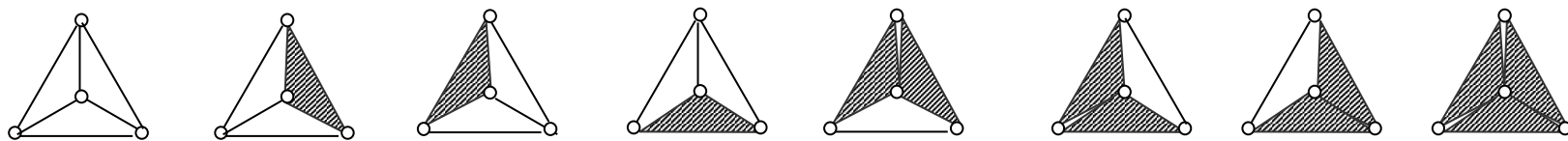


图1.4.2



1

2

3

4

5

6

7

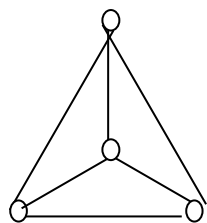
8

图1.4.3

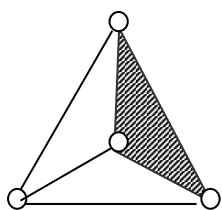
## 例1.4.2 解

因为每个小三角形均可着色，三个小三角形共有  $2 \times 2 \times 2 = 8$  种着色方案，所以可得8种不同的图像。

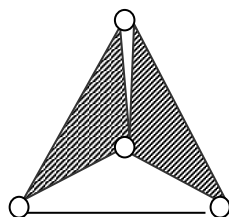
又因为经旋转能使之重合的图像算一种，如图 1.4.2，所以共有4种不同的着色方案。因此由不同图像构成的集合为  $\{1, 2, 5, 8\}$ 。



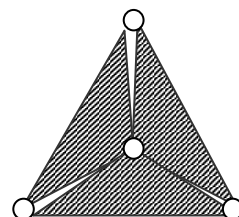
1



2



5



8

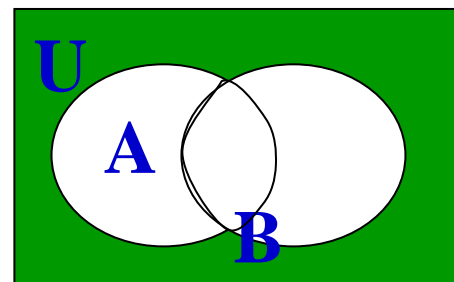
## 例1.4.4

在20个大学生中，有10人爱好音乐，有8人爱好美术，有6人既爱好音乐又爱好美术。问不爱好音乐又不爱好美术的学生有多少个？

**解** 设所有的大学生的集合为 $U$ ，爱好音乐的学生集合为 $A$ ，爱好美术的学生集合为 $B$ ，既爱好音乐和又爱好美术的学生组成的集合为 $A \cap B$ ，则既不爱好音乐又不爱好美术的学生

组成的集合为 $\bar{A} \cap \bar{B}$ 。

如右图：



## 例1.4.4解（续）

---

根据已知有  $|U| = 20$ ,  $|A| = 10$ ,  $|B| = 8$ ,

$$|A \cap B| = 6$$

又因为,  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$$= 10 + 8 - 6 = 12$$

从而,  $|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - |A \cup B| = 20 - 12 = 8$

即不爱好音乐又不爱好美术的学生有8个。

## 1.5 本章总结

---

- 1、**与集合相关的概念和特殊集合：**集合的定义、集合的表示、属于和不属于、子集、真子集、包含和真包含、幂集、空集、全集、基数、有限集、无限集等；
- 2、**与集合运算相关的概念和定理：**集合的交、并、差、补和对称差等五种运算的定义及相关定理。

## 习题类型

---

- (1) **基本概念题**：涉及集合的表示；
- (2) **判断题**：涉及元素与集合、集合与集合间的关系；
- (3) **计算题**：涉及集合的运算和幂集的计算；
- (4) **证明题**：涉及集合相等以及集合间包含关系的证明。

## 交作业方法及注意事项：

---

1. 准备一个作业本，每次在本子上完成作业后，拍照后打包发送至邮箱：[827083890@qq.com](mailto:827083890@qq.com)
2. 命名方式：离散数学第X章作业+姓名+学号
3. 可以不抄题，只需标明页数和题号
4. 主要考察是否认真做题，严禁抄袭，否则平时分为0分



## 习题（第一次作业）

---

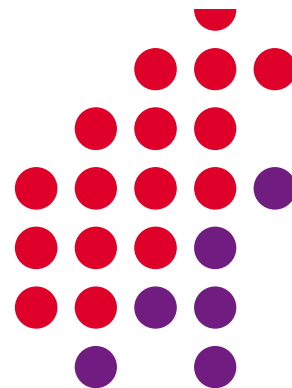
7. 1) 3) 5) 7) ; 9.

13. 2) 4) 6) 8) 10) 12) 14) 16)

23. 1) 3) 5) ; 24. 1) 3)

25. 29 (1) , (3)

31



# Thank You !

---

<http://202.115.21.136:8080/lssx>