大学物理•电磁学

主讲教师：吴 喆

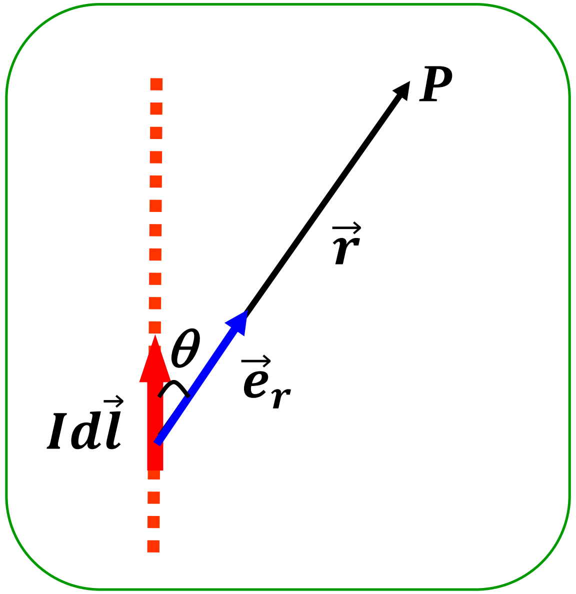
第 11章　静磁学

11.2 毕奥-萨伐尔定律

11.2.1 毕奥-萨伐尔定律

真空中，电流元 Idl 在 P 点产生的磁场为

$$\boxed{d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$



说明

(1)电流元 $Id\vec{l}$ 是载流导线上任取的一段线元

方向：电流 I 的方向；

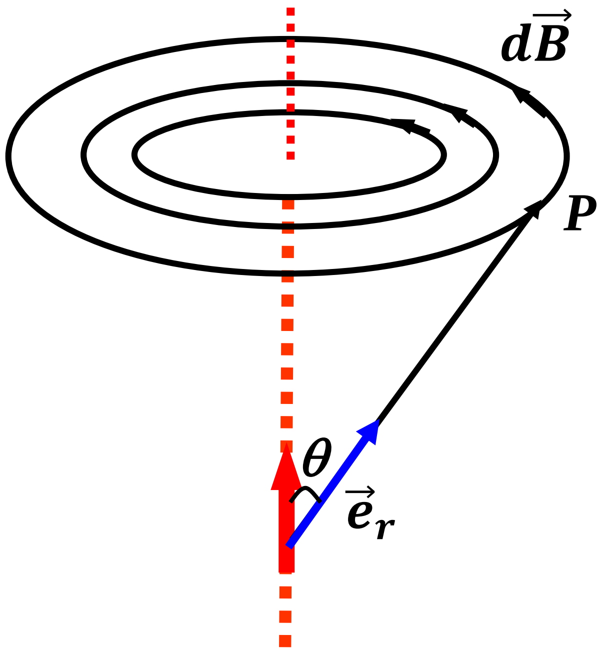
大小：Idl= 电流 $I\times$ 线元长度 dl

(2) $\vec{e}_r$ 是从电流元 $Id\vec{l}$ 指向 P 点的单位矢量。

(3) μ_0 称为真空的磁导率, 在 SI 制中 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{T\cdot m/A}$

11.2.1 毕奥-萨伐尔定律

$$\boxed{d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$



(4) 磁场的大小：

$$\boxed{dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}}$$

θ是 $Id\vec{l}$ 与 $\vec{r}$ 之间的夹角。

(5) 方向：$Id\vec{l}\times\vec{e}_r$，由**右手螺旋法则**确定。

$d\vec{B}$ 所对应的磁感应线是以 $Id\vec{l}$ 所在的直线为轴，以$r\sin\theta$为半径的圆。

在同一圆周上的各点的dB相等，并随 r 增大而减小。

11.2.1 毕奥-萨伐尔定律

$$\boxed{d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$

(6) 按照磁场叠加原理， 任一有限长的线电流在 P 点产生的$\vec{B}$，应等于线电流上各个电流元在P 点产生的$\mathrm{d}\vec{B}$的矢量和：

$$\vec{B}=\int d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

矢量积分！

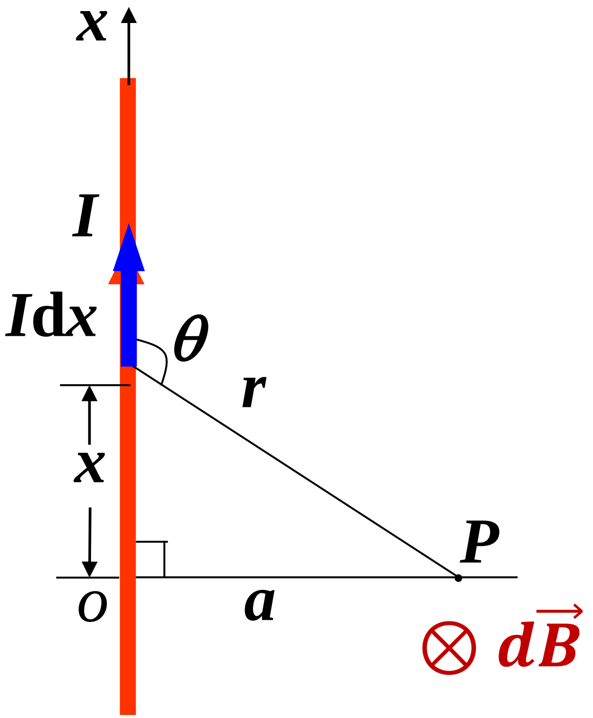
- 若各$\mathrm{d}\vec{B}$方向相同，则： $\vec{B}=\int d\vec{B}\Rightarrow B=\int dB$
- 若各$\mathrm{d}\vec{B}$方向不同，则建立坐标系：

$$\mathrm{d}\vec{B}=\mathrm{d}B_x\vec{i}+\mathrm{d}B_y\vec{j}+\mathrm{d}B_z\vec{k}$$

$$B_x=\int\mathrm{d}B_x,B_y=\int\mathrm{d}B_y,B_z=\int\mathrm{d}B_z$$

11.2.2 毕奥-萨伐尔定律的应用

例11-1 求直线电流的磁场。



解： 选坐标如图，电流元Idx在 P 点所产生的磁场为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idx\sin\theta}{r^2}$$

- **方向：** 垂直纸面向里（且所有电流元在 P 点产生的磁场方向相同）；
- 所以直线电流在P点产生的磁场为：

$$B = \int dB = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idx\sin\theta}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

11.2.2 毕奥-萨伐尔定律的应用

例11-1 求直线电流的磁场。

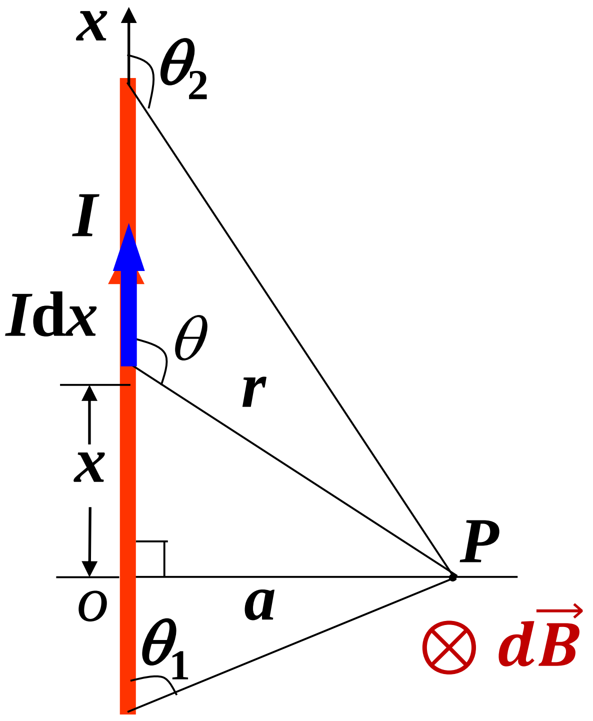
$$B=\int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}x\sin\theta}{r^2}$$

统一积分变量：

$$x=a\mathrm{tg}(\theta-90^o)=-a\mathrm{ctg}\theta$$

$$\mathrm{d}x=\frac{a\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta},\qquad r=\frac{a}{\sin\theta},$$

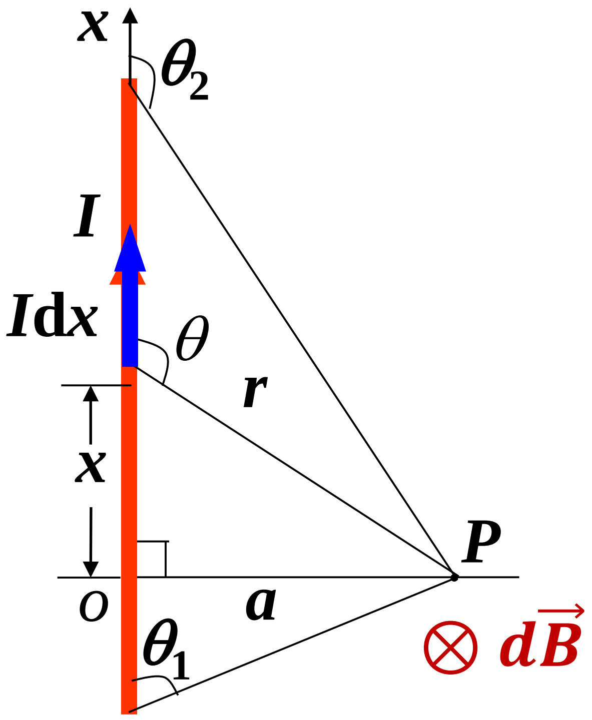
$$\therefore B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$



磁场方向: 垂直纸面向里。

例11-1 求直线电流的磁场。

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}$$



说明:

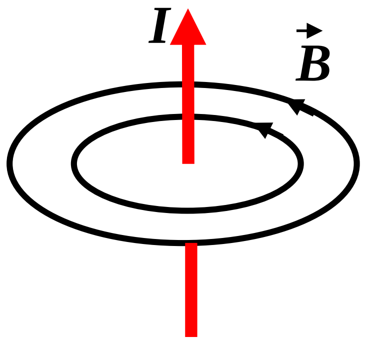
(1) 上式中的 a 是直电流外一点P 到直电流的垂直距离。

(2) θ_1和θ_2分别是两端直电流端点和场点P的连线间的夹角。

θ_1和 θ_2必须取同一方位 的角。

讨论:

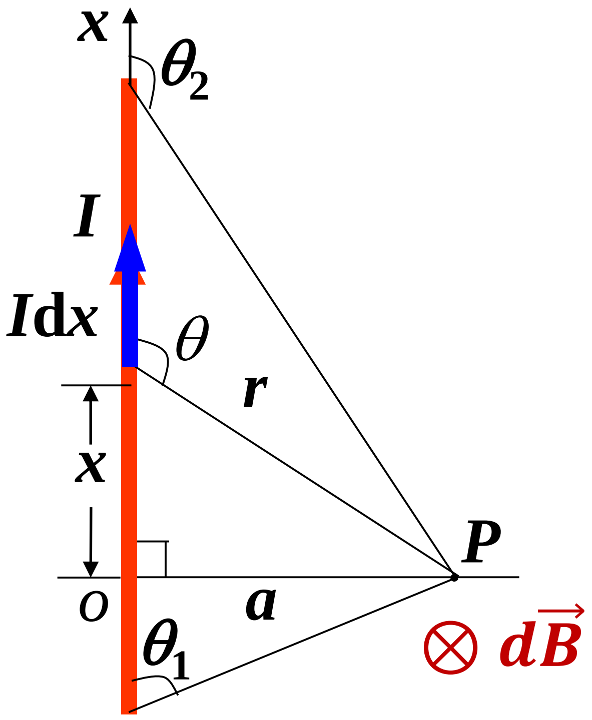
(1) 对无限长直导线，$\theta_1=0$, $\theta_2=\pi$, 则有 $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}}$



- 在垂直于直导线的平面上，磁感应线是一系列圆；
- 圆上各点 B 相等。

例11-1 求直线电流的磁场。

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}$$



(2) 如果*P* 点位于直导线上或其延长线上，

则*P*点的**磁感应强度必然为零**。

证： 若*P* 点位于直导线上或其延长线上，

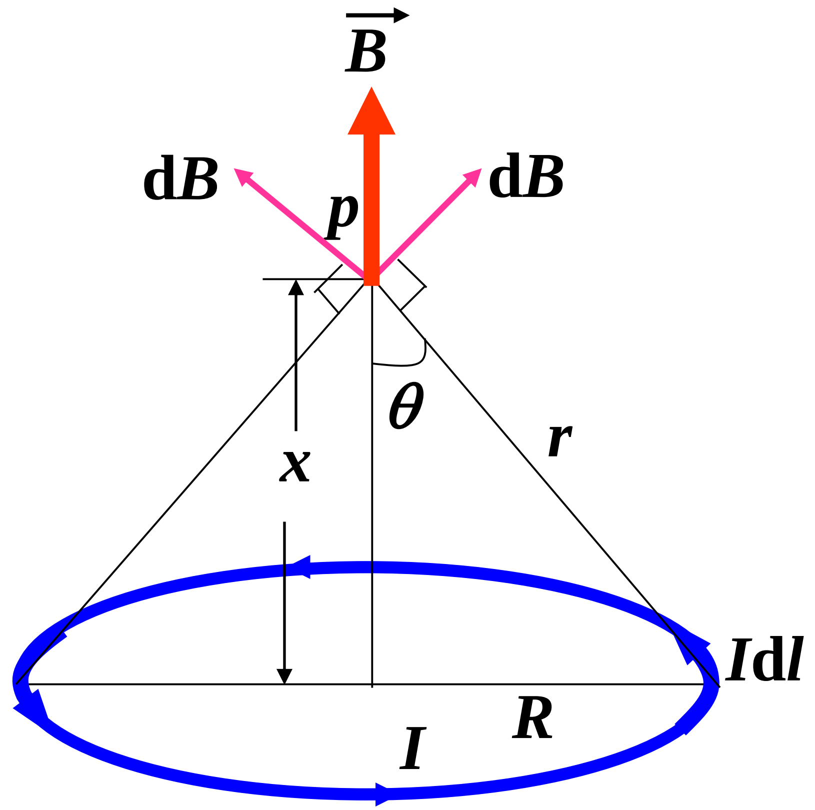
则 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$，于是

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2} = 0$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

例11-2 圆电流轴线上一点的磁场。

解： 由对称性可知，P 点的场强方向沿轴线向上。



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin 90^o}{r^2} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2}$$

$$B = \int dB\sin\theta$$

$$= \int_0^{2\pi R}\frac{\mu_0 I\sin\theta}{4\pi r^2}dl$$

$$= \frac{\mu_0 I\sin\theta}{4\pi r^2}\cdot 2\pi R$$

即

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 I}{(x^2+R^2)^{3/2}}}$$

例11-2 圆电流轴线上一点的磁场。

讨论：

(1) 在圆电流的圆心 O 处, 因 $x=0$, 故得

$$\boxed{B_o = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$

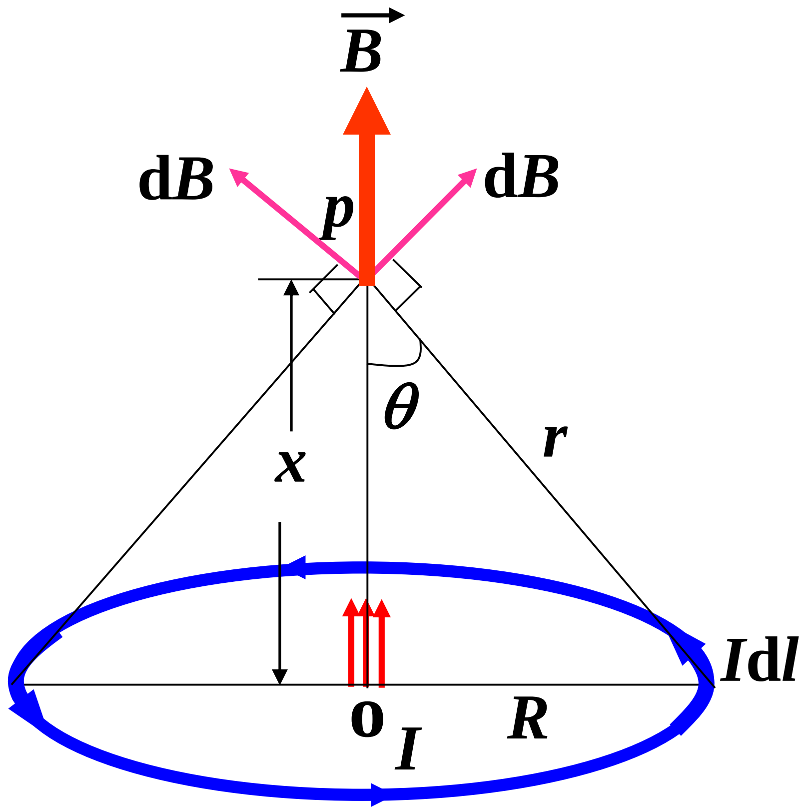
方向由**右手螺旋法则**确定。

推广：任意圆弧圆心处的磁场

$$\boxed{B = B_o \cdot \frac{\text{弧长}}{\text{圆周长}}}$$

(2) 若场点 P 远离圆心，且 $x>>R$有，则

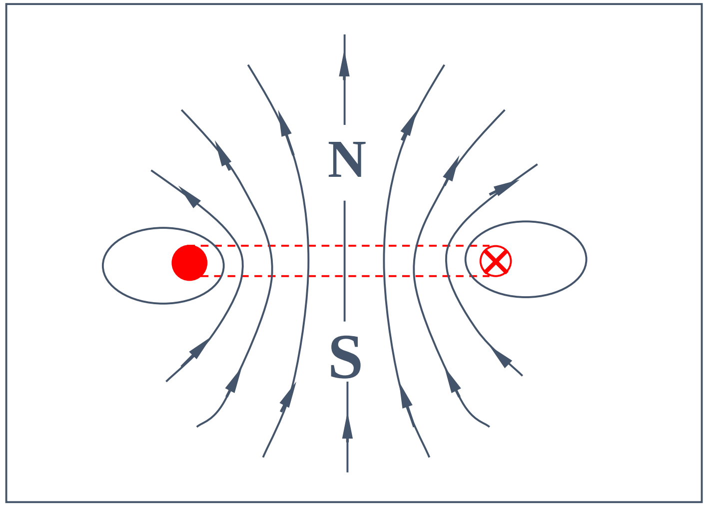
$$B \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3}$$



例11-2 圆电流轴线上一点的磁场。

讨论：

圆电流等效为由N和S极构成的磁偶极子。



磁偶极子的磁矩即载流线圈的磁矩：

$$\boxed{\vec{p}_m = NIS\vec{e}_n}$$

式中N 为线圈的匝数，S为线圈包围 的面积，$\vec{e}_r$为载流线圈平面正法向单位矢量，其方向与电流流向呈右螺旋关系。

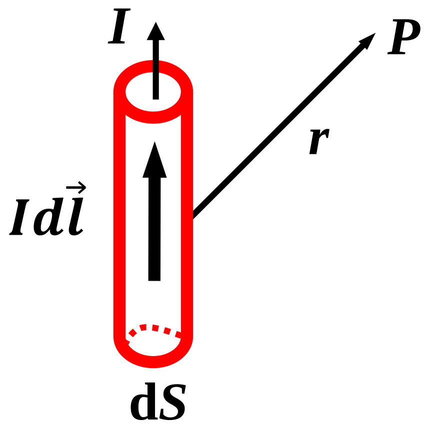
因此圆电流轴线上远离圆心处的磁场：

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi x^3}}$$

11.2.3 运动电荷的磁场

◆ 由毕奥-萨伐尔定律，电流元$Id\vec{l}$在 P点产生的磁场为：

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}}$$



◆ 设电流元 $Id\vec{l}$ 的横截面积为$\mathrm{d}S$，导体内载流子数密度为 n, 每个粒子带电量 q，以速度v 沿 $Id\vec{l}$ 的方向作运动，则 $I = qnv\mathrm{d}S$

$$Id\vec{l} = qnv\mathrm{d}S\mathrm{d}\vec{l} = qn\vec{v}\mathrm{d}S\mathrm{d}l$$

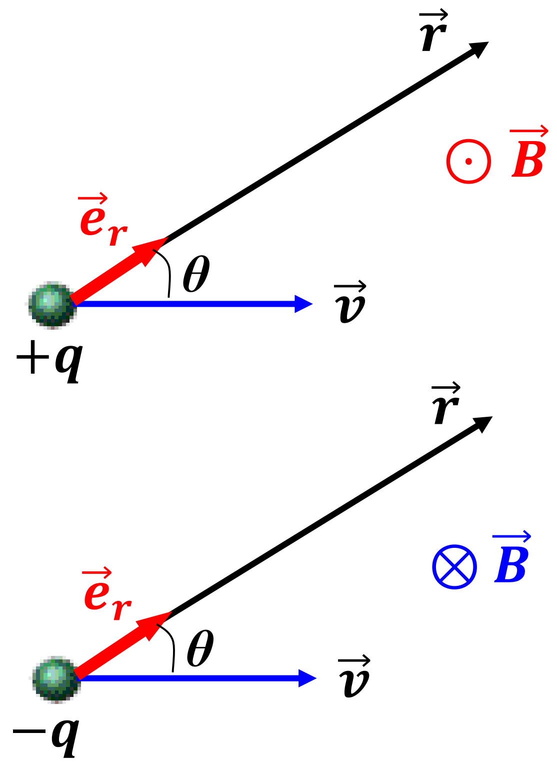
◆ 代入毕奥-萨伐尔定律中，得： $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qn\mathrm{d}S\mathrm{d}l\,\vec{v} \times \vec{e}_r}{r^2}$

11.2.3 运动电荷的磁场

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qndSdl\,\vec{v}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

◆ **电流元内共有$ndSdl$个载流子，所以一个运动电荷产生的磁场就是:**

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{e}_r}{r^2}}$$



大小: $B=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{qv\sin\theta}{r^2}$

方向: $\begin{cases}+q, & \vec{B}\text{ 与 }\vec{v}\times\vec{e}_r\text{ 同向}\\ -q, & \vec{B}\text{ 与 }\vec{v}\times\vec{e}_r\text{ 反向}\end{cases}$


物理学院
谢谢大家！