大学物理•热学

主讲教师：李 华

第 7 章　统计物理学初步

7.2 平衡态下理想气体压强、温度的微观实质（part 1）

本节的研究内容

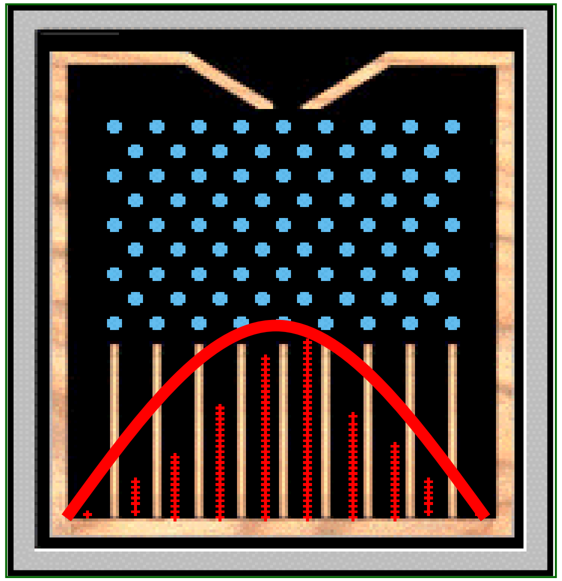
- **7.2.1 统计规律**
- **7.2.2 平衡态下理想气体压强**
- **7.2.3 平衡态下理想气体温度**

7.2.1 统计规律

(1) 伽尔顿板实验

I 实验现象

- **单个或少量**小球下落，分布在各槽小球数量具有**偶然性**
- **大量**小球同时下落，分布在各槽小球数量具有**稳定性**
- **大量**小球依次下落，分布在各槽小球数量具有**稳定性**



伽尔顿板实验示意图

II 实验结果分析

思考

小球下落过程中，支配其运动的是什么规律?

- 单个小球的运动受牛顿运动定律支配，遵守拉普拉斯决定论
- 每个小球下落的初始状态和边界条件无法保证完全相同，致小球在槽中的分布具有偶然性

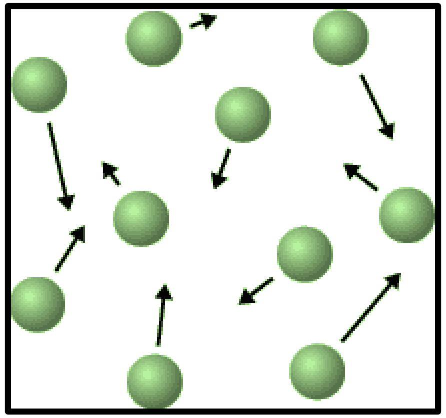
- 大量小球的集体行为遵从一定的统计规律

统计规律：在一定条件下，大量随机事件存在的一种必然规律性

统计规律≠力学规律的叠加

统计规律是量变到质变规律的反映，是比力学更高级的运动形式(如：热运动等)所服从的规律

如：分子运动似乎杂乱无章的气体系统，实验发现：确定宏观条件下，处在一定的空间间隔和速度间隔内的分子数目是确定的。



气体的微观图像

- 单个小球的多次行为也遵从一定的统计规律

- 单个小球的多次行为也遵从一定的统计规律

多个粒子的一次行为
一个粒子的多次行为

⇒ 大量偶然事件，结果相同，服从相同的统计规律

如：

抛硬币，Ⅰ 同时抛大量硬币
Ⅱ 分多次抛一个硬币

⇒ 正面和背面朝上的硬币数均各占一半

(2) 统计规律的数学描述

随机变量——描述随机事件的变量

- **离散型**：掷骰子点数，射击环数
- **连续型**：分子的速度、速率、位置

I 概率

——在一定条件下，随机事件发生的可能性大小

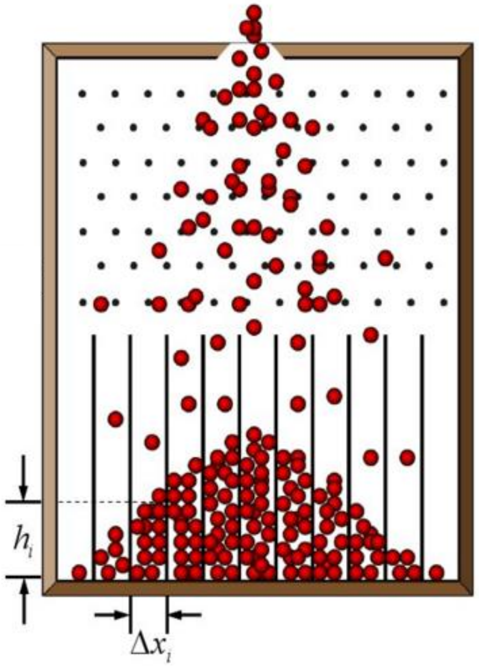
随机事件A的概率：

$$P_A=\lim_{N\to\infty}\frac{N_A}{N} \quad ①$$

（N 为所有的随机事件数，N_A为随机事件A 出现的次数）

如：小球落入第i个槽的概率：

$$P_i=\lim_{N\to\infty}\frac{N_i}{N}\approx\frac{N_i}{N}=\frac{h_i\Delta x_i}{\sum_i h_i\Delta x_i}$$



说明：式①定义的概率，只适用于离散型随机变量

对连续型随机变量，用概率密度描述

II 概率密度

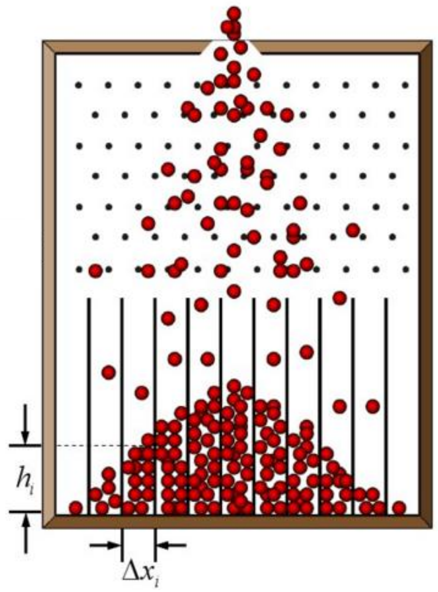
II 概率密度

设某连续型随机变量A的值在x-x+dx内的概率为d$P(x)$，且

$$\mathrm{d}P(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

其中，$\boxed{f(x) = \dfrac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}}$ ——概率（密度）分布函数

$f(x)$ 就是变量A的取值在x处附近单位间隔中的概率，叫概率密度



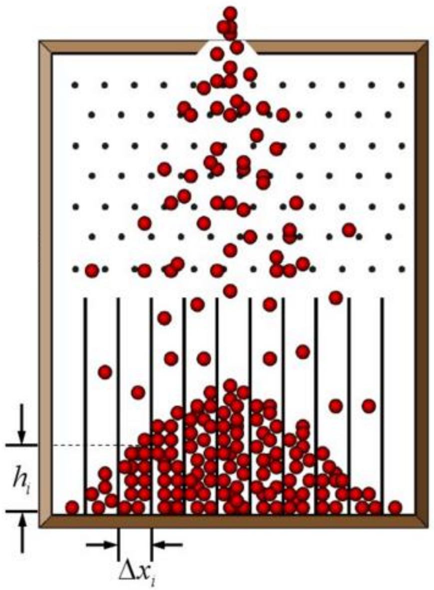
例：小球落入第i个槽的概率：$P_i = \lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{N_i}{N} \approx \dfrac{N_i}{N} = \dfrac{h_i\Delta x_i}{\sum_i h_i\Delta x_i}$

当狭槽变窄（$\Delta x_i \to dx$），小球(视为几何点)落入某一个宽度为dx的狭槽的概率：

$$dP = \frac{dN}{N} = \frac{h(x)dx}{\int h(x)dx}$$

将上式两端同时除以dx，得概率密度：$f(x) = \dfrac{dP}{dx} = \dfrac{1}{N}\dfrac{dN}{dx} = \dfrac{h(x)}{\int h(x)dx}$

$$\boxed{f(x) = \frac{dP}{dx} = \frac{1}{N}\frac{dN}{dx}}$$



- **说明**
  - $f(x)$的意义：
    - 一个小球落在坐标x附近单位长度区间上的概率
    - 落在坐标x附近单位长度区间上的小球数占总小球数的百分比
    - 类比，知：$f(\upsilon)$气体分子速率的概率密度——麦克斯韦速率分布函数
      - 物理意义1：气体分子的速率落在速率υ附近单位速率区间上的概率
      - 物理意义2：落速率υ附近单位长度区间上的分子数占总分子数的百分比
  - $f(x)$是统计理论的核心
    - 小球落在$(x, x+dx)$ 的概率：$\boxed{dP = f(x)dx}$
    - 随机变量的统计平均值与$f(x)$ 密不可分

III 概率的性质

- $0 \le P_A \le 1$

  $P_A = 0$ 不可能事件；　　$P_A = 1$ 必然事件

- **加法定理**：n个互不相容事件出现的概率为每个事件单独出现的概率之和

$$P_{A\ or\ B} = P_A + P_B$$

如：掷骰子，一次投掷中出现3点或4点的概率：　$P_{3\ or\ 4} = P_3 + P_4 = = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

附：互不相容事件：绝不可能在单次实验中同时发生的事件

如：掷骰子单次实验中分别出现1点、2点…6点——不相容事件

- **乘法定理：两个独立事件同时发生的概率为单独发生概率的乘积**

$$P_{A\ \text{and}\ B} = P_A \times P_B$$

如：同时投掷两枚硬币都是背面的概率：$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

附：互相独立事件：在一定条件下，有两个随机事件A和B，其中之一发生与另一事件是否发生无关则A与B是互相独立事件。

如：同时投掷二枚硬币，其中一枚正面朝上和另外一枚正面朝上无关

- **概率归一化**

$$P_A = \sum_{i=1}^{N} P_{Ai} = 1 \quad 或 \quad \int f(x)\mathrm{d}x = 1$$

如：抛硬币 $P_{正} + P_{反} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

IV 统计平均值

- **离散型：** $\bar{A}=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{A_1N_1+A_2N_2+\cdots+A_nN_n}{N}=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_i A_i\dfrac{N_i}{N}=\sum\limits_i AP_i$

A 的统计平均值等于一切可能的取值A_i 与其对应的概率乘积之总和

对比——算术平均值　　物理平均分= $\dfrac{\text{全班物理总分}}{\text{全班人数}}$

- **连续型：**

若已知连续型随机变量A 的概率密度分布函数$f(x)$，则该随机变量在**整个取值范围**内的平均值：

$$\overline{A(x)}=\int Af(x)\mathrm{d}x$$

课后思考：

- ➢连续型随机变量在**有限取值范围内**的平均值?
- ➢经典统计与量子统计的区别

谢 谢 大 家！