大学物理•电磁学

主讲教师：吴 喆

第 10章　静电学

10.3 静电场的环路定理；电势

10.3.1 电场力的功

在点电荷 q 的电场中

$$A_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}.d\vec{l}=\int_a^b E\mathrm{d}l\cos\theta$$

$$=\int_a^b \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}dr=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

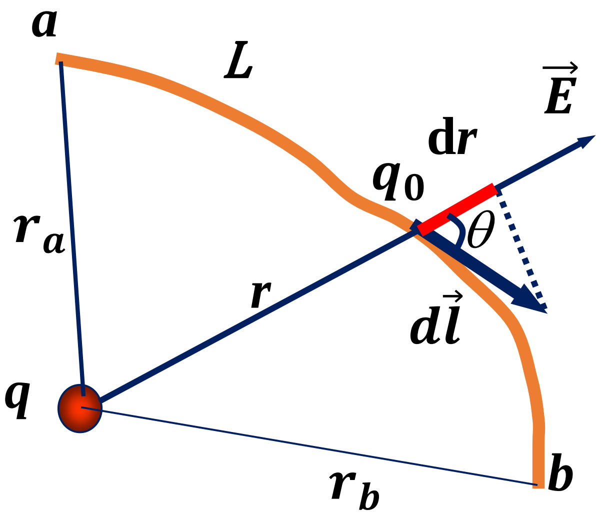


图1. 电场力的功

由此可见，在点电荷q的电场中，电场力的功只与路径的起点和终点位置有关，而与路径形状无关。

此结论可通过叠加原理推广到任意点电荷系(带电体)的电场。

10.3.2 静电场的环路定理

- 电场力的功只与路径的起点和终点位置有关, 而与所通过的路径无关——电场力是保守力。

$$A=\int_{L_1}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{L_2}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint_l \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_l q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\quad \Rightarrow \oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

- 即在静电场中，电场强度沿任意闭合路径的线积分(也称为环流)恒等于零。

- 静电场的环路定理

$$\boxed{\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0}\qquad \boxed{(\nabla\times\vec{E}=0)}$$

- 静电场的另一重要性质 —— 静电场是保守场

(也称静电场是无旋场)。

10.3.3 电势能

由 $A_{保} = -\Delta E_p = -\Delta W$

$$A = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(W_b - W_a) = W_a - W_b$$

其中： W_a是在a点的电势能； W_b是q_0在b点的电势能。

即：电场力的功等于电势能增量的负值。

若取b点为电势能的零点(零势点)，即令$W_b = 0$，则q_0在a点的电势能为

$$\boxed{W_a = q_0 \int_a^{零势点} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

10.3.4 电势和电势差

场中 a 点的电势：

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电场中某点的电势有三种表述：

(1) 等于单位正电荷在该点的电势能；

(2) 等于将单位正电荷从该点经过任意路径移到零势点时电场力所作的功。

(3) 等于场强从该点经过任意路径移到零势点的线积分。

- **电势差：**

$$U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

静电场中a、b两点的电势差等于将单位正电荷由 a 沿任意路径移至 b 过程中电场力做的功。

讨论：

(1) 电势是相对量，随零势点的不同而不同。而电势差是绝对量，与电势零点的选择无关。

(2) 原则上电势零点可任意选择，视方便而定 。

对有限大小的带电体，规定取无穷远为零势点，于是

$$U_a = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

(3) 电势是标量，其值可正可负，与零势点的选择有关。若选无穷远为零势点，则正电荷的电场中各点电势总为正，负电荷的电场中各点电势总为负。

10.3.5 电势的计算

(1) 已知场强计算电势

$$U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

(2) 利用电势叠加法计算电势

点电荷的电势公式+电势叠加原理

(2) 利用电势叠加法计算电势

点电荷的电势公式+电势叠加原理

① 取无穷远为电势零点，点电荷 q 场中任一点 a 点的电势

$$U_a=\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

点电荷的场强公式

② 点电荷系 $(q_1,q_2,\ldots q_i\ldots q_n)$ 场中的电势

因 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$ 式中 $\vec{E}_i$ 为 q_i 产生的电场

$$U_a=\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\sum_i\left(\int_a^{\infty}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}\right)$$

$$\boxed{U_a=\sum_i^n U_i=\sum_i^n\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$$

式中: U_i 代表第 i 个点电荷 q_i 单独存在时在 a 点产生的电势。这一结论称作**电势叠加原理**。

③对于电荷连续分布的带电体，可将其分割为无数多电荷元dq，其电势为

$$\boxed{U=\int dU=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

积分遍及整个带电体

10.3.5 电场强度和电势的关系

(1) 等势面

在电场中，电势相等的点所组成的曲面叫**等势面**

点电荷的电势 $\boxed{U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

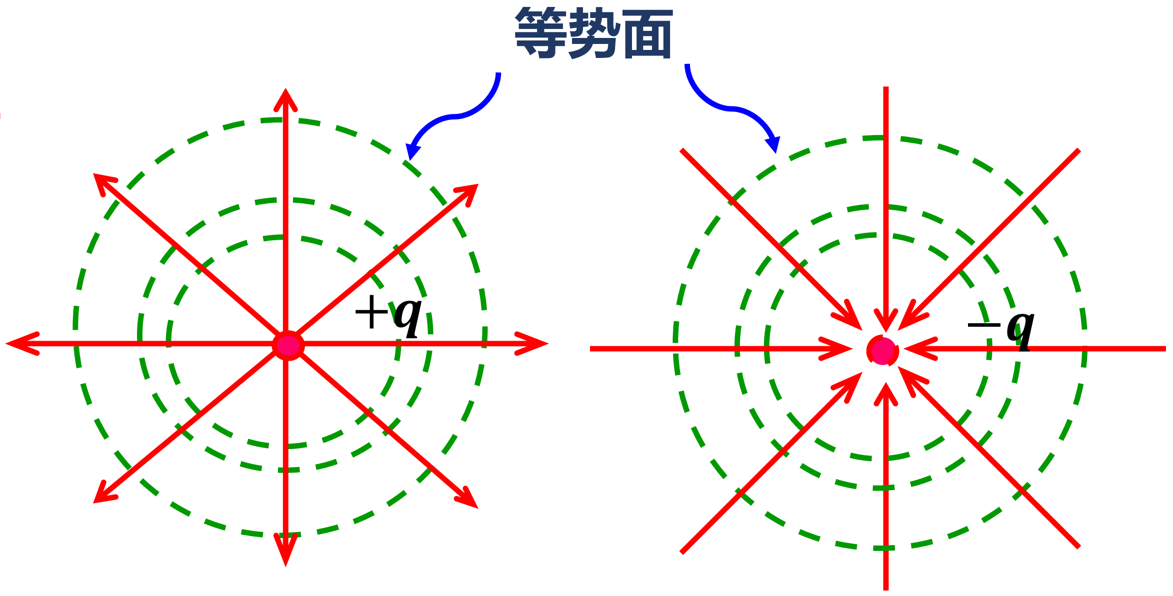


图2. 点电荷的电力线和等势面

（左）正电荷 （右）负电荷

(2) 等势面的性质

- 等势面与电场线处处**正交**。
- 电场线的方向指向电势**降落**的方向。
  因沿电力线方向移动正电荷场力做正功，电势能减少。
- 规定两个相邻等势面的电势差相等；
  等势面较密集的地方，场强较大。等势面较稀疏的地方，场强较小。

(3) 电场线和等势面

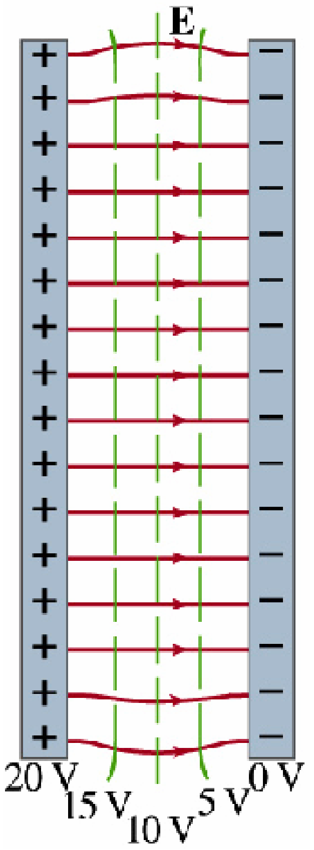


图3. 平板电容器的电力线和等势面

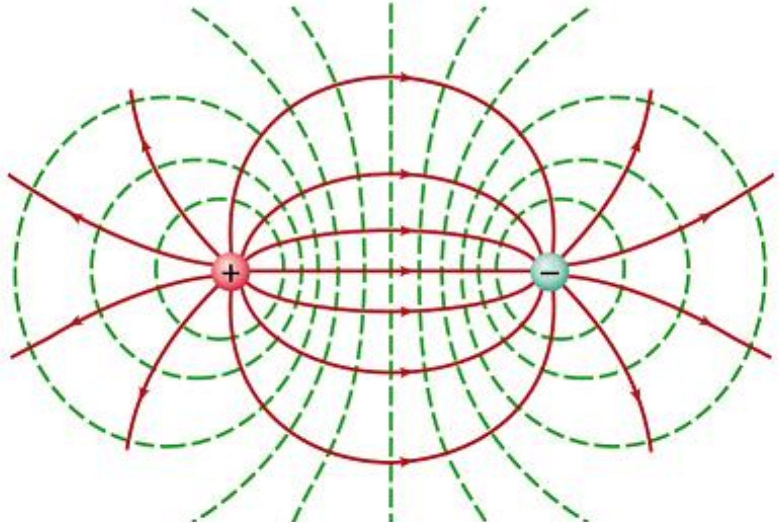


图4. 一对等量异号电荷的电力线和等势面

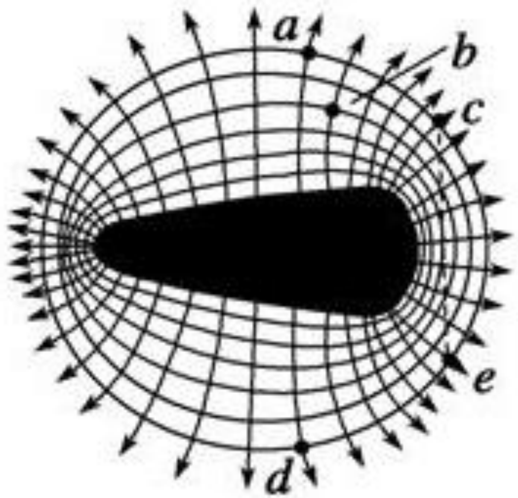


图5. 带电导体的电力线和等势面

(4) 电场梯度

在同一场点, 其电势沿不同方向的空间变化率也是不同的。

定义电势梯度矢量：
$$\mathrm{grad}U = \frac{\partial U}{\partial n}\vec{e}_n$$

即，场中某点电势梯度矢量，其大小等于电势沿等势面法向的空间变化率，指向电势增加方向。

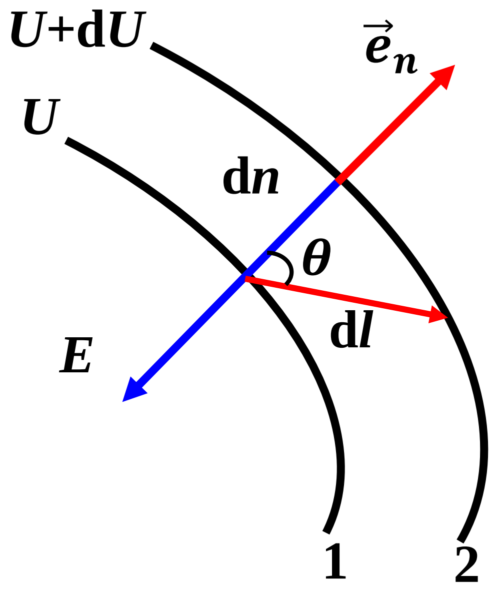


图6. 电场梯度的示意图

$$U_a - U_b = -\mathrm{d}U = \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$
$$= E\mathrm{d}l\cos(\pi-\theta) = E\mathrm{d}l\cos\theta = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{n}$$

$$\therefore E = -\frac{\partial U}{\partial n}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial U}{\partial n}\vec{e}_n = -\mathrm{grad}\,U}$$

静电场中任何一点的电场强度等于该点电势梯度矢量的负值。

- **电场强度E沿任一方向$\mathrm{d}l$ 的分量：**

$$E_l = E\cos(\pi-\theta) = -\frac{\partial U}{\partial n}\cos\theta = -\frac{\partial U}{\partial l}$$

即，电场强度在任一方向的分量等于电势沿该方向上的空间变化率的负值。

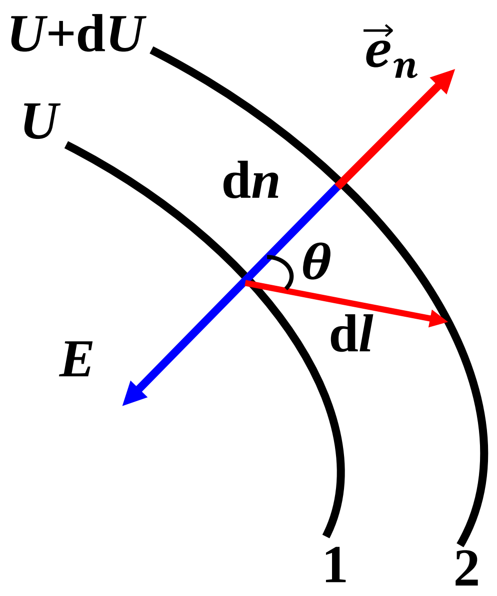


图6. 电场梯度的示意图

在直角坐标系中， $E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$

$$\vec{E} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

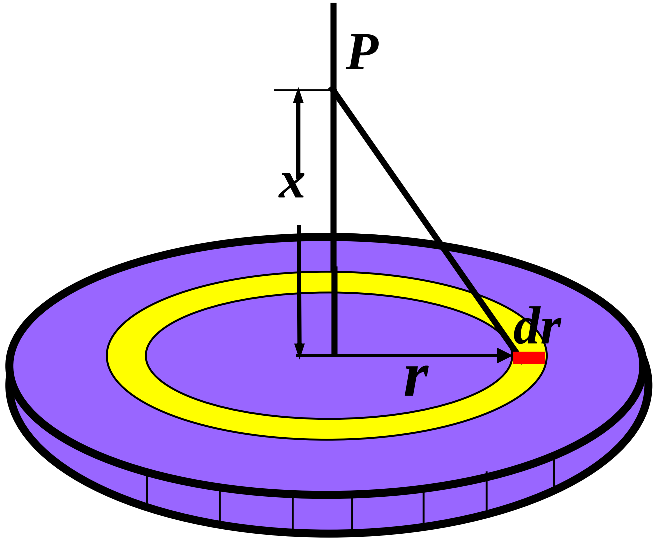
引入微分算符： $\nabla = -\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

场强$\vec{E}$ 与电势U 的微分关系 $\boxed{\vec{E} = -\nabla U}$

10.3.6 环路定理的应用

例10-7 均匀带电圆盘，半径为 R，电荷面密度为 σ，求轴线上离盘心距离为 x 的 P 点的电势。

解：将圆盘分为若干个圆环, 任取一个圆环，在 P 点的电势



$$\mathrm{d}U=\frac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 d}=\frac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}$$

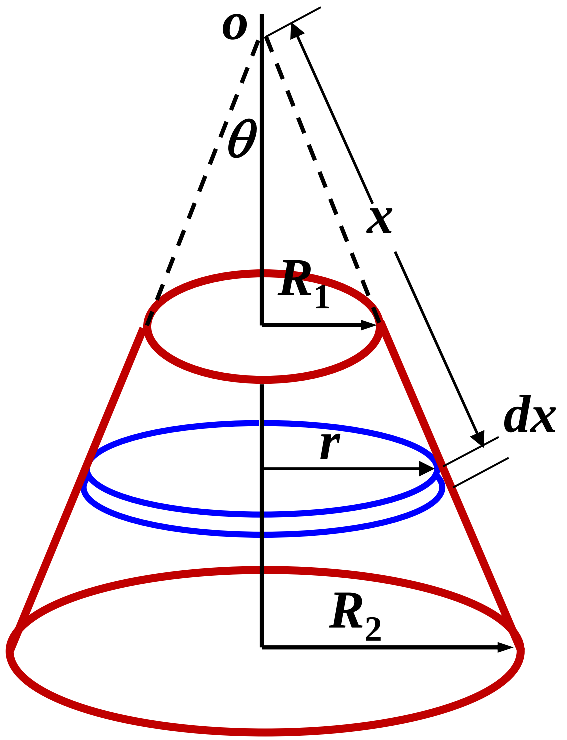
$$\therefore U_P=\int_0^R\frac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+r^2}-x\right)$$

10.3.6 环路定理的应用

例10-8 一圆台的上下底面半径分别为R_1和R_2，它的侧面上均匀带电，电荷面密度为σ，取无穷远为电势零点，求顶点o的电势。



解: 将圆台分为若干个圆环积分

$$U_P=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

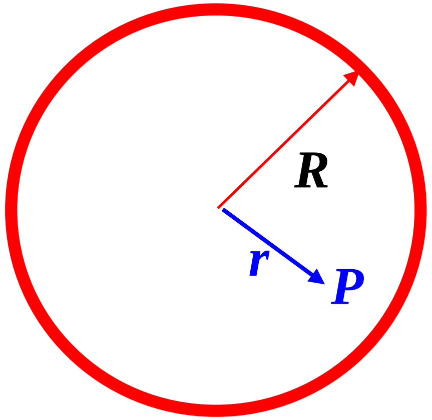
$$\because x=\frac{r}{\sin\theta} \qquad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}r}{\sin\theta}$$

得顶点o的电势

$$U_P=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}r=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_2-R_1)$$

10.3.6 环路定理的应用

例10-9 求半径为R、总电量为 q 的均匀带电导体球的电势分布。



解： 由高斯定理求出其场强分布，

$$r < R:\quad E_1 = 0; \qquad\qquad r > R:\quad E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

选定无限远处的电势为零，由电势的定义式，有

$$r \le R:\quad U_{内} = \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^{R} E_1 dr + \int_R^{\infty} E_2 dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$r \ge R:\quad U_{外} = \int_r^{\infty} E_2 dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- 球面内任一点的电势都等于球面上的电势；
- 而球面外任一点的电势与所有电荷集中在球心的点电荷产生的电势相同。

谢谢大家！