大学物理•量子力学基础

主讲教师：郭袁俊

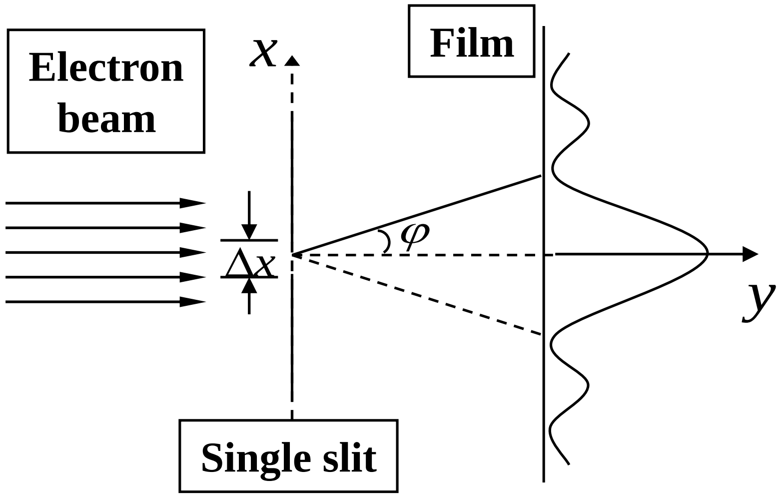
第 17 章　量子力学基础

17.2 不确定关系

本节的研究内容

- 不确定关系的推导
- 不确定关系的应用

17.2.1 电子的单缝衍射



电子衍射前，

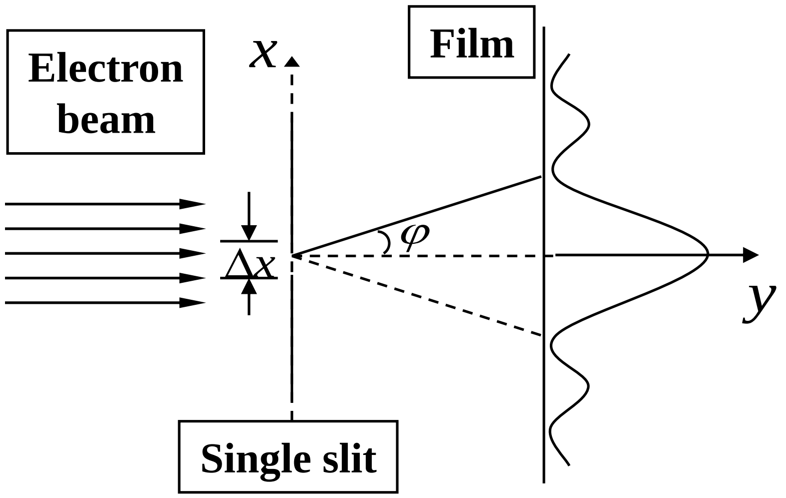
$$p_x = 0，\ p_y = p$$

缝后，若只考虑中央明纹

$$0 \le p_x \le p\sin\varphi$$

因此，电子动量在x方向上的**不确定量**为

$$\Delta p_x = p\sin\varphi$$



对第一级衍射暗纹，有

$$\Delta x \sin\varphi = \lambda$$

其中Δx为缝宽，代表电子x方向位置不确定量。于是

$$\Delta p_x = p\sin\varphi = \frac{h}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{h}{\Delta x}$$

$$\therefore \Delta x \Delta p_x = h$$

若计及更高级次的衍射, 应有

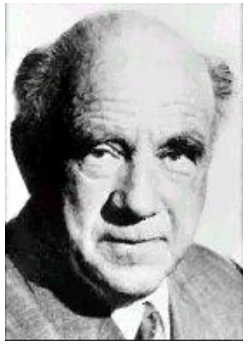
$$\Delta x \Delta p_x \ge h$$

对y和z分量, 也有类似的关系

$$\Delta y \Delta p_y \ge h\,,\quad \Delta z \Delta p_z \ge h$$

17.2.2 位置和动量的不确定关系

1927年，海森伯提出了不确定关系，即微观粒子在任一方向上的**位置**与该方向上的**动量**不可能同时具有确定值。二者的不确定量满足



海森堡
WERNER HEISENBERG
(1901-1976) 1932年获诺贝尔奖

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq h}$$

Δx代表某一方向上的位置不确定量，Δp_x代表该方向上的动量不确定量

经量子力学严密推导，得

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$$

因该关系式只做数量级的估计，故也可写为:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

讨论

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq h}$$

1) 微观粒子运动过程中，其坐标的不确定量与该方向上动量分量的不确定量相互制约

2) 不确定关系是微观世界的一条客观规律, 不是测量技术和主观能力的问题

$$\Delta x \to 0, \quad \Delta p_x \to \infty$$
$$\Delta p_x \to 0, \quad \Delta x \to \infty$$

3) 不确定关系给出了宏观与微观物理世界的界限

如果在所研究的问题中，不确定关系施加的限制不起作用，该问题可用经典力学处理，否则要用量子力学处理

例1 子弹质量m=0.01kg，枪口的直径为0.5cm，试用不确定关系计算子弹射出枪口时的横向速度。

解：枪口的直径就是子弹射出枪口时的横向位置不确定量

$$\Delta x = 0.5 \times 10^{-2}\mathrm{m}$$

按不确定关系：$\Delta x \Delta p_x \geq h$ 则子弹横向速度的不确定量为

$$\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.01 \times 0.5 \times 10^{-2}} = 1.32 \times 10^{-29}(\mathrm{m/s})$$

可见，子弹的横向速度所引起的运动方向的偏转是微不足道的。

这表示，不确定关系所施加的限制对宏观物体来说，实际上不起作用，所以宏观物体可以用经典理论来研究它的运动。

例2 估算氢原子中电子速度的不确定量。

解： 电子被束缚在原子内，位置的不确定量是

$$\Delta x = 10^{-10}\mathrm{m} \quad \text{（原子的线度）}$$

由 $\Delta x \Delta p_x \geq h$ 可得

$$\Delta v_x = \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6.63\times 10^{-34}}{9.11\times 10^{-31}\times 10^{-10}} = 7.3\times 10^{6}(\mathrm{m/s})$$

可见，不确定关系所施加的限制不能忽略不计。

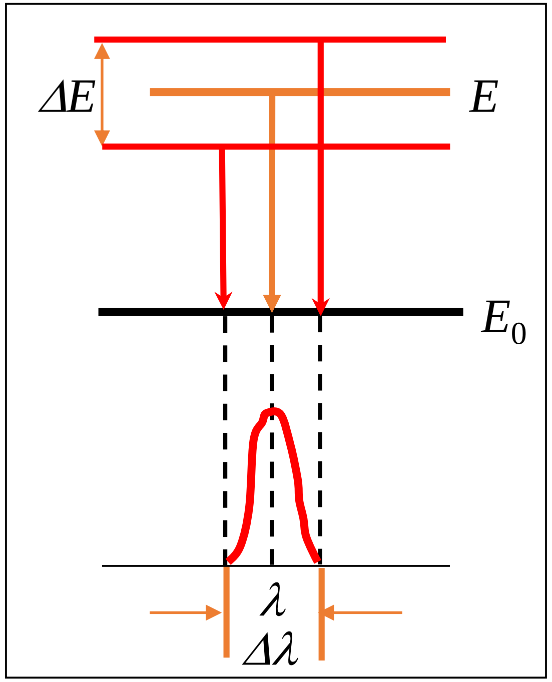
故研究氢原子问题不能用经典理论，只能用量子力学理论来处理。

17.2.3 时间和能量的不确定关系

设粒子处于某能量状态的时间不确定量为Δt (寿命)，则该状态能量的不确定程度ΔE(能级自然宽度)与Δt也存在类似的不确定关系:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h \qquad \text{或} \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

解释原子谱线宽度:



基态E_0稳定

$$\Delta t \to \infty, \quad \Delta E \to 0, \quad E_0\text{确定}$$

激发态E不稳定，其寿命为Δt，则

$$\Delta E \geq \frac{h}{\Delta t}, \quad E\text{不确定}$$

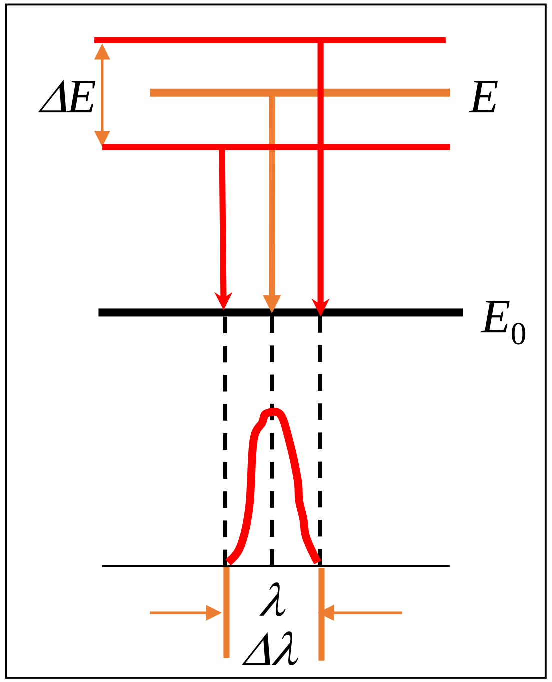
$\boldsymbol{E \rightarrow E_0}$ 跃迁:

$$\nu = \frac{E - E_0}{h}$$

由于能级宽度ΔE而引起的谱线宽度

$$\Delta\nu \approx \frac{\left(E + \frac{\Delta E}{2}\right) - E_0}{h} - \frac{\left(E - \frac{\Delta E}{2}\right) - E_0}{h}$$

$$= \frac{\Delta E}{h}$$



用波长表示

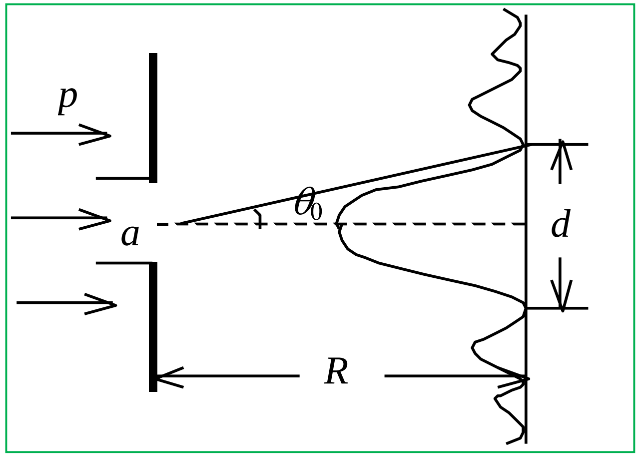
$$\because \lambda = \frac{c}{\nu}, \qquad \therefore \Delta\lambda = \left|-\frac{c}{\nu^2}\Delta\nu\right| = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu$$

谢谢大家！

例1 如图所示，一束动量为p的电子，通过缝宽为a的狭缝．在距离狭缝为R处放置一荧光屏，屏上衍射图样中央最大的宽度d等于

(A) $\frac{2a^2}{R}$　　(B) $\frac{2ha}{p}$

(C) $\frac{2ha}{Rp}$　　(D) $\frac{2hR}{ap}$



答：(D)

解答分析：由$d = 2Rsin\theta_0$ 以及不确定关系 $a(psin\theta_0) = h$ 可得**D**