物理学院

大学物理•电磁学

主讲教师：吴 喆

第 12 章　变化的电磁场

12.2.2 感生电动势

(1) 感生电动势的产生机理

麦克斯韦认为：变化的磁场要在其周围的空间激发一种电场, 称为感生电场(涡旋电场)$\vec{E}_i$

带电粒子处于此电场中，无论运动与否都要受到该电场的作用，这一作用力就是产生感生电动势的非静电力

感应电场就是产生感生电动势的非静电场强，所以

感生电动势： $\boxed{\varepsilon_i = \int_l \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$

导体回路中的感生电动势： $\varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

(2) 感生电场(涡旋电场)

根据法拉第电磁感应定律，导体回路中的感生电动势：

$$\varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad \left(\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

$$\boxed{\therefore \quad \oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}}$$

上式表明，感生电场的环量等于穿过以 l 为边界的任意曲面的磁通量对时间的变化率的负值

进一步可得出感生电场与变化磁场之间的一般关系：

$$\oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

上式是电磁场的基本方程之一，说明变化的磁场产生电场

根据斯托克斯公式可得其微分形式 $\nabla \times \vec{E}_i = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

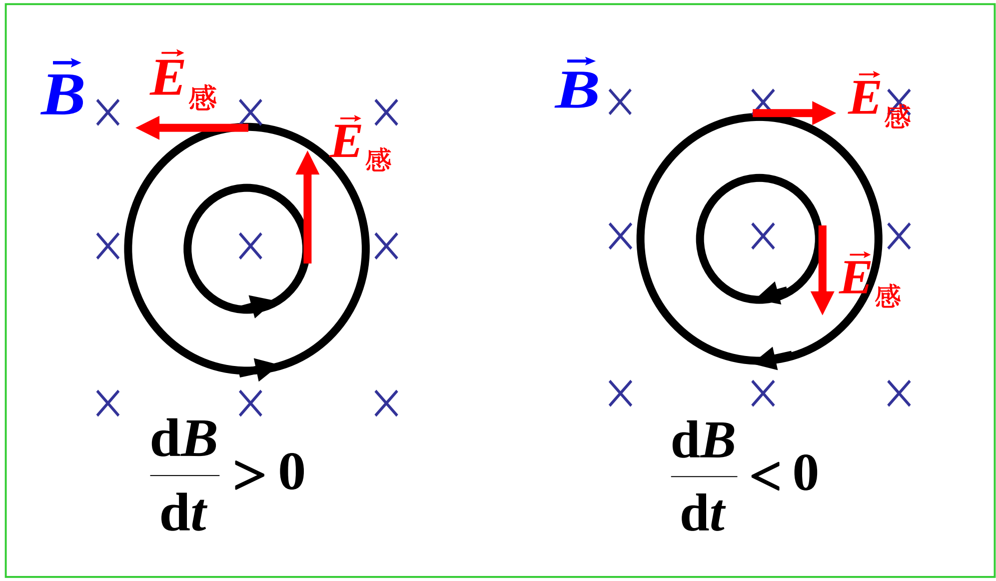
由感生电场的通量或者旋度可得出**感生电场的性质**

I $\because \oint_l \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$ 所以，感应电场是非保守场, 电场线是闭合曲线；

II $\because \oiint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ 所以，感应电场是无源场；

III 式中负号说明感应电场与$\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$的方向呈左手螺旋

感应电场的方向也可根据**楞次定律**确定



思考

感生电场与静电场之间的相同与不同之处?

	静电场	感应电场
起源	静止电荷	变化磁场
性质	$\oiint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q_{内}$ $\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ 有源，保守场(无旋)	$\oiint_s \vec{E}_i\cdot d\vec{S}=0$ $\oint_l \vec{E}_i\cdot d\vec{l}=-\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ 无源，非保守场(涡旋)
特点	不能脱离源电荷存在	可以脱离“源”在空间传播
对场中电荷的作用	$\vec{F}_{静}=q\vec{E}$	$\vec{F}_{感}=q\vec{E}_i$
联系	$\vec{F}_{感}$作为产生感生电动势的非静电力，可以引起导体中电荷堆积，从而建立起静电场。	

(3)应用举例

例1 均匀磁场分布在半径为R的圆柱形区域；磁感应强度以$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$的变化率均匀增加。一细棒$AB=2R$，中点与圆柱形空间相切，求细棒AB中的感生电动势，并指出哪点电势高。

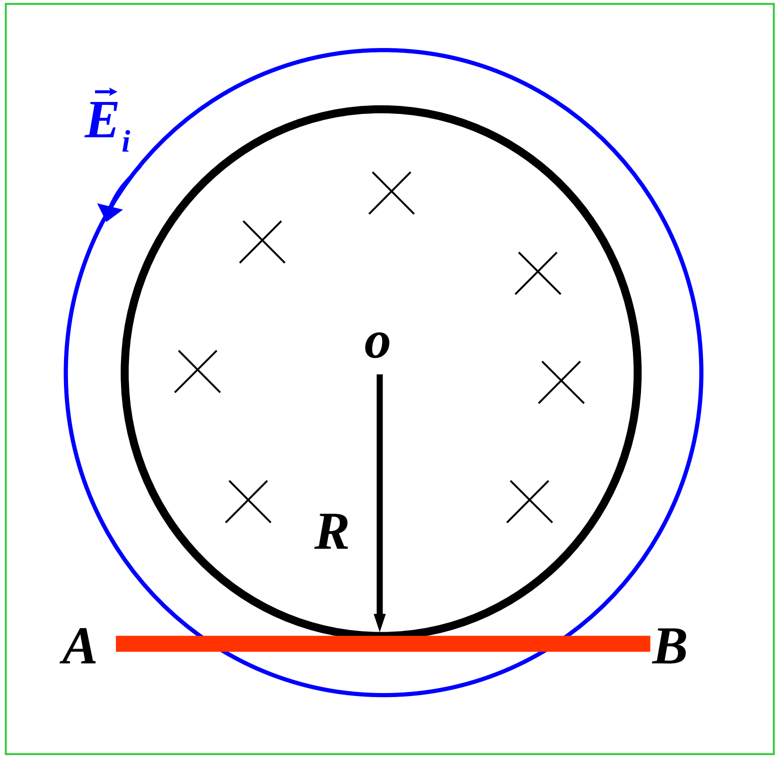
解: 轴对称的磁场变化产生的感生电场也具有轴对称性，感应电场线在垂直于磁场的平面内是圆心在轴线上的一系列同心圆

由楞次定律判定，感生电场的方向是逆时针的，如图

取半径为r的感应电场线为闭合路径，则

$$\oint_l \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = E_i \cdot 2\pi r = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} \quad \left(\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\right)$$

由上式可求出感应电场的大小 $E_i = \dfrac{1}{2\pi r}\left|\dfrac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}\right|$



$r>R$: $$E_i = \frac{1}{2\pi r}\left|\frac{\mathrm{d}(B\cdot\pi R^2)}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

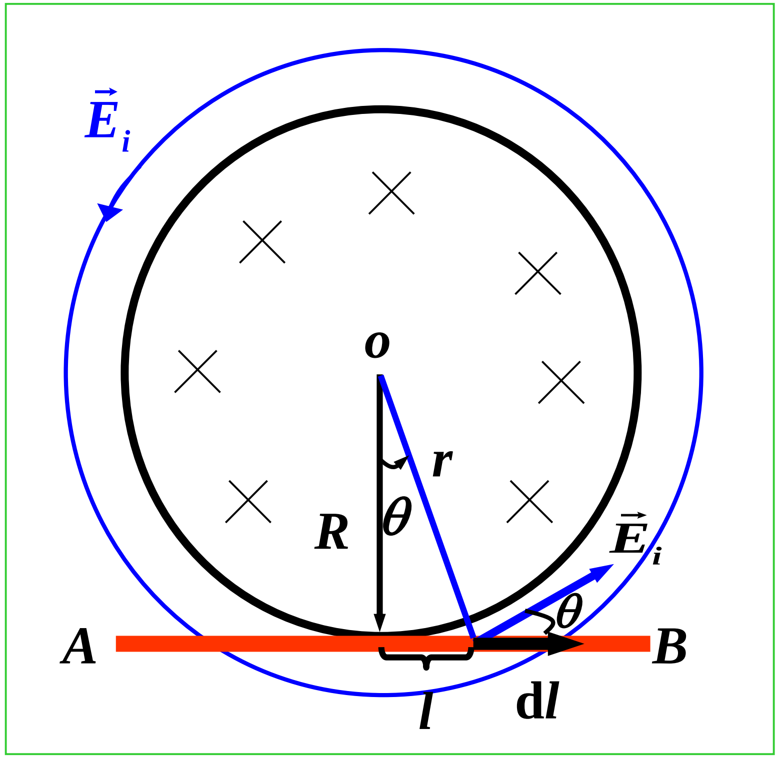
细棒AB中的感生电动势

$$\varepsilon_i = \int_A^B \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B E_i \mathrm{d}l\cos\theta$$

由于 $\mathrm{d}l\cos\theta = r\mathrm{d}\theta$

$$\therefore \varepsilon_i = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{R^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi R^2}{4}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$\varepsilon_i>0$，由A指向B，B点电势高



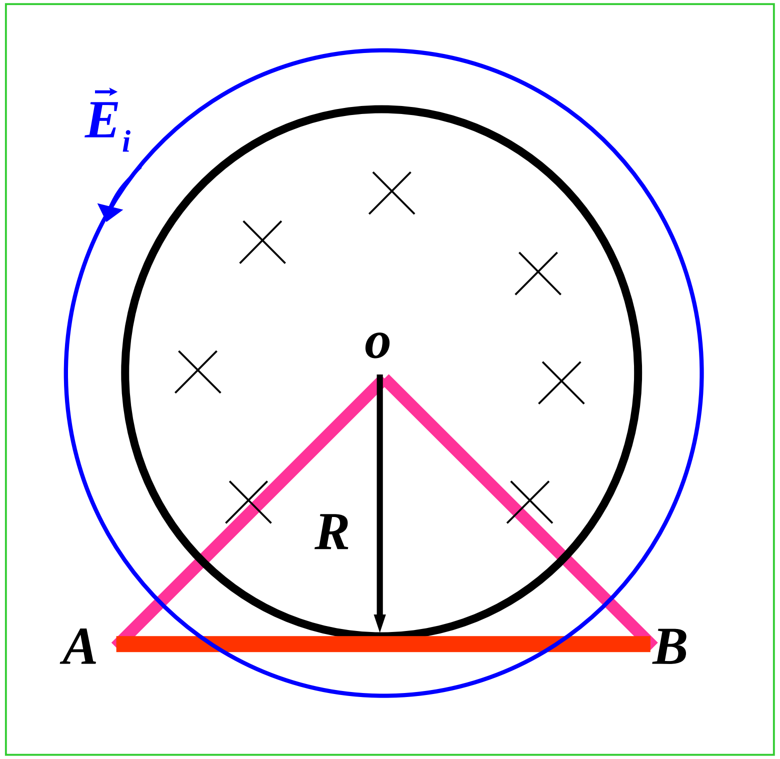
解法2： 连接oA、oB组成回路

$$\varepsilon_{OA}=\varepsilon_{OB}=\int_o^A E_i \mathrm{d}l\cos\theta \ =0$$

由于oA和oB中的电动势为零，故整个回路OAB中的电动势就是导线AB中的电动势。

回路OAB中的磁通量 $\varphi_m = B\cdot\frac{1}{4}\pi R^2$

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\varphi_m}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi R^2}{4}\cdot\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$



由楞次定律知，回路OAB中的电动势方向为逆时针，因此导线AB中的感生电动势由A指向B，B点电势高。

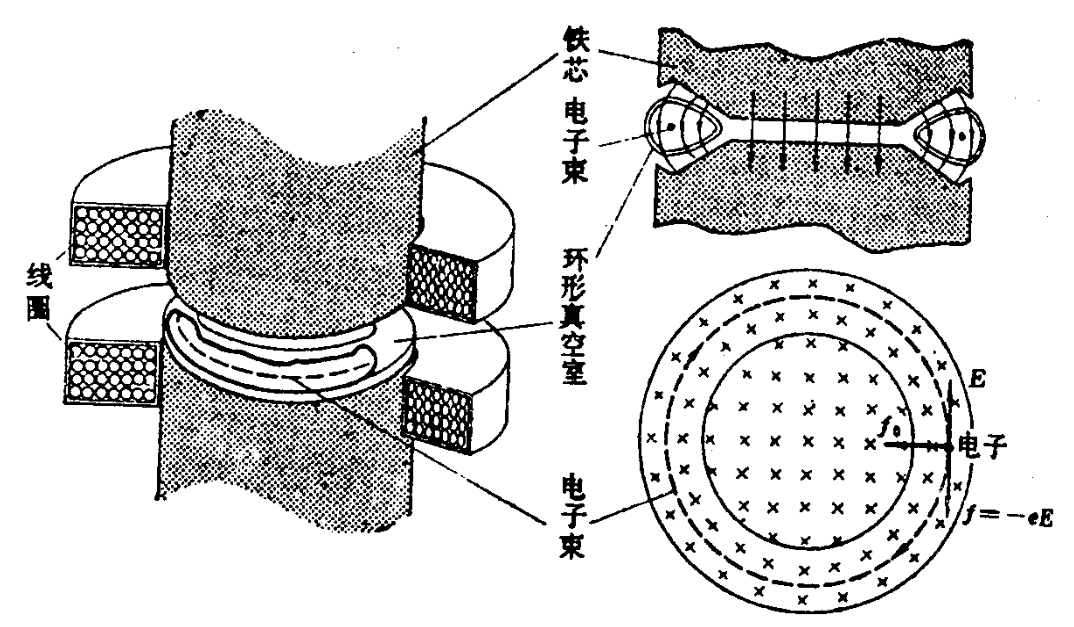
例2 电子感应加速器，如图所示。在圆柱形电磁铁的两磁极间放一环形真空室，当电磁铁线圈中通以交变电流时，在两磁极间产生一圆形区域的交变磁场，交变磁场又在真空室内激发感应电场。真空室内的电子在磁场和电场的作用下做加速圆周运动。求两磁极间的磁场分布。

解： 设电子在半径为 r 的圆周上运动，轨道处的磁感应强度为B_r，轨道圆周内的平均磁感应强度为 $\bar{B}$

根据例1，在半径r的圆周上感应电场强度

$$E_i = \frac{1}{2\pi r}\left|\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}\right|$$

$$\Phi_m = \bar{B}\cdot\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad E_i = \frac{r}{2}\left|\frac{\mathrm{d}\bar{B}}{\mathrm{d}t}\right|$$



切向的感应电场力 $F_\tau = eE_i = \dfrac{er}{2}\left|\dfrac{\mathrm{d}\bar{B}}{\mathrm{d}t}\right|$

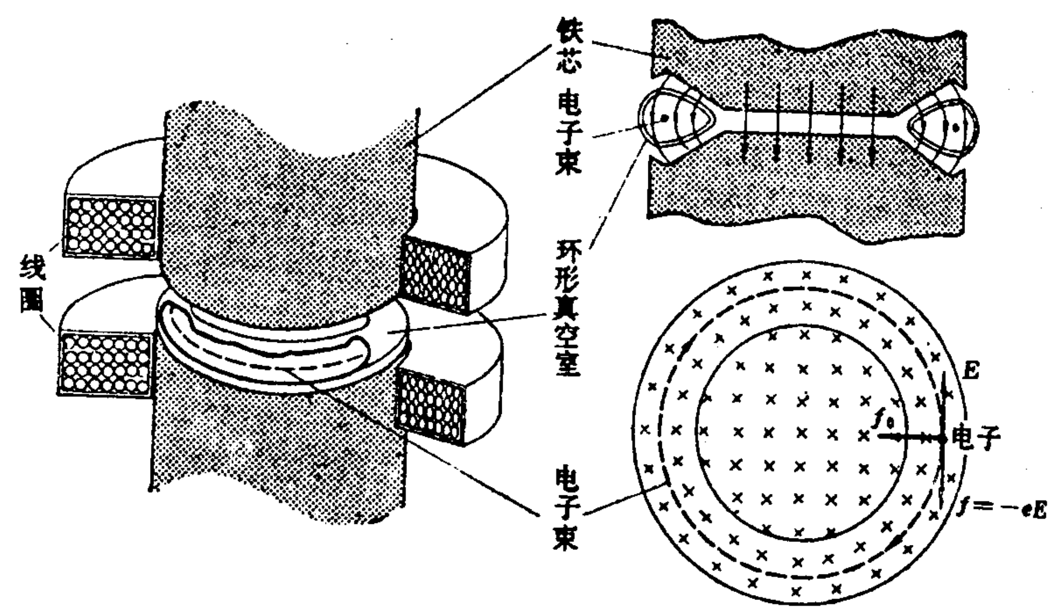
径向的洛伦兹力 $f = q\upsilon B = e\upsilon B_r$

切向: $\dfrac{er}{2}\dfrac{\mathrm{d}\overline{B}}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$ (1)

径向: $e\upsilon B_r = m\dfrac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow erB_r = m\upsilon$

对上式求导: $er\dfrac{\mathrm{d}B_r}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$ (2)

比较(1)和(2)得 $B_r = \dfrac{1}{2}\overline{B}$



即，轨道处的B应等于轨道所围面积内平均磁感应强度的一半，这就是保证电子在真空室的轴线上运动被加速又不改变其轨道半径时磁场的分布。

谢谢大家！