

物理学院



大学物理·热学

主讲教师：李华

第7章 统计物理学初步

7.1 热力学系统的理想模型与描述参量

7.2 平衡态下理想气体压强、温度的微观实质

7.3 自由度；能量按自由度均分定理

7.4 麦克斯韦气体分子速率分布律

7.5 玻尔兹曼分布

7.6 理想气体的平均自由程



7.4 麦克斯韦气体分子速率分布律

本节的研究内容

- 麦克斯韦气体分子速率分布律的导出
- 麦克斯韦气体分子速率分布律的实验验证

7.4.1 麦克斯韦气体分子速率分布律及其导出

理想气体处于温度 T 的平衡态时, 在速率区间 $v \rightarrow v+dv$ 内的分子数为

$$dN = Nf(v)dv$$

其中, 麦克斯韦速率分布函数

$$f(v) \equiv \frac{dN}{N \cdot dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

推证:

$$f(v) \equiv \frac{dN}{N \cdot dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

麦克斯韦速率分布函数——本质是分子数目按速率分布的概率密度函数

思考1: 如何计算概率密度函数?

与分子速率有关的概率: 速率落在区间 $[v, v + dv]$ 内的分子数占总分子数的百分比

把分子的运动分解在直角坐标系的三个轴方向上, 计算速度分量区间上的分子数百分比

设速度分量位于 $v_x \sim v_x + dv_x$, $v_y \sim v_y + dv_y$ 和 $v_z \sim v_z + dv_z$ 中的分子数百分比分别为

$$\frac{dN_{v_x}}{N} = g(v_x)dv_x, \quad \frac{dN_{v_y}}{N} = g(v_y)dv_y, \quad \frac{dN_{v_z}}{N} = g(v_z)dv_z$$

速度位于 $\vec{v} \sim \vec{v} + d\vec{v}$ ，即三个速度分量同时位于 $v_x \sim v_x + dv_x, v_y \sim v_y + dv_y, v_z \sim v_z + dv_z$ 的分子数百分比

$$\frac{dN_{\vec{v}}}{N} = \frac{dN_{v_x}}{N} \cdot \frac{dN_{v_y}}{N} \cdot \frac{dN_{v_z}}{N} = g(v_x)g(v_y)g(v_z)dv_xdv_ydv_z \quad ①$$

由于气体分子处于平衡态，则分子运动各向同性，则 $g(v_x)g(v_y)g(v_z)$ 与速度空间体积微元所处方位无关，**仅与速度的大小（速率）有关**，即

$$g(v_x)g(v_y)g(v_z) \equiv F(v)$$

思考2：如何给出函数 $g(v_x)$ 的具体形式？

方程两侧对 v_x, v_y 和 v_z 求导，再分离变量

求解此方程可以给出函数 $g(v_x)$ 的形式为

$$g(v_x) = C \cdot e^{Av_x^2}$$

思考3：如何求解待定参数C和A？

$$\frac{dN_{\vec{v}}}{N} = C^3 \cdot e^{A(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z = C^3 \cdot e^{Av^2} \cdot v dv d\theta d\varphi$$

考虑到分子运动各向同性，对速度进行角向积分，可得速率位于 $v \sim v + dv$ 的分子数百分比为

$$\frac{dN}{N} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi C^3 \cdot e^{Av^2} \cdot v dv d\theta d\varphi = C^3 \cdot 4\pi v^2 e^{Av^2} dv$$

概率的归一性 ↓ 概率的有穷性

$$C = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \quad A = -\frac{1}{\alpha^2}$$

思考4：如何计算新的待定参数 α ？

利用气体分子速率平方的平均值： $\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$

$$\overline{v^2} = \int v^2 \frac{dN_v}{N} = C^3 \cdot \int_0^{+\infty} v^2 \cdot 4\pi v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv = \frac{3}{2} \alpha^2$$

$$\alpha^2 = \frac{2kT}{m}$$

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

麦克斯韦气体分子速率分布函数

$$f(v) \equiv \frac{dN}{N \cdot dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

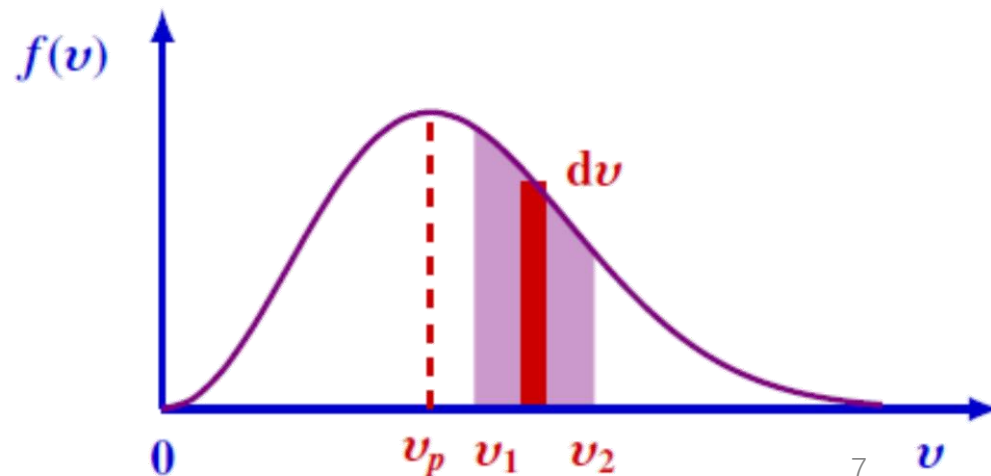
讨论1：麦克斯韦气体分子速率分布函数 $f(v)$ 的物理意义

- 对大量分子：**速率 v 附近单位速率区间**上的气体分子数占总分子数的**百分比**
- 对单个分子：一个分子速率落在**速率 v 附近单位速率区间**上的**概率**

思考5： $f(v)dv$, $Nf(v)dv$, $\frac{dN}{N}$, $\frac{dN}{Ndv}$ 的物理意义是什么？

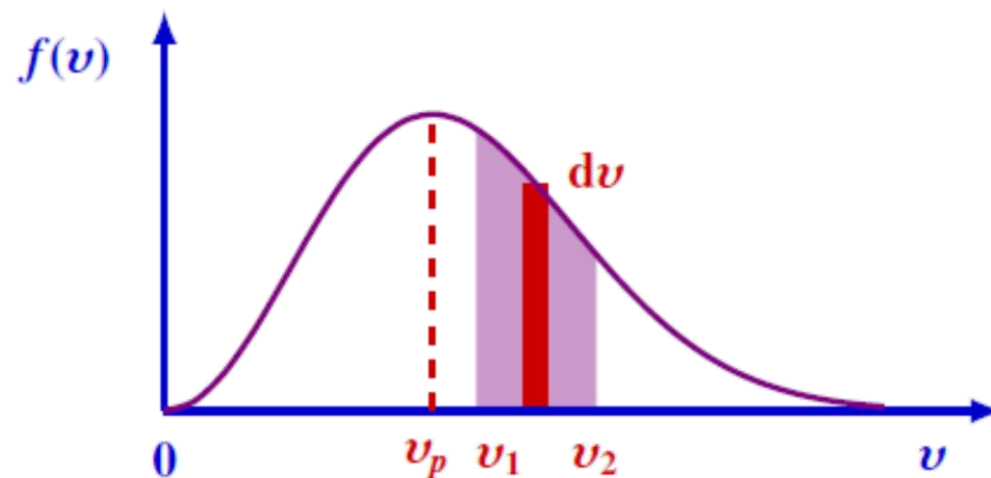
讨论2：麦克斯韦气体分子速率分布函数 $f(v)$ 的特征

- 具有概率密度函数特征：**连续、有限、非负**
- 存在极值：该处单位速率区间上分子数最多



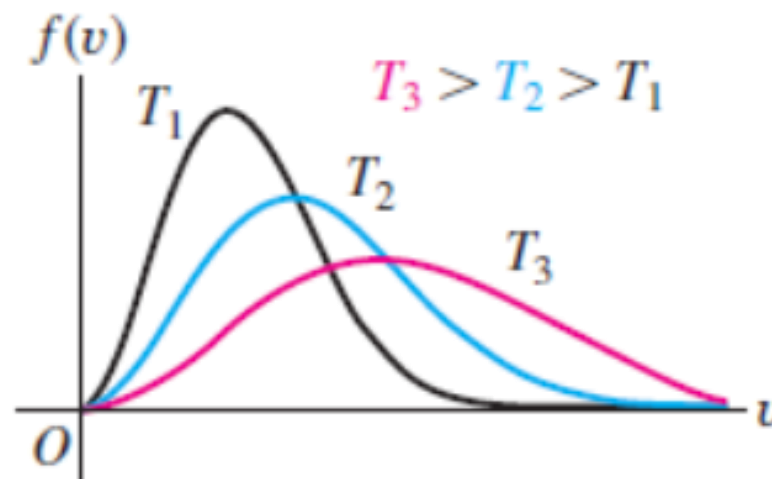
讨论3: $f(v)$ 函数曲线下的面积的物理意义

- 分子速率落在对应区间内的概率
- 全部曲线下的面积为1



讨论4: 麦克斯韦气体分子速率分布律 $f(v)$ 随温度的变化规律

- 温度越高, 曲线峰值越低
- 温度越高, 峰值位置对应速率越大
- 曲线下的面积不变



讨论5：三种统计速率的计算

- 最概然速率 (most probable speed)

$$\left. \begin{aligned} f(v) &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \\ \frac{df(v)}{dv} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 1.414 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

- 平均速率 (average speed)

$$\left. \begin{aligned} f(v) &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \\ \bar{v} &= \frac{\int_0^\infty v \cdot f(v) dv}{\int_0^\infty f(v) dv} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = 1.600 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

- 方均根速率 (root mean square speed)

$$\left. \begin{aligned} f(v) &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \\ v_{\text{rms}} &\equiv \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{\int_0^\infty v^2 \cdot f(v) dv}{\int_0^\infty f(v) dv}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1.732 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

7.4 麦克斯韦气体分子速率分布律

7.4.2 麦克斯韦气体分子速率分布律的实验验证

实验目标：直接或间接验证麦克斯韦气体分子速率分布律



实现方法：分离不同速率分子并测量不同速率段分子数

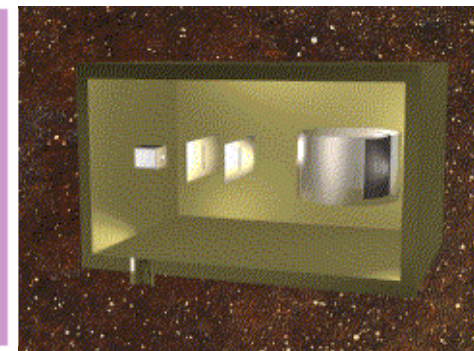
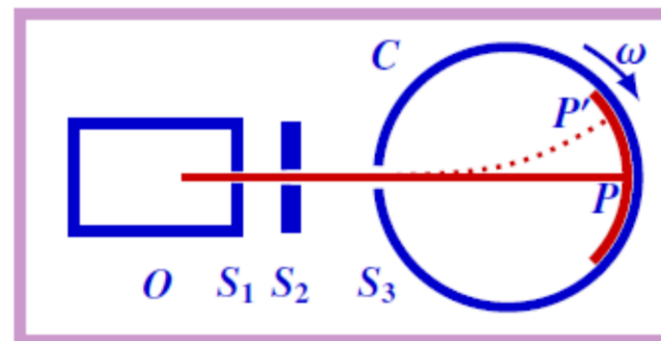


实验前提：获得平衡态

速率选择器

分子射线源

葛正权实验(1934)



实验条件：

O ：铊蒸汽源，蒸汽压 100 Pa ，温度可测

C ：有固定转轴的滚筒，半径 $r = 9.4 \text{ cm}$ ，转速 $\omega = 500 \text{ rev/min}$ ，真空度 10^{-3} Pa

思考7：葛正权实验中什么物理量反映长度速率微元区间上的分子数？

等宽度的窄带微元上沉积的铊原子层厚度

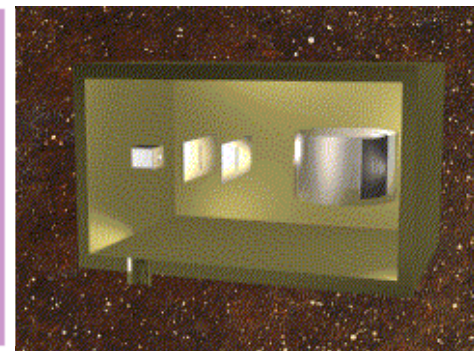
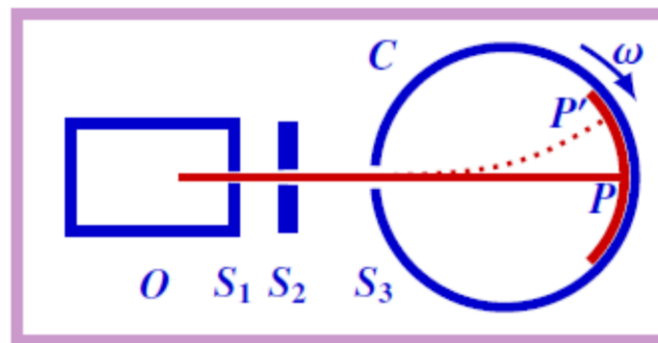
思考8：狭缝出射的分子速率分布律是麦克斯韦速率分布律 $f(v)$ 吗？

不是，是 $g(v_x) (v_x > 0)$

思考9：实验中验证的是 $f(v)$ 吗？

不是，是 $v_x g(v_x)$

葛正权实验(1934)



课后讨论

- 可以用气体代替铯蒸汽源吗？为什么？
- 固定转轴的滚筒半径与转速设计应考虑哪些因素？
- 真空度设计应主要考虑哪些因素？
- 铯蒸汽在 P' 处沉积厚度如何测量？
- 整个实验设计方案可能带来哪些系统误差？



物理学院

谢谢大家!

