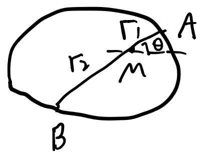
设三维空间中固定一无限长均匀质量椭圆柱，质量密度为ρ，表面方程为

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$

(1) 在 $z=0$ 平面内过$M(x_0,y_0,0)$作一条倾斜角为θ的直线l

与椭圆柱交于两点 A、B，写出l的参数方程，并求$BM-AM$。



(2) 利用(1)的数学基础，解决如下问题：

一质量为m的质点在椭圆柱内运动 $t=0$ 初始位置为(x_0,y_0,z_0)

满足 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$，无初速度，求质点运动方程

参考公式：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{a^2}$ $\qquad$ $\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\theta\, d\theta}{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}=\frac{\pi a^2 b}{a+b}$

解：(1) 设直线l参数方程 $\begin{cases} x=x_0+r\cos\theta & ① \\ y=y_0+r\sin\theta & ② \end{cases}$

代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)r^2+\left(\frac{2x_0\cos\theta}{a^2}+\frac{2y_0\sin\theta}{b^2}\right)r+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0 \qquad ③$$

该方程有两个根，$r_1>0 \qquad r_2<0$

$r(\theta)=r_1 \qquad r(\theta+\pi)=-r_2$

韦达定理 $r_1+r_2=-\dfrac{\frac{2x_0\cos\theta}{a^2}+\frac{2y_0\sin\theta}{b^2}}{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}} \qquad ④$

得 $\quad BM-AM=\dfrac{\frac{2x_0\cos\theta}{a^2}+\frac{2y_0\sin\theta}{b^2}}{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}} \qquad ⑤$

设场点位于$(x_0,y_0,0)$ 由于积分时项以 $x-x_0$, $y-y_0$ 的形式出现，这正是(1)参数方程的形式. 也就是柱坐标.

先求 x方向引力场强度

$$E_x=\iiint_{(V)}\frac{G\rho\, r\,d\theta\, dr\, dz}{r^2+(z-z_0)^2}\cdot\frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}} \qquad ⑥$$

$$=\iint_{(S)}G\rho r^2 d\theta\, dr\cos\theta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(z-z_0)}{(r^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$由\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{r^2} \qquad ⑦$$

$$E_x=\int_0^{2\pi}\int_0^{r(\theta)}2G\rho\, dr\cos\theta\, d\theta=\int_0^{2\pi}2G\rho r(\theta)\cos\theta\, d\theta \qquad ⑧$$

$$=\int_0^{\pi}2G\rho\big(r(\theta)-r(\theta+\pi)\big)\cos\theta\, d\theta \qquad ⑨$$

由(1)问

$$=-4G\rho\int_0^{\pi}\cos\theta\, d\theta\cdot\frac{\frac{x_0\cos\theta}{a^2}+\frac{y_0\sin\theta}{b^2}}{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}} \qquad ⑩$$

显然 $\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta\sin\theta\, d\theta}{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}=0$ 由题中公式 $\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\theta\, d\theta}{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}=\frac{\pi a^2 b}{a+b}$ ⑪

即 $E_x=-\frac{4G\pi\rho b}{a+b}x$ ⑫

同理 $E_y=-\frac{4\pi G\rho a}{a+b}y$ ⑬

⑭

由对称性 $E_z=0$

牛二

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mE_x \\ m\ddot{y} = mE_y \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \quad ⑮$$

代入初始条件，解得

$$\begin{cases} x = x_0 \cos\sqrt{\dfrac{4\pi G\rho b}{a+b}}\,t \\ y = y_0 \cos\sqrt{\dfrac{4\pi G\rho a}{a+b}}\,t \\ z = z_0 \end{cases} \quad ⑯$$

评分标准：

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ 每式2分

⑮ ⑯ 每式6分