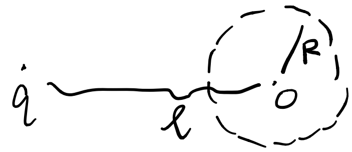
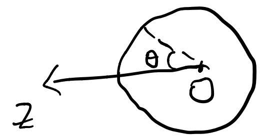
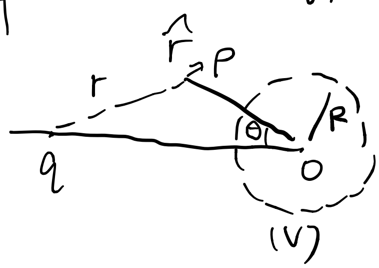
(1) 空间中有一点电荷，带电量为 q. 一球形区域球心距 q 为 l，半径为 R. 求球形区域中的电场能量. $(l > R)$



(2) 一绝缘球表面有电荷分布 $\sigma(\theta) = -\frac{q}{4\pi R^2}\lambda\frac{1-\lambda^2}{(1+\lambda^2-2\lambda\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$，$0<\lambda<1$. R 为绝缘球半径 求这个带电体系相互作用能



解：(1) 设 q 产生电势为 φ. 以 O 为原点建立球坐标系



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} \quad ①$$

$$r = \sqrt{l^2+\rho^2-2l\rho\cos\theta} \quad ②$$

电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ ③

$$W = \iiint_{(V)} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{E}\, dV \quad ④$$

$$= \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\iiint_{(V)}\frac{dV}{(l^2+\rho^2-2l\rho\cos\theta)^2} \quad ⑤$$

$$= \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{\sin\theta\,\rho^2\,d\theta\,d\rho}{(l^2+\rho^2-2l\rho\cos\theta)^2} \quad ⑥$$

$$= \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\int_0^{R}\int_{-1}^{1}\frac{\rho^2\,d\rho\,dx}{(l^2+\rho^2-2l\rho x)^2} \quad ⑦$$

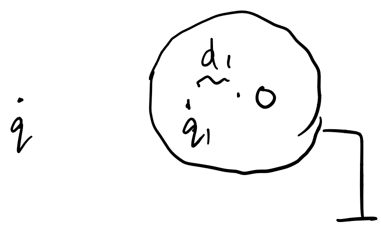
$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^{R}\frac{\rho^2 d\rho}{(l^2-\rho^2)^2} \quad ⑧$$

$$= \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 l}\left[\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{(l-\rho)^2} - \int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{(l+\rho)^2}\right] \qquad ⑨$$

$$W = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{R^2}{l^2-R^2} + \frac{R}{2l}\ln\frac{l-R}{l+R}\right) \qquad ⑩$$

(2) 法一：考虑这样一个系统，一个半径为R的接地导体球外距球心 $\frac{R}{\lambda}$ 处置有一点电荷q

由电像法 $q_1=-\lambda q$ $d_1=\lambda R$ ⑪



易知，该系统在导体球表面电荷分布恰好为题中表达式.

即，该电荷分布在球外产生的电场与像电荷q_1产生的电场相同.

该电荷分布在球内产生的电场与q产生的电场大小相等，方向相反.

对于外部能量，由(1)

$$W_1 = -\frac{q_1^2}{16\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{\lambda^2-1} + \frac{1}{2\lambda}\ln\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) \qquad ⑫$$

同理，对内部能量

$$W_2 = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{(\frac{1}{\lambda})^2-1} + \frac{\lambda}{2}\ln\frac{\frac{1}{\lambda}-1}{\frac{1}{\lambda}+1}\right) \qquad ⑬$$

$$W = W_1 + W_2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}$$ ⑭

法二：⑪ 与法一相同

现在考虑通过某种方式将导体变为绝缘体，然后将电荷q移出

由于外部电场已固定，采用电势能，外力需做功 $W = -q\varphi$ ⑫'

其中 $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q'}{\frac{R}{\lambda} - d_1}$

初始相互作用能 $E_{p0} = \frac{1}{2}q\varphi$ ⑬'

得 $W = W + E_{p0} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}$ ⑭

评分标准：

(1) ②③④⑤⑥⑦ 每式2分（积分过程不同，酌情给分）

①⑧ 每式3分

⑨⑩ 每式4分

(2) ⑪式4分. ⑫⑬或⑫'⑬' 每式4分.

⑭式 2分