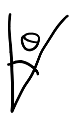
将多米诺骨牌视作高为h，质量为m的均匀光滑细杆（厚度、宽度忽略不计），以光滑铰链连接于地面，所有杆初始时垂直于地面且沿直线等距排列，相邻细杆距离为L且$L \ll h$，杆之间碰撞的恢复系数$e=0$，为方便，假设杆与杆之间只有碰撞的瞬间有作用力，其余忽略不计。假设骨牌无穷多个，求稳定后骨牌推进速度（表达式较为复杂的数字系数可以直接以数值形式表达，保留三位有效数字）

解：假设第n根杆下落时初角速度为ω_n，由于$L \ll h$



$$\sin\theta \simeq \theta \simeq \tan\theta \qquad ①$$

$$\frac{1}{2} mgh\,\theta = \frac{1}{3} mh^2 \ddot{\theta} \qquad ②$$

即 $$\ddot{\theta} - p^2\theta = 0 \qquad p = \sqrt{\frac{3g}{2h}} \qquad ③$$

解得 $$\theta = C_1 \operatorname{ch} pt + C_2 \operatorname{sh} pt \qquad ④$$

初始 $$\theta|_0 = 0 \qquad \dot{\theta}|_0 = \omega_n \qquad ⑤$$

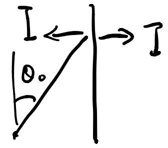
$$\theta = \frac{\omega_n}{p} \operatorname{sh} pt \qquad ⑥$$

碰前瞬间 $$\theta_0 = \frac{L}{h} \qquad ⑦$$

$$t_n = \frac{1}{p} \operatorname{arsh} \frac{pL}{h\omega_n} \qquad ⑧$$

$$\dot{\theta}|_{t_0} = \sqrt{\omega_n^2 + \frac{p^2L^2}{h^2}} \qquad ⑨$$

第n根杆与第n+1根杆碰撞的瞬间，弹力方向水平



设碰后第n根杆角速度为 ω_n'

角动量：$$\dot{\theta}\big|_{t_n} - \omega_n' = \omega_{n+1} \qquad ⑩$$

非弹性：$$h\omega_n' \frac{\sqrt{h^2-L^2}}{h} = \sqrt{h^2-L^2}\,\omega_{n+1} \qquad ⑪$$

$$\Rightarrow \omega_{n+1} = \frac{\sqrt{\omega_n^2+\frac{\rho^2L^2}{h^2}}}{2} \qquad ⑫$$

即 $$\omega_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\omega_n^2 + \frac{1}{4}\frac{\rho^2L^2}{h^2}$$

解数列，得 $$\omega_n = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4^n} + \frac{\rho^2L^2}{3h^2}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)} \qquad ⑬$$

骨牌推进速度 $$v_n = \frac{L}{t_n} \qquad ⑭$$

$$\Rightarrow v_n = \frac{\rho L}{\operatorname{arsh}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)+\frac{\omega_0^2}{4^n}\frac{h^2}{\rho^2L^2}}}} \qquad ⑮$$

令 $n\to+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lambda L\sqrt{\frac{g}{h}} \qquad ⑯$$

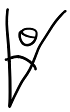
其中 $$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\operatorname{arsh}\sqrt{3}} \approx 0.930$$

评分标准 ② ⑩ ⑪ ⑭ 每式4分

① ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑫ ⑬ ⑮ ⑯ 每式2分

另解：

假设第 n 根杆下落时初角速度为 ω_n，由于 $l \ll h$



$$\sin\theta \simeq \theta \simeq \tan\theta \qquad ①$$

$$\frac{1}{2} m g h \theta = \frac{1}{3} m h^2 \ddot{\theta} \qquad ②$$

即 $$\ddot{\theta} - \rho^2 \theta = 0 \qquad \rho = \sqrt{\frac{3g}{2h}} \qquad ③$$

解得 $$\theta = C_1 e^{\rho t} + C_2 e^{-\rho t} \qquad ④$$

初始 $$\theta\big|_0 = 0 \qquad \dot{\theta}\big|_0 = \omega_n \qquad ⑤$$

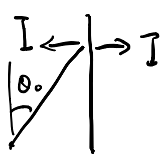
$$\theta = \frac{\omega_n}{2\rho}\left(e^{\rho t} - e^{-\rho t}\right) \qquad ⑥$$

碰前瞬间 $$\theta_0 = \frac{l}{h} \qquad ⑦$$

$$t_n = \frac{1}{\rho} \ln\left(\frac{\rho L}{h\omega_n} + \sqrt{\left(\frac{\rho L}{h\omega_n}\right)^2 + 1}\right) \qquad ⑧$$

$$\dot{\theta}\big|_{t_0} = \sqrt{\omega_n^2 + \frac{\rho^2 L^2}{h^2}} \qquad ⑨$$

第 n 根杆与第 n+1 根杆碰撞的瞬间，弹力方向水平



设碰后第 n 根杆角速度为 ω_n'

角动量： $$\dot{\theta}\big|_{t_n} - \omega_n' = \omega_{n+1} \qquad ⑩$$

非弹性： $$h\omega_n' \frac{\sqrt{h^2 - l^2}}{h} = \sqrt{h^2 - l^2}\, \omega_{n+1} \qquad ⑪$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{n+1} = \frac{\sqrt{\omega_n^2 + \frac{\rho^2 L^2}{h^2}}}{2} \qquad ⑫$$

即 $\omega_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\omega_n^2 + \frac{1}{4}\frac{\rho^2 L^2}{h^2}$

解数列，得 $\omega_n = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4^n} + \frac{\rho^2 L^2}{3h^2}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}$ ⑬

骨牌推进速度 $v_n = \frac{L}{t_n}$ ⑭

$$\Rightarrow v_n = \frac{\rho L}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{1}{3}\left(4-\frac{1}{4^n}\right)+\frac{\omega_0^2}{4^n}\frac{h^2}{\rho^2 L^2}}}{\sqrt{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)+\frac{\omega_0^2}{4^n}\frac{h^2}{\rho^2 L^2}}}\right)}$$

令 $n\to+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lambda L\sqrt{\frac{g}{h}}$ ⑯

其中 $\lambda = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\ln(2+\sqrt{3})} \approx 0.930$

评分标准 ② ⑩ ⑪ ⑭ 每式4分

① ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑫ ⑬ ⑮ ⑯ 每式2分

注：学生可以在⑬式令 $\omega_0=0$，不影响最终结果