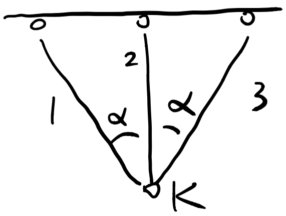
考虑如图所示的三根材料、横截面积相同的轻杆，杨氏模量为E，横截面积为A，杆2竖直，长度为l。杆1，杆3长度相同，与竖直方向夹角为α。初始状态下系统处于原长状态，按图示方式铰接

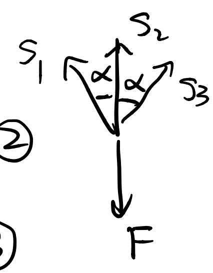


现在K处对系统施加一个竖直向下的力F。假设系统形变量远小于原长，仍处于弹性限度内，求

(1) 三个杆的张力

(2) K的位移

解：假设第i个杆的张力为 S_i $(i=1,2,3)$，伸长量为 Δl_i.



水平方向： $-S_1\sin\alpha + S_3\sin\alpha = 0$ ①

竖直方向： $S_1\cos\alpha + S_2 + S_3\cos\alpha - F = 0$ ②

解得 $S_1 = S_3 = \dfrac{F-S_2}{2\cos\alpha}$ ③

每根杆的伸长量 $\Delta l_1 = \Delta l_3 = \dfrac{S_1 l_1}{EA}$ ④

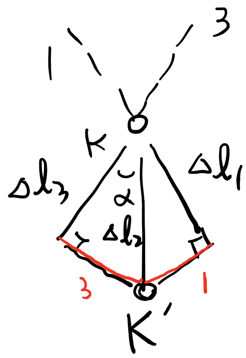
$\Delta l_2 = \dfrac{S_2 l}{EA}$ ⑤

初始状态 $l_1 = \dfrac{l}{\cos\alpha}$ ⑥

相容性条件： 伸长后，三根杆仍交于一点。

由于伸长量很小

由几何关系



1伸长Δl_1，杆1末端轨迹为弧1

3伸长Δl_3，杆3末端轨迹为弧3

弧1.弧3交点必为移动后的K'.

而杆2伸长后也必然位于K'

由于弧1.弧3半径远大于伸长量，近似为直角（中学小量常见近似）

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\alpha \qquad ⑦$$

联立，解得

$$S_2 = \frac{F}{1+2\cos^3\alpha} \qquad ⑧$$

$$S_1 = S_3 = \frac{\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha} F \qquad ⑨$$

K的位移 $V = \Delta l_2 = \frac{Fl}{EA}\cdot\frac{1}{1+2\cos^3\alpha}$ ⑩

注：注意到(1)答案与K无关，若不给出K的提示，这是解决静不定问题的正确方法。例如26届复赛。

评分标准：① ② ⑤ ⑥ ⑧ ⑩ 每式2分

③ ④ ⑨ 每式6分

⑦ 式10分

法二：也可通过求导的方式得到 ⑦

记d为1.2杆固定端间距 $d = l\tan\alpha$ ⑪

由对称性，形变仍满足勾股定理

$$l_1^2 = l^2 + d^2$$ ⑫

求导，并注意到 d 不变

$$l_1 \Delta l_1 = l \cdot \Delta l_2$$ ⑬

即 $\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\alpha$ ⑦

评分标准： ⑪ ⑬ 式各2分

⑫、⑦ 式各3分