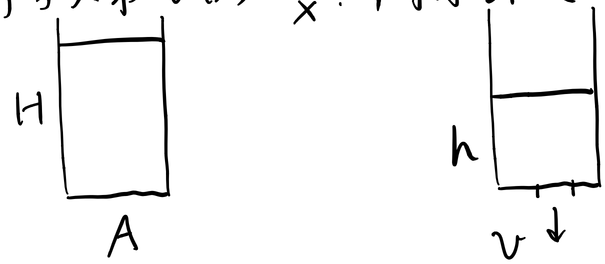
假设试管足够细，底面积为A，初始水面高度为H，试管底部小孔面积为S（S<A）不计一切耗散及表面张力，忽略液体横向流动，认为水不可压缩，求从小孔喷出水的最大流速，记重力加速度为g。

提示：对于形如 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$ 的一阶常系数微分方程，我们可以取 $u(x)=\frac{y}{x}$，并将原方程转换为关于 $u(x)$ 的一阶微分方程求解



解：由于试管足够细，忽略试管内水面横向的运动

只考虑水竖直方向在重力作用下的整体运动

能量守恒 $\rho A H g\cdot\frac{H}{2}=\rho A h\cdot g\cdot\frac{h}{2}+\frac{1}{2}\rho A h\dot{h}^2+\int_0^t\frac{1}{2}\rho S v\,dt\,v^2$ ①

求导 $2Agh\dot{h}+A(\dot{h}^3+2h\dot{h}\ddot{h})+Sv^3=0$ ②

连续性方程 $-A\dot{h}=Sv$ ③

③代入②，得 $h\ddot{h}-\frac{1}{2}p\dot{h}^2+gh=0$ ④

其中 $p=\left(\frac{A}{S}\right)^2-1$

解此方程，并利用初始时 $\dot{h}(0)=0$ ⑤

$$\dot{h}^2=\begin{cases}\frac{2gh}{p-1}\left(1-\left(\frac{h}{H}\right)^{p-1}\right), & p\neq 1 \quad ⑥\\ 2gh\ln\frac{H}{h}, & p=1 \quad ⑦\end{cases}$$

$$v^2=\begin{cases}2gh\frac{p+1}{p-1}\left(1-\left(\frac{h}{H}\right)^{p-1}\right), & p\neq 1 \quad ⑧\\ \ldots\end{cases}$$

$$4gh\ln\frac{H}{h} \quad , p=1$$

$$\frac{dv^2}{dh}=\begin{cases} 2gh\,\frac{p+1}{p-1}\left(1-p\left(\frac{h}{H}\right)^{p-1}\right) & , p\neq 1 \quad ⑩ \\ 4g\left(\ln\frac{H}{h}-1\right) & , p=1 \quad ⑪ \end{cases}$$

极值时
$$\frac{h^*}{H}=\begin{cases} \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} & , p\neq 1 \quad ⑫ \\ \frac{1}{e} & , p=1 \quad ⑬ \end{cases}$$

$$v_{max}^2=\begin{cases} 2gH\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{p+1}{p} & , p\neq 1 \quad ⑭ \\ \frac{4}{e}gH & , p=1 \quad ⑮ \end{cases}$$

评分标准　①、③两式各5分

⑧、⑨两式各4分

②④⑤⑥⑦⑩⑪⑫⑬⑭⑮每式2分

注：也可以不列①直接列出功率表达式②，得满分