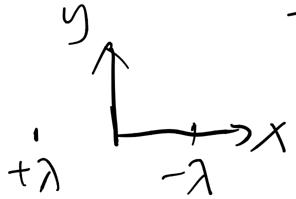
第一部分

在如图所示坐标系中，$(-a,0)$处有一无穷长带$+\lambda$线电荷密度导线垂直于纸面无限延伸。

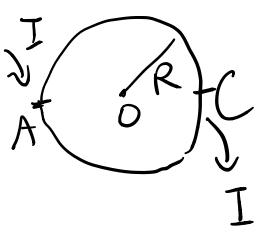


$(+a,0)$有一无穷长带$-\lambda$线电荷密度导线垂直于纸面无限延伸。

请计算这个带电体系电场线的方程，并描绘出其形状

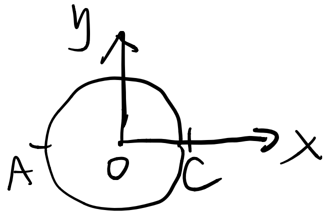
第二部分

如图，有一半径为R的圆形导体盘，厚度忽略不计，电导率为σ。



其直径为AC，圆心为O，现从A点注入电流I，C点输出电流I。

(1) 如图建立坐标系，求出导体盘内电流分布



(2) 现在垂直纸面向外方向加一个在全空间分布的匀强磁场，磁感应强度大小为B，求圆形导体盘受到的安培力。

解：Part I

$$E_x=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2}+\frac{a-x}{(x-a)^2+y^2}\right) \quad ①$$

$$E_y=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y}{(x+a)^2+y^2}-\frac{y}{(x-a)^2+y^2}\right) \quad ②$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{E_x}{E_y} \quad ③$$

积分，得 $x^2+(y-c)^2=c^2+a^2$ ④

$c\in R$ 是一个参数

即电场线形状是经过AC的一族共轴圆

评分标准：①、②③④每式2分

Part II

(1) 设面电流密度为 j.

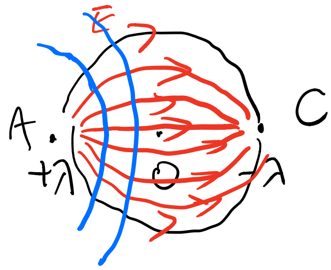
圆盘内 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ ①

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\end{cases}$$ 麦克斯韦方程组

得到 $$\begin{cases}\nabla\times\vec{j}=0 & ②\\ \nabla\cdot\vec{j}=0 & ③\end{cases}$$

边界条件：$j_n=0$ ④

类比两个无穷长导线，$+\lambda$位于A处，$-\lambda$位于C处



在圆形区域内

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{cases}$$

$$E_n = 0$$

而其电场线为过A.C的第一类共轴圆系

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x+R}{(x+R)^2+y^2} + \frac{R-x}{(x-R)^2+y^2}\right) \quad ⑤$$

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y}{(x+R)^2+y^2} - \frac{y}{(x-R)^2+y^2}\right) \quad ⑥$$

故 $$j_x(x,y) = \alpha\left(\frac{x+R}{(x+R)^2+y^2} + \frac{R-x}{(x-R)^2+y^2}\right)$$

$$j_y(x,y) = \alpha\left(\frac{y}{(x+R)^2+y^2} - \frac{y}{(x-R)^2+y^2}\right)$$

现在确定系数 α

$$I = \int_{-R}^{R} j_x(0,y)\,dy$$

$$= 4\alpha R\int_0^R \frac{dy}{R^2+y^2}$$

$$= \alpha\pi$$

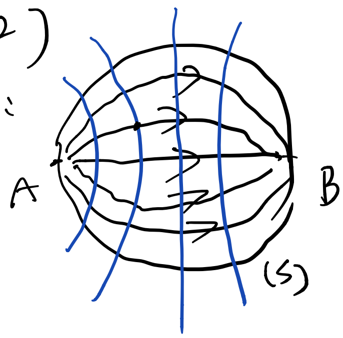
$$\therefore \quad \alpha = \frac{I}{\pi} \quad ⑦$$

$$j_x = \frac{I}{\pi}\left(\frac{x+R}{(x+R)^2+y^2} + \frac{R-x}{(x-R)^2+y^2}\right) \quad (8)$$

$$j_y = \frac{I}{\pi}\left(\frac{y}{(x+R)^2+y^2} + \frac{y}{(x-R)^2+y^2}\right) \quad (9)$$

(2)

法一:



对某一点处的电流微元受安培力

$$d\vec{F} = (j_x, j_y) \times \vec{B}\, dS \quad (10)$$

$$= (j_y, -j_x)\, B\, dS \quad (11)$$

$$F_x = \iint_{(S)} j_y B\, dS = 0 \quad (12)$$

$$F_y = -\iint_{(S)} j_x B\, dS \quad (13)$$

$$= -\frac{IB}{\pi}\iint_{(S)}\left[\frac{R+x}{(R+x)^2+y^2} + \frac{R-x}{(R-x)^2+y^2}\right] dx\,dy$$

$$= -\frac{2IB}{\pi}\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(\frac{R+x}{(R+x)^2+y^2} + \frac{R-x}{(R-x)^2+y^2}\right) dy\,dx \quad (14)$$

$$= -\frac{2IB}{\pi}\int_{-R}^{R}\left(\arctan\sqrt{\frac{R+x}{R-x}} + \arctan\sqrt{\frac{R-x}{R+x}}\right) dx \quad (15)$$

$$= -\frac{2IB}{\pi}\cdot\int_{-R}^{R}\frac{\pi}{2}\, dx \quad (16)$$

$$= -2BIR \quad (17)$$

法二：由电流守恒 $\int_{-\sqrt{R^2-x_0^2}}^{\sqrt{R^2-x_0^2}} j_x(x_0,y)\,dy = I$ ⑭

$$F_y = -\iint j_x B\,dx\,dy$$

$$= -B\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} j_x(x,y)\,dy\,dx \quad ⑮$$

$$= -B\int_{-R}^{R} I\,dx \quad ⑯$$

$$= -2BIR \quad ⑰$$

评分标准

(1) ①②③④ 每式2分

⑦⑧.⑨ 每式2分

(2) ⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰ 每式2分

或⑩⑪⑫⑬ ⑭⑮⑯⑰ 每式2分

注：此题也可改为半圆形，那么这就解释了36届复赛第三题为什么不需要考虑电流分布，直接应用 $F = BIL$