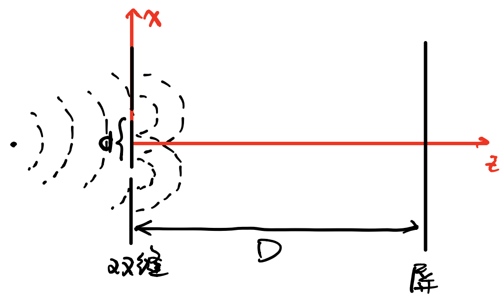
如图．一传统杨氏双缝干涉实验装置，建立如图所示的 $x-z$ 直角坐标系，其中双缝中心位于 $(0,0)$ 处，光屏中心位于 $(0,D)$ 处，缝屏间区域填有折射率分布为 $n(z)=1+\alpha z$ 的介质．求屏上干涉相长、干涉相消点的 x 坐标各满足的关系．（保留至 x 的线性项）

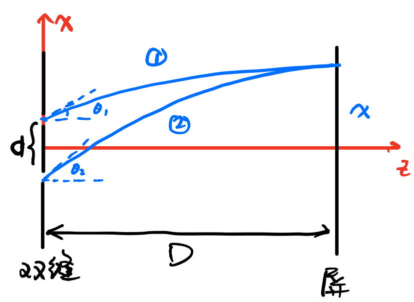


（已知 d. D. $d \ll D$. 考虑傍轴条件）

你可能会用到：

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + x\sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

解：先考虑①光线．



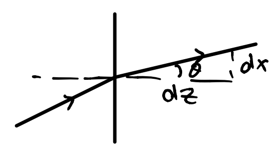
设 $z=0$ 时 $\frac{dx}{dz} = \tan\theta_1$ ①

对任意处．有折射定律 $n(z)\sin\theta = n(0)\sin\theta_1$ ②

$\Rightarrow (1+\alpha z)\sin\theta = \sin\theta_1$

由于干涉傍轴，θ 为小角

故 $\sin\theta \simeq \theta \simeq \tan\theta = \frac{dz}{dx}$ ③



注：该近似在推导弦的波动方程时经常使用．考查学生对物理量大小的感知、理解，化简复杂不必要计算过程的能力．实际上，下面的所有近似都是对 θ 作出的．

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\alpha z}dz = \frac{1}{\sin\theta_1}dx \quad ④$$

积分得 $x_1 = \frac{\sin\theta_1}{\alpha}\ln(1+\alpha z) + \frac{d}{2}$ ⑤ 同理，$x_2 = \frac{\sin\theta_2}{\alpha}\ln(1+\alpha z) - \frac{d}{2}$ ⑥

x 坐标相同的光线发生干涉．

令 $z=D$, $x_1 = x_2 = x$．再利用 $\theta_1, \theta_2 \ll 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\alpha}{\ln(1+\alpha D)}\left(x-\dfrac{d}{2}\right) & ⑦ \\ \theta_2 = \dfrac{\alpha}{\ln(1+\alpha D)}\left(x+\dfrac{d}{2}\right) & ⑧ \end{cases}$$

下面计算两条路径的光程．

对第一条，有

$$L_1 = \int n\,ds = \int (1+\alpha z)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\,dz$$

$$= \int_0^D (1+\alpha z)\cdot\sqrt{1+\frac{\sin^2\theta_1}{(1+\alpha z)^2}}\,dz$$

$$= \int_0^D \sqrt{(1+\alpha z)^2+\sin^2\theta_0}\,dz \qquad ⑨$$

注：注意 αD 并不一定远小于1，不能近似，此题只能对小角近似

作换元 $u=1+\alpha z$，则积分化为 $\int_1^{u_D}\frac{1}{\alpha}\sqrt{1+u^2}\,du$

利用题中公式，有

$$L_1 = \frac{1}{2\alpha}\left[u_D\sqrt{u_D^2+\sin^2\theta_1} - \sqrt{1+\sin^2\theta_1} + \sin^2\theta_1 \ln\frac{u_D+\sqrt{u_D^2+\sin^2\theta_1}}{1+\sqrt{1+\sin^2\theta_1}}\right] \qquad ⑩$$

观察上式，发现在 $\theta_1 \ll 1$ 时，有最后一项（二阶）远小于前面两项（零阶）
但不能在此忽略末项继续计算，原因后面会有讲到。

同理，$L_2 = \frac{1}{2\alpha}\left[u_D\sqrt{u_D^2+\sin^2\theta_2} - \sqrt{1+\sin^2\theta_2} + \sin^2\theta_2 \ln\frac{u_D+\sqrt{u_D^2+\sin^2\theta_2}}{1+\sqrt{1+\sin^2\theta_2}}\right] \qquad ⑪$

考虑到 $\theta_1, \theta_2 \ll 1$，对 L_1，L_2 展开

先尝试到 θ 的二阶，以 L_1 为例。

$$L_1 \approx \frac{1}{2\alpha}\left[u_D^2\Big(1+\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\theta_1^2}{u_D^2}}\Big) - \Big(1+\underbrace{\frac{1}{2}\theta_1^2}\Big) + \underbrace{\theta_1^2 \ln(1+\alpha D)}_{\text{二阶项由它产生}}\right]$$

发现前面两项的二阶项抵消。

必须保留

$$= \frac{1}{2\alpha}\cdot\left[u_D^2-1+\theta_1^2\ln(1+\alpha D)\right] \qquad ⑫$$

$$\Rightarrow L_2 \approx \frac{1}{2\alpha}\left[u_D^2-1+\theta_2^2\ln(1+\alpha D)\right] \qquad ⑬$$

$$\therefore \Delta L = L_2 - L_1 = \frac{1}{2\alpha}\ln(1+\alpha D)(\theta_2^2-\theta_1^2) \qquad ⑭$$

代入 θ_1, θ_2 可得

$$\Delta L = \frac{1}{2\alpha}\ln(1+\alpha D)\,\frac{\alpha^2}{\ln^2(1+\alpha D)}\cdot 2dx$$

$$= \frac{\alpha d}{\ln(1+\alpha D)}\,x \qquad (15)$$

令 $\Delta L = j\lambda$，加强。 $\Delta L = (j+\frac{1}{2})\lambda$，减弱。 (16)

标准： (1) (2) (3) (4) (7) (8) (9) (16) 每式2分

(5) (6) (10) (11) (12) (13) (14) (15) 每式3分

注、此题难点在对傍轴条件、小角近似的理解，
及对非直线的光线、光程的理解