刚体

刘锴昭

2022/6/2

本文的讨论限于三维欧几里得空间。

1 动坐标系中的运动

牛顿力学为讨论运动，引入了质点这个理想模型。质点不足以解释物体的转动现象。为了刻画转动，我们先讨论动坐标系下物体的运动。

1.1 动坐标系

动坐标系，顾名思义，就是坐标系随着时间运动。设 q 是一组通常意义下的坐标，做坐标变换 $Q = Q(q, t)$, 则 Q 就可以被看作是一组相对于 q 的动坐标。这里 Q 对 q 的依赖可以含有时间，这就是所谓的“动”。

我们下面关心的是，在动坐标系下，物体的运动规律。我们采取拉格朗日设原参考系下的运动由拉格朗日函数 $L(q, \dot{q}, t)$ 描述，动坐标系下的运动由新的拉格朗日函数 $L^*(Q, \dot{Q}, t)$ 描述，那么想要描述动坐标系下的运动，就需要确定 L^*。回忆上课讲过的内容，$L^*(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t)$。这就完成了动坐标系下物体运动的刻画。

1.2 运动的仿射几何刻画：旋转与平移

现在我们讨论上述框架的一个特殊情况。设 q 是相对于一个惯性参考系 k 的笛卡尔坐标系，Q 是相对于一个运动参考系 K 的笛卡尔坐标系。那么 Q 相对于 q 就是动坐标。

我们下面给出物理上参考系的相对运动的数学定义。

定义. *设 k 与 K 是两个三维欧几里得仿射空间。一个 K 相对于 k 的运动是一个关于 t 的光滑保距保定向映射*

$$D_t : K \longrightarrow k$$

注. *注意，这里也可以不采用仿射空间的模型，而采用流形的模型。*

例 (平移作为运动)**.** *设 $r(t) \in \mathbb{R}^3$, 则 $C_t : x \mapsto x + r(t)$ 是一个运动。*

例 (旋转作为运动)**.** *设 $R(t) \in SO(3)$, 则 $B_t : x \mapsto R(t)x$ 是一个运动。*

作为运动的刻画，我们有如下一个定理，即所有的运动可以被唯一分解为一个平移复合上一个旋转。细说如下。

定理. *任意一个运动 D_t 可以被唯一地分解为一个平移 $C_t : k \longrightarrow k$ 复合上一个旋转 $B_t : K \longrightarrow k$:*

$$D_t = C_t \circ B_t$$

证明. 构造 $C_t : x \mapsto x + D_t 0, B_t = C_t^{-1} D_t$. 再注意到保距保定向性即得证。

我们称 k 为静止系，K 为运动系。那么由上面的定理，K 相对于 k 的运动可以写为

$$q(t) = D_t Q_t = B_t Q(t) + r(t)$$

如图所示 ♠。

1.3 例子：经典的速度叠加公式

我们下面讨论运动诱导的速度变化关系。这本质就是欧几里得仿射空间作为流形，流形间映射可以诱导切丛间的映射。对上式求导得

$$\dot{q} = \dot{B}Q + B\dot{Q} + \dot{r}$$

为了直观的理解这个公式，我们需要理解这里每一项的物理意义。首先考虑 $\dot{B} = 0$ 的情况，这时 B 是一个常矩阵，不随时间变化

$$\dot{q} = B\dot{Q} + \dot{r}$$

这就是绝对速度等于相对速度加牵连速度。注意常矩阵 B 作用 Q 意味着从一个空间变换到了另一个空间。

1.4 角速度

其次考虑 $\dot{r} = 0, \dot{Q} = 0$ 的情况，不妨进一步设 $r = 0, B = I_{3\times 3}$. 这时

$$\dot{q} = \dot{B}Q$$

从无穷小的角度来观察，$\dot{B} \in \mathfrak{so}(3)$，也就是说 $\dot{B}$ 是一个反对称算子。注意到三维空间反对称算子构成的线性空间维数是 3。考虑叉乘算子 $[\omega, \cdot]$，这个算子是线性并且反对称的，所以其构成的空间是三维空间反对称算子构成的空间的子空间。又因为其维数为 3，所以两者实际上是相同的，这就导致了

$$\exists \omega \text{ , s.t.} \dot{q} = [\omega, q]$$

注意实际上，这是个李代数同构。所以我们以后不仔细区分反对称矩阵的交换子和矢量的叉乘运算。

定义. 在每一个时刻 t，总存在一个 $\omega \in \mathbb{R}^3$，使得 $\dot{q} = \dot{B}Q = [\omega, q]$。上述构造的 ω 被称为瞬时角速度。

注. 注意上述定义中 Q 与 q 的区别。我们在证明中为了方便，令 $B = I_{3\times 3}$，但是它们不属于同一个空间，只是数值相等。从微分流形的角度理解起来不容易产生混淆。

综上上述分析，我们有如下速度变换公式：

定理.

$$v = v' + v_n + v_o$$

其中 v 是绝对速度；$v' = B\dot{Q}$ 是相对速度；$v_o = \dot{r}$ 是平动牵连速度；$v_n = \dot{B}Q = [\omega, q - r]$ 称为转动牵连速度。

具体细节请大家自行验证。

1.5 惯性力

在讨论过速度变换公式以后，我们进一步讨论加速度的变换。在牛顿力学框架下，熟知，加速度中多余的项可以通过等价的引入惯性力来处理。

首先讨论只有平动的情形。

定理. *设动参考系 K 相对于惯性系 k 平动，则在 K 中的运动定律可以写成在惯性系中的运动定律，不过每个质点 m 都额外"受到了"惯性力 $F = -m\ddot{r}$, 其中 $\ddot{r}$ 为 K 相对于 k 的加速度。*

证明. 此时 $Q = q - r(t) \Longrightarrow m\ddot{Q} = m\ddot{q} - mr\ddot{(t)}$

下面讨论旋转动参考系（无平动）。设 $Q(t) \in K$ 是动参考系中一个运动质点的矢径，$q(t) = B_t Q(t) \in k$ 就是惯性系中的矢径，$\Omega \in K$ 是角速度.

定理. *在旋转坐标系中的运动相当于惯性系中的运动，外加三个作用在矢径为 Q 的质点 m 的惯性力：*

(1) 惯性离心力：$-m[\Omega, [\Omega, Q]]$

(2) 科里奥利力：$-2m[\Omega, \dot{Q}]$

(3) 旋转惯性力：$-m[\dot{\Omega}, Q]$

证明. 对于任意 $X \in K$,$\dot{B}X = [\omega, x] = [B\Omega, BX] = B[\Omega, X]$.

由于 $q = BQ$,$\dot{q} = \dot{B}Q + B\dot{Q} = B(\dot{Q} = [\Omega, Q])$. 再对时间求导

$$
\begin{aligned}
\ddot{q} &= \dot{B}(\dot{Q} + [\Omega, Q]) + B(\ddot{Q} + [\dot{\Omega}, Q] + [\Omega, \dot{Q}) \\
&= B([\Omega, \dot{Q} + [\Omega, Q]] + \ddot{Q} + [\dot{\Omega}, Q] + [\Omega, \dot{Q}]) \\
&= B(\ddot{Q} + 2[\Omega, \dot{Q}] + [\Omega, [\Omega, Q]] + [\dot{\Omega}, Q])
\end{aligned}
$$

2 刚体

做完以上的准备工作后，我们终于来到了刚体。刚体这个概念从之前引入的坐标架的相对运动中已经可以寻找到蛛丝马迹了。坐标架相对运动中保距的条件就是刚性的体现。刚体从物理上来理解，就是一个不能形变的质点系。因此在数学上引入如下定义。

定义. *刚体是一个质点系，其中任意两个质点间的距离不能改变。即 $|r_i - r_j| = const.$*

下面考虑刚体的运动。首先，脑海中第一个想到的问题是，如何描述一个刚体在空间中的形态？我们自然考虑刻画刚体的构形空间。

定理. *一个非蜕化的刚体的构型空间是一个 6 维流形，同构于 $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$. 这里非蜕化指的是刚体中有三点不在一条直线上。*

这个定理从三角形的稳定性中就可以看出。

下一步，考虑描述刚体的动力学行为。熟知质点系整体的平动行为等同于其质心的平动行为，刚体只是一个特殊的质点系，所以刚体整体的平动已经被描述清楚了。所以我们着重考虑刚体的转动。这时为了清楚起见，排除平动的影响，我们考虑刚体的定点转动。也就是说，刚体中的某个点 O 是固定不动的。设 k 是静止坐标系，K 是与刚体以相同的方式绕 O 旋转的动坐标系。也就是说，在 K 中，刚体是静止的。我们讨论在 K 中刚体角速度与角动量的关系。

先考虑一个质点的情况，然后对刚体中所有的质点做求和（积分）。这个过程是线性的，所以接下来的证明中，我们不再声明。

首先我们有换系公式

$$q = BQ, l = BL$$

以及由角速度，角动量的定义：

$$v = [\omega, q], l = [q, mv] = m[q, [\omega, q]]$$

利用第一个公式变换到 K 中去

$$L = m[Q, [\Omega, Q]]$$

所以存在一个线性映射把 Ω 映到 M:

$$A : K \longrightarrow K \qquad A\Omega = M$$

注. 注意，这里切空间与切空间的对偶空间都同构于 $\mathbb{R}^3$.

注意这个映射依赖于质点的位置 Q 以及其质量 m。现在我们看看这个映射的性质。实际上，这个映射是一个（1，1）型张量，称为惯量张量。

定理. A 是对称的。

证明. 对于 $\forall X, Y \in K$, 利用 $([a, b], c) = ([c, a], b)$

$$(AX, Y) = m([Q, [X, Q]], Y) = m([Y, Q], [X, Q])$$

这就说明了其关于 X, Y 是对称的。

利用惯量张量可以刻画刚体的动能。在上面的证明中，令 $X = Y = \Omega$ 并注意到 $[\Omega, Q]^2 = V^2 = v^2$，我们得到

定理. 刚体定点转动的动能是相对于定点的角动量的二次型，即

$$T = \frac{1}{2}(A\Omega, \Omega) = \frac{1}{2}(M, \Omega)$$

由于任何实对称矩阵可以正交对角化，所以 A 有三个相互垂直的特征向量。令 $e_1, e_2, e_3 \in K$ 分别为这三个方向的单位向量，I_1, I_2, I_3 为该方向对应的特征值。若取 e_1, e_2, e_3 为基，那么惯量张量就是对角的，相应的公式的形式就会变的很简单。我们简称这个坐标系为刚体系。

$$L_i = I_i \Omega_i$$

$$T = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2)$$

书上接下来讲了刚体绕轴转动时对某个轴的转动惯量，转动惯量的具体计算，以及惯量椭球。这与我们的主线无关，在此略去。

3 欧拉方程与欧拉陀螺

接下来我们介绍三种可积的陀螺。第一种是欧拉陀螺，也就是一个定点在质心，不受外力矩的陀螺。第二种是拉格朗日陀螺，它是一个对称陀螺（即有两个惯量主值相等），质心在对称轴上，在均匀场中定点转动。第三种是 kovalevskaya 陀螺，它也是一个对称陀螺，但是它的第三个主值是两个相等的主值的一半，质心位于过定点且垂直于对称轴的平面上，在均匀场中定点转动 ♠

处理陀螺问题，我们的目标是，创建一个好的架构，使得到的方程结构很好。我们相继会介绍牛顿，拉格朗日，哈密顿架构下如何寻找坐标，使得方程的结构变好。

欧拉陀螺明显是可积的，因为能量与角动量守恒，这就给出了欧拉陀螺全部的守恒量。具体论证欧拉陀螺是一个可积系统的工作我们留到后面进行。

我们将进一步介绍欧拉处理以他自己的名字命名的处理陀螺的方式。从方法论的角度来看，欧拉的方式采取的是牛顿架构。简而言之，欧拉把角动量定理写在了刚体系中，然后希望直接求解该方程。这样的方式可以解析地求解一类特殊的情况，即欧拉陀螺是对称陀螺的情况。

考虑刚体的定点转动，记定点为 O，设 L 是相对于 O 的角动量，Ω 是刚体的角速度，A 是相对于 O 的惯量张量。Ω, L 均属于刚体系 K. 由于刚体不受外力矩，刚体在静止系 k 的角动量 $l = BL$ 守恒，所以在 K 系中，L 的运动受到了限制。欧拉方程便描述了该限制。

定理.

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -[\Omega, L]$$

证明.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \\ &= B\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} + [\omega, l] \\ &= B(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} + [\Omega, L]) \end{aligned}$$

把上述方程写成坐标形式，得

$$\begin{cases} I_1\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t} = (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 \\ I_2\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t} = (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1 \\ I_3\frac{\mathrm{d}\Omega_3}{\mathrm{d}t} = (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 \end{cases}$$

注意到这个方程组虽然形式上很对称，但是是非线性的。不过当 $I_1 = I_2$ 时，它可以解析的求解。大家可以自行尝试。

4 拉格朗日陀螺

接下来我们看第二种可积的陀螺，拉格朗日陀螺。正如名字显示的一样，处理拉格朗日陀螺的经典手段采用的就是拉格朗日创造的架构。所以，我们采取的步骤是，先获得拉格朗日陀螺的拉格朗日函数，然后利用拉格朗日方程来求解该系统。

4.1 欧拉角

1. 绕 z 轴转动 φ,x 轴转动到 N 轴
2. 绕 N 轴转动 θ,z 轴转动到 3 轴
3. 绕 z 轴转动 ψ,N 轴转动到 1 轴

如图所示 ♠

4.2 拉格朗日陀螺

设 l 是质心到定点的距离，显然势能 $U = mgl\cos\theta$.

引理. 当 $\varphi = \psi = 0$ 时，角速度可以用欧拉角在动坐标系下表示为

$$\omega = \dot{\theta}e_1 + (\dot{\varphi}\sin\theta)e_2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)e_3$$

由于我们总是可以选取 $\varphi = \psi = 0$，这样我们就获得了拉格朗日陀螺的动能

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2$$

这样我们就获得了拉格朗日陀螺的拉格朗日函数

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta$$

这时我们就看到有两个循环坐标 φ 和 ψ, 这样我们就得到了两个守恒量。再加上不含时拉格朗日系统普遍具有的守恒量，即能量 $H = T + U$，我们总共获得了三个守恒量。所以可以看出拉格朗日系统是可积的（具体的证明同样留到后面）。下面我们具体求解一下。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = M_z = \dot{\varphi}(I_1 \sin^2\theta + I_3\cos^2\theta) + \dot{\psi} I_3 \cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = M_3 = \dot{\varphi} I_3 \cos\theta + \dot{\psi} I_3$$

$$E = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 + mgl\cos\theta$$

然后从一式，二式中解出 φ, ψ, 代入三式，得到

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3\cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{M_3 - \dot{\varphi} I_3 \cos\theta}{I_3}$$

$$E = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{M_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta + \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}$$

这就把 Lagrange 陀螺约化成了一个一维运动。相应地，可以求解拉格朗日系统。

5 Kovalevskaya 陀螺

Kovalevskaya 是俄罗斯著名女数学家。她提出的 Kovalevskaya 陀螺是比较神奇的一种。

我们使用哈密顿框架来研究 Kovalevskaya 陀螺。那么我们第一步是要构造辛空间。在此之前先快速介绍一些预备知识。

5.1 预备知识

5.1.1 李代数的对偶空间上的泊松结构

给定一个李代数 $\mathfrak{g}$，那么可以在 $\mathfrak{g}^*$ 上诱导一个 Poisson 结构。

对于 $\forall f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*), \xi \in \mathfrak{g}^*$, 相应的 $\mathrm{d}f(\xi)$ 是 $T_\xi \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*$ 上的 1-形式，并且 $\mathrm{d}f(\xi) \in T_\xi^*(\mathfrak{g}^*) = g^{**} \simeq \mathfrak{g}$.

定理. *定义 $\{f, g\}(\xi) = \xi([\mathrm{d}f(\xi), \mathrm{d}g(\xi)])$，则它是 $\mathfrak{g}^*$ 上的泊松括号。*

证明. 反对称性显然。由于 $[,]$ 满足 *Jacobi* 恒等式，$\{,\}$ 也自然满足。

注. 这来源于 *Poisson Lie Group* 理论

5.1.2 Ad, ad, Ad^*, ad^*

设 G 是一个单位元记为 1 的李群。G 在 1 处的切空间 $T_1G = \mathfrak{g}$.

群 G 在自己身上有一个共轭作用：

$$\begin{aligned}\forall g \in G, G &\to G\\ h &\mapsto ghg^{-1}\end{aligned}$$

将上述群作用在 1 处求导就得出了 adjoint action:

$$\begin{aligned}\forall g \in G, Ad_g : g &\to g\\ X &\mapsto Ad_g(X)\end{aligned}$$

换一个角度看，我们刚才其实获得了一个映射

$$\begin{aligned}&G \to End(\mathfrak{g})\\ &g \mapsto Ad_g\end{aligned}$$

对这个映射在 1 处求导就得出了

$$\begin{aligned}&\mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})\\ &X \mapsto ad_X\end{aligned}$$

定理.

$$\begin{aligned}&\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\\ &(X, Y) \mapsto ad_X(Y)\end{aligned}$$

是一个李括号。进而 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，称为 G 的李代数，并且记 $[X, Y] = ad_X(Y)$.

证明. 显然是双线性的。对恒同映射在 *1* 处求导得 $X = ad_X(X) + X$，由 $ad_X(X) = 0$ 得出反对称性。先对等式 $Ad_g Ad_h = Ad_{Ad_g h} Ad_g$ 求导得到 $Ad_g ad_X = ad_{Ad_g X} Ad_g$，再对 $g(ad_Y Z)g^{-1} = ad_{gYg^{-1}} gZg^{-1}$ 求导，得到 *Jacobi* 恒等式。

现在我们来研究对偶空间 $\mathfrak{g}^*$. 对于 $g \in G$, 定义 G 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的 coadjoint action（是一个左作用）

$$\begin{aligned}Ad_g^* : \mathfrak{g}^* &\to \mathfrak{g}^*\\ \xi &\mapsto Ad_g^*(\xi) : Ad_g^*(\xi)(X) = \xi(Ad_{g^{-1}}X)\end{aligned}$$

像之前一样，这给出了一个映射

$$\begin{aligned}&G \to End\mathfrak{g}^*\\ &g \mapsto Ad_g^*\end{aligned}$$

在 1 处微分

$$\begin{aligned}&\mathfrak{g} \to End\mathfrak{g}^*\\ &X \mapsto ad_X^* : ad_X^*\xi(Y) = \xi(ad_{-X}Y) = -\xi([X, Y])\end{aligned}$$

利用上面的定义，我们可以表达出一个函数 $h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 诱导的哈密顿向量场 $X_g(\xi)$。

定理. $X_g(\xi) = -ad^*_{\mathrm{d}g(\xi)}(\xi)$

证明.

$$\begin{aligned}-X_g(\xi)\cdot f = \{f,g\}(\xi) &= \xi([\mathrm{d}f(\xi),\mathrm{d}g(\xi)])\\ &= ad^*_{\mathrm{d}g(\xi)}(\xi)(\mathrm{d}f(\xi))\\ &= \mathrm{d}f(\xi)(ad^*_{\mathrm{d}g(\xi)}(\xi))\end{aligned}$$

5.1.3 辛叶子与 Casmir 函数

一般来说 $\mathfrak{g}^*$ 没有理由是一个辛流形。不过正如课上讲过的一般理论那样，Poisson 流形上有辛叶子。在这里，辛叶子实际上就是 coadjoint orbit。进一步 $\mathfrak{g}^*$ 上的 Casmir 函数限制在其上为常数。

对于任意的 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 我们可以定义一个 g 上的 2-形式：

$$\omega_\xi(X,Y) = \xi([X,Y]) = -ad^*_X\xi(Y)$$

要定义非退化的 2-形式，我们从代数上考虑：由于它是反对称的，所以左根等于右根。它的根基就是那些 X, 使得 $ad^*_X\xi = 0$. 考虑 ξ 的 coadjoint orbit 以及相应的映射 $f_\xi : G \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. 其在 1 处的切映射把 X 映成 $ad^*_X(\xi)$. 所以它的核就是 2-形式 ω_ξ 的根基。因此 ω_ξ 在 $\mathfrak{g}/\ker T_1 f_\xi$ 上定义了一个非退化 2-形式。接下来从几何上考虑，$T_1 f_\xi$ 诱导了一个同构：

$$\mathfrak{g}/\ker T_1 f_\xi \longrightarrow T_\xi(G\cdot\xi)$$

我们让 ξ 在其 coadjoint orbit $\mathcal{O}$ 上变动, 我们就在 $\mathcal{O}$ 上定义了一个非退化 2-形式：

$$\tilde{\omega}_\xi(ad^*_X(\xi), ad^*_Y(\xi)) = \omega_\xi(X,Y)$$

引理.

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}(ad^*_X(\xi), ad^*_Y(\xi), ad^*_Z(\xi)) = 0$$

证明.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{\omega}(ad^*_X(\xi), ad^*_Y(\xi), ad^*_Z(\xi)) &= \mathrm{d}(\omega_\xi(X,Y))(ad^*_Z)\\ &= ad^*_Z\xi([X,Y]) + \xi([ad^*_Z X, Y]) + \xi([X, ad^*_Z Y])\\ &= \xi([[X,Y],Z] + [[Y,Z].X] + [[Z,X],Y])\\ &= 0\end{aligned}$$

所以这个 2-形式是闭的。因此它是 $\mathcal{O}$ 上的一个辛形式。

下面我们需要证明 $\mathcal{O}$ 是泊松流形 $\mathfrak{g}^*$ 上的辛叶子。考虑两个函数 $f,g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$，考虑其泊松括号在 $\mathcal{O}$ 上的限制。这时

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(\xi)(ad^*_Y(\xi)) &= ad^*_Y(\xi)(\mathrm{d}f(\xi))\\ &= \xi([\mathrm{d}f(\xi), Y])\\ &= \omega_\xi(\mathrm{d}f(\xi), Y)\\ &= \tilde{\omega}_\xi(ad^*_{\mathrm{d}f(\xi)}(\xi), ad^*_Y(\xi))\end{aligned}$$

所以相对于 $\tilde{\omega}$ 而言，$f_{|\mathcal{O}}$ 的哈密顿矢量场是 $ad^*_{\mathrm{d}f(\xi)}$. 由此得出这个辛形式诱导得泊松括号，进而得知，$\{f,g\}_{|\mathcal{O}} = \left\{f_{|\mathcal{O}}, g_{|\mathcal{O}}\right\}$. 故它的确是泊松流形上的辛叶子。

最后我们刻画 Casmir 函数。我们要证明 Casmir 函数就是在 Ad^* 作用下不变的函数。

定理. *Casmir* 函数就是在 Ad^* 作用下不变的函数.

证明. 设 $X \in \mathfrak{g}$ 并且 $g_X \in \mathfrak{g}^*$ 是 X 对应的 1-形式。若 f 是 *Casmir* 函数，则

$$0 = \{f, g_X\}(\xi) = \xi([df, X]) = ad_X^*(\xi)(df)$$

所以在 *coadjoint orbit* 上 $df = 0$，即 f 在辛叶子上为常数。另一方面，若 f 在辛叶子上为常数，即 f 是 Ad^* 不变的，依照上面得推理得 $\{f, g_X\} = 0$。利用莱布尼兹律得到 f 与所有多项式泊松交换，进而得到 f 是 *Casmir* 函数。

5.1.4 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}^*$ 的认同

$\mathbb{R}^n$ 与其对偶空间可以通过一个非退化二次型认同。我们在 $\mathbb{R}^n$ 上操作不需要做概念上的区分就是因为这个原因。李代数 $\mathfrak{g}$ 是一个线性空间，已经把一些微分流形的概念直接认同了。我们更进一步，希望将 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}^*$ 认同，这样李代数 $\mathfrak{g}$ 看起来几乎和我们最熟悉的 $\mathbb{R}^n$ 没什么区别了。为了获得这样的认同，只需找到一个非退化对称双线性型。但是，我们希望的认同不是任意的。我们希望将 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}^*$ 认同的同时，也将 adjoint action 与 coadjoint action 认同。综上，我们需要一个非退化对称双线性型，并且满足

$$\langle Ad_g X, Ad_g Y \rangle = \langle X, Y \rangle$$

注意到它等价于

$$\langle X, Ad_{g^{-1}} Y \rangle = \langle Ad_g X, Y \rangle$$

所以映射

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g}^* \\ X &\mapsto \langle X, \cdot \rangle \end{aligned}$$

交换 Ad 与 Ad^* 的作用：

$$Ad_g X \mapsto Ad_g^* \langle X, \cdot \rangle$$

对上述条件求导，得到相应的无穷小条件

$$\langle X, [Y, Z] \rangle = \langle [Z, X], Y \rangle$$

现在假设我们通过某种方式得到了满足上述条件的双线性函数。利用它可以定义一个函数的梯度 ∇f。(就是 $\mathrm{d}f(\xi)$ 的对偶) 之前我们得到了公式 $X_f(\xi) = -ad^*_{\mathrm{d}f(\xi)}(\xi)$, 同样的，这里有公式

定理. $ad_{\nabla_x H} x = [\nabla_x H, x]$

所以哈密顿系统

$$\dot{\xi} = X_H(\xi)$$

也可以通过双线性函数对偶成

$$\dot{x} = [x, \nabla_x H]$$

这样就自然的出现了 Lax Pair 的雏形。

5.2 泊松流形的构造

我们研究的体系是均匀场（设为沿 $-z$ 轴方向）定点转动的刚体。在刚体系中定义这几个参量：记角动量为 L, 角速度为 Ω,z 方向的单位矢量为 n, 刚体质心到定点的矢径为 h。

由欧拉方程，有

$$\begin{cases} \dot{n} = [n, \Omega] \\ \dot{L} = [L, \Omega] + [n, h] \end{cases}$$

目标辛流形或泊松流形上的哈密顿函数应该是能量的形式。即 $H = \frac{1}{2}L \cdot \Omega + n \cdot h.$

观察动力学方程的形式，我们考虑这样一个空间 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{so}(3)[\epsilon]/\epsilon^2 = \mathfrak{g}$

此时，方程组的形式就简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n + \epsilon L) = [n + \epsilon L, \Omega + \epsilon h]$$

$\mathfrak{g}$ 实际上是 $TSO(3)$ 的李代数，或者说，半直积 $SO(3) \rtimes \mathbb{R}^3$ 的李代数。下面我们来说明这一点。

回忆 $SO(3)$ 作用在 $\mathfrak{so}(3)$ 上的伴随映射

$$Ad_g(X) = gXg^{-1} = g(X)$$

那么在我们这里的 $G = SO(3) \rtimes \mathbb{R}^3$ 中，根据

$$(g_1, v_1)(g_2, v_2) = (g_1 g_2, v_1 + g_1 v_2 g_1^{-1})$$

可以求出 Ad 为

$$Ad_{(g,v)}(X, Y) = (g(X), (g(Y) - g(X)(v))) = (gXg^{-1}, (gYg^{-1} - g[X, v]g^{-1}))$$

求导，得到 ad：

$$ad_{w,v}(X, Y) = ([w, X], [w, Y] + [v, X])$$

而对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)[\epsilon]/\epsilon^2$,

$$ad_{w+\epsilon v}(X + \epsilon Y) = [w + \epsilon v, X + \epsilon Y] = [w, X] + \epsilon([w, Y] + [v, X])$$

可以看出它们作为李代数是同构的。

根据预备知识，现在需要找到一个对称非蜕化双线性函数，交换 adjoint action 与 coadjoint action，并且在这个函数诱导的同构下，哈密顿函数的梯度为 $\Omega + \epsilon h$. 可以验证，下面定义的双线性函数满足上述条件。

$$\langle X + \epsilon Y, X' + \epsilon Y' \rangle = XY' + X'Y$$

证明. 双线性性以及非退化性显然。

验证 $\langle [X, Y], Z \rangle = \langle [Z, X], Y \rangle$:

$$[X, Y] = [X_1, Y_1] + \epsilon([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1])$$

$$\begin{aligned} \langle [X, Y], Z \rangle &= ([X_1, Y_1], Z_2) + ([X_1, Y_2], Z_1) + ([X_2, Y_1], Z_2) \\ &= ([Z_1, X_1], Y_2) + ([Z_1, X_2], Y_1) + ([Z_2, X_1], Y_1) \\ &= \langle [Z, X], Y \rangle \end{aligned}$$

计算 H 的梯度：此时需要用到坐标，留在下面利用坐标计算时进行。

我们还需要找到这个系统的 Casmir 函数。沿着 $X+\epsilon Y$ 的 adjoint orbit 明显有 $\|X\|^2, X\cdot Y$ 不变。

下面将上述讨论写成坐标形式。取 $\mathfrak{g}$ 上的坐标

$$\hat{l}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \hat{l}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \hat{l}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\hat{n}_1 = \begin{pmatrix}\epsilon\\0\\0\end{pmatrix} \quad \hat{n}_2 = \begin{pmatrix}0\\\epsilon\\0\end{pmatrix} \quad \hat{n}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\\epsilon\end{pmatrix}$$

这些坐标的物理意义就是：$(l_1, l_2, l_3) = (L\cdot e_1, L\cdot e_2, L\cdot e_3), (n_1, n_2, n_3) = (\hat{z}\cdot e_1, \hat{z}\cdot e_2, \hat{z}\cdot e_3)$

根据非退化双线性函数的表达式可以看出，l_i 与 n_i 互为对偶。这样

$$\nabla_{n+\epsilon L} H = \mathrm{d}_{L+\epsilon n} H = \Omega + \epsilon h$$

满足我们想要的条件。对应于上述李代数的讨论，这些坐标间有这样的泊松括号关系：$\{l_a, l_b\} = \epsilon_{abc} l_c, \{n_a, n_b\} = 0, \{l_a, n_b\} = \epsilon_{abc} n_c$

如果不利用 coadjoint orbit 的理论（因为我们这里只是提了一下，没有证明），直接计算也很容易验证 $n_1^2+n_2^2+n_3^2, n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3$ 是 Casmir 函数。所以我们接下来只需找到两个守恒量。

5.3 Kovalevskaya 陀螺的守恒量

我们重新书写一下 Kovalevskaya 陀螺的哈密顿形式。无量纲化，不妨设 $h = -\hat{n}_1$, 惯量张量为 $\mathrm{diag}(1, 1, \frac{1}{2})$. 这时 $H = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + 2m_3^2 - n_1)$.

定理. *我们有 Kovalevskaya 守恒量 $K = |(m_1+im_2)^2 + (n_1+in_2)^2|^2$. K 与 H 函数无关，并且 $\{K, H\} = 0$.*

大家可以直接计算验证。我们有

定理. *Kovalevskaya 陀螺的一个 Lax Pair 表示：*

$$\begin{aligned}\dot{L} &= [L, M]\\ L &= -A(2\hat{m}^2 + (\gamma\otimes n + n\otimes\gamma))A\\ M &= -A\hat{m}A\end{aligned}$$

其中 $\hat{m} = \begin{pmatrix}0 & m_3 & -m_2\\ -m_3 & 0 & m_1\\ m_2 & -m_1 & 0\end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \gamma = (1,0,0), n = (n_1, n_2, n_3)$

证明. 根据哈密顿函数以及泊松括号之间的关系，我们写出系统的哈密顿方程：

$$\begin{aligned}\dot{m}_1 &= m_2 m_3\\ \dot{m}_2 &= -(m_1 m_3 + \frac{n_3}{2})\\ \dot{m}_3 &= \frac{n_2}{2}\\ \dot{n}_1 &= 2m_3 n_2 - m_2 n_3\\ \dot{n}_2 &= m_1 n_3 - 2m_3 n_1\\ \dot{n}_3 &= m_2 n_1 - m_1 n_2\end{aligned}$$

由于 A 的出现，矩阵只取左上角的 2×2 子矩阵。这时

$$L=\begin{pmatrix}2(m_2^2+m_3^2-n_1) & -2m_1m_2-n_2\\ -2m_1m_2-n_2 & 2(m_1^2+m_3^2)\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}0 & -m_3\\ m_3 & 0\end{pmatrix}$$

$$[L,M]=-2m_3\begin{pmatrix}2m_1m_2+n_2 & m_2^2-m_1^2-n_1\\ m_2^2-m_1^2-n_1 & -(2m_1m_2+n_2)\end{pmatrix}$$

直接计算可以验证这个的确是原系统的一个 *Lax Pair* 表示。

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2m_1m_2+n_2)=-2m_3(m_1^2-m_2^2+n_1)\\ 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1^2+m_3^2)=2m_3(2m_1m_2+n_2)\end{cases}$$

注意到 $\mathrm{tr}(L)=4H, \det L=4H^2-K$，这就得出了 Kovalevskaya 守恒量。